СЕКЦИЯ 4
МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

ПОДСЕКЦИЯ 4.1 МАТЕМАТИКА

УДК 512.5

МОДУЛЯРЛЫ ГРУППАНЫҢ КЕЙБІР ҚАСИЕТТЕРІ

Абильдаева Эльмира Шариповна
elmira2325@gmail.com
Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің Механика – математика факультетінің 2 – курс магистранты, Нұр – Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекші – Науразбекова Алтынгуль Сериковна

Модулярлы группа деп бұл анықтауышы 1–ге тең өлшемі 2×2 болатын бүтінсанды элементті матрицалар группасын айтамыз, яғни

$$SL_2(\boldsymbol{Z}) = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in Z, ad - bc = 1\right\}.$$

Модулярлы группа екі матрицамен туындалады:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ және } \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тұжырым 1. $\Gamma - SL_2(\boldsymbol{Z})$ –тегі $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *және* $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ матрицаларымен туындалған ішкі группа және $\alpha = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\boldsymbol{Z})$ болсын.

a)Егер $c \neq 0$ болса, онда $\alpha\gamma$ матрицасының төменгі қатары (c, d'), мұндағы $|d'| \leq \frac{|c|}{2}$, болатындандай $\gamma \in \Gamma$ матрицасы табылады.

b) Егер $c \neq 0$ болса, онда $\alpha\gamma$ матрицасының төменгі қатары $(0,*)$ болатындандай $\gamma \in \Gamma$ матрицасы табылады.

Дәлелдеуі. a) Барлық $n \in \boldsymbol{Z}$ үшін $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n \in \Gamma$ теңдігі орындалатыны айқын. Шарт бойынша $\alpha = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\boldsymbol{Z})$ және $c = 0$, онда

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b' \\ c & nc + d \end{bmatrix}.$$

Жоғарыдағы $\begin{bmatrix}1 & n\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}^n\in\Gamma$ теңдікте сияқты $\left[\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}^{-1}\right]^n=\begin{bmatrix}1 & -n\\0 & 1\end{bmatrix}\in\Gamma$ екенін көру қиын емес. Осы матрицаның қандай да бір $\alpha\in SL_2(\boldsymbol{Z})$ матрицасымен көбейтіндісін қарастырамыз:

$$\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -n\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & -na+b\\c & -nc+d\end{bmatrix}$$

Алынған матрицаның төменгі қатарында $-nc+d<c$ екенін байқаймыз. Матрицадағы $-nc+d$ өрнегін r −мен алмастырамыз, мұндағы $r-\partial i$ d −ні c −ға бөлгендегі қалдық деп қарастырамыз. Сонда

$$\begin{bmatrix}a & -na+b\\c & -nc+d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b'\\c & r\end{bmatrix}$$

матрицасын аламыз. Егер r<|c|/2 болса, онда тұжырым дәлелденді. Кері жағдайда, $\begin{bmatrix}a & b'\\c & r\end{bmatrix}$ матрицаны $\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}$ матрицасына көбейтеміз

$$\begin{bmatrix}a & b'\\c & r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & -a+b'\\c & -c+r\end{bmatrix}.$$

$-c+r=d'$ өрнегінде $r\geq|c|/2$, онда $\left|d'\right|\leq|c|/2$ нәтижесіне жетеміз, яғни ізделінді $\begin{bmatrix}a & -a+b'\\c & d'\end{bmatrix}$ матрицасын алдық, мұндағы $\left|d'\right|\leq|c|/2$.

b)
$$\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b & -a\\d & -c\end{bmatrix}$$

екенін және тұжырымның 1-ші бөлігін ескерсек, онда келесі матрицаны алуға болады:

$$\begin{bmatrix}a & -a+b'\\c & d'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a' & b'\\d' & c\end{bmatrix}.$$

Егер $\begin{bmatrix}a' & b'\\d' & c\end{bmatrix}$ матрицасына жеткілікті рет осы түрлендірулерді қолдансақ, онда төменгі қатары $(0,*)$ болатын матрицаға келеміз. □

Модулярлы группаның әрбір элементі $\hat{C}=C\bigcup\{\infty\}$ Риман сферасының автоморфизмі (қайтымды өзін–өзі бейнелеу) ретінде келесі бөлшек сызықты түрлендіру арқылы қарастырылады:

$$\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}(\tau)=\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\quad \tau\in\hat{C}.$$

Бұл дегеніміз егер $c \neq 0$ болса, онда $-d/c$ элементі ∞ - ке бейнеленеді және ∞ $a/c-$ ға бейнеленеді, және егер $c = 0$ болса онда ∞ $\infty - ке$ бейнеленеді. Бірлік I матрицасы және оған қарама қарсы –I екеуі де бірдей түрлендіруді береді және жалпы $SL_2(\boldsymbol{Z})$ $-$тегі матрицалардың әрбір $\pm\gamma$ жұбы бір түрлендіруді береді. Модулярлы группамен анықталған түрлендірулер группасы екі матрицалық жасаушымен сипатталатын бейнелеулерден пайда болады:

$$\tau \to \tau + 1 \quad \textit{және} \quad \tau \to -1/\tau.$$

Тұжырым2. $SL_2(\boldsymbol{Z})$ $-$те келесі қасиеттер орындалады:

(a) Барлық $\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\boldsymbol{Z})$ үшін

$$Im\left(\gamma(\tau)\right) = \frac{Im(\tau)}{|c\tau + d|^2}$$

теңдігі орындалады, яғни егер $\gamma \in SL_2(\mathbf{Z})$ және $\tau \in \mathscr{H}$, онда дәл солай $\gamma(\tau) \in \mathscr{H}$ екенін көрсетеді, яғни модулярлы группа жоғарғы жартыжазықтықты өзіне өзін бейнелейді.

Мұндағы жоғарғы жартыжазықтық ретінде келесі жазықты қабылдаймыз:

$$\mathscr{H} = \{\, \tau \in C : \; Im(\tau) > 0\}.$$

(b) Барлық $\gamma, \gamma' \in SL_2(\boldsymbol{Z})$ үшін $(\gamma\gamma')(\tau) = \gamma\left(\gamma'(\tau)\right)$ теңдігі орындалады, мұндағы $\tau \in \mathscr{H}$.

(c) $\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\boldsymbol{Z})$ үшін $d\gamma(\tau)/d\tau = 1/(c\tau + d)^2$теңдігі орындалады.

Дәлелдеуі.

(a) $$\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \; \tau = \alpha + \beta i$$

$$\gamma(\tau) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}(\tau) = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} = \frac{a(\alpha + \beta i) + b}{c(\alpha + \beta i) + d} = \frac{a\alpha + b + a\beta i}{c\alpha + d + c\beta i} = \frac{(a\alpha + b + a\beta i)(c\alpha + d - c\beta i)}{(c\alpha + d + c\beta i)(c\alpha + d - c\beta i)}$$
$$= \frac{ac\alpha^2 + ad\alpha + ac\beta^2 + bc\alpha + bd + ad\beta i - bc\beta i - ac\alpha\beta i + ac\alpha\beta i}{(c\alpha + d)^2 + (c\beta)^2}$$
$$= \frac{ac\alpha^2 + ad\alpha + ac\beta^2 + bc\alpha + bd + \beta i}{|c\tau + d|^2} \Rightarrow Im\big(\gamma(\tau)\big) = \frac{Im(\tau)}{|c\tau + d|^2}$$

$Im(\tau) > 0$ және c және d бір уақытта нөлге тең болмайтын бүтін сандар болғандықтан $|c\tau + d|^2$ мәні нөлден айрықша.

(b) Расында модулярлы группа жоғарғы жартыжазықтықта әрекет етеді, бұл дегеніміз $\mathrm{I}(\tau) = \tau$, мұндағы I – бірлік матрица және $(\gamma\gamma')(\tau) = \gamma\left(\gamma'(\tau)\right)$ барлық $\gamma, \gamma' \in SL_2(\boldsymbol{Z})$ үшін, $\tau \in \mathscr{H}$.

$$\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \; \gamma' = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$$

$$(\gamma\gamma')(\tau) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}(\tau) = \begin{bmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{bmatrix}(\tau) = \frac{(aa' + bc')\tau + ab' + bd'}{(a'c + dc')\tau + cb' + dd'}$$

$$\gamma\left(\gamma'(\tau)\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}(\tau)\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\left(\frac{a'\tau + b'}{c'\tau + d'}\right) = \frac{a\frac{a'\tau + b'}{c'\tau + d'} + b}{c\frac{a'\tau + b'}{c'\tau + d'} + d} = \frac{\frac{aa'\tau + ab' + bc'\tau + bd'}{c'\tau + d'}}{\frac{a'c\tau + cb' + c'd\tau + dd'}{c'\tau + d'}}$$

$$= \frac{(aa' + bc')\tau + ab' + bd'}{(a'c + dc')\tau + cb' + dd'}$$

Демек $(\gamma\gamma')(\tau) = \gamma\left(\gamma'(\tau)\right)$.

(c) Сондай–ақ $\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\boldsymbol{Z})$ үшін $d\gamma(\tau)/d\tau = 1/(c\tau + d)^2$ екенін көрсетуімізге болады:

$$\frac{d\gamma(\tau)}{d\tau} = \frac{d\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)}{d\tau} = \frac{\frac{d(a\tau + b)(c\tau + d) - (a\tau + b)d(c\tau + d)}{(c\tau + d)^2}}{d\tau}$$

$$= \frac{\frac{ad\tau(c\tau + d) - (a\tau + b)cd\tau}{(c\tau + d)^2}}{d\tau} = \frac{\frac{ac\tau d\tau + add\tau - ac\tau d\tau - cbd\tau}{(c\tau + d)^2}}{d\tau} = \frac{\frac{(ad - cb)d\tau}{(c\tau + d)^2}}{d\tau}$$

$$= \frac{\frac{d\tau}{(c\tau + d)^2}}{d\tau} = \frac{1}{(c\tau + d)^2}. \square$$

Пайдаланған дереккөздер тізімі

1. Fred Diamond, Jerry Shurman. A First Course in Modular Forms.

УДК 57

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ДРОБНО-МАКСИМАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА В ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА ОРЛИЧА-МОРРИ

Адилханов Айдос

adilkhanov_kz@mail.ru

Докторант ЕНУ им.Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан

Научный руководитель - Н.А.Бокаев

В данной работе приводятся достаточные условия ограниченности максимального и дробно-максимального оператора в глобальных пространствах Орлича-Морри.

Максимальный оператор Харди-Литтлвуда определяется равенством

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_B |f(y)| dy.$$