УДК 517.518

СОБОЛЕВ - МОРРИ КЕҢІСТІГІНІҢ БІР ЕНГІЗУ ТЕОРЕМАСЫ

Байбуриев Бекзод Досыбекұлы

baiburiev01@mail.ru

Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ Теоретикалық математика және ғылыми есептеу институтының магистранты, Астана, Қазақстан

Ғылыми жетекшісі – М. Жайнибекова

Нақты көп айнымалы диференциалдық функциялар кеңістігіндегі енгізу теориясы С.Л. Соболевтің еңбектерінің қортындылары ретінде, 30-шы жылдардағы математиканың жаңа бағыты болып қалыптасты, кейін оны монография [1] ретінде басып шығарды.

С.Л.Соболевтың классикалық теоремасы тұжырымдауы бойынша, Соболев $W_p^r\left(0,1\right)^s$ $\left(rp \neq s\right)$ классын $\left(0,1\right)^s$-дегі бірқалыпты үзіліссіз $C\left(0,1\right)^s$ функциялар кеңістігіне енгізу үшін $rp > s$ теңсіздігінің орындалуы қажетті және жеткілікті.

Осыған байланысты $rp \leq s$ болған жағдайда $C\left(0,1\right)^s$ кеңістігіне енгізу орындалу үшін r рет дифференциалданатын функция туындылары $L^p\left(0,1\right)^s$ кеңістігінде жататындай неғұрлым тар кластарға көшуі функционалдық кеңістіктің енгізу теориясы мен оның қолдануларында қызығушылық тудыратын сұрақ болып есептеледі.

Бұл мақала Лебег нормасы Морридің [2] жартылай нормасына ауыстырылған жағдайдағы осы жалпы есептің кейбір дербес жағдайларын шешуге арналған .

Мақала нәтижесін тұжырымдау үшін ([3-4] – тегі белгілеулер мен символдарды сақтай отырып) сәйкес анықтамалар мен белгілеулерді келтірейік.

Айталық бүтін, оң s және $r_j\ \left(j=1,\ldots,s\right)$, $\aleph_j\left(j=1,\ldots,s\right)$ - оң, $1 \leq p < \infty$ және $\left(0,1\right]$ аралығында оң, кемімейтін $\Phi\left(\delta\right)$ функциясы берілсін.

$T_{\aleph_1,\ldots,\aleph_s}$ параллелеппидтер жиынын төмендегідей етіп анықтайық,

$$T_{\aleph} = T_{\aleph_1,\ldots,\aleph_s} = \left\{ I_{\vartheta^{\aleph}}\left(y\right) = \prod_{j=1}^{s}\left[y_j - \frac{1}{2}\vartheta^{\aleph_j}, y_j + \frac{1}{2}\vartheta^{\aleph_j} \right] \quad 0 < \vartheta \leq 1 \right\} \subset$$

$$\subset \left[0,1\right]^s : 0 < y_j < 1\left(j=1,\ldots,s\right),$$

және оған сәйкес келетін норма былай анықталсын

$$\left\|\varphi\right\|_{p,\Phi,T_{\aleph}} \equiv \left\|\varphi\right\|_{p,\Phi,T_{\aleph_1,\ldots,\aleph_s}} \equiv \left\|\varphi\right\|_{p,\Phi,\aleph_1,\ldots,\aleph_s} \equiv \sup_{E\in T_{\aleph}} \frac{1}{\Phi\left(\left|\mathrm{E}\right|\right)}\left(\int_E \left|\varphi\left(x\right)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

мұндағы $\left|\mathrm{E}\right|$ саны E жиынының лебег өлшемі.

Онда Соболев-Морри $W^{r_1,\dots,r_s}_{p,\Phi,\aleph_1,\dots,\aleph_s}(0,1)^s$ класы деп, $[0,1]^s$-де өлшемді болып, әрқайсысы үшін мына шама ақырлы

$$\|f\|_{W^{r_1,\dots,r_s}_{p,\Phi,\aleph_1,\dots,\aleph_s}} \equiv \|f\|_{p,\Phi,\aleph_1,\dots,\aleph_s} + \sum_{j=1}^{s}\left\|D^{r_j}_{x_j} f\right\|_{p,\Phi,\aleph_1,\dots,\aleph_s},$$

болатын $f(x)$ функциялар жиынын айтамыз, мұндағы $D^{r_j}_{x_j} f$ - x_j аргументі бойынша r_j -ші ретті туындысы.

$W^{r_1,\dots,r_s}_{p,\Phi,\aleph_1,\dots,\aleph_s}(0,1)^s$ классын $r_1=\dots=r_s=r, \aleph_1=\dots=\aleph_s$ болған жағдайда $W^{r}_{p,\Phi,T}(0,1)^s$ арқылы белгілейміз, ал мұндағы T параллелепипеді $(0,1)^s$ жиынындағы қабырғалары координат осьтеріне параллель s өлшемді кубтар жиынтығы болады. Соболев – Морри класының анықтамасындағы $\Phi(\delta)\equiv 1$ үшін $W^{r_1,\dots,r_s}_{p,\Phi,\aleph_1,\dots,\aleph_s} \equiv W^{r_1,\dots,r_s}_{p,1,\aleph_1,\dots,\aleph_s}$ кластары сәйкесінше $W^{r_1,\dots,r_s}_{p}(0,1)^s$ Соболевтің кеңістіктеріне айналатыны белгілі. Мұндағы $W^{r}_{p,\Phi,T}$ класының анықтамасындағы $\Phi(\delta)$ функциясы дәрежелік функция болған жағдайды ең алғаш рет Морри [2] зерттеген еді.

Сондай-ақ $c(\alpha,\beta,\dots)$ арқылы кейбір оң шамаларды, әртүрлі, жалпы айтқанда түрлі формулалар мен жақшаларда көрсетілген параметрлерге тәуелділерді ғана белгілейтін боламыз.

Егер $\{A_N\}_{N=1}^{\infty}$ - оң сандар тізбегі және $\{B_N\}_{N=1}^{\infty}$ -кездейсоқ сандық тізбек, онда $B_N \underset{\alpha,\beta,\dots}{<<} A_N$ түріндегі жазу $c(\alpha,\beta,\dots)$ тұрақтысы табылып, әрбір бүтін оң N үшін $|B_N| \le c(\alpha,\beta,\dots) A_N$ теңсіздігі орыналады дегенді білдереді. $A_N \underset{\alpha,\beta,\dots}{\succ\prec} B_N$ түріндегі жазу $A_N \underset{\alpha,\beta,\dots}{<<} B_N$ және $B_N \underset{\alpha,\beta,\dots}{<<} A_N$ қатынастарының біруақытта тең шамалы орындалуын білдіреді. Және де $\aleph_1>0,\dots,\aleph_s>0$ үшін $|\aleph| = \aleph_1 + \dots \aleph_s$ түрде жазамыз. Осы бағыттағы зерттеулер анизотропты Соболев-Морри кеңістіктігінің бірқалыпты үзіліссіз функциялар класына енгізудің критерийі түрінде келесі жұмыстарда жалғасын тапқан.

Теорема А. ([5]) Айталық $s, r_1,\dots,r_s$ оң бүтін сандары , $\aleph_j\,(j=1,\dots,s)$ оң саны, $1 \le p < \infty$ нақты саны және $(0,1]$ аралығында кемімейтін $\Phi(2\delta) << \Phi(\delta)$ шартын қанағаттандыратын $\Phi(\delta)$ функциясы берілсін. Онда

$$W^{r_1,\dots,r_s}_{p,\Phi,\aleph_1,\dots,\aleph_s}(0,1)^s \subset C(0,1)^s$$

енгізуі орынды болу үшін

$$\int_0^1 \delta^{\left(1-\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{r_j}\right)\frac{\max\limits_{\tau=1,\dots,s} r_\tau \aleph_\tau}{|\aleph|}} \Phi(\delta)\frac{d\delta}{\delta} < +\infty \qquad (*)$$

болуы жеткілікті, ал мына шарттар

$$\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{r_j} \neq 1 \text{ және } r_\tau \aleph_\tau = 1\left(\tau = 1,\dots,s\right)$$

және

$$\eta\Phi\left(\delta\right) << \delta\,\Phi\left(\eta\right)\left(0<\eta<\delta<1\right)$$

болғанда (*) шартының орындалуы қажетті.

Егер $r_1 = \dots = r_s = r,\ \aleph_1 = \dots = \aleph_s,\ T_\aleph = T$ болса, онда бұл теорема В теоремасына келеді.

Теорема В (Г.Т.Джумакаева [4]). $r\,p \neq$ орындалатын $p\ \left(1 \le p < \infty\right),\ s$ және $r\left(r, s = 1,2,\dots\right)$ сандары берілсін. $\left(0,1\right]$ аралығында оң, өспелі $\Phi\left(\delta\right)$ функциясы мен кейбір $C > 0$ үшін келесі теңсіздік орындалсын

$$\frac{\Phi^p\left(\delta\right)}{\delta} \le C\frac{\Phi^p\left(\eta\right)}{\eta}\left(0<\eta<\delta<1\right).$$

Онда мына

$$W_{p,\Phi,T}^r\left(0,1\right)^s \subset C\left(0,1\right)^s \Leftrightarrow \int_0^1 \delta^{\frac{r}{s}-\frac{1}{p}} \cdot \Phi(\delta)\frac{d\delta}{\delta} < +\infty.$$

Бұл нәтиже жоғарыда көрсетілген есепті енгізуді тар кластарға көшуді қамтамасыз ететінін көрсетеді. Басқаша айтқанда, В теоремасын $rp < s$ үшін $W_p^r\left(0,1\right)^s \subset C\left(0,1\right)^s$ Соболевтің енгізу теоремасы орындалмаған жағдайы үшін, ары қарай күшейтуге болмайтын таралуы деп түсінуге болады.

1938 жылғы Ч. Морридің [2] зерттеулері Греко, Ниренберг, Компанато, Бароцци, В.П. Ильин, Росс, Ю.В. Нетрусов және т.б ғалымдардың еңбектерінде жалғасын тапты ([3], §27 қараңыз).

XX ғасыр 80 жылдардың басында К.Ж. Наурызбаев және Г.Т. Джумакаева $\Phi\left(\delta\right) = \delta^\beta$ функциясының дәрежелік жағдайынан жалпы жағдайға көшуге қадам жасады ([4, 6-8] мысалында қараңыз).

Одан кейін алынған нәтижелерге [3, 133-134 бет] - де қысқаша шолу берілген. С.И.Похожаев [12]

$$W_p^r(G) \subset L_\Phi(G), \quad \Phi(t) = e^{|t|^{p'}} - 1,$$

енгізуін дәлелді. Мұндағы $L_\Phi(G)$ арқылы Φ -тегі N- функциялы Орлич кеңістігі белгіленген. Сонымен қатар С.И.Похожаев [9,10], $\forall\varepsilon > 0$ үшін Φ - те p'- ты $p'+\varepsilon$ - ға алмастыру жасаса мұндай енгізу орындалмайтынын, егер $\forall\varepsilon \in (0, p')$ үшін Φ - те p'- ты $p'+\varepsilon$ - ға алмастыру жасаса бұл енгізу орындалатынын көрсетті.

Орлич кеңістігіне енгізулер қарастырылған Трудингер [11], Стампак [12], Ю.А.Брудный [13], Мозер [14], Эванс и Эдмундтың [15] жұмыстарын атап өтейік. Сонымен қатар аталғандардың соңғысында $\Phi(t) = |t|^p e^{|t|^{p'}}, \quad p = n/l > 1.$ болғандағы енгізудің үзіліссіздігі дәлелденген.

Ханссон [16] және Ю.В.Нетрусов [17] жұмыстарында жоғарыда аталған кеңістіктің Лоренц кеңістігіне енгізуі зерттелген. Ю.В.Нетрусов жұмысында белгілі бір мағынада $W_p^l(E^n),\ p = n/l > 1,$ кеңістігін нормасы

$$\|f\| = \left(\int_0^\infty \left(f^*(t)/(1+|\ln t|)\right)^p \frac{dt}{t}\right)^{1/p}$$ мұндағы f^* - $|f|$ функциясының өспейтін алмастыруы

шамасына эквивалентті болатын Лоренц кеңістігіне жақсармайтын енгізуі дәлелденген. $D^{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)}F$ арқылы $f^{(\alpha_1,\dots\alpha_s)}(x)$ жалпыланған туындылары F классында жататын $[0,1]^s$ s - өлшемді бірлік кубында анықталған барлық $f(x) = f(x_1,\dots,x_s)$ функцияларынан құралған жиынды белгілейік. Бұл жұмыста осы бағытта жүргізілген зерттеулердің жалғасы болып табылатын келесі теорема дәлелденген.

Теорема . *Айталық* $s\ (s = 1,2,\dots)$, $\alpha_j\ (j = 1,\dots,s)$ - *теріс емес бүтін,* $r_j\ (j = 1,\dots,s)$- *оң бүтін,* $\aleph_j\ (j = 1,\dots,s)$ - *оң және* $1 \le p < \infty$ *сандары берілсін. Сонымен қатар* $[0,1]$ аралығында кемімейтін $\Phi(\delta)$ функциясы берілсін.

Сонда

$$\int_{+0} \delta^{\frac{\max\limits_{\tau=1,\dots,s} r_\tau \aleph_\tau}{\sum\limits_{t=1}^{s} \aleph_t}\left[1 - \sum\limits_{j=1}^{s}\left(\alpha_j + \frac{1}{p}\right)\frac{1}{r_j}\right]} \Phi(\delta)\frac{d\delta}{\delta} < +\infty$$

шартынан

$$W^{r_1,\dots r_s}_{p,\Phi,T_{\mathrm{N}_1,\dots,\mathrm{N}_s}}(0,1)^s \subset D^{(\alpha_1,\dots\alpha_s)}C(0,1)^s$$

енгізуі шығады. Бұдан $\Phi(\delta)$ функциясы мына түрде болғанда $\Phi(\delta) = \delta^{\frac{a}{p}}$ келесі салдар шығады

Салдар (В.П. Ильин [18]). *Егер* $a > 0$ *болғанда*

$$1-\sum_{j=1}^{s}\frac{\alpha_j}{r_j}-\left(\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{r_j}-\frac{\sum_{t=1}^{s}\aleph_t}{\max\limits_{\tau=1,\dots,s} r_\tau\aleph_\tau}\cdot a\right)\frac{1}{p}>0,$$

теңсіздігі орындалса, онда $\Phi(\delta)=\delta^{\frac{a}{p}}$ *болғанда*

$$W^{r_1,\dots r_s}_{p;\delta^{\frac{a}{p}};\aleph_1,\dots\aleph_s}(0,1)^s \subset D^{(\alpha_1,\dots\alpha_s)}C(0,1)^s.$$

енгізуі орындалады.

Пайдаланылған әдебиеттер

1. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике, – М.: Наука, 1988. – 336 с.
2. Morrey C.B. On the solution of quasi-linear elliptic partial differential equations, Trans. Amer. Math. Soc., 1938. №43. 126-166.
3. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения, – М.: Наука, 1996. – 472 с.
4. Джумакаева Г.Т. Критерий вложения класса Соболева - Морри $\mathrm{W}^{1}_{\mathrm{p},\Phi}$ в пространство С, Матем. заметки. – 1985. – Т. 37. – № 3. – С. 399-406.
5. Н. Темиргалиев, М. А. Жайнибекова, Г. Т. Джумакаева, “Критерии вложения классов типа Морри”, Изв. вузов. Матем., 2015, № 5, 80–85.
6. Джумакаева Г.Т., Наурызбаев К.Ж. О пространствах Лебега – Морри, Изв. АН КазССР. Сер. физ.-матем. 1982. № 5. С. 7-12 .
7. Джумакаева Г.Т. О непрерывности гладких в смешанной норме функций // Тезисы VII Межвузовской научной конференции по математике и механике. – Караганда, 1981. – С. 19-20.
8. Джумакаева Г.Т. Об одной комбинации теорем вложения С.М. Никольского и Ч. Морри // Методы исследования операторных уравнений. –Ярославль, 1982. – С. 53-66.
9. Соболев С. Л. Об одной теореме функционального анализа.— Мат. сб., 1938, т. 4, № 3, 471—497.
10. Похожаев С. И. О теореме вложения С. Л. Соболева в случае $pl=n$ // Докл. научно-техн. конф. МЭИ. – М. – 1965. – С. 158-170.
11. Трудингер (Trudinger N. S.) On imbedings into Orlicz spaces and some applications // J. Math. Mech. – 1967. – V. 17, № 5. – P. 473-483.
12. . Scand. – 1979. – V. 45, № 1. – P. 77-102.
13. Нетрусов Ю. В. Теоремы вложения пространств $H_p^{w,k}$ и $H_p^{s,w,h}$ // Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР. – 1987. Стампаккья (Stampacchia G.) The spaces $e^{(p,\lambda)},\Re^{(p,\lambda)}$ and interpolation // Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa. Ser. III. – 1965. – V. 19, Fasc. 3. – P. 443-462.
14. Брудный Ю. А. Пространства, определяемые с помощью локальных приближений // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1971. – Т. 24. – С. 69-132.
15. Мозер (Moser J.) A sharp form of an inequality by N. Trudinger // Indiana univ. math. J. - 1971. V. 20, № 11. – P. 1077-1092.

16. Эванс, Эдмундс (Edmunds D. E., Evans W. D.) Orlicz and Sobolev spaces on unbounded domains // Proc. roy. soc. London. Ser. A. – 1975. – V. 342. – P. 373-400.
17. Хансон (Hansson K.) Imbedding theorems of Sobolev type in potential theory // Math – Тю 159. – С. 83-102.
18. Ильин В.П. О некоторых свойствах функций из пространств $W^{l}_{p,a,\aleph}(\Re)$, Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР. – 1971. – Т. 23. – С. 33-40.

УДК 517.5

КӨБЕЙТКІШТЕР КЛАСЫНЫҢ ЛОРЕНЦ КЕҢІСТІГІМЕН БАЙЛАНЫСЫ

Бекежанова Айдана Коргамбаевна
aidana.bekejanova@mail.ru
Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ магистранты, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекші - Н.Т. Тлеуханова

Мақала L_{pq} Лоренц кеңістігіндегі көбейткіштердің тригонометриялық проблемасын зерттеуге арналған.

Көбейткіштердің тригонометриялық проблемасының классикалық қойылымы келесідей: $f = L_1[0,2\pi]$ және $\{a_k(f)\}$ оның тригонометриялық жүйедегі Фурье коэффициенттерінің тізбегі болсын. f функциясы $\{a_k(1)\} = \in l_{p,} 1 \le p \le \infty$ болатындай жеткілікті қасиетке ие болсын делік. $T_\varphi f = \{a_k(f \cdot \varphi)\} \in l_p$ болатындай φ функциясының тегістілік және метрикалық қасиеттерін анықтау керек, яғни $T_\varphi : l_p \to l_p$ операторының шенелгендігіне кепілдік беретін φ функциясына қойылатын шартты анықтау керек. Мұндай функциялар класын M_p арқылы белгілейміз.

Бұл есеп С.Б. Стечкин [1] және И.И. Хиршманның [2] ертеректегі жұмыстарында қарастырылады. Нәтижелер Гельдер кеңістігі мен шенелген β вариация терминдерінде табылған, яғни С.Б. Стечкин $V_1 \hookrightarrow M_{p,} 1 < p < \infty$ екендігін көрсетті. И.И.Хиршманның $0 < \alpha \le \frac{1}{2}$ болғанда $C^\alpha \hookrightarrow M_p$, $\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right| < \alpha$, $V_\beta \cap C^\alpha \hookrightarrow M_p$, мұндағы $\beta \ge 2, \alpha > 0$ $\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{\beta}$.

Көпөлшемді жағдайда таралу туралы ұйғарымды 1977 жылы С.Л.Эдельштейн жасады [3]. Бұл тақырып кейіннен М.Ш.Бирман мен М.З. Сломяканың [4] жұмыстарында $1 < p < 2$ болғанда Соболев кеңістігінде дамытылды.

$$W_r^\alpha(\pi_n) \hookrightarrow M_p, \ \frac{\alpha}{n} > \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$$

Бұл нәтижелер Бесов кеңістігінің көмегімен Г.Е. Караджовпен [5] күшейтілді.

$a = \{a_{\bar{k}}\}_{\bar{k}=-\infty}^{\infty}, b = \{b_{\bar{k}}\}_{\bar{k}=-\infty}^{\infty}$ болсын. $a * b$ символы $\{\sum_{\bar{m}=-\infty}^{\infty} a_{\bar{m}} b_{\bar{m}+\bar{k}}\}_{\bar{m}=-\infty}^{\infty}$ өрнегін білдіреді. l_{pq} арқылы Лоренц кеңістігін белгілейміз. l_{pq} элементтері $\xi = \{\xi_{\bar{k}}\}_{\bar{k}=-\infty}^{\infty}$ сандық тізбектер , жалғыз шектік О нүктесі бар: