$$tS(\frac{\phi(t)}{t}) < \infty, \ \ \forall t > 0.$$

Corrollary 2. Let the assumptions of Theorem 1 hold. If $M_\phi \subset \Lambda_{\varphi_0}(R_+)$, where φ_0 defined by (2), then there exists a minimal rearrangement invariant Banach space $F(R_+)$ such that

$$S : M_\phi(R_+) \to F(R_+)$$

is bounded.

Corrollary 3. Let the assumptions of Corollary 2 hold. Then there exists a minimal rearrangement invariant Banach function space $F(R)$ such that

$$H : M_\phi(R) \to F(R)$$

is bounded.

III Acknowledgment

Author would like to thank Kanat Tulenov for his helps and useful discussions.

Literature

1. Krein S., Petunin Y., Semenov E. Interpolation of linear operators. – Amer. Math. Soc., Providence, R.I.,1982.
2. Bennett C., Sharpley R. Interpolation of linear operators. – Pure and Applied Mathematics, 129, Academic Press 1988.
3. Sukochev F., Tulenov K., Zanin D. The optimal range of the Calderon operator and its applications // Journal of Functional Analysis, V. 277, No. 10, 2019, P.3513-3559.
4. Sukochev F., Tulenov K., Zanin D. The boundedness of the Hilbert transformation from one rearrangement invariant Banach space into another and applications// https://arxiv.org/abs/1909.10897.
5. Boyd.D.W. The Hilbert Transformation on rearrangement invariant Banach spaces // Thesis, University of Toronto, 1966.
6. Boyd D.W., Indices of function spaces and their relationship to interpolation. – Can. J. Math. V. 38, 1969, P.1245--1254.
7. Boyd D.W. The Hilbert transform on rearrangement-invariant spaces, – Can. J. Math. V. 19 1967, P.599--616.
8. Soria J., Tradacete P., Optimal rearrangement invariant range for Hardy-type operators , – Proc. of the Royal Soc. of Edinburgh, 146A, 2016, P.865–893.

УДК 517

НЕКОТОРЫЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВ ТИПА МОРРИ

Валиева Р. Ж.
roza-21-@mail.ru
Магистрант 2 курса специальности «6М60100 – Математика»
ЕНУ им. Л.Н.Гумилёва, Нур-Султан, Казахстан
Научный руководитель – Е.Д. Нурсултанов, профессор

Пусть $0 < p, q \le \infty$, $0 < \lambda < \infty$, если $q < \infty$ и $0 \le \lambda < \infty$, если $q = \infty$. Обобщенное локальное пространство типа Морри $LM^{\lambda}_{pq}(G,\mu)$ определяется как пространство всех измеримых функций f на Ω с конечной квази – нормой при $q < \infty$

$$\|f\|_{LM^{\lambda}_{pq}(G,\mu)} = \left(\int_0^{\infty} (t^{-\lambda} \|f\|_{L_p(G_t,\mu)})^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

и при $q = \infty$

$$\|f\|_{LM^{\lambda}_{p\infty}(G,\mu)} = \sup_{t>0} t^{-\lambda} \|f\|_{L_p(G_t,\mu)} < \infty$$

Пространство $LM^{\lambda}_{pq}(\mathrm{G},\mu)$ является одним из вариантов общего локального пространства типа Морри. Пространства LM^{λ}_{pq}, очевидно, соответствуют случаю, при котором $G_t = B(0,t)$ и μ - мера Лебега на R^n.

Целью исследования является получить интерполяционную теорему для пространств $LM^{\lambda}_{pq}(\mathrm{G},\mu)$ в предельном случае. Верна следующая теорема.

Теорема. Пусть $0 < p, q_0, q_1 \le \infty$, $0 < \lambda_0, \lambda_1 < \infty$, $\lambda_0 \ne \lambda_1$, $0 < \theta < 1$, $\Omega \subset R^n$, $\mu - \sigma$- конечная борелевская мера на Ω и $G = \{G_t\}_{t>0}$- семейство μ-измеримых множеств G_t. Тогда

$$(LM^{\lambda_0}_{pq_0}(G,\mu), LM^{\lambda_1}_{pq_1}(G,\mu))_{\theta,\infty} = LM^{\lambda}_{p\infty}(G,\mu) \quad ,$$

где $\lambda = (1-\theta)\lambda_0 + \lambda_1$.

Доказательство. 1. Докажем вложение в одну сторону

$$(LM^{\lambda_0}_{pq_0}(G,\mu), LM^{\lambda_1}_{pq_1}(G,\mu))_{\theta,\infty} \subset LM^{\lambda}_{p\infty}(G,\mu).$$

Пусть $f \in (LM^{\lambda_0}_{pq_0}(G,\mu), LM^{\lambda_1}_{pq_1}(G,\mu))_{\theta,\infty}$ и $f = \varphi + \psi$, где функции $\varphi \in LM^{\lambda_0}_{pq_0}(G,\mu)$, $\psi \in LM^{\lambda_1}_{pq_1}(G,\mu)$. Применяя неравенство Минковского имеем,

$$\sup_{t>0} t^{-\lambda} \|f\|_{L_p(G_t,\mu)} = \sup_{t>0} t^{-\lambda} \left(\int_{G_t} |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \le \sup_{t>0} t^{-\lambda} \left(\left(\int_{G_t} |\varphi(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{G_t} |\psi(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right) =$$

$$= \sup_{t>0} t^{\lambda_0 - \lambda} \left(t^{-\lambda_0} \left(\int_{G_t} |\varphi(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + t^{\lambda_1 - \lambda_0 - \lambda_1} \left(\int_{G_t} |\psi(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right) \le$$

$$\le \sup_{t>0} t^{\lambda_0-\lambda}\left(\sup_{s>0} s^{-\lambda_0}\left(\int_{G_s}|\varphi(x)|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}+t^{\lambda_1-\lambda_0}\sup_{s>0} s^{-\lambda_1}\left(\int_{G_s}|\psi(x)|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right)=$$

$$=\sup_{t>0} t^{\lambda_0-\lambda}\left(\|\varphi\|_{LM^{\lambda_0}_{p\infty}(G,\mu)}+t^{\lambda_1-\lambda_0}\|\psi\|_{LM^{\lambda_1}_{p\infty}(G,\mu)}\right).$$

Согласно вложению общих локальных пространств типа Морри

$$\sup_{t>0} t^{-\lambda}\left(\int_{G_t}|f(x)|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\le \sup_{t>0} t^{-\theta(\lambda_1-\lambda_0)}(\|\varphi\|_{LM^{\lambda_0}_{pq_0}(G,\mu)}+t^{\lambda_1-\lambda_0}\|\psi\|_{LM^{\lambda_1}_{pq_1}(G,\mu)}),$$ поскольку $f=\varphi+\psi$, получим

$$\sup_{t>0} t^{-\lambda}\left(\int_{G_t}|f(x)|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\le \sup_{t>0} t^{-\theta(\lambda_1-\lambda_0)}K(t^{\lambda_1-\lambda_0},f)$$

и тем самым,

$$\|f\|_{LM^{\lambda}_{p\infty}(G,\mu)}\le \sup_{t>0} t^{-\theta(\lambda_1-\lambda_0)}K(t^{\lambda_1-\lambda_0},f).$$

Делая замену переменной $t^{\lambda_1-\lambda_0}=s$, получим

$$\|f\|_{LM^{\lambda}_{p\infty}(G,\mu)}\le \sup_{s>0} s^{-\theta}K(s,f)=\|f\|_{(LM^{\lambda_0}_{pq_0}(G,\mu),LM^{\lambda_1}_{pq_1}(G,\mu))_{\theta,\infty}}.$$

2. Пусть $\lambda_0<\lambda_1$. Докажем обратное вложение

$$LM^{\lambda}_{p\infty}(G,\mu)\subset(LM^{\lambda_0}_{pq_0}(G,\mu),LM^{\lambda_1}_{pq_1}(G,\mu))_{\theta,\infty}.$$

Пусть $f\in LM^{\lambda}_{pq}(G,\mu)$ и $t>0$. Положим для $x\in R^n$

$$\varphi_t(x)=\begin{cases} f(x), & \text{если } x\in R^n\\ 0, & \text{если } x\in\Omega\setminus G_t\end{cases}$$

и $$\psi_t(x)=f-\varphi_t(x).$$

Выполняя обратно замену переменной $s=t^{\lambda_1-\lambda_0}$, приходим к следующему

$$\left\| f \right\|_{(LM^{\lambda_0}_{pq_0}(G,\mu),LM^{\lambda_1}_{pq_1}(G,\mu))_{\theta,\infty}} = \sup_{s>0} s^{-\theta} K(s, f) = \sup_{s>0} t^{-\theta(\lambda_1-\lambda_0)} K(t^{\lambda_1-\lambda_0}, f).$$

Далее оценим норму функции $\left\| \varphi_t \right\|_{LM^{\lambda_0}_{p,q_0}(G,\mu)}$ и воспользуемся неравенством Минковского. Поскольку $\left|\varphi_t(x)\right| = \left| f(x) \right|$, $x \in G_t$ и $\left|\varphi_t(x)\right| = 0$, $x \notin G_t$, имеем

$$\left\| \varphi_t \right\|_{LM^{\lambda_0}_{p,q_0}(G,\mu)} = \left(\int_0^\infty \left(s^{-\lambda_0} \left(\int_{G_s} \left|\varphi_t(x)\right|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right)^{q_0} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q_0}} \leq$$

$$\leq 2^{\left(\frac{1}{q_0}-1\right)_+} \left(\left(\int_0^t \left(s^{-\lambda_0} \left(\int_{G_s} \left|\varphi_t(x)\right|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right)^{q_0} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q_0}} + \left(\int_t^\infty \left(s^{-\lambda_0} \left(\int_{G_s} \left|\varphi_t(x)\right|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right)^{q_0} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q_0}} \right) =$$

$$= 2^{\left(\frac{1}{q_0}-1\right)_+} \left(\left(\int_0^t \left(s^{-\lambda_0} \left(\int_{G_s} \left| f(x)\right|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right)^{q_0} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q_0}} + \left(\int_t^\infty \left(s^{-\lambda_0} \left(\int_{G_s} \left|\varphi_t(x)\right|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right)^{q_0} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q_0}} \right).$$

Рассмотрим второй интеграл и применим свойство множеств G_t

$$\left(\int_t^\infty \left(s^{-\lambda_0} \left(\int_{G_s} \left|\varphi_t(x)\right|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right)^{q_0} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q_0}} = \left(\int_t^\infty \left(s^{-\lambda_0} \left(\int_{G_e} \left| f(x)\right|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right)^{q_0} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q_0}} =$$

$$= \left(\int_{G_t} \left| f(x)\right|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \frac{t^{-\lambda_0}}{(\lambda_0 q_0)^{\frac{1}{q_0}}} = c_1 t^{-\lambda_0+\lambda_1} t^{-\lambda_1} \left(\int_{G_t} \left| f(x)\right|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= c_1 t^{-\lambda_0+\lambda_1} (\lambda_1 q_1)^{\frac{1}{q_1}} \left(\int_t^\infty \left(s^{-\lambda_1} \right)^{q_1} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q_1}} \left(\int_{G_t} \left| f(x)\right|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq c_2 t^{\lambda_1-\lambda_0} \left(\int_t^\infty \left(s^{-\lambda_1} \left(\int_{G_t} \left| f(x)\right|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right)^{q_1} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q_1}},$$

где $c_1 = \dfrac{1}{(\lambda_0 q_0)^{\frac{1}{q_0}}}$, $c_2 = c_1 (\lambda_1 q_1)^{\frac{1}{q_1}}$. Таким образом,

$$\|\varphi_t\|_{LM^{\lambda_0}_{p,q_0}(G,\mu)} \le c_3\left(J_1(t)+t^{\lambda_1-\lambda_0}J_2(t)\right),$$

где $J_1(t)=\left(\int_0^t\left(s^{-\lambda_0}\left(\int\limits_{G_s}|f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right)^{q_0}\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q_0}}$, $J_2(t)=\left(\int_t^\infty\left(s^{-\lambda_1}\left(\int_{G_t}|f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right)^{q_1}\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q_1}}$

и $c_3=2^{\left(\frac{1}{q_0}-1\right)_+}\max\{c_2,1\}$.

Далее рассмотрим норму функции $\|\psi_t\|_{LM^{\lambda}_{pq_1}(G,\mu)}$. Так как $\psi_t(x)=0$ при $s<t$ и $x\in G_s$, а в остальных случаях $|\psi_t(x)|\le|f(x)|$, поэтому

$$\|\psi_t\|_{LM^{\lambda_1}_{p,q_1}(G,\mu)}=\left(\int_0^\infty\left(s^{-\lambda_0}\left(\int\limits_{G_s}|\psi_t(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right)^{q_1}\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q_1}}\le$$

$$\le 2^{\left(\frac{1}{q_1}-1\right)_+}\left(\left(\int_0^t\left(s^{-\lambda_0}\left(\int\limits_{G_s}|\psi_t(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right)^{q_1}\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q_1}}+\left(\int_t^\infty\left(s^{-\lambda_0}\left(\int\limits_{G_s}|\psi_t(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right)^{q_1}\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q_1}}\right)\le$$

$$\le 2^{\left(\frac{1}{q_1}-1\right)_+}\left(\int_t^\infty\left(s^{-\lambda_1}\left(\int_{G_s}|f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right)^{q_1}\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q_1}}.$$

Следовательно, $\|\psi_t\|_{LM^{\lambda_1}_{p,q_1}(G,\mu)}\le 2^{\left(\frac{1}{q_1}-1\right)_+}J_2(t)$.

3.Таким образом,

$$K\left(t^{\lambda_1-\lambda_0},f\right)\le c_4\left(J_1(t)+t^{\lambda_1-\lambda_0}J_2(t)\right),$$

где $c_4=c_3+2^{\left(\frac{1}{q_1}-1\right)_+}$, и

$$\|f\|_{(LM^{\lambda_0}_{pq_0}(G,\mu),LM^{\lambda_1}_{pq_1}(G,\mu))_{\theta,\infty}}\le c_4\left(I_1+I_2\right),$$

откуда

$$I_1=\sup_{0<t<\infty}t^{-\theta(\lambda_1-\lambda_0)}\sup_{0<s<t}s^{-\lambda_0-1}\|f\|_{L_p(G_s)},$$

$$I_2 = \sup_{0<t<\infty} t^{(1-\theta)(\lambda_1-\lambda_0)} \sup_{t<s<\infty} s^{-\lambda_1-1} \| f \|_{L_p(G_s)}$$

1.1 Предположим, что $q_0, q_1 < \infty$. Если $\lambda_0 < \lambda_1$, то применяя неравенство Харди с $\alpha = \theta(\lambda_1 - \lambda_0)$, получим

$$I_1 \le (\theta(\lambda_1 - \lambda_0))^{-1} \sup_{t>0} t^{-\lambda} \| f \|_{L_p(G_s)} = (\theta(\lambda_1 - \lambda_0))^{-1} \| f \|_{LM^{\lambda}_{p\infty}(G,\mu)},$$

Аналогично с $\alpha = (1-\theta)(\lambda_0 - \lambda_1)$, получим

$$I_2 \le= ((1-\theta)(\lambda_1 - \lambda_0))^{-1} \| f \|_{LM^{\lambda}_{p\infty}(G,\mu)}$$ Следовательно,

$$\| f \|_{(LM^{\lambda_0}_{pq_0}(G,\mu), LM^{\lambda_1}_{pq_1}(G,\mu))_{\theta,\infty}} \le c_5 \| f \|_{LM^{\lambda}_{p\infty}(G,\mu)}.$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. Буренков В.И, Нурсултанов Е.Д. Описание интерполяционных пространств для локальных пространств типа Морри.Труды МИАН, Т. 269 (2010), С. 52-62.
2. Нурсултанов Е.Д., Чигамбаева Д.К. Интерполяция пространств типа Морри. Учебно-методическое пособие. -Алматы: Эверо. 2017. -138 с.

УДК 517.51; 517.98

ОГРАНИЧЕННОСТЬ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ПЕРЕМЕННЫМИ ПРЕДЕЛАМИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Гайдаров Ибрагим Айвазович
ibragimgaidarov@mail.ru
Магистрант второго курса Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева
Научный руководитель –Ойнаров Р.

В данной работе мы рассматриваем интегральный оператор Харди с переменными пределами интегрирования. В этом направлении существует достаточное количество работ (см. например [1]-[5]). В работе [4] Степанова В.Д. и Ушаковой Е.П. получены необходимые и достаточные условия ограниченности оператора:

$$Kf(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} k(y.x) f(y) dy \tag{1}$$

действующего из $L_{p,v} \to L_{q,w}$, а так же уделено внимание на ограниченность интегрального оператора (1) при $k(y,x) = 1$, обозначая