6. M. Hieber, O. Sawada, The Navier–Stokes equations in Rn with linearly growing initial data // Arch. Ration. Mech. Anal. 2005. №175. P. 269–285.
7. G. Metafune, D. Pallara, V. Vespri, L_p-estimates for a class of elliptic operators with unbounded coefficients in R^N // Houston J. Math. 2005 №31. P. 605–620.
8. M. Hieber, L. Lorenzi, J. Pruss, A. Rhandi, R. Schnaubelt, Global properties of generalized Ornstein–Uhlenbeck operators on $L_p(R^N,\ R^N)$ with more than linearly growing coefficients // J. Math. Anal. Appl. 2009 №350. P. 100–121.
9. Ospanov K. L_1-maximal regularity for quasilinear second order differential equation with damped term // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 2015 №39. P. 1-9.

УДК. 517.51

ШЕНЕЛГЕН ВАРИАЦИЯЛЫ ЕКІ АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ФУРЬЕ-УОЛШ ҚАТАРЛАРЫНЫҢ АБСОЛЮТТІ ЖИНАҚТАЛУЫ

Ешмағамбетова Нұргүл Сұлтанқызы
ademi_laif@list.ru
Механика-математика факультетінің магистранты
Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі – Ж.Б. Муканов

Н.К. Баридің «Тригонометрикалық қатарлар» монографиясында ([1], 614 б.) Зигмундтың тригонометриялық қатарлардың абсолютті жинақталуының қамтамасыз ететін шарт туралы теоремасы келтірлген. Берілген жұмыста біз сол нәтижені Фурье-Уолш екі еселі қатарлары үшін жалпылаймыз.

Уолш жүйесінің анықтамасын берейік [2].

$[0,1)$ жарты интервалында

$$r_0(x)=\begin{cases}1 & егер \quad x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)\\ -1 & егер \quad x\in\left[\frac{1}{2},1\right)\end{cases}$$

функциясын қарастырып, оны бүкіл сан осінде периоды 1-ге тең болатындай етіп жалғастырайық.

Радемахер функцияларын анықтайық:

$$r_k(x)=r_0\left(2^k x\right),\ k=0,1,2,\ldots$$

функциялары $r_0(x)$ функциясының 2^k есе сығылуын білдіреді.

Радемахер функцияларын өзара көбейту нәтижесінде $\{w_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ Уолш функцияларының жүйесін аламыз. Уолш функцияларын келесі түрде нөмірлейік (бұл нөмірлеуді Пэли нөмірлеуі деп атайды).

Айталық

$$w_0(x)=1$$

болсын. $n \geq 1$ болған жағдайда $w_n(x)$-ді анықтау үшін n натурал санының екілік жүйесіндегі түрін келтірейік, яғни

$$n = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon_i 2^i \ ,$$

мұндағы $\varepsilon_k = 1$ және $\varepsilon_i = 0$ немесе 1, $i = 0,1,..k-1$. $2^k \leq n < 2^{k+1}$ болатындығы анық, мұндағы $k = k(n)$. Енді Уолш функцияларын төмендегінше анықталады:

$$w_n(x) = \prod_{i=0}^{k} (r_i(x))^{\varepsilon_i} \ .$$

Демек, Уолш жүйесінің функциялары тек қана екі мән қабылдайды: 1 және -1. Үзіліс нүктелерінде, олар оң жақты үзіліссіз болады.

Алдағы уақытта

$$\Delta_m^{(k)} \equiv \left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}\right), \ \ 0 \leq m \leq 2^k - 1$$

жарты интервалдарын рангісі $k \geq 0$ болатын екілік интервал (немесе жай ғана интервал) деп атайтын боламыз.

Екі еселі Уолш жүйесі $\{w_{jk}(x,y) = w_j(x) w_k(y) : j,k \geq 0\}$ түрінде анықталады. Осы жүйе бойынша $f(x,y)$ функцияның $c_{n,m}(f)$ Фурье коэффициенттері келесі түрде анықталады.

$$c_{n,m}(f) = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y) \, W_{n,m}(x,y) \, dxdy.$$

Біз енді $f(x,y)$ функциясының толық вариациясының түсінігін енгізейік. Екі өлшемді жағдайында функцияның вариациясы былай анықталады.

Айталық P_{NM} - $[0,1)^2$ квадратының

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = 1, \quad 0 = y_0 < y_1 < \ldots < y_M = 1,$$
$$\Delta_{i,j} = \{ (x,y) : \ x_i < x \leq x_{i+1}, \ \ y_j < y \leq y_{j+1} \}$$

түріндегі $\Delta_{i,j}$ бөліктеуі.

$$f(\Delta_{i,j}) = f(x_{i+1}, y_{j+1}) - f(x_i, y_{j+1}) - f(x_{i+1}, y_j) + f(x_i, y_j)$$

деп белгілеп алайық.

Анықтама 1. $f(x,y)$ функциясының $[0,1)^2$ квадратындағы толық вариациясы деп

$$V_{[0,1)^2}(f) = \sup_{\substack{N \geq 0 \\ M \geq 0}} \left\{ \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \left| f(\Delta_{i,j}) \right| : \ \forall P_N \right\} \qquad (1)$$

шамасын айтамыз.

Егер (1) шамасы ақырлы болса, онда $f(x,y)$ функциясы (Витали бойынша) шенелген вариациялы функция деп аталады [3].

Анықтама 2. $f(x,y)$ функциясының $\overset{*}{\omega}{}^{(1)}(\delta_1, \delta_2, f)$ интегралдық үзіліссіз модулі келесі теңдікпен анықталады

$$\overset{*}{\omega}^{(1)}\left(\delta_1,\delta_2,f\right)=\sup_{\substack{h<\delta_1\\ l<\delta_2}}\int_0^1\int_0^1 \left| f(x\oplus h, y\oplus l)-f(x,y)\right| dxdy.$$

Анықтама 3. $f(x,y)\in L^2\left([0,1]^2\right)$ функциясының $\overset{*}{\omega}^{(2)}\left(\delta_1,\delta_2,f\right)$ үзіліссіз L^2-модулі келесі теңдікпен анықталады

$$\overset{*}{\omega}^{(2)}\left(\delta_1,\delta_2,f\right)=\sup_{\substack{h_1<\delta_1\\ l_1<\delta_2}}\left\| f(x\oplus h_1, y\oplus l_1)-f(x,y)\right\|_2$$

Теорема 1. Егер шенелген вариациялы $f(x,y)$ функциясы $[0,1)^2$ квадратында $V_{[0,1)^2}(f)$ толық вариацияға ие болса, онда

$$\overset{*}{\omega}^{(1)}\left(f,\frac{1}{2^{k_1}},\frac{1}{2^{k_2}}\right)\ \le\ \frac{1}{2^{k_1+k_2}}V_{[0,1)^2}(f). \qquad (2)$$

теңсіздігі орындалады.

Дәлелденуі. $\Delta_i^{(k)}\equiv\left[\frac{i}{2^k},\frac{i+1}{2^k}\right)$ арқылы $0\le i<2^k-1$ болғандағы, $k\ge 0$ рангты екілік интервалдарды белгілейміз. Мұндағы $\Delta_0^{(0)}\equiv[0,1)$. Біздің жағдайда екі айнымалы функцияны қарастырған соң,

$$\Delta_{i,j}^{(k_1,k_2)}=\Delta_i^{(k_1)}\times\Delta_j^{(k_2)}$$

екілік обылысты қарастырайық.

Егер $h<2^{-k_1}, l<2^{-k_2}$ және $(t_1,t_2)\in\Delta_{i,j}^{(k_1,k_2)}$ болса, онда

$$(t_1\oplus h, t_2\oplus l)\in\Delta_{i,j}^{(k_1,k_2)}.$$

Осындай h, l, t_1 және t_2 үшін

$$\left| f(t_1\oplus h, t_2\oplus l)-f(t_1,t_2)\right|\le\sup_{(x,y)\in\Delta_{i,j}^{(k_1,k_2)}}f(x,y)-\inf_{(x,y)\in\Delta_{i,j}^{(k_1,k_2)}}f(x,y)\cdot$$

Функцияның вариациясының анықтамасынан

$$\sum_{i=1}^{2^{k_1}-1}\sum_{j=1}^{2^{k_2}-1}\left(\sup_{(x,y)\in\Delta_{i,j}^{(k_1,k_2)}}f(x,y)-\inf_{(x,y)\in\Delta_{i,j}^{(k_1,k_2)}}f(x,y)\right)\le V_{[0,1)^2}(f).$$

Осындай бағалауларды біле отырып, теореманың тұжырымдарын дәлелейтін теңсіздіктер тізбегін аламыз:

$$\overset{*}{\omega}^{(1)}\left(f,\frac{1}{2^{k_1}},\frac{1}{2^{k_2}}\right)=\sup_{h<\frac{1}{2^{k_1}},\,l<\frac{1}{2^{k_2}}}\int_0^1\int_0^1\left| f(t_1\oplus h, t_2\oplus l)-f(t_1,t_2)\right| dt_1\,dt_2\ =$$

$$=\sup_{h<\frac{1}{2^{k_1}},\,l<\frac{1}{2^{k_2}}}\sum_{i=0}^{2^{k_1}-1}\sum_{j=0}^{2^{k_2}-1}\int_{\Delta_i^{(k_1)}}\int_{\Delta_j^{(k_2)}}\left| f(t_1\oplus h, t_2\oplus l)-f(t_1,t_2)\right| dt_1\,dt_2\le$$

$$\le\sum_{i=0}^{2^{k_1}-1}\sum_{j=0}^{2^{k_2}-1}\left|\Delta_{i,j}^{(k_1,k_2)}\right|\cdot\left(\sup_{(x,y)\in\Delta_{i,j}^{(k_1,k_2)}}f(x,y)\ -\ \inf_{(x,y)\in\Delta_{i,j}^{(k_1,k_2)}}f(x,y)\right)\le$$

$$\leq \frac{1}{2^{k_1}} \cdot \frac{1}{2^{k_2}} \cdot V_{[0,1)^2}(f) = \frac{1}{2^{k_1+k_2}} \ V_{[0,1)^2}(f).$$

Сонымен, (2) тұжырымын дәлелдейтін теңсіздікті алдық.

Салдар 1. Айталық $2^{k_1} \leq n < 2^{k_1+1}, \quad 2^{k_2-1} \leq m < 2^{k_2}$ болсын. Онда шенелген вариациялы $f(x,y)$ функциясының Фурье-Уолш коэффициенті

$$\left| c_{n,m}(f) \right| \ \leq \ \frac{1}{2^{k_1+k_2}} \ V_{[0,1]^2}[f]$$

теңсіздігін қанағаттандырады.

Дәлелденуі. Алдымен $\overset{*}{\omega}{}^{(1)}\left(f, \frac{1}{2^{k_1}}, \frac{1}{2^{k_2-1}} \right)$ және $\overset{*}{\omega}{}^{(1)}\left(f, \frac{1}{2^{k_1}}, \frac{1}{2^{k_2}} \right)$ үзіліссіздік модулдерінің қайсысы шамасы бойынша үлкен екенін көрсетеміз. Интегралдық үзіліссіздік модулінің қасиетінен

$$\overset{*}{\omega}{}^{(1)}(f, 2t) \ \leq \ 2\overset{*}{\omega}{}^{(1)}(f, t),$$

$[0,1)^2$ квадратынан алынған $f(x,y)$ функциясы үшін

$$\overset{*}{\omega}{}^{(1)}\left(f, \frac{1}{2^{k_1}}, \frac{2}{2^{k_2}} \right) \leq 2\,\overset{*}{\omega}{}^{(1)}\left(f, \frac{1}{2^{k_1}}, \frac{1}{2^{k_2}} \right)$$

теңсіздігін аламыз.

(2) теңсіздігінен

$$\left| c_{n,m}(f) \right| \leq \frac{1}{2} \cdot 2\,\overset{*}{\omega}{}^{(1)}\left(f, \frac{1}{2^{k_1}}, \frac{1}{2^{k_2}} \right) \leq \frac{1}{2^{k_1+k_2}} \ V_{[0,1)^2}(f)$$

бағалануын аламыз. Сонымен, Фурье-Уолш коэффициенттерінің функцияның вариациясы көмегімен жоғарыдан бағалануы алынды. Салдар дәлелденді.

Фурье-Уолш қатарының абсолютті жинақталуын қараған кезде мына нәрсені байқаймыз: егер

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{i,j} \ w_{i,j}(x,y)$$

қатары кем дегенде (x_0, y_0) нүктесінде абсолютті жинақталса, онда барлық $i = 0, 1, 2, \ldots, \quad j = 0, 1, 2, \ldots$ үшін

$$\left| c_{i,j} \ w_{i,j}(x_0, y_0) \right| = \left| c_{i,j} \right|$$

болғандықтан, осыдан коэффициенттерден құрылған қатардың абсолютті жинақталуы шығады. Яғни, Уолш жүйесі бойынша алынған функциялардың Фурье қатары барлық жерде абсолютті жинақталады. Сондықтан, тригонометриялық жүйеден айырмашылығы $[0,1)^2$ жиынының қандайда бір нүктелері үшін Фурье-Уолш қатарының абсолютті жинақталуы туралы жеке сұрақтың қою қажет емес. Сонымен, Фурье-Уолш қатарының абсолютті жинақталуы туралы айтқанда, әрқашан коэффициенттерден құралған қатардың абсолютті жинақталуын түсінуміз қажет.

Алда біз $f(x,y)$ функциясына қандайда бір шарттарды қойғанда, оның Уолш жүйесі бойынша Фурье қатарының абсолютті жинақталуын қамтамасыз ететін шарттарды аламыз.

Теорема 2 $f(x,y)$ функциясы $[0,1)^2$ квадратында шенелген вариациялы және

$$\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\sqrt{\overset{*}{\omega}\left(f,\frac{1}{2^{k_1}},\frac{1}{2^{k_2-1}}\right)}<\infty$$

шарты орындалатын болса, онда $f(x,y)$ функциясының Фурье-Уолш қатары абсолютті жинақталады.

Дәлелденуі. Енді

$$\left\{\int_0^1\int_0^1 |f(x\oplus h,\ y\oplus l)-f(x,y)|^2\,dx\,dy\right\}^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le\left\{\sup_{\substack{h_1<\delta_1\\ l_1<\delta_2}}\sup_{(x,y)\in[0,1)^2}|f(x\oplus h_1,\ y\oplus l_1)-f(x,y)|\cdot\int_0^1\int_0^1 |f(x\oplus h,\ y\oplus l)-f(x,y)|^2\,dx\,dy\right\}^{\frac{1}{2}}$$

болғандықтан, онда $h_1<2^{-k_1},\quad l_1<2^{-k_2+1}$ есепке ала отырып,

$$\overset{*}{\omega}^{(2)}\left(f,\frac{1}{2^{k_1}},\frac{1}{2^{k_2-1}}\right)\le\sqrt{\overset{*}{\omega}\left(f,\frac{1}{2^{k_1}},\frac{1}{2^{k_2-1}}\right)\cdot\overset{*}{\omega}^{(1)}\left(f,\frac{1}{2^{k_1}},\frac{1}{2^{k_2-1}}\right)}$$

теңсіздігін аламыз.

$$\overset{*}{\omega}^{(1)}\left(f,\frac{1}{2^{k_1}},\frac{1}{2^{k_2-1}}\right)\le\frac{1}{2^{k_1+k_2}}\ V_{[0,1]^2}[f]$$

теңсіздігінің көмегімен (2.5.1 теоремасын қараңыз) және x пен y бойынша жылжулар өте кіші шамаларға кішірейгеннен

$$\overset{*}{\omega}^{(2)}\left(f,\frac{1}{2^{k_1}},\frac{1}{2^{k_2-1}}\right)\le\sqrt{\frac{1}{2^{k_1+k_2}}\ V_{[0,1)^2}(f)\cdot\overset{*}{\omega}\left(f,\frac{1}{2^{k_1}},\frac{1}{2^{k_2-1}}\right)}$$

теңсіздігін аламыз.

Алынған теңсіздікті келесі түрде түрлендіреміз

$$2^{\frac{k_1+k_2}{2}}\ \overset{*}{\omega}^{(2)}\left(f,\frac{1}{2^{k_1}},\frac{1}{2^{k_2-1}}\right)\le\sqrt{V_{[0,1)^2}(f)}\cdot\sqrt{\overset{*}{\omega}\left(f,\frac{1}{2^{k_1}},\frac{1}{2^{k_2-1}}\right)}.$$

k_1 және k_2 бойынша қосындылаймыз. Теорема шарты бойынша оң жақтағы қатар жинақталады, сондықтан сол жақтағы қатарда жинақты болады және функцияның Фурье-Уолш қатары абсолютті жинақталады.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. – М: Физматгиз, 1961. – 936 с.
2. Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. – М.: Наука, 1987. – 344 с.
3. Clarkson J.A., Adams C.R. On definitions of bounded variation for functions of two variables // Trans. Amer. Math. Soc. – 1933. – V.35. – P. 824–854.