ӘОЖ 517.5

АНИЗОТРОПТЫ ЖАЛПЫЛАНҒАН ЛОРЕНЦ КЕҢІСТІКТЕРІНІҢ ПАРАМЕТРЛІК ИНТЕРПОЛЯЦИЯСЫ

Қаухан Рашат
k.rashat03@mail.ru
Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ механика – математика факультетінің
2-курс магистранты, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі – А.Н. Копежанова

Мақалада анизотропты жалпылаған Лоренц кеңістіктерінің параметрлік интерполяциясы туралы теорема дәлелденген.

Айталық f – [0,1] кесіндісінде анықталған өлшемді функция және μ - Лебег өлшемі. f^* функциясы f функциясының өспейтін орын ауыстыруы, ол келесі түрде анықталады [1]:

$$m(\sigma, f) := \mu\{x \in [0,1] : |f(x)| > \sigma\},$$
$$f^*(t) := \inf\{\sigma : m(\sigma, f) \le t\}.$$

1950 ж. Лоренц кеңістігін енгізді [1].

Айталық $1 \le p < \infty$, и $1 \le q \le \infty$. L_{pq} Лоренц кеңістігі келесі түрде анықталады:

$$L_{pq} = \left\{ f(t) : \left(\int_0^1 t^{\frac{q}{p}-1} (f^*(t))^q \, dt \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\}.$$

Егер $q < \infty$
$$\|f\|_{L_{pq}} = \left(\int_0^1 t^{\frac{q}{p}-1} (f^*(t))^q \, dt \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Егер $q = \infty$
$$\|f\|_{L_{p\infty}} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t),$$

мұндағы $f^*(t)$ – $|f(t)|$ функциясының өспейтін орын ауыстыруы.

L_{pq} Лоренц кеңістігінің шкалалары Лебег кеңістігінің шкаласына қарағанда өте астарлы және ол дифференциалдық теңдеулерде, Фурье қатарларының теориясында, жуықтаулар теориясында, функционалдық кеңістіктер теориясында көп қолданыс табады.

Айталық $1 \le p < \infty$ болсын. Егер $p = q$ болса, онда L_{pq} Лоренц кеңістігі L_p Лебег кеңістігімен беттеседі.

Лоренц кеңістігінің негізгі қасиеттері олардың параметрлерінің иерархиялық тәуелділігі болып табылады, яғни келесі қасиеттер орындалады:

Лемма 1. ([1]) Егер $1 \le p < \infty$, $1 \le q < q_1 < \infty$ болса, онда келесі енгізу орындалады

$$L_{pq} \subset L_{pq_1} \quad (\|f\|_{L_{pq_1}} \le c\|f\|_{L_{pq}}).$$

Лоренц кеңістігіндегі негізгі теңсіздіктері болып келесі теңсіздіктер саналады:

Гельдер теңсіздігі

Айталық $1 \le p \le \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ болсын, онда келесі теңсіздік орынды

$$\int_0^{+\infty} | f(t)g(t) | dt \le \|f\|_{pq} \|g\|_{p'q'}.$$

Салдар. Айталық $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n} = 1$ және $\frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_n} = 1$ болса, онда

$$\int_0^{+\infty} \left| f_1(t) \cdot \ldots \cdot f_n(t) \right| dt \le \|f_1(t)\|_{L_{p_1 q_1}} \cdots \|f_n(t)\|_{L_{p_n q_n}}.$$

Минковский теңсіздігі

Айталық $1 \le p \le \infty$ және $1 \le q \le \infty$ болсын, онда $\|f+g\|_{L_{pq}} \le c(\|f\|_{L_{pq}} + \|g\|_{L_{pq}})$,

мұндағы с p және q параметрлерінен тәуелді.

Жалпыланған Минковский теңсіздігі

Айталық $1 \le p < \infty$, $1 \le q \le \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $p' = \frac{p}{p-1}$ болсын, онда келесі теңсіздік орынды

$$\left\| \int_0^{+\infty} f(x,y)dx \right\|_{L_{pq(y)}} \le \int_0^{+\infty} \|f(x,y)\|_{L_{pq(y)}} dx.$$

$\Lambda_q(\omega)$ жалпыланған Лоренц кеңістігін анықтайық. Айталық ω - $[0,1]$ кесіндісіндегі теріс емес функция. $\Lambda_q(\omega)$ жалпыланған Лоренц кеңістігі – бұл төмендегідей шарттарды қанағаттандыратын [0,1] кесіндісінде анықталған барлық f өлшемді функциялар жиыны:

егер $0 < q < \infty$, онда

$$\|f\|_{\Lambda_q(\omega)} := \left(\int_0^1 \left(f^*(t)\omega(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

егер $q = \infty,$ онда

$$\|f\|_{\Lambda_\infty(\omega)} := \sup_{0\le t\le 1} f^*(t)\omega(t).$$

Егер $\omega(t) = t^{\frac{1}{p}}$ болса, онда $\Lambda_q(\omega)$ жалпыланған Лоренц кеңістігі классикалық L_{pq} кеңістігімен беттеседі.

Айталық $\mu = \{\mu(k)\}_{k\in N}$ - оң сандар тізбегі. $\lambda_q(\mu)$ Лоренц кеңістігі – бұл төмендегідей шарттарды қанағаттандыратын барлық $a = \{a_k\}_{k=1}^\infty$ тізбектерінің жиыны

егер $0 < q < \infty,$ онда

$$\|f\|_{\lambda_q(\mu)} := \left(\sum_{k=1}^\infty \left(a_k^*\mu(k)\right)^q \frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

егер $q = \infty$ болса, онда

$$\|f\|_{\lambda_\infty(\omega)} := \sup_k a_k^*\mu(k) < \infty,$$

мұндағы $\{a_k^*\}_{k=1}^\infty$ - Ф жүйесі бойынша f функциясының $\{|a_k|\}_{k=1}^\infty$ Фурье коэффициенті тізбегінің өспейтін орын ауыстыруы.

Айталық $0 < \overline{q} = (q_1, q_2) \le \infty,$ $\overline{\varphi}(t) = \left(\varphi_1(t_1), \varphi_2(t_2)\right) \ge 0$ және $f-$ $(\Omega, \overline{\mu})$ облысындағы өлшемді функция болсын. Анизотропты жалпыланған Лоренц кеңістігі келесі түрде анықталады:

$$\Lambda_{\overline{q}}(\overline{\varphi}) = \left\{ f(t_1,t_2):\ \left(\int_0^{l_2}\left(\int_0^{l_1}\left(f^*(t_1,t_2)\varphi_1(t_1)\varphi_2(t_2)\right)_1^q \frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}} \frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{q_2}} < \infty \right\}.$$

Теорема 1. Айталық $\overline{q_0} = (q_1^0, q_2^0),$ $\overline{q_1} = (q_1^1, q_2^1),$ $\overline{\rho} = (\rho_1, \rho_2),$ $\varphi_1^0(t_1) \in A,$ $\varphi_2^0(t_2) \in A,$ $\varphi_1^1(t_1) \in A,$ $\varphi_2^1(t_2) \in A,$ и $\frac{\varphi_1^0}{\varphi_1^1} \in A,$ $\frac{\varphi_2^0}{\varphi_2^1} \in A$ *немесе* $\frac{\varphi_1^0}{\varphi_1^1} \in B,$ $\frac{\varphi_2^0}{\varphi_2^1} \in B$ *болсын. Онда*

$$\left(\Lambda_{\overline{q}_0}(\overline{\varphi}_0),\ \Lambda_{\overline{q}_1}(\overline{\varphi}_1)\right)_{\overline{\rho},\overline{q}} = \Lambda_{\overline{q}}(\overline{\varphi}), \quad \text{мұндағы} \quad \overline{\varphi}(t_1,t_2) = \left(\frac{\varphi_1^0(t_1)}{\rho_1\left(\frac{\varphi_1^0(t_1)}{\varphi_1^1(t_1)}\right)},\ \frac{\varphi_2^0(t_2)}{\rho_2\left(\frac{\varphi_2^0(t_2)}{\varphi_1^1(t_2)}\right)}\right).$$

Классикалық интерполяциялық әдістер мен Лоренц кеңістіктері [1] зерттеледі. Жалпыланған Лоренц кеңістіктері [2] және [3] жұмыстарында тереңірек зерттеліп қарастырылады.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Bergh J., Löfström J., Interpolation spaces. An Introduction. – Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Springer Verlag. – Berlin-New York. – 1976.
2. Persson L.E. An exact description of Lorentz spaces // Acta Sci. Math. – 1983. – Vol. 46. – P. 177–195.
3. Kopezhanova A. N. , Persson L.-E. On summability of the Fourier coefficients in bounded orthonormal systems for functions from some Lorentz type spaces // Eurasian Math. J. – 2010. – T. 1, № 2. – C. 76–85.

УДК 511

р-АДИЯЛЫҚ КОЭФФИЦИЕНТТІ КВАДРАТТЫҚ ТҰРПАТТАР

Құттыбай У.С.

Uljalgas_97-26@mail.ru

Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ, Механика-математика факультеті,

Алгебра және геометрия кафедрасының 2- курс магистранты,

Нұр-Сұлтан, Қазақстан

Ғылыми жетекшісі – Қасымқанұлы Б.

Аннотация. Бұл мақалада p-адиялық сандар теориясы және *p*-адиялық сандар теориясын анықталмаған теңдеулердің зерттеуіне қолданамыз. Дәлірек айтсақ, *p*-адиялық және рационал сандарды квадраттық тұрпаттармен кескіндеуін қарастырамыз. Кез-келген өрістің үстінде берілген квадраттық тұрпаттарды зерттегенде қандай элементтер квадрат болатынын білу өте маңызды.

Анықтама. p кез келген жай сан болсын. Барлық $n \geq 1$ үшін келесі $a_n \equiv a_{n-1}(\mathrm{mod}\ p^n)$ салыстыруларын қанағаттандыратын $\{a_n\}=\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ бүтін сандар тізбегін *p*-адиялық сан деп атаймыз.

Анықтама. Барлық $n \geq 0$ үшін $a_n \equiv b_n(\mathrm{mod}\ p^{n+1})$ болса, онда $\{a_n\}$ және $\{b_n\}$ тізбектері бір *p*-адиялық санды анықтайды деп есептейміз.

Белгілеулер. Z_p — барлық бүтін *p*-адиялық сандар жиыны;

$\{a_n\}\to\alpha$ — $\{a_n\}$ тізбегі α бүтін *p*-адиялық санын анықтайды.

Анықтама. $\{a_n\}$ және $\{b_n\}$ тізбектерімен анықталатын *p*-адиялық сандардың қосындысы мен көбейтіндісі, сәйкесінше, $\{a_n+ b_n\}$, $\{a_n \cdot b_n\}$ тізбектерімен анықталады.

Анықтама. Егер α, β *p*-адиялық сандары үшін $\alpha = \gamma\beta$ теңдігі орындалатын *p*-адиялық саны γ *p*-адиялық саны табылса, онда α *p*-адиялық саны β *p*-адиялық санына бөлінеді деп