$$<< \sup_{0<z<a}\left(\int_0^{\varphi(z)} u^{p'}(s)W^{p'\beta}(s)w(s)ds\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_z^a W^{q(\alpha-1)}(x)v(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\|f\|_{p,w}$$

$$\leq \sup_{0<z<a} A_\varphi(z)\cdot\|f\|_{p,w}.$$

Следовательно, $\|P_a T_\varphi P_a\| << \sup_{0<z<a} A_\varphi(z)$. Откуда,

$$\lim_{a\to 0+}\|P_a T_\varphi P_a\| << \lim_{a\to 0+}\sup_{0<z<a} A_\varphi(z) = \lim_{z\to 0+} A_\varphi(z) = 0. \quad (11)$$

Далее, также оцениваем $\|Q_b T_\varphi f\|_{q,v}$ и $\|P_{ab} T_\varphi P_a f\|_{q,v}^q$:

В результате имеем

$$\lim_{b\to\infty-}\|Q_b T_\varphi\| << \lim_{z\to\infty-} A_\varphi(z) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{a\to 0+}\|P_{ab} T_\varphi P_a\| << \lim_{a\to 0+}\sup_{0<z<a} A_\varphi(z) = \lim_{z\to 0+} A_\varphi(z) = 0. \quad (12)$$

Из (11) и (12) следует, что правая часть (10) стремится к нулю при $a \to 0$, $b \to \infty$.

Теорема полностью доказана.

Список использованных источников

1. Abylayeva A. Criterion of the boundedness of a fractional integration type operator with variable upper limit in weighted Lebesgue spaces. International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2016) AIP Conf. Proc. 1759, 020088-1–020088-5; doi: 10.1063/1.4959702.
2. Abylayeva A., Oinarov R., and Persson L.-E. Boundedness and compactness of a class of Hardy type operators. Journal of Inequal. and Appl. (JIA), № 324, 2016.
3. Ойнаров Р. Двусторонние оценки нормы некоторых классов интегральных операторов // Труды МИ РАН. - 1993. Т. 204, - С. 240-250.
4. Oinarov R. Boundedness and compactness of superposition of fractional integration operators and their applications // Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis: Proceedings: Чехия. - 2005. - С. 213-235.
5. Абылаева А.М., Сейлбеков Б.Н. Ограниченность одного оператора дробного интегрирования с переменним верхним пределом. КазНПУ Вестник №3 (67), 2019. -С.7-11.
6.Канторович Л.В., Акилов Г.Р. Функциональный анализ. М.: Наука 1977.
7. Рид М. Саймон Б. Методы современной математической физики. М.: Мир. Т.1. 1977.

ӘОЖ 517.5

АНИЗОТРОПТЫ ЛОРЕНЦ КЕҢІСТІГІНІҢ ҚАСИЕТТЕРІ

Сынабаева Гулнур Темирхановна

gulmuh87@mail.ru

Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ механика – математика факультетінің

магистранты, Нұр-Сұлтан, Қазақстан

Ғылыми жетекшісі – А.Н. Копежанова

Мақалада анизотропты Лоренц кеңістігі анықталады. Анизотропты Лоренц кеңістігінің қасиеттері зерттеледі.

$\Lambda_q(\omega)$ жалпыланған Лоренц кеңістігін анықтайық [2]. Айталық ω - $[0,1]$ кесіндісіндегі теріс емес функция. $\Lambda_q(\omega)$ жалпыланған Лоренц кеңістігі – бұл төмендегідей шарттарды қанағаттандыратын [0,1] кесіндісінде анықталған барлық f өлшемді функциялар жиыны:

егер $0 < q < \infty,$ онда

$$\|f\|_{\Lambda_q(\omega)} := \left(\int_0^1 \left(f^*(t)\omega(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

егер $q = \infty,$ онда

$$\|f\|_{\Lambda_\infty(\omega)} := \sup_{0 \le t \le 1} f^*(t)\omega(t).$$

Егер $\omega(t) = t^{\frac{1}{p}}$ болса, онда $\Lambda_q(\omega)$ жалпыланған Лоренц кеңістігі классикалық L_{pq} кеңістігімен беттеседі.

Айталық $\mu = \{\mu(k)\}_{k \in \mathrm{N}}$ - оң сандар тізбегі. $\lambda_q(\mu)$ Лоренц кеңістігі – бұл төмендегідей шарттарды қанағаттандыратын барлық $a = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ тізбектерінің жиыны

егер $0 < q < \infty,$ онда

$$\|f\|_{\lambda_q(\mu)} := \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^* \mu(k) \right)^q \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

егер $q = \infty$ болса, онда

$$\|f\|_{\lambda_\infty(\omega)} := \sup_k a_k^* \mu(k) < \infty,$$

мұндағы $\{a_k^*\}_{k=1}^{\infty}$ - Ф жүйесі бойынша f функциясының $\{|a_k|\}_{k=1}^{\infty}$ Фурье коэффициенті тізбегінің өспейтін орын ауыстыруы.

Айталық f – [0,1] кесіндісінде анықталған өлшемді функция және μ - Лебег өлшемі. f^* функциясы f функциясының өспейтін орын ауыстыруы, ол келесі түрде анықталады [1]:

$$m(\sigma, f) := \mu\{x \in [0,1] : |f(x)| > \sigma\},$$

$$f^*(t) := \inf\{\sigma : m(\sigma, f) \le t\}.$$

Теорема 1. Егер $1 \le q < q_1 \le \infty$, мұндағы $\omega \epsilon \mathrm{C} \Rightarrow$

$$\Lambda_q(\omega) \hookrightarrow \Lambda_{q_1}(\omega),$$

онда әрбір $f \epsilon \Lambda_q(\omega)$ келесідей шартты қанағаттандыратындай C табылады:

$$\|f\|_{\Lambda_{q_1}(\omega)} \le c\|f\|_{\Lambda_q(\omega)}.$$

Дәлелдеуі: $\forall f \in \Lambda_q(\omega)$. $q_1=\infty$ үшін келесі норманы қарастырамыз:

$$\|f\|_{\Lambda_\infty(\omega)} = sup_{t>0}\, f^*(t)\omega(t) =$$

$$= \sup_{t>0} f^*(t)\omega(t)t^{-1+\delta}t^{1-\delta}$$

Теореманың шарты бойынша $\omega(t)t^{-1+\delta}$ – кемімелі функция, сондықтан келесіні аламыз:

$$\|f\|_{\Lambda_\infty(\omega)} \le c_1 \sup_{t>0} f^*(t)\omega(t)t^{-1+\delta}t^{1-\delta}\, t^{-1}\left(\int_0^t t^{q-1}dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= c_1 \sup_{t>0}\left(\int_0^t \left(f^*(t)\omega(t)t^{-1+\delta}t^{-\delta}t\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= c_1 \sup_{t>0} \left(\int_0^t \left(f^*(t)\omega(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le c_1\left(\int_0^\infty \left(f^*(t)\omega(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\|f\|_{\Lambda_\infty(\omega)} \le c_1 \|f\|_{\Lambda_q(\omega)}.$$

Енді мына норманы қарастырамыз $\|f\|_{\Lambda_{q_1}(\omega)}$

$$\|f\|_{\Lambda_{q_1}(\omega)} = \left(\int_0^\infty \left(f^*(t)\omega(t)\right)^{q_1} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q_1}} =$$

$$= \left(\int_0^\infty \left(f^*(t)\omega(t)\right)^q \left(f^*(t)\omega(t)\right)^{q_1-q} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q_1}} \le$$

$$\le \left(\int_0^\infty \left(f^*(t)\omega(t)\right)^q \left(\sup_{0\le t\le 1} f^*(t)\omega(t)\right)^{q_1-q} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q_1}} =$$

$$= \left(\sup_{0\le t\le\infty} f^*(t)\omega(t)\right)^{\frac{q_1-q}{q_1}} \left(\int_0^\infty \left(f^*(t)\omega(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q_1}}$$

$$= \|f\|_{\Lambda_\infty(\omega)}^{\frac{q_1-q}{q_1}} * \left(\int_0^\infty \left(f^*(t)t\omega(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q_1}} =$$

$$= \|f\|_{\Lambda_\infty(\omega)}^{\frac{q_1-q}{q_1}} * \|f\|_{\Lambda_q(\omega)}^{\frac{q}{q_1}} \le$$

$$\le c_1 \|f\|_{\Lambda_q(\omega)}^{1-\frac{q}{q_1}} * \|f\|_{\Lambda_q(\omega)}^{\frac{q}{q_1}} =$$

$$= c_1\|f\|_{\Lambda_q(\omega)} \Rightarrow \|f\|_{\Lambda_{q_1}(\omega)} \le c_1\|f\|_{\Lambda_q(\omega)}.$$

Айталық $1 \le \bar{q} = (q_1, q_2) \le \infty$ және $\overline{\omega}(t) = (\omega(t_1), \omega(t_2)) \ge 0$, $t = (t_1, t_2) > 0$ болсын. $\Lambda_{\bar{q}}(\overline{\omega})$ жалпыланған Лоренц кеңістігі – бұл $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ облысында анықталған барлық $f(t_1,t_2)$ өлшемді функциялардың келесідей шарттарды қанағаттандыратын жиыны: егер $0 < \bar{q} < \infty$, онда

$$\|f\|_{\Lambda_{\bar{q}}(\overline{\omega})} := \left(\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}\left(f^*(t_1,t_2)\omega_1(t_1)\omega_2(t_2)\right)^{q_1}\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{q_2}} < \infty,$$

мұндағы $f^*(t_1,t_2)$ – $f(t_1,t_2)$ функциясының өспейтін орын ауыстыруы.

Айталық $\delta > 0$ және $\omega(t)$ – $[0,1]$ аралығында анықталған теріс емес функция болсын. A_δ, B_δ және C_δ функциялар кластарын келесі түрде анықтаймыз:

$$A_\delta = \{\omega(t):\ \omega(t)t^{-\frac{1}{2}-\delta} - \text{өспеліпелі функция}$$
$$\omega(t)t^{-1+\delta} - \text{кемімелі функция},$$

$$B_\delta = \{\omega(t):\ \omega(t)t^{-\delta} - \text{өспеліпелі функция}$$
$$\omega(t)t^{-\left(\frac{1}{2}-\delta\right)} - \text{кемімелі функция},$$

$$C_\delta = \{\omega(t):\ \omega(t)t^{-\delta} - \text{өспеліпелі функция}$$
$$\omega(t)t^{-1+\delta} - \text{кемімелі функция},$$

Онда A, B және C кластары келесі түрдегідей анықталады:

$$A = \bigcup_{\delta>0} A_\delta,\ \ B = \bigcup_{\delta>0} B_\delta \quad C = \bigcup_{\delta>0} C_\delta.$$

Теорема 2. Егер $\bar{q} \le \bar{q}_1$ және $\omega(t)$ функциясы C класынан болса, онда келесі енгізу орындалады:

$$\Lambda_{\bar{q}}(\bar{\omega}) \subset \Lambda_{\bar{q}_1}(\bar{\omega})$$

Жалпыланған Лоренц кеңістіктерінің бір өлшемді жағдай [1], [2] жұмыстарында тереңірек зерттеліп қарастырылады. [3] жұмыста бір өлшемді жалпыланған Лоренц кеңістіктерінің Фурье қатарлары теориясындағы қолданыстары зерттелген.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

4. Lorentz. Some new functional spaces. // Ann. of Math. (2). – 1950. – Vol. 51. - C. 37-55.
5. Persson L.E. An exact description of Lorentz spaces // Acta Sci. Math. – 1983. – Vol. 46. – P. 177–195.
6. Kopezhanova A. N. , Persson L.-E. On summability of the Fourier coefficients in bounded orthonormal systems for functions from some Lorentz type spaces // Eurasian Math. J. – 2010. – T. 1, № 2. – C. 76–85.

УДК 517

ЛОГАРИФМДІК ЕРЕКШЕЛІГІ БАР БІР КЛАСТАҒЫ ИНТЕГРАЛДЫҚ ОПЕРАТОРЛАРДЫҢ ШЕНЕГЕНДІГІ

Тажихан Балауса Мухтарқызы
balausa-26@mail.ru
Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ 3-курс студенті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі – А.М.Абылаева

$1 < p < \infty,\ 0 < q < \infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,\ R = (0, +\infty)$ және $u: R_+ \to R, v: R_+ \to R$ болсын. $L_p = L_p(R_+)$ - Лебег кеңістігі және ондағы анықталған норма

$$\|f\|_{p,w} = \left(\int_0^\infty |f(s)|^p w(s) ds \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,\ 0 < p < \infty.$$

ақырлы. W функциясы I интервалында теріс емес, қатаң өспелі және локалды абсолютті үзіліссіз функция болсын және $\frac{dW(x)}{dx} = w(x)$.

Бұл жұмыста келісі түрде берілген