УДК 621.391

S-ӨЛШЕМДІ ДИССКРЕТТІ «АЛГЕБРАЛЫҚ» ФУРЬЕ ТҮРЛЕНДІРУІ ТЕЗ ФУРЬЕ ТҮРЛЕНДІРУІ СИЯКТЫ

Токтабеков Нурсултан Ерланович
Toktabekov_kz@mail.ru
Л.Н. Гумилева атындағы Еуразия ұлттық университетінің математика
6М060100 мамандығының екінші курс магистранты
Ғылыми жетекші – Темірғалиев Н. Н.

Математикада Z -тен алынғын $ZN = \{kN : k \in Z\}$ тордың сипаттамалық функциясының $s = 1$ бірөлшемді корпусындағы келесі көрініс орын алады $(N \in Z)$:

$$\hat{f}(m) = \frac{1}{|\det d|} \sum_{k \bmod Z^s d'} f\left(k(d')^{-1}\right) e^{-2\pi i\left(m, k(d')^{-1}\right)} \left(m \bmod Z^s d\right) . \tag{1}$$

Дискретті Фурье түрлендіруі тікелей және кері болып табылады, содан кейін 1965 жылы Кули мен Тьюки [1] ұсынған жылдам Фурье түрлендіру алгоритмдерінің құрылысы да теңдікке негізделген (1) (мысалы, [2, 171-178 бб.]) [3] -де Фурье бойынша тікелей және кері өлшемді дискретті түрлендірулер анықталды:

$$\hat{f}(m) = \frac{1}{|\det d|} \sum_{k \bmod Z^s d'} f\left(k(d')^{-1}\right) e^{-2\pi i\left(m, k(d')^{-1}\right)} \left(m \bmod Z^s d\right) \tag{2}$$

Және

$$\hat{f}(m) = \frac{1}{|\det d|} \sum_{k \bmod Z^s d'} f\left(k(d')^{-1}\right) e^{-2\pi i\left(m, k(d')^{-1}\right)} \left(m \bmod Z^s d\right) \tag{3}$$

мұндағы d $s \times s$ матрицасының айырымды класстары, ал d' сол матрицаға байланысты транспанерленуі, $Z^s d = \{kd : k \in Z^s\}$,ал қосынды белгісінде жазылған «$\alpha \bmod Z^s d$»-дегі α индексі әр класстардың элементтерін жүріп өту керек.

Бұл мақала тез «алгебралық» Фурье түрлендіру алгоритмдеріне арналған, яғни d матрицасы екі анықталмаған унимодулярлы емес матрицаларының көбейтіндісі ретінде өрнектелуіне негізделген.

Анықтама 1: $a, b \in Z^s$ болсын. d модулі бойынша a b мен салыстырмалы (белгіленуі $a \equiv b(\bmod d)$, егер $(a - b) \in t \cdot d$ кейбіреулері $t \in Z^s$

Анықтама 2: $a \in Z^s$ болсын . d модулі бойынша K_a классы жиын деп аталады, $a \equiv b(\mathrm{mod}\, d)$ болатындай Z^s-тен алынған барлық b-дан құралады.
Әр түрлі a $\{K_a\}$ класстары үшін олар сәйкес келеді, немесе қиылыспайды.

d модулі бойынша K_a классының айырымы K_a.-классынан алынған $b \in Z^s$-санынын кез келгені болуы мүмкін.

Анықтама 3: d модулі қалдық класы өкілдерінің толық жүйесі ($N = |\det d|$ саны бойынша) немесе қысқаша, толық қалдық жүйесі ($\mathrm{mod}\, Z^s d$ белгілеу бойынша) - бұл модуль үшін әр түрлі кластардан алынған элементтер жиынтығы.

$Z^s d$ тордың матрицасы (базисі) анық емес : кез-келген біртектес емес бүтін сан $s \times s$-матрица $Z^s(Ud) = Z^s d$ үшін U теңдік сақталады ([4, 78 б.] қараңыз), сондай да әрдайым $Z^s d$ торының матрицасы базисі қалыпты матрица торы эрмит формасын сақтайтындай, U матрицасын теріп алуға ([4, 72 б.] қараңыз)

$$\Delta = Ud = \begin{pmatrix} \vartheta_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vartheta_{21} & \vartheta_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vartheta_{S1} & \vartheta_{S2} & \dots & \vartheta_{SS} \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Мұндағы барлық $k = 1,..., s$, $j = 1,..., k$ үшін $0 \le \vartheta_{kj} \le \vartheta_{kk}$. (4) форманың матрицалары техникалық тұрғыдан өте пайдалы, бұл қалдықтардың нақты жүйесі нақты жазылған, бұл (2) - (3) тікелей қолданбалы қайта құруды жүзеге асырады ($\mathrm{mod}\, Z^s d$ іздеудің қажеті жоқ)

Шынында да, (4) бүтін санды матрица үшін $\mathrm{mod}\, Z^s d$ жиыны мына түрде жазуға болады:

$$\{\beta \equiv (\beta_1,..., \beta_s) \in Z^s : 0 \le \beta_j < \vartheta_{jj} \quad (j = 1,..., s)\} \qquad (5)$$

Үшбұрышты d бүтін матрицалармен берілген «алгебралық» Фурье түрлендірулерінің барлығын немесе кері s-өлшемді дискретті «алгебралық» дискретті түрлендірулерді табуға қажетті қарапайым арифметикалық амалдар санын есепке алу формасындағы тікелей есептеу, $\succ\prec (\det d)^2$ мәнін көрсетеді. Бұл зерттеудің маңызды факторы матрицалар біртектес емес матрицалардың емес, екі бұзылатын өнімнің өнімі ретінде көрінетін кезде тікелей және кері дискретті «алгебралық» Фурье түрлендірулерінің жылдам алгоритмдерін құру мүмкіндігі болып табылады.

Теорема*: Бөлінбейтін бүтінсанды* $s \times s$ *– матрицасы берілгеен болсын* $d = d_1 d_2$, $\det d_1 \neq \pm 1$, $\det d_2 \neq \pm 1$. $\det d$ *(2) (немесе (3) өлшемінің мәні)* $\succ\prec |\det d| (|\det d_1| + |\det d_2|)$ *арқылы элемнаттар операциялармен табылуы мүмкін.*

Дәлелдеуі: Алдын ала d_1 және d_2 эрмитовты қалыпты формасы бар (4) түрінде көрсетуге болатынын қарастырамыз. U және V Бірнеше модуляр емес матрицалар болсын. Оларды сәйкесінше d_1 және d_2 көбейтсек, сол жағында Ud_1 және Vd_2 қалыпты эрмитовты формадағы матрицаны аламыз. $Z^s d_2 = Z^s(Vd_2)$ $j = 1,..., s,$ барлық $e_j(Vd_2) \in Z^s d_2$ үшін Vd_2 матрицасынын барлық жолдары $Z^s d_2$-ге кіреді. $Z^s d_2$. $d_1 V d_2$ матрицасынын барлық жолдары $d_1 d_2$ матрицасынын сызықты комбинациясы болып табылады. $d_1 d_2$. Бұл $Z^s(Ud_1 Vd_2) = Z^s(d_1 Vd_2) \subset Z^s(d_1 d_2)$ екенін білдіреді. $|\det(d_1 d_2)| = |\det(Ud_1 Vd_2)|$ болғандықтан $Z^s(d_1 d_2)$ және $Z^s(Ud_1 Vd_2)$ сәйкес келеді ([4, 78 б.] қараңыз) Сондықтан d_1 және d_2 матрицалары қалыпты эрмитовты формалары бар деп айтуға болады. Сонымен:

$$d_1 = (u_{kj})_{k,j=1}^{s}, \quad d_2 = (v_{kj})_{k,j=1}^{s},$$

$$0 \le u_{kj} \le u_{kk}, \quad 0 \le v_{kj} \le v_{kk} \quad (k = 1,..., s,\ j = 1,..., k), \quad u_{kj} = v_{kj} = 0 \quad (k = 1,..., s-1; \quad j = k+1,..., s).$$

Кез келген $k \in \operatorname{mod} Z^s d'$ және $m \in \operatorname{mod} Z^s d$ түрінде ұсынылатын біріңғай форма $k = l + zd_1'$, $m \equiv n + td_2$, $l, t \in \operatorname{mod} Z^s d_1'$ $z, n \in \operatorname{mod} Z^s d_2$. $k \in \operatorname{mod} Z^s d'$ и $m \in \operatorname{mod} Z^s d$ үшін:

$$f_k = f\left(k(d')^{-1}\right), \quad w_m^k = w_m^k(d) = e^{-2\pi i\left(m, k(d')^{-1}\right)} = e^{-2\pi i m d^{-1} k'}.$$

сонда

$$\hat{f}(\mathrm{m}) = \hat{f}(n + td_2) = \frac{1}{|\det d|} \sum_{k \operatorname{mod} Z^s d'} f_k w_m^k = \frac{1}{|\det d|} \sum_{l \operatorname{mod} Z^s d_1'} \sum_{z \operatorname{mod} Z^s d_2} f_{l+zd_1'} w_{n+td_2}^{l+zd_1'} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} w_{n+td_2}^{l+zd_1'} = e^{-2\pi i(n+td_2)d^{-1}(l+zd_1')} = e^{-2\pi i n d^{-1} l'} e^{-2\pi i n d^{-1} d_1 z'} e^{-2\pi i t d_2 d^{-1} l'} e^{-2\pi i t d_2 d^{-1} d_1 z'} = \\ \qquad = w_n^l \cdot w_n^{zd_1'} \cdot w_{td_2}^l \cdot 1 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{|\det d|} \sum_{l \operatorname{mod} Z^s d_1'} \sum_{z \operatorname{mod} Z^s d_2} f_{l+zd_1'} w_n^l \cdot w_{td_2}^l w_n^{zd_1'} = \frac{1}{|\det d|} \sum_{l \operatorname{mod} Z^s d_1'} A_{n,l} \cdot w_n^l \cdot w_{td_2}^l, \tag{6}$$

мұндағы, $A_{n,l} = \sum_{z \bmod Z^s d_2'} f_{l+zd_1'} w_n^{zd_1'}$,

$A_{n,l}$ есептеу үшін $\det d_2$ көбейтіндісі керек болады, сәкесінше барлық $\det d_1 \cdot \det d_2$ $A_{n,l}$ коэффицenттері $\det d_1 \cdot (\det d_2)^2$ көбейтіндісінен кейн орналасады . $\hat{f}(n+td_2)$ Әрқайсысын есептеу үшін $A_{n,l}$ (6) формулаға сәйкес есептелген коэффициенттермен де $\det d_1$туындыларын шығару керек , яғни барлық $\det d_1 \cdot \det d_2$ өлшемін $\hat{f}(n+td_2)$ $(\det d_1)^2 \cdot \det d_2$ көбейтіндісі керек болады. Қорытындылай келе (2) есептеу үшін бізге $\succ\prec |\det d|(|\det d_1| + |\det d_2|)$ көбейтіндісі керек болады. Теорема дәләденді.

Сонымен, d_1 және d_2 матрицалардың әрқайсысын басқа екі матрицаның көбейтіндісіне ұқсас етіп бөлуге болады, матрицалар басқа екі матрицалардың көбейтіндісіне бөлінбейтін болады, осылайша арифметикалық амалдар саны азаяды.

Қарым-қатынас (6) ДжФ Кули мен Дж.Тукейдің ТФТ (3) жұқару әдісімен бөлудің бірінші деңгейін білдіреді. Кері ТФТ жіңішкеруі де орындалады (3).

Егер d_1 және d_2 матрицалары мен теореманың шарттарын қанағаттандыратын болса, одан әрі кіші ДФТ-ге ыдырауға болады.

Мұнда ТФТ-ның бірнеше ерекше жағдайлары келтірілген.

Тікбұрышты ДФТ екенін ескеріңіз:

$$\hat{f}(m_1,\dots,m_s) = \frac{1}{N_1 \cdots N_s} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \cdots \sum_{k_s=0}^{N_s-1} f_{k_1,\dots,k_s} e^{-2\pi i\left(m_1 \frac{k_1}{N_1} + \cdots + m_1 \frac{k_s}{N_s}\right)} \quad \left(0 \le m_j < N_j,\ j = 1,\dots,s\right) \tag{2}$$

және

$$f_{k_1,\dots k_s} = \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \cdots \sum_{m_s=0}^{N_s-1} \hat{f}(m_1,\dots,m_s) e^{2\pi i\left(m_1 \frac{k_1}{N_1} + \cdots + m_1 \frac{k_s}{N_s}\right)} \quad \left(0 \le k_j < N_j,\ j = 1,\dots,s\right) \tag{3}$$

Диогональді матрицаға сәйкес келеді

$$d = \begin{pmatrix} N_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & N_s \end{pmatrix}.$$

Егер N_j жұп, онда d матрицасы матрицаларға ыдырайды

$$d_1 = \begin{pmatrix} 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 2 \end{pmatrix},\ d = \begin{pmatrix} \frac{N_1}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{N_s}{2} \end{pmatrix},$$

егер N_j екінін дәрежелері болса, онда d -ны ыдыратып келесі өрнекті алуға болады

$$d_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 \end{pmatrix}.$$

Бұл ыдырау ТФТ-нің қолданысыына сәйкес келеді.

Қолданылған әдебиеттер

1. I. W. Cooly and I. W. Tukey, "An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series," *Mathematics and Computation,* vol. 90, no. 19, pp. 297-301, 1965.
2. Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков и Г. Н. Кобельков, Численные методы, М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007.
3. Ж. Н. Темиргалиева и Н. Темиргалиев , «Быстрые “алгебраические” преобразования Фурье на равномерно распределенных сетках,» *Изв. вузов. Матем.,* № № 5, p. 93–98, 2016.
4. А. Схрейвер, Теория линейного и целочисленного программирования, т. 1, М.: Мир, 1991, p. 360.
5. Э. Гекке, Лекции по теории алгебраических чисел, Москва -- Ленинград: Гос.изд-во техн.-теорет. литер., 1940.
6. Н. Темиргалиев, «Применение теории дивизоров к численному интегрированию периодических функций многих переменных,» *Матем. сб.,* т. 181, № 4, pp. 490-505, 1990.