УДК 517

ОЦЕНКИ СНИЗУ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ЛИУВИЛЛЯ-ВЕЙЛЯ

Тяпкин Александр Юрьевич
sanya_96_12@mail.ru
Магистрант
Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева
г. Астана, Казахстан
Научный руководитель – Джумабаева А.А.

Пусть $L_p = L_p[0,2\pi]$ $(1 \le p < \infty)$ пространство 2π - периодических измеримых функций, для которых $|f|^p$ интегрируема, и $L_\infty = C[0,2\pi]$- пространство 2π - периодических непрерывных функций с $\|f\|_\infty = \max\{|f(x),0 \le x \le 2\pi|\}$. .

Пусть функция $f \in L_1$ имеет ряд Фурье

$$f(x) \approx \sigma(f) := \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu(f)\cos\nu x + b_\nu(f)\sin\nu x).$$

Тогда ряд

$$\sigma(f,\lambda,\beta) := \sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu\left(a_\nu(f)\cos\left(\nu x + \frac{\pi\beta}{2}\right) + b_\nu(f)\sin\left(\nu x + \frac{\pi\beta}{2}\right)\right)$$

преобразованный ряд Фурье функции f, где $\lambda = \{\lambda_n\}$ данная последовательность положительных чисел, $\beta \in R$.

Функцию, ряд которой совпадает с $s(f,l,b)$ будем называть (λ,β)-производной функции f и обозначим $f^{(\lambda,\beta)}$. Если $\lambda_n = n^r, r > 0, \beta = r$, тогда $f^{(\lambda,\beta)} = f^{(r)}$ - дробные производные в смысле Вейля и для $\lambda_n = n^r, r > 0, \beta = r+1$, $f^{(\lambda,\beta)} \equiv \bar{f}^{(r)}$, где $\overline{f}$ – сопряженная функция f.

Основной задачей является нахождение оценок модулей гладкости функции с преобразованным рядом Фурье через модули гладкости исходной функции при разных параметрах $1 < p < q \le \infty$, для среднего значения ограниченной вариационной последовательности.

Определение. *Последовательность* $\lambda := \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *принадлежит классу* $\overleftarrow{GM}$ *если выполняется следующее условие*

$$\sum_{k=n}^{2n}|\lambda_k - \lambda_{k+1}| \le C|\lambda_{2n}|,$$

где константа C не зависит от n. Обозначим класс такой последовательности через $\overleftarrow{GM}$.

Лемма. Последовательность $\{\lambda_n\} \in \overleftarrow{GM}$, если существует константа $C > 0$ такая, что

1. $|\lambda_k| \le C|\lambda_k|$ для $n \le k \le 2n$,
2. $\sum_{k=n}^{N} |\Delta\lambda_k| \le C\left(|\lambda_N| + \sum_{k=n+1}^{N} \frac{|\lambda_k|}{k}\right)$ для $n < N$.

Любая неубывающая последовательность принадлежит $\overleftarrow{GM}$.

История вопроса.

Теперь определим следующую оценку $E_n(f^{(r)})_p$. Следующее неравенство было доказано для $r \in \mathrm{N}$ и $r > 0$:

$$n^r E_n(f)_p \le C(r) E_n(f^{(r)})_p, \ 1 \le p \le \infty.$$

Симонов и Тихонов получили оценки снизу наилучших приближений $f^{(r)}$:

$$\left(n^{r\tau} E_n^{\tau}(f)_p + \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{r\tau-1} E_k^{r\tau}(f)_p\right)^{1/\tau} \le C(r) E_n(f^{(r)})_p,$$

где $1 < p < \infty, \ \tau = \max(2, p)$.

Теперь приведем наш основной результат в виде теоремы.

Теорема. Пусть $1 < p < \infty$, $max(p,2) \le \tau < \infty$ и $\lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность положительных чисел таких, что $\lambda \in \overleftarrow{GM}$. Тогда для $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ выполняется

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_{2^k}^{\tau} - \lambda_{2^{k-1}}^{\tau}|\right)^{1/\tau} \le C|\lambda_{2^n}|$$

для всех n, где константа C не зависит от n.

Если для $f \in L_p$ существует функция $f^{(\lambda,\beta)} \in L_p$ со своим рядом Фурье $\sigma(f,\lambda,\beta)\ (\beta \in R)$, тогда

$$\| f^{(\lambda,\beta)} \|_p \ge C\left(\lambda_1^{\tau} E_o^{\tau}(f)_p + \sum_{\nu=1}^{\infty} |\lambda_{2^\nu}^{\tau} - \lambda_{2^{\nu-1}}^{\tau}| E_{2^{\nu-1}}^{\tau}(f)_p\right)^{1/\tau}$$

и

$$E_{2^{m-1}}(f^{(\lambda,\beta)})_p \ge C\left(\lambda_{2^{m-1}}^{\tau} E_{2^{m-1}}^{\tau}(f)_p + \sum_{\nu=m}^{\infty} |\lambda_{2^\nu}^{\tau} - \lambda_{2^{\nu-1}}^{\tau}| E_{2^{\nu-1}}^{\tau}(f)_p\right)^{1/\tau}.$$

Список использованных источников

1. R. DeVore, G. G. Lorentz, Constructive Approximation, Berlin: Springer-Verlag, 1993, P. 449.
2. A.A.Jumabayeva Sharp Ulyanov inequalities for generalized Liouville–Weyl derivatives,// Analysis Math. Vol. 43, Is. 2, 2017, P. 279-302
3. Song Ping Zhou, Ping Zhou, and Dan Sheng Yu The Ultimate Condition to Generalize Monotonicity for Uniform Convergence of Trigonometric Series. [Электронный ресурс] режим доступа: https://arxiv.org/pdf/math/0611805.pdf.