

Практикада  $\beta$  бұрышы  $0^0$ - тан  $180^0$ -қа дейін ( $-1 < \cos\beta < 1$ ) өзгереді, сондықтан  $\left| g \cos\beta - \frac{\lambda}{8} \frac{v_2^2}{R} \right|$  шамасының  $P_2$  қысымына әсері әжеуптеуір болады. [77] тура ағынды гидроэлеватордың араласу камерасының тиімді ұзындығы  $\ell_{\text{э.н.}} = (6 \div 7) d_{\text{э.н.}} = \alpha d_{\text{э.н.}}$  екені көрсетілетін (мұндағы  $d_{\text{к.с.}}$  – араласу камерасының диаметрі); сондықтан араласу камерасының соңындағы (II-II қимма) қысым:

$$P_2 = P_0 + \frac{\rho_0 v_0^2}{m} + \left(1 - \frac{1}{m}\right) \rho_n v_n^2 \cos^2 \alpha - \rho_2 \left[ v_2^2 + a \left( g \cos\beta - \frac{\lambda}{8} \frac{v_2^2}{R} \right) d_{\text{к.с.}} \right]. \quad (11)$$

Мұндағы кері есепті де [4 шығаруға болады: (10) өрнегінде  $P_2$  мәнін беріп, тура ағынды гидроэлеватордың араласу камерасының ұзындығын табамыз:

$$\ell_{\text{к.с.}} = \frac{P_2 - P_0 - \frac{\rho_0 v_0^2}{m} - \left(1 - \frac{1}{m}\right) \rho_n v_n^2 \cos^2 \alpha + \rho_2 v_2^2}{\rho_2 \left( g \cos\beta - \frac{\lambda}{8} \frac{v_2^2}{R} \right)}.$$

#### Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики ,ч.1.-М.:«Высшая школа», 1977,368 с.
2. Яблонский А.А. Курс теоретической механики , ч.2. - М.:«Высшая школа», 1977, 430 с.
3. Юфин А.П. Гидромеханизация.М., 1974,223 с.
4. Соколов Е.Я., Зингер Н.М., Струйные аппараты. М, Энергоиздат., 1989, 351 с.

УДК 532.529

### АПРОКСИМАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛО- И МАССООБМЕНА

**Нурбеков Айбат Жаксылыкулы**

[batinkenu@mail.ru](mailto:batinkenu@mail.ru)

Магистрант 1-го курса Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева, механико-математического факультета, кафедра механика, Нур-Султан, Казахстан  
Научный руководитель – Н.Ж.Джайчибеков

Рассматриваются различные формы уравнений Навье-Стокса, граничные условия для вихря, а также простейшая разностная схема для решения двумерного стационарного уравнения переноса ([1]). Плоское нестационарное течение несжимаемой вязкой жидкости описывается системой уравнений (обозначения общепринятые [2])

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

Здесь  $\rho = const$  и, в отличие от случая сжимаемой жидкости, уравнение неразрывности (1) не содержит производной по времени. Это приводит к тому, что система уравнений в целом имеет эллиптический тип, что создает дополнительные трудности при численном решении.

Действительно, аппроксимируя в уравнениях (2), (3) производные по времени разностями вперед, как показано в работе [3], можно вычислить значения  $u_{m,n}^{n+1}$ ,  $v_{m,n}^{n+1}$ , однако, при этом не гарантировано выполнение разностного аналога уравнения (1) и не ясно, как определить  $p_{m,n}^{n+1}$ . Одним из путей преодоления этих трудностей является переход к новым искомым функциям – вихрю  $\omega$  и функции тока  $\psi$ , определяемым формулами

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u \quad (5)$$

Дифференцируя по  $x$  уравнение (3) и вычитая из него продифференцированное по  $y$  уравнение (2), получим уравнение переноса вихря

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (6)$$

и, подставляя в определение вихря (4) формулы (5), получим уравнение для функции тока

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega \quad (7)$$

Таким образом, уравнения (5) - (7) образуют замкнутую систему для определения всех кинематических характеристик течения. Заметим, что, умножив уравнение (1) на  $\omega$  и сложив его с уравнением (6), можно привести последнее к виду

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial(u\omega)}{\partial x} + v \frac{\partial(v\omega)}{\partial y} = \nu \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (6^*)$$

который иногда оказывается предпочтительнее.

Для определения давления потребуется еще одно уравнение, которое можно получить из (2) и (3). Дифференцируя по  $x$  уравнение (2) и складывая его с продифференцированным по  $y$  уравнением (3), получим с учетом уравнения (1)

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 2\rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (8)$$

Выражая правую часть уравнения через функцию тока, можно записать его в виде

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 2\rho \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \quad (8^*)$$

Запись граничных условий для вихря и функции тока. Как правило, в задачах гидродинамики на границах расчетной области формируются условия для скорости и давления,

поэтому при расчете течения с помощью уравнений (5)-(7) возникает проблема формулировки граничных условий для  $\psi$  и  $\omega$ .

Пусть на какой-либо границы заданы проекции скорости  $u, v$ . Рассмотрим, например, горизонтальную границу  $y = 0$ , на которой заданы  $u_0(x), v_0(x)$ . Естественно, что условия для вихря и функции тока должны формулироваться на основе определяющих соотношений (4), (5), причем функция тока определена с точностью до постоянного слагаемого. Последнее означает, что в какой-либо точке ее можно задать произвольно. Если расчет начинается с точки  $x = 0, y = 0$ , то в ней значение  $\psi = \psi_{00}$  задается произвольно. Если же точка  $x = 0, y = 0$  является началом участка границы, то  $\psi_{00}$  определится из расчета предыдущего участка. Тогда на рассматриваемом участке границы  $y = 0, x > 0$  вследствие первого из первого из соотношений (5)

$$\psi_0 = \psi_{00} - \int_0^x v_0(x) dx$$

Здесь и далее нижним индексом 0 отмечаются значения величин на границе. Вблизи границы  $y = 0$  все искомые функции представим в виде рядов по степеням  $y$ :

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0 \frac{y^2}{2} + \dots \\ v &= v_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 y + \dots = v_0 - \frac{du_0}{dx} y + \dots \\ \psi &= \psi_0 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right)_0 \frac{y^2}{2} + \dots \\ \omega &= \omega_0 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right)_0 \frac{y^2}{2} + \dots \end{aligned}$$

Из второго соотношения (5) следует

$$\psi = \psi_0 + u_0 y + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 \frac{y^2}{2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0 \frac{y^3}{6} \dots$$

а подставляя  $\omega, u, v$  в виде рядов в (4), получим

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 = \frac{dv_0}{dx} - \omega_0; \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0 = -\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)_0$$

Подставляя последние соотношения в выражение для  $\psi$ , получим

$$\psi = \psi_0 + u_0 y + \left(\frac{dv_0}{dx} - \omega_0\right) \frac{y^2}{2} - \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)_0 \frac{y^3}{6} + \frac{d^2 u_0}{dx^2} \frac{y^3}{6} + \dots \quad (9)$$

Из этого разложения в ряд функции тока, полагая в нем  $y = h$  и удерживая требуемое количество членов, можно получить аппроксимацию граничного условия с требуемой точностью. Например, на непроницаемой степени ( $u_0 = v_0 = 0$ ), сохраняя члены до  $h^2$  включительно, получим условие  $\omega_0 = 2(\psi_0 - \psi_1)/h^2$ , а сохраняя члены с  $h^3$  и

аппроксимируя  $\frac{\partial \omega}{\partial y}$  разностью вперед, получим  $\omega_0 = 3(\psi_0 - \psi_1)/h^2 - \omega_1/2$ , где индексом 1 помечены значения  $\omega$  и  $\psi$  на расстоянии  $h$  от границы.

**Общий вид двумерного стационарного уравнения переноса.** Из уравнений баланса количества движения можно получить уравнение переноса вихря (6), которое в стационарном случае после замены скоростей  $u, v$  через функцию тока  $\psi$  может быть записано в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \omega \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \omega \right) = \nu \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (10)$$

При расчете течения вязкой жидкости одновременно с уравнением переноса вихря должно решаться и уравнение Пуассона для функции тока (7). При решении задачи теплообмена в движущейся жидкости одновременно с двумя упомянутыми уравнениями необходимо рассматривать и уравнение баланса энергии, а при решении задачи о распространении примеси (массопереноса) необходимо рассматривать уравнение баланса массы примеси.

Стационарное уравнение баланса энергии в движущейся вязкой жидкости при постоянных теплофизических характеристиках (теплопроводности  $\lambda$  и удельной теплоемкости  $c$ ) имеет вид

$$\rho c \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} T \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} T \right) \right] = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \rho \nu \Phi \quad (11)$$

где  $\epsilon$  - поступление тепла от внешних источников (например, излучением), а  $\Phi$  - диссипативная функция, характеризующая превращение механической энергии в тепло за счет внутреннего трения в жидкости.

$$\Phi = 4 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)^2$$

Перенос жидкостью примеси с учетом диффузии описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \xi \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \xi \right) = D \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) + I \quad (12)$$

где  $D$  - коэффициент диффузии,  $I$  - интенсивность источников примеси (например, за счет химических реакций). Все уравнения переноса (10) - (12) можно записать единообразно:

$$a_\varphi \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \varphi \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \varphi \right) \right] = b_\varphi \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + q_\varphi \quad (13)$$

где  $\varphi$  - переносимая субстанция,  $a_\varphi, b_\varphi, q_\varphi$  - соответствующие ей свойства, причем  $a_\varphi, b_\varphi \geq 0$ . Члены в левой части уравнения описывают перенос  $\varphi$  вместе с жидкостью и называются конвективными, члены справа в скобках с коэффициентом  $b_\varphi$  называются диффузионными, а  $q_\varphi$  называют источником. Уравнение (13) записано в предположении постоянства  $a_\varphi$  и  $b_\varphi$ . Если они переменны, запись уравнений и их аппроксимация несколько усложняются.

**Простейшая разностная схема для двумерного стационарного уравнения переноса.** Излагаемую здесь схему иногда называют схемой Патанкара-Сполдинга. Повторим это описание с небольшими отклонениями. Вывод разностных уравнений проведем интегральным методом, используя неравномерную прямоугольную сетку, фрагмент которой изображен на Рис.1.

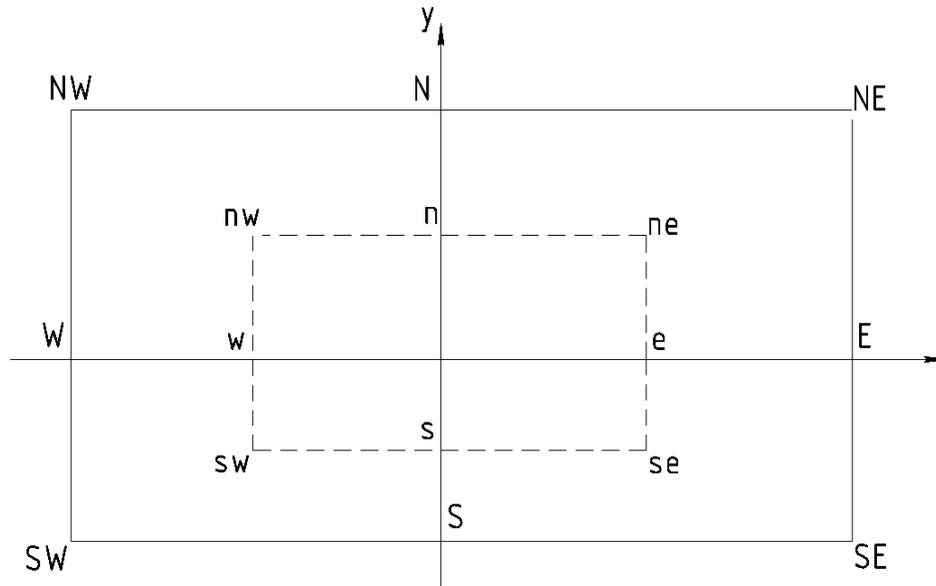


Рисунок 1. Фрагмент используемой сетки.

Значения функций в узлах сетки будем отмечать не цифровыми, а буквенными индексами в соответствии с рисунком. Для получения разностных уравнений проинтегрируем уравнение (13) по «контрольному объему» - прямоугольнику, стороны которого делят пополам расстояния между узлами основной сетки. На Рис.1 этот прямоугольник изображен штриховыми линиями, а его вершины обозначены двумя строчными буквами.

Интеграл от конвективных членов уравнения можно записать в виде

$$I_{conv} = a_\varphi \int_{y_s}^{y_n} \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \varphi \right)_e - \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \varphi \right)_w \right] dy - a_\varphi \int_{x_w}^{x_e} \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \varphi \right)_n - \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \varphi \right)_s \right] dx \quad (14)$$

Здесь нижние индексы около скобок указывают, по какой стороне прямоугольника проводится интегрирование. Видно, что формула содержит четыре однотипных интеграла. Рассмотрим подробно аппроксимацию первого из них. Эта аппроксимация проводится по схеме, ориентированной против потока, а именно

$$I_e = \int_{y_s}^{y_n} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \varphi \right)_e dy \approx \varphi_* (\psi_{ne} - \psi_{se})$$

где  $\varphi_* = \varphi_P$ , если  $\psi_{ne} > \psi_{se}$ , или  $\varphi_* = \varphi_E$ , если  $\psi_{ne} \leq \psi_{se}$ . Заметим, что знак разности  $\psi_{ne} - \psi_{se}$  совпадает со знаком скорости  $u$  и потому принятое правило означает, что множитель перед этой разностью берется из того узла сетки, со стороны которого течет жидкость. Именно поэтому схема называется ориентированной против потока. Изложенное правило может быть сформулировано без использования условного оператора:

$$I_e \approx \varphi P \frac{|\psi_{ne} - \psi_{se}| + \psi_{ne} - \psi_{se}}{2} - \varphi E \frac{|\psi_{ne} - \psi_{se}| - \psi_{ne} + \psi_{se}}{2}$$

Представив аналогично и остальные интегралы в (14), можно записать

$$I_{conv} \approx \varphi P (A_E + A_W + A_N + A_S) - (\varphi_E C_E + \varphi_W C_W + \varphi_N C_N + \varphi_S C_S)$$

где

$$\begin{aligned}
A_E &= a_\varphi \left( |\psi_{ne} - \psi_{se}| + \psi_{ne} - \psi_{se} \right), C_E = a_\varphi \left( |\psi_{ne} - \psi_{se}| - \psi_{ne} + \psi_{se} \right) \\
A_W &= a_\varphi \left( |\psi_{nw} - \psi_{sw}| - \psi_{nw} + \psi_{sw} \right), C_W = a_\varphi \left( |\psi_{nw} - \psi_{sw}| + \psi_{nw} - \psi_{sw} \right) \\
A_N &= a_\varphi \left( |\psi_{ne} - \psi_{nw}| - \psi_{ne} - \psi_{nw} \right), C_N = a_\varphi \left( |\psi_{ne} - \psi_{nw}| + \psi_{ne} - \psi_{nw} \right) \\
A_S &= a_\varphi \left( |\psi_{se} - \psi_{sw}| + \psi_{se} - \psi_{sw} \right), C_S = a_\varphi \left( |\psi_{se} - \psi_{sw}| - \psi_{se} + \psi_{sw} \right)
\end{aligned}$$

Очевидно, что все эти коэффициенты не отрицательны и  $A_E + A_W + A_N + A_S = C_E + C_W + C_N + C_S$ .

#### Список использованных источников

1. Г.Н.Дульнев, С.В.Тихонов. Основы теории тепломассообмена, – СПб: СПбГУ, ИТМО, 2010. – 93с.
2. В.Г.Зверев, В.Д.Гольдин. Разностная схема для решения конвективно – диффузионных задач тепломассообмена. Вычислительные технологии, том 7, №6, 2002.
3. С.К.Матвеев. Введение в вычислительную гидроаэромеханику. Учебное пособие. – Санкт-Петербург: ООО Свое издательство, 2018. – с. 47-54.

УДК 532.529

### ЧИСЛЕННАЯ АППРОКСИМАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Оразбаева Фариза Жұмағалиқызы

[zhumagali779@gmail.com](mailto:zhumagali779@gmail.com)

Магистрант 1-го курса Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева, механико-математического факультета, кафедра механика, Нур-Султан, Казахстан  
 Научный руководитель – Н.Ж.Джайчибеков

В работе рассматривается пограничный слой в гидродинамике – тонкого слоя жидкости на обтекаемой поверхности, в котором скорость быстро уменьшается до нулевого значения на стенке, условия прилипания. Течение во внешней области можно рассматривать как течение идеальной (невязкой) жидкости. Записаны уравнения стационарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости и граничные условия на поверхности тела.

Приведенные уравнения аппроксимируются на шаблоне, использующем узлы основной и вспомогательной сеток. Уравнение импульса аппроксимируется на шеститочечном шаблоне основной сетки с использованием одного узла вспомогательной сетки.

Пограничный слой в гидродинамике – это тонкий слой жидкости на обтекаемой поверхности, в котором скорость быстро уменьшается до нулевого значения на стенке, чтобы выполнить условие прилипания. Внутри этого слоя силы вязкого трения велики, а за его пределами – пренебрежимо малы, так что течение во внешней области можно рассматривать как течение идеальной (невязкой) жидкости.

**Постановка задачи о расчете пограничного слоя.** Уравнения стационарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости имеют вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$