$$A_E = a_\varphi\left(\left|\psi_{ne} - \psi_{se}\right| + \psi_{ne} - \psi_{se}\right), C_E = a_\varphi\left(\left|\psi_{ne} - \psi_{se}\right| - \psi_{ne} + \psi_{se}\right)$$
$$A_W = a_\varphi\left(\left|\psi_{nw} - \psi_{sw}\right| - \psi_{nw} + \psi_{sw}\right), C_W = a_\varphi\left(\left|\psi_{nw} - \psi_{sw}\right| + \psi_{nw} - \psi_{sw}\right)$$
$$A_N = a_\varphi\left(\left|\psi_{ne} - \psi_{nw}\right| - \psi_{ne} - \psi_{nw}\right), C_N = a_\varphi\left(\left|\psi_{ne} - \psi_{nw}\right| + \psi_{ne} - \psi_{nw}\right)$$
$$A_S = a_\varphi\left(\left|\psi_{se} - \psi_{sw}\right| + \psi_{se} - \psi_{sw}\right), C_S = a_\varphi\left(\left|\psi_{se} - \psi_{sw}\right| - \psi_{se} + \psi_{sw}\right)$$

Очевидно, что все эти коэффициенты не отрицательны и $A_E + A_W + A_N + A_s = C_E + C_w + C_N + C_S$.

Список использованных источников

1. Г.Н.Дульнев, С.В.Тихонов. Основы теории тепломассообмена, – СПб: СПбГУ, ИТМО, 2010. – 93с.

2. В.Г.Зверев, В.Д.Гольдин. Разностная схема для решения конвективно – диффузионных задач тепломассообмена. Вычислительные технологии, том 7, №6, 2002.

3. С.К.Матвеев. Введение в вычислительную гидроаэромеханику. Учебное пособие. – Санкт-Петербург: ООО Свое издательство, 2018. – с. 47-54.

УДК 532.529

ЧИСЛЕННАЯ АППРОКСИМАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Оразбаева Фариза Жұмағалиқызы

zhumagali779@gmail.com

Магистрант 1-го курса Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева, механико-математического факультета, кафедра механика, Нур-Султан, Казахстан

Научный руководитель – Н.Ж.Джайчибеков

В работе рассматривается пограничный слой в гидродинамике – тонкого слоя жидкости на обтекаемой поверхности, в котором скорость быстро уменьшается до нулевого значения на стенке, условия прилипания. Течение во внешней области можно рассматривать как течение идеальной (невязкой) жидкости. Записаны уравнения стационарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости и граничные условия на поверхности тела.

Приведенные уравнения аппроксимируется на шаблоне, использующем узлы основной и вспомогательной сеток. Уравнение импульса аппроксимируется на шеститочечном шаблоне основной сетки с использованием одного узла вспомогательной сетки.

Пограничный слой в гидродинамике – это тонкий слой жидкости на обтекаемой поверхности, в котором скорость быстро уменьшается до нулевого значения на стенке, чтобы выполнить условие прилипания. Внутри этого слоя силы вязкого трения велики, а за его пределами – пренебрежимо малы, так что течение во внешней области можно рассматривать как течение идеальной (невязкой) жидкости.

Постановка задачи о расчете пограничного слоя. Уравнения стационарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости имеют вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon}{\partial y} = 0 \quad , \qquad (1)$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}=U\frac{dU}{dx}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (2)$$

Здесь $u(x,y)$, $\upsilon(x,y)$ – искомые компоненты скорости, $U(x)$ – известная скорость жидкости вне пограничного слоя. Решение ищется в области $x^0 < x \le L,\ 0 < y < \infty$.

Для этих уравнений формулируются граничные условия

a) При $y=0: u=\upsilon=0$ – условия «прилипания» на обтекаемой поверхности;

b) При $y\to\infty: u=u^0(y)$ – условие сопряжения с внешним потоком;

c) При $x=x^0: u=u^0(y)$ – задание распределения скорости в начальном сечении.

Асимптотическое условие b) при численном счете формулируется на конечном расстоянии от поверхности: b) при $y\subset\Delta: u=U$, где Δ заведомо превосходит толщину пограничного слоя, что контролируется дополнительным условием: $\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=\Delta}\prec\varepsilon$, где ε – заданная малая величина.

Уравнение (2) имеет параболический тип и аналогично уравнению теплопроводности, причем роль времени здесь играет координата x. Расчет можно осуществлять последовательными шагами по x, поскольку вверх по течению возмущения не передаются. Следует заметить, что в данной постановке расчет может проводиться пока $u\succ 0$, т.е. до точки отрыва пограничного слоя.

Аппроксимация уравнений и порядок расчета. Кроме прямоугольной основной сетки

$$x^n=x^0+nh_x,\ y_m=mh_y,\ n=0,1,2,...,N,\ m=0,1,2,...,M,$$

в узлах которой определяется продольная скорость u_m^n, будем использовать и вспомогательную сетку

$$x^{n+1/2}=x^0+(n+1/2)h_x,\ y_m=mh_y,$$

в узлах которой будем определять поперечную скорость $u_m^{n+1/2}$. Шаги сетки и число узлов связаны с размерами области, где ищется решение: $h_x=L/N, h_y=\Delta/M$.

Уравнение (1) аппроксимируется на шаблоне, использующем узлы основной и вспомогательной сеток:

$$\frac{u_{m+1}^{n+1}-u_{m+1}^{n}+u_{m}^{n+1}-u_{m}^{n}}{2h_x}+\frac{\upsilon_{m+1}^{n+1/2}-\upsilon_{m}^{n+1/2}}{h_y}=0. \qquad (1^*)$$

Уравнение (2) аппроксимирует на шеститочечном шаблоне основной сетки с использованием одного узла вспомогательной сетки:

$$0{,}5(u_m^n+u_m^{n+1})\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{h_x}+\upsilon_m^{n+1/2}\frac{u_{m+1}^n-u_{m-1}^n+u_{m+1}^{n+1}-u_{m-1}^{n+1}}{4h_y}=$$
$$\left(U\frac{dU}{dx}\right)^{n+1/2}+\nu\frac{u_{m-1}^n-2u_m^n+u_{m+1}^n+u_{m-1}^{n+1}-2u_m^{n+1}+u_{m+1}^{n+1}}{2h_y^2} \qquad (2^*)$$

Это разностное уравнение аппроксимирует уравнение (2) в точке вспомогательной сетки $(x^{n+1/2}, y_m)$ также со вторым порядком $O(h_x^2, h_y^2)$.

Линейное уравнение (1*) легко разрешается относительно $\upsilon_{m+1}^{n+1/2}$ и с использованием граничного условия $\upsilon_0^{n+1/2} = 0$ позволило бы определить поперечную скорость $\upsilon_{m+1}^{n+1/2}$ при всех m, если бы были известны значения продольной скорости u_m^{n+1}, однако, уравнение (2*) нелинейно, вследствие чего приходится применять последовательные приближения.

Если линеаризовать уравнение (2*) полагая, что в левой его части коэффициенты $0{,}5(u_m^n + u_m^{n+1})$ и $\upsilon_m^{n+1/2}$ известны из предыдущего $(k-1)$-го приближения, то его можно записать в виде пригодном для скалярной прогонки:

$$\alpha_m \left(u_{m-1}^{n+1}\right)^k - \beta_m \left(u_m^{n+1}\right)^k + \gamma_m \left(u_{m+1}^{n+1}\right)^k = \delta_m, (m = 1,2..., \mathrm{M}-1), \qquad (3)$$

$$\alpha_m = \frac{v}{2h_y^2} + \frac{\left(u_m^{n+1}\right)^{k-1}}{4h_y}, \beta_m = \frac{v}{h_y^2} + \frac{u_m^n + \left(u_m^{n+1}\right)^{k-1}}{2h_x}, \gamma_m = \frac{v}{2h_y^2} - \frac{\left(\upsilon_m^{n+1/2}\right)^{k-1}}{4h_y}$$

$$\delta_m = \left(\upsilon_m^{n+1/2}\right)^{k-1} \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{4h_y} - u_m^n \frac{u_m^n + \left(u_m^{n+1}\right)^{k-1}}{2h_x} - \left(U \frac{dU}{dx}\right)^{n+1/2} - v \frac{u_m^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h_y^2}$$

Здесь верхние индексы k, $k-1$` означают номер итерации (величины без таких индексов во время итераций не меняются, поскольку к этому времени уже окончательно определены).

В качестве нулевого приближения для u_m^{n+1} берется u_m^n а для $\upsilon_m^{n+1/2}$ берется 0 или $\upsilon_m^{n-1/2}$.

Расчет одного шага по x состоит из следующих этапов:

1) Решение относительно $\left(u_m^{n+1}\right)^k (m = 1,2..., M)$ методом прогонки системы уравнений (3)
2) Определение из уравнений (1*) (в этом уравнении все величины относятся к k-ой итерации) поперечной скорости $\left(\upsilon_{m+1}^{n+1/2}\right)^k, (m = 1,2..., M)$;
3) Проверка достаточной итераций либо по заданному их числу либо по сходимости (обычно достаточно трех итераций).
   При недостаточности итераций выполнение пунктов 1-3 повторяется, а при достаточности итераций следует пересылка u_m^{n+1}, $\upsilon_m^{n+1/2}$ на место u_m^n, $\upsilon_m^{n-1/2}$ и запись в файл результатов (запись результатов возможна не при каждом n).

Замечания.

1. Дополнительное условие $\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=\Delta} \prec \varepsilon$ должно выполняться на каждом шаге по x.

   Нарушение этого условия свидетельствует о том, что толщина пограничного слоя δ превосходит и, начиная с этого x расчет необходимо проводить с увеличенным Δ, т.е. при том же h_y увеличить M.
2. Как правило, толщина пограничного слоя быстро увеличивается вниз по потоку, а величина Δ должна заведомо превосходить эту толщину. Поэтому может случиться, что в начале пограничного слоя в пределах слоя окажется мало узлов сетки и точность

расчета окажется недостаточной, а больше число узлов сетки вне пограничного слоя будут бесполезным.

Чтобы этого избежать, рекомендуется в уравнениях (1), (2) перейти к новым независимым переменам $\xi = x, \eta = y / b(x)$, где $b(x)$ - возрастающая функция, рост которой согласован с предполагаемым ростом толщины пограничного слоя $\delta(x)$. После этого аппроксимируются уже преобразованные уравнения, а дополнительное условие формулируется в новых переменных: $\left|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|_{\eta=\Delta\eta}$

Список использованных источников

1. С.К.Матвеев. Введение в вычислительную гидроаэромеханику. Учебное пособие. – Санкт-Петербург: ООО «Свое издательство», 2018. – 64 с.
2. Л.Г.Лойцянский. Ламинарный пограничный слой. Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 479 с.
3. Г.Шлихтинг. Теория пограничного слоя. Москва: Наука, 1974. 712 с.

УДК 539.3

ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ УДАРНО-ВИБРАЦИОННОЙ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ

Орынбасарова Гульсум Ардаковна

orynbassarova.gulsum@gmail.com

Магистрант кафедры «Механика» ЕНУ им.Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан

Научный руководитель – М.Алимжанов

Вибрационные площадки с горизонтально направленными колебаниями применяют для уплотнения подвижных смесей при формовании железобетонных изделий. При горизонтальных колебаниях обеспечивается наиболее качественное изготовление тонкостенных длинномерных изделий.

Рассмотрим динамическую модель горизонтальной виброплощадки, показанной на рисунке 1.