

2. Вибрации в технике. 4 том. Справочник. М., изд-во «Машиностроение», 1981, 509 стр.
3. Б. В. Гусев, А. Д. Деминов, Б. И. Крюков и др. «Ударно- вибратционная технология уплотнения бетонных смесей». - М.: Стройиздат, 1982, 152 стр.
4. Бауман В. А., Быховский И. И. «Вибрационные машины и процессы в строительстве»- М.: Высшая школа, 1977, 255 стр.
5. Пановко Г. Я. «Динамика вибрационных технологических процессов»—М.: Ижевск, 2006, 176 стр.
6. Бабицкий В.И. «Теория виброударных систем». - М.: Москва, 1958, 168 стр.
7. Алимжанов М. Д., Рахметова А. Т., Шайхислам А, Костюченков Н. В.// Особенности упругой системы горизонтальной виброплощадки// «Сборник статей по материалам международной научно- практической конференции, посвященной 75-летию Курганской ГСХА имени Т. С. Мальцева» г. Курган 2019.

УДК 531

ТҮТҚЫР ҮЙКЕЛІС КҮШІ ЕСКЕРІЛГЕН ФИЗИКАЛЫҚ МАЯТНИКТИҢ ҚОЗҒАЛЫСЫ

Серикбаева Бибигүл Алиевна

bibigul_2589@mail.ru

Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ Механика кафедрасының магистранты, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекші – М.Ә.Берсүгір

Табиғатта кездесетін тербелмелі процестердің алуан түрлілігіне қарамастан, осы құбылыстардың заңдылықтары мен оларды зерттеудің математикалық әдістерінің ортақтығы бар. Тербелмелі жүйелерді зерттеудің ең ыңғайлы модельдерінің бірі – физикалық маятник.

Физикалық маятниктің тербелісін сипаттайтын дифференциалдық теңдеуді тұрақты өс айналасындағы қатты дененің айналмалы қозғалысы динамикасының негізгі теңдеуін қолдану арқылы алады. Егер тербелмелі жүйеге гармоникалық сыртқы момент пен тұтқыр үйкеліс күштерінің тежеу моменті әсер ететін болса, онда маятниктің тербелісін сипаттайтын дифференциалдық теңдеуді келесі түрде жазуға болады:

$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = \omega^2 \theta_0 \sin \omega t. \quad (1)$$

мұндағы φ – маятниктің тепе-теңдік қалпынан ауытқу бұрышы; t – уақыт; β – тербелмелі жүйеде энергияның таралуын сипаттайтын өшу коэффициенті; ω_0 – маятниктің өшпелі емес тербелісінің меншікті жиілігі; ω, θ_0 – маятникке әсер ететін сыртқы күш моментінің жиілігі мен бұрыштық амплитудасы. (1) теңдеуінің оң жағында тұрған $\theta(t) = \theta_0 \sin \omega t$ шамасы сыртқы күш моментіне пропорционал. Егер күштер моменті тұрақты болса, онда $\theta t = 1$ маятникті көлденең күйге бағыттайтын күштердің сыртқы моментіне сәйкес келеді ($\varphi = 90^\circ$). Сыртқы моменттің ең төменгі жиілігі шектерінде маятник квазистатикалық сыртқы моменттің өзгеруін қадағалайды. Яғни, мәжбүр күштің төмен жиілігі мен амплитудасында тербелістер радианмен өлшенетін сыртқы момент θ_0 амплитудасымен болады [1,2].

(1) түріндегі дифференциалдық теңдеу сызықты емес болғандықтан, оны зерттеудің аналитикалық әдістері үлкен математикалық қиындықтарға тап болады. Сондықтан, бұл жұмыста есептің аналитикалық шешім алу үшін, жалпыланған функциялар теориясына

негізделген профессор А.Н.Тюреходжаев құрған сызықты емес дифференциалдық теңдеулерді бөліктеп дискретизациялау әдісі қолданылды [3].

Физикалық маятниктің қозғалыс теңдеуін (1) төмендегі бастапқы шарттармен бірге қарастырамыз:

$$t=0, \varphi = 0_0, \dot{\varphi} = \varphi_0 \quad (2)$$

(1)-(2) есебін шешу үшін, сызықты емес дифференциалдық теңдеулерді бөліктеп дискретизациялау әдісін қолданып,

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} &= \frac{\omega_0^2}{2} \sum_{i=1}^n (t_i + t_{i+1}) \{ [\theta_0 \sin \omega t_i - \sin \varphi(t_i)] \\ \delta(t - t_i) - [\theta_0 \sin \omega t_{i+1} - \sin \varphi(t_{i+1})] \delta(t - t_{i+1}) \}, \end{aligned} \quad (3)$$

аламыз, мұндағы $\delta(t)$ – Дирактың дельта функциясы.

(2) түрдегі теңдеуінің жалпы шешімі төмендегіше өрнектеледі:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= C_2 - \frac{1}{2\beta} C_1 e \\ e^{-2\beta t} - \frac{\omega_0^2}{4\beta} \sum_{i=1}^n (t_i + t_{i+1}) \{ (e^{2\beta(t_i-t)} - 1) [\theta_0 \sin \omega t_i - \sin \varphi(t_i)] * \\ H(t - t_i) - (e^{2\beta(t_{i+1}-t)} - 1) [\theta_0 \sin \omega t_{i+1} - \sin \varphi(t_{i+1})] H(t - t_{i+1}) \}, \end{aligned} \quad (4)$$

мұндағы $H(t)$ – Хевисайд функциясы, C_1 және C_2 – интегралдау тұрақтылары.

(3) бастапқы шарттарын пайдаланып, теңдеудің шешімін мына түрде аламыз:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi_0 + \frac{1}{2\beta} \dot{\varphi}_0 (1 - e^{-2\beta t}) - \frac{\omega_0^2}{4\beta} \sum_{i=1}^n (t_i + t_{i+1}) \{ (e^{2\beta(t_i-t)} - 1) * [\theta_0 \sin \omega t_i - \sin \varphi(t_i)] H(t - t_i) \\ (e^{2\beta(t_{i+1}-t)} - 1) * [\theta_0 \sin \omega t_{i+1} - \sin \varphi(t_{i+1})] H(t - t_{i+1}) \}, \end{aligned} \quad (5)$$

Физикалық маятниктің $\varphi(t)$ ауытқу бұрышының t_i ($i = 1, 2, 3$) мезетіндегі аналитикалық өрнектері төмендегіше анықталады:

$$\begin{aligned}\varphi(t_1) &= \varphi_0 + \frac{1}{2\beta} \dot{\varphi}(1 - e^{-2\beta t_1}), \\ \varphi(t_2) &= \varphi_0 + \frac{1}{2\beta} \dot{\varphi}(1 - e^{-2\beta t_2}) - \frac{\omega_0^2}{4\beta} (t_1 + t_2)(e^{2\beta(t_1-t_2)} - 1)[\theta_0 \sin \omega t_1 - \sin \varphi(t_1)], \\ \varphi(t_3) &= \varphi_0 + \frac{1}{2\beta} \dot{\varphi}(1 - e^{-2\beta t_3}) - \frac{\omega_0^2}{4\beta} (t_1 + t_2)(e^{2\beta(t_1-t_3)} - 1)*[\theta_0 \sin \omega t_1 - \sin \varphi(t_1)] \\ &\quad - \frac{\omega_0^2}{4\beta} (t_3 - t_1)(e^{2\beta(t_2-t_3)} - 1)[\theta_0 \sin \omega t_2 - \sin \varphi(t_2)]\end{aligned}$$

Математикалық индукция әдісін пайдаланып ізделінді функцияның $t_i (i = 1, n)$ нүктедегі өрнегін мына түрде аламыз:

$$\begin{aligned}\varphi(t_j) &= \varphi_0 + \frac{1}{2\beta} \dot{\varphi}_0 + (1 - e^{-2\beta t_j}) - \frac{\omega_0^2}{4\beta} (t_1 + t_2)(e^{2\beta(t_1-t_j)} - 1)*[\theta_0 \sin \omega t_1 - \sin \varphi(t_1)] \\ &\quad - \frac{\omega_0^2}{4\beta} \sum_{i=1}^{j-1} (t_{i+1} - t_{i-1})(e^{2\beta(t_i-t_j)} - 1)*[\theta_0 \sin \omega t_i - \sin \varphi(t_i)].\end{aligned}\quad (6)$$

Алдымен маятниктің еркін тербелісін қарастырамыз. Егер энергияның таралуы болмаса және тербеліс амплитудасы үлкен болмаса, онда маятник тербелмелі жүйенің параметрлеріне (сызықтық осциллятор жиілігі) тәуелді жиілікпен гармоникалық тербелістер жасайды. Амплитуда артқан сайын, тербелістер сызықты емес болады, бірақ олар түрі жағынан гармоникалыққа жақын. Бұл жағдайда гармоникалық осциллятордың фазалық траекториясы, оның сызықтық тербелісі жағдайындағыдай, фазалық жазықтықта эллипс болып табылады (1-сурет).

Мұндағы ω, θ_0 – маятникке әсер ететін сыртқы күш моментінің жиілігі мен бұрыштық амплитудасы. (7) теңдеуінің оң жағында тұрған $\theta(t) = \theta_0 \sin \omega t$ сыртқы күштер моментіне пропорционал. Егер күштер моменті тұрақты болса, онда $\theta = 1$ маятникті көлденең күйге бағыттайтын күштердің сыртқы моментіне сәйкес келеді $\varphi = 90^\circ$. Сыртқы моментінің өте төмен жиілігінің шектерінде маятник квазистатикалық сыртқы моменттінің өзгеруін қадағалайды. Яғни, күшті төмен жиілігі мен амплитудасында тербелістер радианмен өлшенген сыртқы момент θ_0 – амплитудасымен жүреді.

Физикалық маятник қозғалыс теңдеуін (2) бастапқы шарттармен бірге қарастырамыз

(7)-(2) есебін шешу үшін, сызықты емес дифференциалдық теңдеулерді бөліктеп дискретизациялау әдісін қолданып

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} &= \frac{\omega_0^2}{2} \sum_{i=1}^n (t_i + t_{i+1}) [\theta_0 \sin \omega t_i - \sin \varphi(t_i)] \\ &\quad \delta(t - t_i) - [\theta_0 \sin \omega t_{i+1} - \sin \varphi(t_{i+1})] \delta(t - t_{i+1}),\end{aligned}\quad (8)$$

(8) теңдеуінің жалпы шешімі төмендегіше өрнектеледі

$$\varphi(t) = C_2 - \frac{1}{2\beta} C_1 e^{-2\beta t} - e^{-2\beta t} - \frac{\omega_0^2}{4\beta} \sum_{i=1}^n (t_i + t_{i+1}) \left\{ (e^{2\beta(t_i-t)} - 1) [\theta_0 \sin \omega t_i - \sin \varphi(t_i)] * H(t - t_i) - (e^{2\beta(t_{i+1}-t)} - 1) [\theta_0 \sin \omega t_{i+1} - \sin \varphi(t_{i+1})] H(t - t_{i+1}) \right\}, \quad (9)$$

(2) басапқы шарттарын пайдаланып, теңдеудің шешеімін мына түрде аламыз.

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \frac{1}{2\beta} \dot{\varphi}_0 (1 - e^{-2\beta t}) - \frac{\omega_0^2}{4\beta} \sum_{i=1}^n (t_i + t_{i+1}) \left\{ (e^{2\beta(t_i-t)} - 1) * [\theta_0 \sin \omega t_i - \sin \varphi(t_i)] H(t - t_i) + (e^{2\beta(t_{i+1}-t)} - 1) * [\theta_0 \sin \omega t_{i+1} - \sin \varphi(t_{i+1})] H(t - t_{i+1}) \right\}. \quad (10)$$

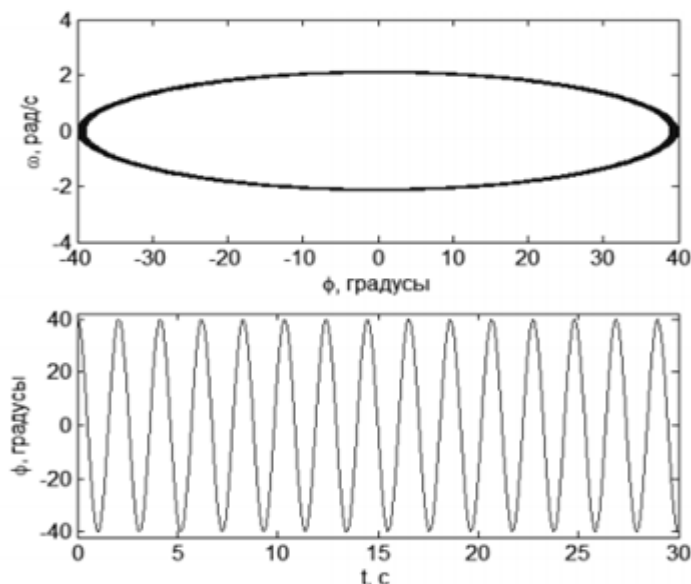
Физикалық маятниктің $\varphi(t)$ –ауытқу бұрышының t_i ($i = 1, 3$) мезетіндегі аналитикалық өрнектерді төмендегіше анықталады.

$$\varphi(t_1) = \varphi_0 + \frac{1}{2\beta} \dot{\varphi}_0 (1 - e^{-2\beta t_1}),$$

$$\varphi(t_2) = \varphi_0 + \frac{1}{2\beta} \dot{\varphi}_0 (1 - e^{-2\beta t_2}) - \frac{\omega_0^2}{4\beta} (t_1 + t_2) (e^{2\beta(t_1-t_2)} - 1) [\theta_0 \sin \omega t_1 - \sin \varphi(t_1)],$$

$$\varphi(t_3) = \varphi_0 + \frac{1}{2\beta} \dot{\varphi}_0 (1 - e^{-2\beta t_3}) - \frac{\omega_0^2}{4\beta} (t_1 + t_2) (e^{2\beta(t_1-t_3)} - 1) * [\theta_0 \sin \omega t_1 - \sin \varphi(t_1)]$$

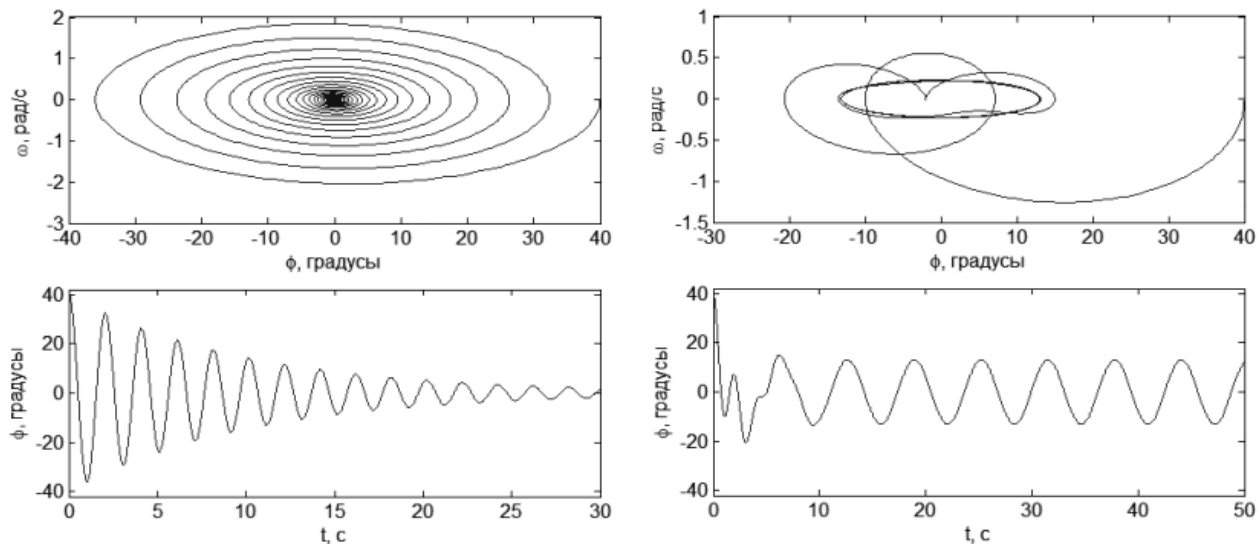
$$- \frac{\omega_0^2}{4\beta} (t_3 - t_1) (e^{2\beta(t_2-t_3)} - 1) [\theta_0 \sin \omega t_2 - \sin \varphi(t_2)].$$



1-сурет. Маятниктің еркін тербелісі ($l = 1 \text{ м}$, $m = 1 \text{ кг}$, $\beta = 0$, $\varphi_0 = 40^\circ$)

Жүйеде энергияның жоғалуы тербелістердің төмендеуіне әкеледі, ал осциллятордың фазалық траекториясы «фокус» типті арнайы нүктесіне жиналатын спираль түрінде болады (2-сурет).

Егер сыртқы күштердің моменті үлкен болмаса, ал жүйедегі үйкеліс айтарлықтай болса, онда резонанстан алыс жиіліктердегі тұрақты күйдегі мәжбүр тербелістердің амплитудасы аз болады. Онда маятник сызықты осциллятор сияқты, сызықтық осциллятордың резонанстық сипаттамаларына тәуелді мәжбүрлеуші күш жиілігі мен амплитудасы бар гармоникалық тербеліс жасайды (2,б-сурет). Сыртқы күштің тұрақты амплитудасында, осциллятордың жауабы ең үлкен, егер жиілік осциллятордың меншікті жиілігімен сәйкес келсе.



а)

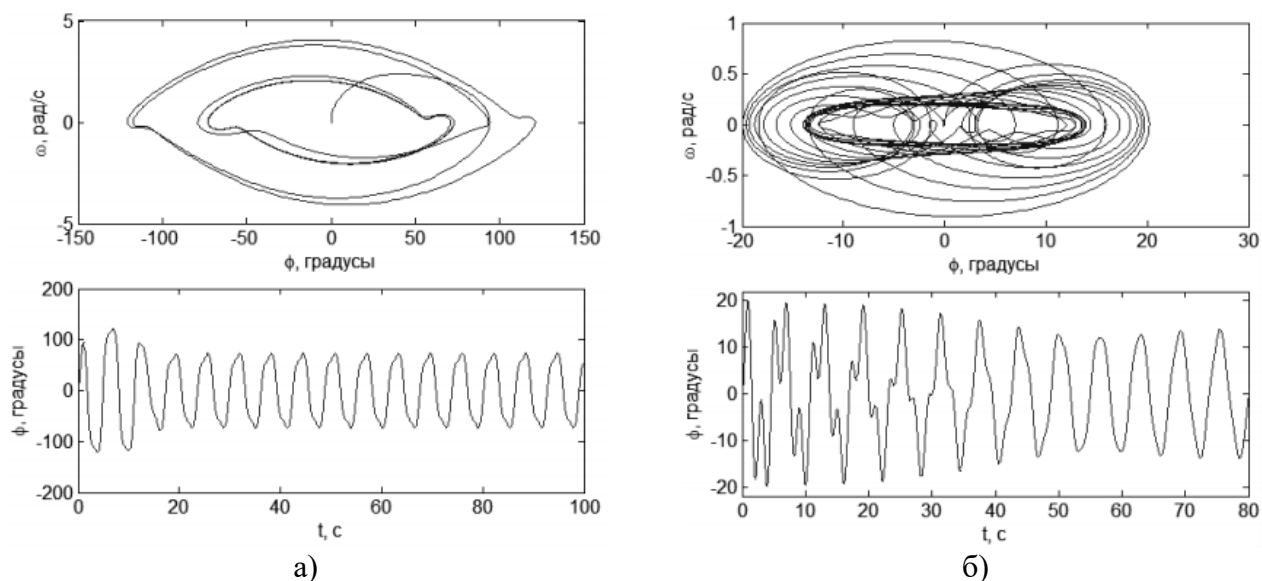
б)

2-сурет. Фазалық траектория және маятниктің ауытқу бұрышының графигі:

а) өшірілген тербелістер; б) мәжбүрлі гармоникалық тербелістер

$$(\omega = 1 \text{ рад/с}, \theta_0 = 12^\circ, \beta = 0,4, \varphi_0 = 40^\circ).$$

Егер сыртқы әсердің амплитудасы аз болмаса немесе үйкеліс әлсіз болса, онда маятниктің тербелісі гармоникалық бола бермейді (3,а,б-сурет).



3-сурет. Фазалық траектория және маятниктің ауытқу бұрышының графигі.
 Мәжбүрлі тербелістер: а) $\omega = 1 \text{ рад/с}$, $\theta_0 = 54^\circ$, $\beta = 0,4$, $\varphi_0 = 0^\circ$;
 б) $\omega = 1 \text{ рад/с}$, $\theta_0 = 12^\circ$, $\beta = 0,04$, $\varphi_0 = 0^\circ$.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

4. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. М.: Наука, 1991, 256 с.
5. Бутиков Е.И. Необычное поведение маятника при синусоидальным внешним воздействием // Компьютерные инструменты в образовании. – 2008. - №1. – С.30-42.
6. Bersugir M., Ibrayev A. Modeling of a cylindrical body motion on a vibrating surface // Scientific technical union of mechanical engineering – Industry 4.0, International scientific journal «Mathematical modeling», Year III, Issue 4/2019, ISSN (PRINT) 2535-0986, ISSN (WEB) 2603-2929 – Sofia, Bulgaria, 2019, pp.105-108.

ӘОК 531.312(075.8)

ЖҮКШЫҒЫРЫНЫҢ КӨТЕРІП-ТҮСІРУ РЕЖИМІ

Сұлтан Бекбау Ғаббасұлы, Ахатаев Сержан Асхатұлы

bekasultan54@gmail.com, serzhantkl@gmail.com

Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті механика-математика факультетінің 4-курс студенттері, Нұр-Сұлтан, Қазақстан.

Ғылыми жетекші – тех.ғ.к. Бостанов Б.О.

Құрылыста, халық шаруашылығының басқа да салаларында жүктерді тасымалдау, бір жерден екінші жерге орын ауыстыру күнделікті атқарылатын жұмыс. Жүкті жоғарыға көтеру не төмен түсіру үшін көп жағдайда жүк көтергіш құрылғы – жүкшығыр пайдаланылады. Біз (1) жүкті тігінен (вертикаль) көтеріп-түсіруге арналған механизм – жүкшығырды қарастырамыз (1a-суреті).