**ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ ҒЫЛЫМ ЖӘНЕ ЖОҒАРЫ БІЛІМ МИНИСТРЛІГІ**

**«Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ» КЕАҚ**

**Студенттер мен жас ғалымдардың**
**«ǴYLYM JÁNE BILIM - 2023»**
**XVIII Халықаралық ғылыми конференциясының**
**БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ**

**СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ**
**XVIII Международной научной конференции**
**студентов и молодых ученых**
**«ǴYLYM JÁNE BILIM - 2023»**

**PROCEEDINGS**
**of the XVIII International Scientific Conference**
**for students and young scholars**
**«ǴYLYM JÁNE BILIM - 2023»**

**2023**
**Астана**

**УДК 001+37**
**ББК 72+74**
**G99**

**«ǴYLYM JÁNE BILIM – 2023» студенттер мен жас ғалымдардың XVIII Халықаралық ғылыми конференциясы = XVIII Международная научная конференция студентов и молодых ученых «ǴYLYM JÁNE BILIM – 2023» = The XVIII International Scientific Conference for students and young scholars «ǴYLYM JÁNE BILIM – 2023». – Астана: – 6865 б. - қазақша, орысша, ағылшынша.**

**ISBN 978-601-337-871-8**

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докоранттардың және жас ғалымдардың жаратылыстану-техникалық және гуманитарлық ғылымдардың өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

The proceedings are the papers of students, undergraduates, doctoral students and young researchers on topical issues of natural and technical sciences and humanities.

В сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и молодых ученых по актуальным вопросам естественно-технических и гуманитарных наук.

**УДК 001+37**
**ББК 72+74**

**ISBN 978-601-337-871-8**

$$\xi_{k,l} = x'_k + \frac{x''_k - x'_k}{r} l, k = 0,1,...,n,\ l = 0,1...,r\ .$$


**Қолданылған әдебиеттер тізімі**

1. Жилейкин Я. М., Кукаркин А. Б. О вычислении интегралов от быстроосциллирующих функций // Вычисл. методы и программирование, № 26, 1977, С. 57-67.
2. Бахвалов Н. С. Численные методы. – М.: Наука, 1975, 632 с.
3. Жилейкин Я. М. О погрешности приближенного вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций // Ж. вычисл. матем. и матем. физ, № 1, 1971, С. 263-266.
4. Жилейкин Я. М., Кукаркин А. Б., Федосеева Ю. И. О двух задачах численного интегрирования // Вопр. вычисл. и- прикл. матем, № 32, 1975, С. 38-59.
5. Федорюк М. В. Метод стационарной фазы и псевдодифференциальные операторы // Успехи матем. Наук, № 1 (157), 1971, С. 67-112.



УДК 519.2


## ӘРТҮРЛІ ОРТАДА $q = 1$ ТЕТА-ПОЗИТИВТІ ТАРМАҚТАЛУ


**Жұмаев Ерахмет Жұмалиұлы**

yerakhmet@gmail.com

Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ Механика-математика факультетінің докторанты, Астана, Қазақстан

Ғылыми жетекшісі – ф.-м.ғ.д., профессор Қ. Оспанов


Бұл мақаладағы есептің қойылымы - заңдылықтары белгілі бір параметрлік топқа жататын $\{Z_t\}_{t\geq 0}$ уақытты біртекті емес Марков тармақталу процестерін зерттеу. Жұмыстың мақсаты – осы тармақталу процестерінде $\theta$ параметрін енгізіп, процесінің өшу ықтималдығы арқылы төменде келтірілген үш класты енгізу болып табылады. Әр кластың қажетті және жеткілікті жағдайдары 1-3 теоремалары арқылы көрсетілген.

Бұл бір-бірінен тәуелсіз өмір сүретін және көбейетін бөлшектерден тұратын популяцияның өзгермелі мөлшерінің стохастикалық моделі. Бірге өмір сүретін бөлшектерге ортақ әртүрлі орта келесі жолмен әсер етеді:

- $t$ уақытындағы бар бөлшек $(t,\quad t+\delta)$ уақыт аралығында, $\delta \to 0$ кезде, $\lambda_t\delta + o(\delta)$ ықтималдығымен жойылады,

- $t$ уақытында жойылатын бөлшек сол мезетте $p_t(k)$ ықтималдығымен $k$ ұрпаққа ауыстырылады, мұнда $k = 0$ немесе $k \geq 2$.

Бұл модельдің уақытқа тәуелді көбею заңы мынадай екі функциямен анықталады

$$\Lambda_t = \int_0^t \lambda_u du,\ h_t(s) = p_t(0) + p_t(2)s^2 + p_t(3)s^3 + ...,$$

мұндағы $h_t(s)$ – ұрпақтар санын құрастыратын ықтималдық функция және барлық $t \geq 0$ үшін ақырлы деп есептелетін $\Lambda_t$ – бастапқы жеке тұлғаның өмір сүру ұзақтығының жиынтық қауіптілік функциясы [1]. Сондай-ақ барлық $t \geq 0$ үшін ақырлы деп қабылданатын орташа ұрпақ саны $a_t = \frac{\partial h_t(s)}{\partial s}|_{s=1}$ тұрғысынан алғанда, популяцияның $\mu_t = E(Z_t)$ орташа мөлшерін келесі өрнекпен көрсетуге болады [1]:

$$\mu_t = \exp\left\{\int_0^t (a_u - 1) d\Lambda_u\right\} \tag{1}$$

$h_t(s)$ және $\frac{\partial h_t(s)}{\partial s}$ функцияларының жинақталуы $\sum p_t(k) \le 1$, $|s| \le 1$ шарттарына және төменде көрсетілгендей (4) $\theta$ параметріне байланысты.

Жаңа $m_t = E(Z_t | Z_t > 0)$ функциясын енгізіп, (1) өрнегін мынадай түрде көрсетсе болады:

$$\mu_t = m_t P(Z_t > 0). \tag{2}$$

Тармақтану процесінің өшу ықтималдығы $q = \lim P(Z_t = 0)$ көрсеткіші арқылы жақсы анықталғанын еске түсірейік [1, 2, 3] (осы жерде және осы мақаланың басқа жерлерінде, егер ол басқаша анық айтылмаса, шектеуші қатынастар $t \to \infty$ ретінде орындалады деп түсінілуі тиіс.) Уақыттың біртекті жағдайында,

$$\lambda_t \equiv \lambda,\ a_t \equiv a,\ \mu_t = e^{(a-1)\lambda_t}$$

кезінде, Марковтың тармақталу процесі көбеюдің үш мүмкін режимінің біріне ие [1]: $a > 1$ болғанда аса критикалық, $a = 1$ болғанда критикалық және $a < 1$ болғанда субкритикалық. Сонымен аса критикалық жағдайда $q < 1$ және $\mu_t \to \infty$; критикалық жағдайда $q = 1$, $\mu_t \equiv 1$, $m_t \to \infty$; ал субкритикалық жағдайда $q = 1$, $\mu_t \to 0$. Уақыттың біртекті параметрімен салыстырғанда, өзгермелі ортаның қосымша мүмкіндігі модельді өте иілгіш етеді, сондықтан жалпы жағдайда [2, 3] зерттеуі қиын. Бұл жұмыста біз өзгермелі ортадағы тармақталу процестерінің үш класын ажыратамыз:

*(i)* *егер* $q = 1$ *және* $\lim m_t = \infty$ *болса, критикалық,*

*(ii)* $q = 1$ *және* $\lim m_t \in [1, \infty)$ *болса, қатаң субкритикалық,*

*(iii)* *егер* $q = 1$ *және* $\lim m_t$ *болмаса, бос субкритикалық.*

Бұл жұмыстың тақырыбы - өзгермелі ортадағы тармақталу процестерінің ерекше тобы болып табылатын, айналмалы $(\{\lambda_t\}, \{a_t\})$ ортадағы $\theta \in (0,1]$ тармақталу параметрі бар *тета-оң тармақталу процесі*. Тармақталу $\theta$ параметрі төмендегі формуламен көрсетілген ұрпақтар таралуының жоғары моменттерін басқарады:

$$h_t(s) = 1 - a_t(1-s) + a_t(1+\theta)^{-1}(1-s)^{1+\theta}. \tag{3}$$

Орташа ұрпақ санының ауытқуы мынадай белгіленген аралықпен шектелген деп болжанады:

$$0 \le a_t \le 1 + 1/\theta \tag{4}$$

Бұл шектеу нөлдік ұрпақтың [0, 1] аралығында жатуының ықтималдығына кепілдік береді

$$p_t(0) = h_t(0) = 1 - (1+\theta)^{-1}\theta a_t.$$

(4) теңсіздігін (1) қатынасқа қолданған кезде $e^{-\Lambda_t} \le \mu_t$, $\mu_t^{\theta} \le e^{\Lambda_t}$ теңсіздіктері алынады.

$$E(s^{Z_t} | Z_t > 0) = \frac{E(s^{Z_t}) - P(Z_t = 0)}{P(Z_t > 0)} = 1 - \frac{1 - E(s^{Z_t})}{P(Z_t > 0)} \tag{5}$$

(3) формуласында $\theta = 1$ болатын маңызды ерекше жағдайда, $p_t(0) = 1 - a_t/2$, $p_t(2) = a_t/2$ болғанда, тета-позитивті тармақталу процесі классикалық әртүрлі ортада туу және жойылу процесіне айналады [4]. Бұл зерттеу $0 < \theta < 1$ жағдайына байланысты жаңа болып табылып, мұндағы тармақталу процесі дисперсиясы шексіз

$$p_t(0) = 1 - \theta(1+\theta)^{-1} a_t,$$

$$p_t(n) = (n!)^{-1}\theta(1-\theta)(2-\theta)...(n-2-\theta)a_t, n \geq 2,$$

ұрпақтар санының таралуымен сипатталады. Мұндай тета-позитивті тармақталу процестері ұрпақтар санының үлкен ауытқуларын талап ететін демографиялық модельдерде қолданылуы мүмкін.

Осы $Z_t$ тета-позитивті тармақталу процесінің негізгі ерекшелігі

$$E(s^{Z_t}) = 1 - (B_{t,\theta} + \mu_t^{-\theta}(1-s)^{-\theta})^{-1/\theta}, \tag{6}$$

мұндағы

$$B_{t,\theta} = \theta(1+\theta)^{-1}\int_0^t \mu_u^{-\theta} a_u \, d\Lambda_u$$

$s$ айнымалысы жоқ теріс емес мүше болатын және $\mu_t$ (1) арқылы анықталатын, ықтималдықты тудыратын айқын функция болып табылады. $\theta = 1$ болғанда (6) ықтималдық тудыратын функциясы $s$ көрсеткішісіне байланысты сызықтық-бөлшектік функция болатынын ескерейік.

Келесі теоремаларда параметрлері $(\theta, \{\lambda_t\}, \{a_t\})$ өзгеретін ортадағы тета-позитивті тармақталу процесі қарастырылады. (1) еске түсіріп,

$$V_{t,\theta} = \theta(1+\theta)^{-1}\int_0^t \mu_u^{-\theta} d\Lambda_u, \; V_\theta = \lim V_{t,\theta}, \; \Lambda = \lim \Lambda_t$$

деп алайық.

**Лемма**. *Егер $V_\theta = \infty$, онда q = 1 және*

$$P(Z_t > 0) \approx (V_\theta + \theta(1+\theta)^{-1}\mu_t^{-\theta})^{-1/\theta}, \quad m_t \approx (\mu_t^\theta V_{t,\theta} + \theta(1+\theta)^{-1})^{1/\theta} \tag{7}$$

Осы жерде және осы мақаланың басқа жерлерінде $\approx$ белгісі $t \to \infty$ кездегі эквиваленттік қарым-қатынастар ретінде түсінілуі тиіс.

**Теорема 1.** *Тета-оң тармақталу процесі егер $V_\theta = \infty$ және*

$$\mu_t^\theta V_{t,\theta} \to \infty \tag{8}$$

*болған жағдайда ғана критикалық болып табылады.*

*Бұл жағдайда*

$$P(Z_t > 0) \approx V_{t,\theta}^{-1/\theta}, \quad m_t \approx \mu_t V_{t,\theta}^{1/\theta} \tag{9}$$

*және*

$$\lim E(e^{-\omega Z_t / m_t} \mid P(Z_t > 0) = 1 - (1+\omega^{-\theta})^{-1/\theta}, \quad \omega \geq 0. \tag{10}$$

**Салдар 1**. *Егер $\Lambda = \infty$ және $0 < \liminf \mu_t \leq \limsup \mu_t < \infty$ болса, онда тета-оң тармақталу критикалық болып табылады.*

**Теорема 2**. *Тета-оң тармақталу процесі $V_\theta = \infty$ және*

$$\mu_t^\theta V_{t,\theta} \to M_\theta, \quad 0 \leq M_\theta < \infty, \tag{11}$$

*болған жағдайда ғана қатаң субкритикалық болып табылады.*

*Бұл жағдайда $\mu_t \to 0$,*

$$P(Z_t > 0) \approx m\,\mu_t, \quad m_t \to m, \quad m = (M_\theta + \theta(1+\theta)^{-1})^{1/\theta} \qquad 12)$$

*және*

$$E(s^{Z_t}|Z_t > 0) \to 1 - m(M_\theta - (1+\theta)^{-1} + (1-s)^{-\theta})^{-1/\theta}. \quad 13)$$

**Салдар 2**. *Егер* $\Lambda = \infty$ *және* $\int_0^t a_u d\Lambda_u < \infty$ *болса, онда тета-оң тармақталу процесі қатаң субкритикалық болады.*

**Теорема 3.** *Тета-оң тармақталу процесі, егер* $V_\theta = \infty$ *және* $\mu_t^\theta V_{t,\theta}$ *мәнінің шегі болмаса ғана, бос субкритикалық болады.*

*Бұл жағдайда*

$$\mu_{t'}^\theta V_{t',\theta} \to M_\theta, \quad t' \to \infty, \quad 14)$$

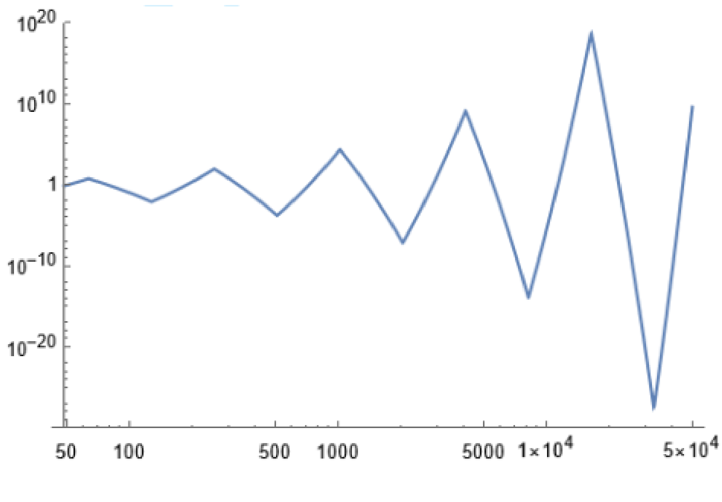
*әртүрлі ішінара шектерге әкелетін бірнеше* $t' = \{t_n\}$ *ішкі реттіліктер бар.*

*Егер (14) өрнегінде* $M_\theta = \infty$ *болса, (9) және (10)* $t = t'$, $t' \to \infty$ *кезінде орындалады. Екінші жағынан, егер (14) өрнегінде* $0 \le M_\theta < \infty$ *болса, онда* $\mu_{t'} \to 0$ *және (12) және (13)* $t = t'$, $t' \to \infty$ *кезінде орындалады.*

Мысал ретінде $\liminf \mu_t = 0$, $\limsup \mu_t = \infty$ өте ауыспалы ортасы бар жағдайды аламыз. $\theta = 1$, $\lambda_t = (1+t)^{-1/2}$ болсын және осылайша $a_t$ екі ауыспалы мәндері 0 және 2 болатын тета-оң тармақталу процесін қарастырайық,

$$a_t - 1 = \begin{cases} 1 & \text{егер}\, 0 \le t < 2 \\ -1 & \text{егер}\, 2^{2k-1} \le t < 2^{2k} \quad \text{кейбір}\, k \ge 1 \\ 1 & \text{егер}\, 2^{2k} \le t < 2^{2k+1} \quad \text{кейбір}\, k \ge 1 \end{cases}$$

1-суретте көрсетілгендей, бұл $M_\theta \in [0, \infty]$ (14) ішінара шектерінің толық диапазоны үшін орындалатын шарты бар бос критикалық жағдай.




1-сурет: Бос субкритикалық класс (көлденең ось $t$ уақыт айнымалысын, ал тік ось $\mu_t$ көрсетеді).

**Ескертулер**

– жоғарыда аталған кластарға бөлу дискретті уақытпен айнымалы ортада тармақталу процестері үшін [5] ұсынылған жіктеудің өзгертілген нұсқасы болып табылады;

– мәселені құрастыруда [6, 7] идеялары пайдаланылды;

– Лапластың (2) шекті түрлендіруі тұрақты ортадағы Марковтың дискретті тармақталу процестері [8] үшін алынған 7-теоремасымен бірдей екенін ескеріңіз;
– (8), (9) және (5) арқылы (10) дәлелденеді;
– (7) арқылы (12) дәлелденеді;
– (5) арқылы (13) жинақталады;
– 1-ші және 2-ші теоремалардан (14) алынады.

**Қолданылған әдебиеттер тізімі**

1. Athreya K.B., Ney P.E. Branching Processes. – Berlin: Springer, 1972, 300 p.
2. Chistjakov V.P., Markova N.P. On some theorems for inhomogeneous branching processes // Dokl. Akad. Nauk SSSR 1962 №147 P.317–320.
3. Cohn H., Hering H. Inhomogeneous Markov branching processes: Supercritical case // Stoch. Proc. Appl. 1983 №14 P.79–91.
4. Kendall, D. G. On the generalized ”Birth-and-Death” process // Ann. Math. Statist. 1948 №19 P.1–15
5. Kersting G. A unifying approach to branching processes in a varying environment // J. Appl. Probab. 2020 №57 P.196–220
6. Sagitov S., Lindo A. A special family of Galton-Watson processes with explosions // In Branching Processes and Their Applications 2016 P.237–254.
7. Sagitov S., Minuesa C. Defective Galton-Watson processes // Stoch. Models 2017 I №33 P.451–472.
8. Zolotarev V.M. More exact statements of several theorems in the theory of branching processes // Theory of Prob. Appl. 1957 I №2. P.245–253.

УДК. 517.51

## КӨБЕЙТКІШТЕР КЛАСЫНЫҢ КЕЙБІР СИПАТТАМАСЫ

**Құрмашова Д.М.**
*dkurmashova@bk.ru*
Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия Ұлттық Университеті
Жетекшісі: ф.-м.ғ.к., профессор Тлеуханова Н.Т.

Тригонометриялық Фурье қатарларының көбейткіштерін зерттеу классикалық тақырыптардың бірі. Ғылыми жұмыста $l_{pq}$ кеңістігі мен $\lambda_{pq}$ салмақты кеңістігіндегі көбейткіштердің тригонометриялық мәселелерді зерттеуін қарастырамыз.

Есептің қойылымы келесі түрде: $f \in L_1[0,2\pi]$ және $\{a_k(f)\}$ $f$ функциясының тригонометриялық жүйесі бойынша Фурье коэффициенттері болсын. $T_\varphi f = \{a_k(f \cdot \varphi)\} \in l_p$ операторының $T_\varphi f : l_p \to l_p$ шенелгендігін көрсету үшін $\varphi$ функциясының характеристикалық метрикасын табу керек. Осындай функциялар классын $M_p$ деп белгілейміз.[1-4]

**Анықтама:** Айталық, $0 < p,q < \infty$ болсын. $a = \{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ тізбегі $\lambda_{pq}$ -класына жатады дейміз, егер $\|a\|_{\lambda_{pq}} = \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^q (|k|+1)^{n\left(\frac{q}{p}-1\right)} \right)^{\frac{1}{q}}$ шамасы ақырлы болса.