ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ ҒЫЛЫМ ЖӘНЕ ЖОҒАРЫ БІЛІМ МИНИСТРЛІГІ

«Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ» КЕАҚ

Студенттер мен жас ғалымдардың
«ǴYLYM JÁNE BILIM - 2023»
XVIII Халықаралық ғылыми конференциясының
БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
XVIII Международной научной конференции
студентов и молодых ученых
«ǴYLYM JÁNE BILIM - 2023»

PROCEEDINGS
of the XVIII International Scientific Conference
for students and young scholars
«ǴYLYM JÁNE BILIM - 2023»

2023
Астана

УДК 001+37
ББК 72+74
G99

«ǴYLYM JÁNE BILIM – 2023» студенттер мен жас ғалымдардың XVIII Халықаралық ғылыми конференциясы = XVIII Международная научная конференция студентов и молодых ученых «ǴYLYM JÁNE BILIM – 2023» = The XVIII International Scientific Conference for students and young scholars «ǴYLYM JÁNE BILIM – 2023». – Астана: – 6865 б. - қазақша, орысша, ағылшынша.

ISBN 978-601-337-871-8

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докторанттардың және жас ғалымдардың жаратылыстану-техникалық және гуманитарлық ғылымдардың өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

The proceedings are the papers of students, undergraduates, doctoral students and young researchers on topical issues of natural and technical sciences and humanities.

В сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и молодых ученых по актуальным вопросам естественно-технических и гуманитарных наук.

УДК 001+37
ББК 72+74

ISBN 978-601-337-871-8

ӘОЖ 371

ПАРАМЕТРЛІ ИРРАЦИОНАЛ ТЕҢСІЗДІКТЕР

Айдосов Батыржан
aidossov.batyrzhan@gmail.com
Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі – Тілеулесова А.Б.

Бұл теорияның негізі мектеп математикасынан басталады. Мектеп бағдарламасының алгебра курсында теңдеулер мен теңсіздіктерге маңызды орын беріледі. Ең алғашында – санды теңсіздік пен бір айнымалысы бар сызықты теңсіздіктер, бір айнымалысы бар екінші дәрежелі теңсіздіктер, иррационал теңсіздіктер, одан кейін логарифмдік, көрсеткіштік және тригонометриялық теңсіздіктерді оқытады. Расында да теңдеулер мен теңсіздіктер арқылы шама, санның модулі, шек және тағы басқа математикалық ұғымдар енгізіледі.

Сондықтан теңдеулер мен теңсіздіктердің түрлері және оларды шешу әдістері мектеп математикасының дамуына үлкен үлес қосады. Олардың кейбір түрлерін шешкенде негізгі табу керек болатын айнымалыдан басқа әріптермен өрнектелген белгілі деп есептелетін, екіншіден оларға қойылатын шарттарды қанағаттандыратын белгісіздер де қатысады. Оларды әдетте *параметрл*ер деп атап, оған анықтама бермей қарастырыла береді.

Элементар математиканың қолданулары болатын кейбір зерттеу есептерін шешкенде де параметрлі теңсіздіктер пайда болады.

Егер $\varphi(x)$ функциясы алгебралық иррационал функция болса, онда $\varphi(x)>0$ теңсіздігі иррационал теңсіздік деп аталады. Айнымалы түбір астында болып келетін теңсіздіктер де *иррационал теңсіздіктер* деп аталады.

Иррационал теңдеу мен теңсіздікті шешуде үлкен айырмашылық бар. Иррационал теңдеудің екі жағын бір дәрежеге шығару арқылы түбірлерін тауып алып, оларды тексереміз. Түбірлер саны шектеулі болғандықтан тексеру қиынға соқпайды. Теңсіздіктің түбірлерін тексеру мүмкін емес, өйткені жауап көпшілік жағдайда жиын болып келеді. Теңсіздікті түрлендіргенде ұқыптылық қажет. Олай болмаған жағдайда бөгде түбірлер пайда болуымен қатар түбірлерді жоғалтып алу қаупі де бар. Иррационал теңсіздіктердің негізгі төрт түріне тоқталайық:

(1) а) $\sqrt{f(x)}>a.$ б) $\sqrt{f(x)}<a.$

(2) а) $\sqrt{f(x)}<\varphi(x).$ б) $\sqrt{f(x)}\ge\varphi(x).$

(3) а) $\sqrt{f(x)}>\varphi(x).$ б) $\sqrt{f(x)}\ge\varphi(x).$

(4) $\sqrt[3]{f(x)}\ge\sqrt[3]{\varphi(x)}\Leftrightarrow f(x)\ge\varphi(x)$

(1.а) $\sqrt{f(x)}>a$ теңсіздігін шешу. Егер $a<0$ болса, онда $x-$тің әрбір мүмкін мәні теңсіздіктің шешуі болады. Егер $a>0$ болса, онда теңсіздіктің екі жағын квадрат дәрежеге шығарамыз.

(1,б) $\sqrt{f(x)}<a$ теңсіздігін шешу. Егер $a<0$ болса, онда теңсіздіктің жауабы бос жиын болады. Егер $a>0$ болса, онда теңсіздіктің шешуі мүмкін мәндер жиынымен $f(x)<a^2$ теңсіздігінің шешімінің қиылысуы болады.

(2,а) $\sqrt{f(x)}<\varphi(x)$ теңсіздігін шешу. Егер $\varphi(x)<0$ болса, онда теңсіздіктің жауабы бос жиын болады. Енді $\sqrt{f(x)}<\varphi(x)$ теңсіздігінің екі жағын да квадраттап $f(x)<\varphi^2(x)$ теңсіздікке келеміз. Бірақ $y=t^2$ функциясы $t\ge0$ жиынында ғана өспелі болғандықтан,

теңсіздіктің екі жағын да квадраттамас бұрын, олардың әрқайсысының теріс емес екеніне көз жеткізу керек.

Мына $\sqrt{f(x)} < \varphi(x)$ теңсіздік жағдайында $f(x) \geq 0$ шарты $y = \sqrt{t}$ функциясының анықталу облысының құрылысынан шығады. Ал $\varphi(x) \geq 0$ шарты $\sqrt{t} \geq 0$ теңсіздігінен шығады. Сонымен

$$\sqrt{f(x)} < \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \varphi(x) \geq 0 \\ f)(x) < \varphi^2(x). \end{cases}$$

(2.б) $\sqrt{f(x)} \geq \varphi(x)$ *теңсіздігін шешу* (2.а) теңсіздігін шешуге ұқсас

$$\sqrt{f(x)} \leq \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \varphi(x) \geq 0 \\ f)(x) \leq \varphi^2(x). \end{cases}$$

(3,а) $\sqrt{f(x)} > \varphi(x)$ *теңсіздігін шешу.* $x-$тің мүмкін мәндер жиынын анықтап аламыз, оны М деп белгілейік. Енді осы жиынды екі бөлікке бөлеміз:

1. M_1, мұнда $\varphi(x) < 0$
2. M_2, мұнда $\varphi(x) \geq 0$

Бірінші жағдайда M_1 жиыны берілген теңсіздіктің жауабы болады. Екінші жағдайда теңсіздіктің екі жағын квадрат дәрежеге шығару арқылы шешеміз. Яғни

$$\sqrt{f(x)} > \varphi(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1)\begin{cases} \varphi(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ 2)\begin{cases} \varphi(x) \geq 0 \\ f)(x) > \varphi^2(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

(3,б) $\sqrt{f(x)} \geq \varphi(x)$ *теңсіздігін шешу.* (3,а) теңсіздігін шешуге ұқсас

$$\sqrt{f(x)} \geq \varphi(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1)\begin{cases} \varphi(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ 2)\begin{cases} \varphi(x) \geq 0 \\ f)(x) \geq \varphi^2(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

(4) $\sqrt[3]{f(x)} \geq \sqrt[3]{\varphi(x)} \Leftrightarrow f(x) \geq \varphi(x)$ *теңсіздігін шешу.* Бұл теңсіздікті шешу үшін екі жағдайды қарастырайық.

1. Берілген теңсіздіктің екі жағын үшінші дәрежеге шығару $f(x) \geq \varphi(x)$ теңсіздігіне пара-пар. Себебі, $y = t^3$ функциясы барлық сандар түзуінде монотонды өседі.
2. $f(x) \geq \varphi(x) \Rightarrow (\sqrt[3]{f(x)} - \sqrt[3]{\varphi(x)})(\sqrt[3]{(f(x))^2} + \sqrt[3]{f(x)\varphi(x)} + \sqrt[3]{(\varphi(x))^2}) \geq 0$ сонда және тек сонда ғана $\sqrt[3]{f(x)} - \sqrt[3]{\varphi(x)} \geq 0$, сондықтан егер $f(x) \neq 0$ немесе $\varphi(x) \neq 0$ немесе $f(x) = \varphi(x) = 0$ болса, онда төмендегі теңсіздіктің қатаңдығы дұрыс болады:
$$\sqrt[3]{(f(x))^2} + \sqrt[3]{f(x)\varphi(x)} + \sqrt[3]{(\varphi(x))^2} = (\sqrt[3]{f(x)} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{\varphi(x)})^2 - \frac{3}{4}\sqrt[3]{(\varphi(x))^2} > 0.$$

Мысал 1. $a-$ның барлық мәні үшін $\dfrac{\sqrt{a+\sqrt{a^2-x^2}}}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{a-\sqrt{a^2-x^2}}}{\sqrt{2}}\ge x$ теңсіздігін шешіңіз.

Шешуі. Жоғарыдағы 6) формуланы қолданып төмендегі теңсіздікті аламыз

$\sqrt{a+\sqrt{x^2}}\ge x \Leftrightarrow \sqrt{a+|x|}\ge x$.

Енді мұндай теңсіздікті шешу үшін (3,б) $\sqrt{f(x)}\ge\varphi(x)$ немесе

$$\sqrt{f(x)}\ge\varphi(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 1)\begin{cases}\varphi(x)<0\\ f(x)\ge 0\end{cases}\\ 2)\begin{cases}\varphi(x)\ge 0\\ f)(x)\ge\varphi^2(x).\end{cases}\end{array}\right.$$

теңсіздігін қолданамыз. Бұдан

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0\\ a+\lfloor x\rfloor\ge x^2\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ a+\lfloor x\rfloor\ge 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0\\ a+\lfloor x\rfloor\ge\lfloor x\rfloor^2\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ \lfloor x\rfloor\ge -a\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\begin{cases}x\ge 0\\ x^2-x-a\le 0\end{cases} & (1)\\ \begin{cases}x<0\\ x\le a\end{cases} & (2)\end{array}\right.$$

Жоғарыдағы (1) және (2) теңсіздіктер жүйесінің әрқайсысын жеке-жеке шешеміз.

$$(1)\qquad \begin{cases}x\ge 0\\ x^2-x-a\le 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$x^2-x-a\le 0\Leftrightarrow D=1+4a\Leftrightarrow x_1=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2},\ x_2=\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0\\ \dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2}\le x\le\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\\ a\ge -\dfrac{1}{4}\end{cases}\\ \begin{cases}\textit{шешім жоқ}\\ a<-\dfrac{1}{4}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1)\ \begin{cases}a<-\dfrac{1}{4}\\ \varnothing\end{cases}\\ 2)\ \begin{cases}-\dfrac{1}{4}\le a<0\\ \dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2}\le x\le\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\end{cases}\\ 3)\ \begin{cases}a\ge 0\\ 0\le x\le\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\end{cases}\end{array}\right.\to(1)\ \textit{жауабы}.$$

Енді $\begin{cases}x<0\\ x\le a\end{cases}$ (2) жүйені шешейік. $\begin{cases}x<0\\ x\le a\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4)\ \begin{cases}a<0\\ x\le 0\end{cases}\\ 5)\ \begin{cases}a\ge 0\\ x<0\end{cases}\end{array}\right.\to\ (2)$.

Екі теңсіздіктер жүйесінен шыққан шешімдерді біріктіріп, теңсіздікті қанағаттандыратын ортақ шешімді аламыз.

Жауабы. Егер $a<-\dfrac{1}{4},\ x\le a;$ егер $-\dfrac{1}{4}\le a<0,\ x\le a;\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\le x\le\dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2};$

егер $a\ge 0,\ x\le\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

Мысал 2. $\sqrt{x-a}+\sqrt{2x+1}>\sqrt{3x-4}$ теңсіздікті шешіңіз. (1)

Теңсіздігі x айнымалысына қарағанда иррационалды. Мұнда $a-$параметр. Теңсіздіктің анықталу облысы $\begin{cases} x \ge a, \\ x \ge \frac{4}{3}, \end{cases}$ жүйенің шешіміне қатысты.

$\sqrt{x-a} \ge 0,\ \sqrt{2x+1} \ge 0,\ \sqrt{3x-4} \ge 0$ болғандықтан, (1) теңсіздік

$x-a+2\sqrt{x-a}\sqrt{2x+1}+2x+1>3x-4$

$2\sqrt{2x^2-(2a-1)-a} > a-5$

(2) теңсіздіктер жүйесіне пара-пар.

$$\begin{cases} 2\sqrt{2x^2-(2a-1)x-a} > a-5, \\ x \ge a, \\ x \ge 1\frac{1}{3}. \end{cases} \qquad (2)$$

Егер $a \in (-\infty;1\frac{1}{3}]$ болса, онда $a-5<0$ болады. Сонымен, $2\sqrt{2x^2-(2a-1)x-a} \ge 0$ теңсіздігін шешейік.

$2x^2-(2a-1)x-a \ge 0, \qquad D=(2a-1)^2+8a=(2a+1)^2$

$x_1=-\frac{1}{2},\ x_2=a; \qquad x \in [-\frac{1}{2};a]$

болса, онда (2) теңсіздіктің шешімі $[1\frac{1}{3};\infty)$ аралығына қатысты.

Ұқсас шешімнің қорытындысы бойынша, егер $a \in (1\frac{1}{3};5)$ болса, онда (2) жүйенің шешімі $[a;\infty)$ қатысты.

Енді $a \ge 5$ немесе $a-5 \ge 0$ жағдайын қарастырайық. Сонымен $2\sqrt{2x^2-(2a-1)x-a} \ge 0$ болса, онда (2) жүйенің бірінші теңсіздігінің екі бөлігін квадраттаймыз, нәтижесінде (2) жүйеге пара-пар (2,а) жүйесін аламыз.

$$\begin{cases} 8x^2-4(2a-1)x-a^2+6a-25>0, \\ x \ge a. \end{cases} \qquad (2,а)$$

(2,а) жүйедегі бірінші теңсіздіктің сол жағын

$f(x)=8x^2-4(2a-1)x-a^2+6a-25$

функциясы ретінде қарастырайық. $f(x)$ функциясының дискриминанты D. $0,25D=4(6a^2-16a+51)$.

$6a^2-16a+51$ үшмүшенің дискриминанты $0,25D_1=64-306<0$ болса, онда $a-$ның кез келген накты мәнінде $D>0$ болады. Бұдан $a-$ның кез келген накты мәнінде $f(x)=0$ теңдеуінің екі нақты әр түрлі түбірлері болатынын көреміз.

$x_1=0,25(2a-1-\sqrt{6a^2-16a+51}),$

$x_2=0,25(2a-1+\sqrt{6a^2-16a+51}),$

Мұнда $x_2>x_1$. Квадрат үшмүшенің қасиетіне сүйене отырып, мынадай қорытындыға келеміз. Егер $x<x_1$ және $x>x_2$ болса, онда $f(x)>0$.

Сонымен, $a \ge 5$ болғанда (2,а) жүйесі, яғни (1) теңсіздік төмендегі екі жүйенің жиынтығына пара-пар.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x < x_1,\\ x \ge a;\end{cases} \qquad (a)\\ \begin{cases}x > x_2,\\ x \ge a.\end{cases} \qquad (б)\end{array}\right.$$

Оларды шешу үшін $[x_1; x_2]$ аралығына тиісті a санының орналасуын анықтаймыз. $f(a) = -(a-5)^2$. Демек, $f(a) \le 0$ және сондықтан $x_1 \le a \le x_2$ жатады. Бұдан, $\begin{cases}x < x_1,\\ x \ge a\end{cases}$ жүйесі үйлесімсіз, ал $\begin{cases}x > x_2,\\ x \ge a\end{cases}$ жүйесінің шешімі $(x_2; \infty)$ аралығына қатысты екенін көреміз.

Жауабы. егер $a \le 1\frac{1}{3}$ болса, онда $x \in [1\frac{1}{3}; \infty)$; егер $1\frac{1}{3} < a < 5$ болса, онда $x \in [a; \infty)$; егер $a \ge 5$ болса, онда $x \in (0{,}25(2a - 1 + \sqrt{6a^2 - 16a + 51}; \infty)$.

Мысал 3. $\sqrt{a + \sqrt{x}} + \sqrt{a - \sqrt{x}} \le \sqrt{2}$ теңсіздігін шешіңіз.

$$a - \sqrt{x} \ge 0 \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x} \ge 0\\ -\sqrt{x} \ge -a\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x \ge 0\\ \sqrt{x} \le a\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x \ge 0\\ x \le a^2\end{cases}$$

және

$$a + \sqrt{x} \ge 0 \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x} \ge 0\\ \sqrt{x} \ge -a\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x \ge 0\\ x \ge a^2\end{cases}$$

яғни $0 \le x \le a^2$ және $a \ge 0.$ Берілген теңсіздіктің екі бөлігін квадраттаймыз.

$$a + \sqrt{x} + 2\sqrt{(a + \sqrt{x})(a - \sqrt{x})} + a - \sqrt{x} \le 2$$

$$2a + 2\sqrt{x^2 - a} \le 2 \Rightarrow a + \sqrt{x^2 - a} \le 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 - a} \le 1 - a$$

$0 \le a \le 1$ теңсіздігіне пара-пар келесі $\begin{cases}\sqrt{a^2 - x} \le 1 - a,\\ 0 \le x \le a^2,\end{cases}$ жүйені аламыз. Жүйедегі бірінші теңсіздікті шешейік. $a^2 - x \le 1 - 2a + a^2 \Rightarrow -x \le 1 - 2a$ немесе шешімі $x \ge 2a - 1$ тең. Жоғарыдағы жүйеден шыққан шарттарды ескере отырып келесіні аламыз: егер $0 \le a \le 0{,}5$ болса, онда $x \in [0, a^2]$; егер $0{,}5 < a \le 1$ болса, онда $x \in [2a - 1, a^2]$; егер $a < 0$ *жјне* $a > 1$ болса, онда шешімі жоқ.

Жауабы. $0 \le a \le 0{,}5$, $x \in [0, a^2]$; $0{,}5 < a \le 1$, $x \in [2a - 1, a^2]$; $a < 0$ *жјне* $a > 1$, шешімі жоқ.

Берілген тапсырмаларды орындау барысында мына аздаған әдістемелік нұсқауды басшылыққа алуға болады. Әдістемелік нұсқауды берудегі бірінші мақсат - тақырыптардың сәйкес сол жерде орналасуын түсіндіру, басқа әдебиеттерде мүмкін және қабылданған берілу тәсілдерінен қандай айырмашылық бар, сонымен қатар қандай қателіктерді болдырмау керек. Екінші бір мақсаты параметрлі теңсіздікті оқыту мүмкіндіктерін талқылау.

Яғни, параметрлі теңсіздіктердің түрлерін оқушылар анықтай алатындай етіп және оларды қандай әдістермен шешуге болатынын оқыту керек.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. А.Х.Шахмейстер. Иррациональные уравнения и неравенства.-М.:МЦНМО, 2011.
2. Г.А.Ястребинецкий, «Задачи с параметрами» -М.: «Просвещение», 1986.