ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ ҒЫЛЫМ ЖӘНЕ ЖОҒАРЫ БІЛІМ МИНИСТРЛІГІ

«Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ» КЕАҚ

Студенттер мен жас ғалымдардың
«ǴYLYM JÁNE BILIM - 2023»
XVIII Халықаралық ғылыми конференциясының
БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
XVIII Международной научной конференции
студентов и молодых ученых
«ǴYLYM JÁNE BILIM - 2023»

PROCEEDINGS
of the XVIII International Scientific Conference
for students and young scholars
«ǴYLYM JÁNE BILIM - 2023»

2023
Астана

УДК 001+37
ББК 72+74
G99

«ǴYLYM JÁNE BILIM – 2023» студенттер мен жас ғалымдардың XVIII Халықаралық ғылыми конференциясы = XVIII Международная научная конференция студентов и молодых ученых «ǴYLYM JÁNE BILIM – 2023» = The XVIII International Scientific Conference for students and young scholars «ǴYLYM JÁNE BILIM – 2023». – Астана: – 6865 б. - қазақша, орысша, ағылшынша.

ISBN 978-601-337-871-8

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докоранттардың және жас ғалымдардың жаратылыстану-техникалық және гуманитарлық ғылымдардың өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

The proceedings are the papers of students, undergraduates, doctoral students and young researchers on topical issues of natural and technical sciences and humanities.

В сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и молодых ученых по актуальным вопросам естественно-технических и гуманитарных наук.

УДК 001+37
ББК 72+74

ISBN 978-601-337-871-8

4. Дорофеев Г.В., Муравин Г.К., Седова Е. А. Сборник заданий для подготовки и проведения письменного экзамена по математике (курс А) и алгебре и началам анализа (курс В) за курс средней школы.11класс.-М.:Дрофа ,2001.-192с.
5. Черкасов О.Ю., Якушев А.Г. Математика: интенсивный курс подготовки к экзамену.- М.: 2001.-432с.
6. Официальный сайт программы GeoGebra. [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://www.geogebra.org/

ӘОЖ 517.2

ҚАРАПАЙЫМ ЕСЕПТЕРДІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІ ПАЙДАЛАНЫП ШЕШУ

Назарбек Мәдина, Серикбек Бергенжан
madinanazarbek@mail.ru
Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия Ұлттық Университеті,
алгебра және геометрия кафедрасы, Астана, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі – ф.-м.ғ.к., доцент Тілеулесова Ағила Балтабайқызы

Мектеп математика курсында жаратылыстану бағыты бойынша оқитын білім алушыларға дифференциалдық теңдеулерді түсіндірудің алғашқы баспалдақтарын үйретудің маңыздылығы бірінші орында. Көп жағдайда табиғат құбылыстары мен оның физикалық құбылыстарын зерттейтін ғылым екендігін айтымен бірге жеңіл мысалдармен түсіндіре отырып шығартқан оқушыны ынталандыра түсетіні рас. Осы орайда дифференциалдық теңдеулер ұғымын түсіндіруде біз қарастыратын мысалдардың берері көп.

Мысал 1. Жердің жақын орналасуының әсерінен метеорит тыныштық күйінен Жерге h биіктіктен тура түсе бастайды.Жер атмосферасы болмаса, метеорит Жер бетіне жеткенде оның жылдамдығы қандай болар еді? Жердің радиусы $R = 6377$ км.

Шешуі. $x = x(t) -$ түсу басталғаннан бері өткен арақашықтық, $(h-x)-t$ уақыттағы метеориттен жердің центріне дейін арақашықтық. t уақытта метеоритке $F = ma$ күш әсер етеді, $m -$ метеорит массасы, $a -$ оның үдеуі. Жер бетінде денеге $P = mg$ ауырлық күші әсер етеді, g жер бетіндегі ауырлық күшінің үдеуі. Ньютон заңы бойынша бұл күштер құлап жатқан дененің Жердің центрінен қашықтығының квадратына кері пропорционал:

$$\frac{F}{P} = \frac{R^2}{(h-x)^2}, \quad \frac{ma}{mg} = \frac{R^2}{(h-x)^2}.$$

Осы жерден $a = \frac{R^2 g}{(h-x)^2}$, бірақ $a = \frac{dv}{dt}$, сондықтан $\frac{dv}{dt} = \frac{R^2 g}{(h-x)^2}$.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot v,$$

Қозғалыстың дифференциалдық теңдеуін аламыз:

$$v\frac{dv}{dx} = \frac{gR^2}{(h-x)^2}, \frac{dv}{dx} = \frac{2gR^2}{(h-x)^2}.$$

Соңғы теңдеудн интегралдап, табамыз:

$$v^2 = \frac{2gR^2}{h-x} + C.$$

Қозғалыс тыныштық күйден басталды, сондықтан $t=0$ үшін $x=0, v=0.$

$$0=\frac{2gR^2}{h-0}+C, C=-\frac{2gR^2}{h}.$$

Сондықтан жүріп өткен x арақашықтыққа тәуелді метеориттің v жылдамдығының өзгеруі $v^2=\frac{2gR^2x}{h(h-x)}$ формуламен беріледі. Жердің бетінде метеориттің жылдамдығы $v=\sqrt{2gR(1-\frac{R}{h})}, h\to\infty$ шекке көшсек, $v=\sqrt{2gR}.$ Жерге жеткенде метеорит $v=\sqrt{2\cdot 9{,}81\cdot 6377000}\approx 11{,}2\frac{км}{с}$ жылдамдыққа ие болады[1].

Мысал 2. $y=\varphi(x)$ қисығы $(1:2)$ нүктесі арқылы өтеді. Осы қисыққа әрбір жанама $y=1$ түзуін жанама нүктесінің абсциссасының екі еселіне тең абсциссасы бар нүктеде қиып өтеді. $y=\varphi(x)$ қисығын табыңыз.

Шешуі. $(x;y)$ берілген қисықтағы кез келген нүкте болсын. Осы қисықтан $(x;y)$ нүктесі арқылы өтетін жанаманың теңдеуі:

$$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x),$$

$X, Y-$жанама нүктелердің ағымдағы координаталары.Жанама $y=1$ түзуін абциссамен $2x$ нүктесінде қиятын шартынан ізделінді қисықты қанағаттандыратын дифференциалдық теңдеуді аламыз:

$$1-y=\frac{dy}{dx}(2-x), x\frac{dy}{dx}=1-y.$$

Айнымалыларын ажыратып, интегралдасақ $y-1=\frac{c}{x}$ табамыз.Ізделінді қисық $(1:2)$ нүктесі арқылы өтеді,сондықтан $C=1, y=1+\frac{1}{x}.$

Мысал 3. Қисық координат басынан өтеді және $y\geq 0$ жарты жазықтығында жатады. Координат осьтерімен шенелген және оларға перпендикуляр болатын,қисық нүктесінен жүргізілген тіктөртбұрышты қисық екіге бөледі,қисық астында орналасқан тіктөртбұрыш бөлігінің ауданы қисықтың үстінде қалған тіктөртбұрыш бөлігінің ауданынан 2 есе аз. Қисықтың теңдеуін жазыңыз.

Шешуі. Ізделінді $y=e(x)$ қисығының кезкелген $M(x;y)$ нүктесінен координаталық осьтерге MA және MB перпендикулярларын түсірейік. $OAMB$ тіктөртбұрышының ауданы $S=xy$ формуласымен беріледі. Қисықтың астында жатқан тіктөртбұрыш бөлігінің ауданын $Q=\int_0^x y(t)dt$ формуласымен есептейміз.

Шарт бойынша, $S-Q=2Q, xy=3\int_0^x y(t)dt.$ Интегралдық теңдеуге ие болдық,енді екі жағын да x бойынша дифференциалдап, дифференциалдық теңдеуге өтеміз. $x\frac{dy}{dx}+y=3y$ немесе $x\frac{dy}{dxx}=2y.$

Бұл теңдеуді интегралдап, $y=Cx^2$ табамыз. Шарт бойынша қисық $y\geq 0$ жарты жазықтығында жатады, сондықтан кез келген $y=Cx^2(C>0)$ парабола есептің шартын қанағаттандырады[2].

Мысал 4. Ерітінді 20литр суы бар ыдысқа минутына 5 литр жылдамдықпен араластырылады және қоспа ыдыстан бірдей жылдамдықпен ағып кетеді. Ыдыста 4 минуттан соң қанша тұз болады?

Шешуі. $m(t)$арқылы процесс басталғаннан кейінt минуттан соңғы ыдыстағы тұз мөлшерін белгілейік. $[t;t+\Delta t]$ уақыт аралығында ыдыстағы тұз мөлшері қаншалықты өзгеретіндігін есептейік.

Δt уақыт ішінде ыдысқа $5\cdot\Delta t$ерітінді түседі.Бұл ерітіндіде $0{,}2\cdot 5\cdot\Delta t=\Delta t$ тұз бар.Осы уақыт ішінде $5\cdot\Delta t$ ерітінді ыдыстан ағып кетеді. t уақыт ішінде ыдыста $m(t)$тұз бар еді, Δtуақытта ыдыстағы тұз мөлшері өзгермеген болса ,ағып кеткен ерітіндінің құрамында $\frac{m(t)}{20}\cdot 5\cdot\Delta t=0{,}25\cdot m(t)\cdot\Delta t$ кг тұз болды. Бұл уақыт ішінде тұздың берілген мөлшері біршама $\alpha-$ға өзгереді,онда Δt уақытта ыдыстан $0{,}25(m(t)+\beta)\Delta t$ кг, $0<\beta<\alpha$ тұз ағып кетеді. Осы уақыт ішінде $m(t+\Delta t)-m(t)$ тұз мөлшерінің өсімі табылған мәндер арасындағы айырмашылыққа тең.

$$m(t+\Delta t)-m(t)=\Delta t-0{,}25(m(t)+\beta)\Delta t$$

Теңдіктің екі жағын даΔt - ға бөліп, $\Delta t\to\infty$шекке көшеміз.

$m(t)$функциясын қанағаттандыратын дифференциалдық теңдеуді алдық. Бұл теңдеудің шешімі $m(t)=4+Ce^{-\frac{t}{4}}$ болады. $t=0, m(0)=0, C=-4$ уақытта ыдыста тұз болмады. Ыдыстағы тұз мөлшері уақыт өткен сайын $m(t)=(1-e^{-\frac{t}{4}})$ заңымен өзгереді.

$t=4$ уақытта ыдыста $m(4)=(1-e^{-1})\approx 2{,}4$кг тұз болады.

Мысал 5. Сұйықтық радиусы R түзу құбырында ағып жатыр. Сұйықтықтың әрбір қабатына қатысты ағынның жылдамдығы осы қабаттың құбырдың ортасына (цилиндр осіне) жақындаған сайын артады. Сәйкес сұйық қабатының цилиндр осінен r қашықтығына байланысты V табыңыз.

Шешуі. Гидравликадан белгілі V және r арасындағы байланыс, мұндағы ε коэффициенті тұтқырлықтың $dv=-\frac{\gamma i}{4\varepsilon}rdr$ теңдеуімен өрнектеледі. Мұндағы, $i-$ гидравликалық құлдырау; $\gamma-$ сұйықтықтың тығыздығы (минус r қашықтықтың ұлғаюымен ағынның жылдамдығының төмендеуіне байланысты). Теңдеуді интегралдасақ, $v=-\frac{\gamma i}{4\varepsilon}r^2+C.$ C тұрақтысының мәні құбырға тікелей іргелес жатқан сұйық қабатының ағу жылдамдығы нөлге тең, яғни $v(R)=0$ болған жағдайдан анықталады. Сонымен,

$$v(R)=-\frac{\gamma i}{4\varepsilon}r^2+C=0; C=\frac{\gamma i}{4\varepsilon}R^2.$$

Осылайша, $v(r)=\frac{\gamma i}{4\varepsilon}(R^2-r^2).$

Мысал 6. Бос темір шар стационарлық термиялық күйде (яғни дененің әртүрлі нүктелеріндегі температура әртүрлі, бірақ уақыт өте өзгермейтін күйде). Шардың ішкі радиусы 6 см, сыртқы радиусы 10 см, ішкі бетінің температурасы $200^\circ C$, ал сыртқы $20^\circ C$. Шардың центрінен 9 см қашықтықта орналасқан нүктелердегі температураны табыңыз.

Шешуі. Жылу ағынының бағытына перпендикуляр Sауданынан өтетін qжылу мөлшері S ауданына және x өзгерген кезде температураның өзгеру жылдамдығына пропорционал болатыны тәжірибе жүзінде анықталды, яғни $q=-kS\dfrac{dt}{dx}$ кезінде. әрбір жеке нүкте, мұндағы,

k - жылу өткізгіштік коэффициенті (темір үшін $k=0{,}14$)[3].

Бұл жағдайда симметрияға сәйкес жылу радиалды таралады, сондықтан әрбір нүктедегі температура оның шардың центрінен қашықтығына байланысты. Жылу өтетін платформаның ауданы r радиусы бар шардың бетінің ауданы, яғни $S=4\pi r^2$; сондықтан, $q=-4\pi kr^2\dfrac{dT}{dr}$. Бірақ екі ерікті концентрлі сфералық арқылы өтетін жылу мөлшері беттері бірдей , сондықтан $-4\pi kr^2\dfrac{dT}{dr}=q=const.$ Айнымалыларды бөліп, интегралдау арқылы $4\pi kT=\dfrac{q}{r}+C$ аламыз. $T(6)=200, T(10)=20$ шарттарынан q және C анықтаймыз: $800\pi k=\dfrac{q}{6}+C, 80\pi k=\dfrac{q}{10}+C, q=10800\pi k, C=-1000\pi k$. Содан кейін, $T=T(r)=\dfrac{2700}{r}-250,$

$T(9)=300-250=50^{\circ}C.$

Мысал 7. Жұқа су қабатының жарық ағынын жұтуы қабаттың қалыңдығына және оның бетіне түсетін ағынға пропорционал. Қалыңдығы 1 м қабаттан өткенде бастапқы жарық ағынының $1/4$ бөлігі жұтылады. Жарық ағынының қай бөлігі h тереңдігіне жетеді?

Шешуі. $Q=Q(h)$ тереңдікте бетке түсетін жарық ағыны болсын. Қалыңдығы dh су қабатынан өткенде жұтылатын жарық ағыны $dQ=-kQdh$ тең болады, мұндағы $k-$ пропорционалдық коэффициенті. Осыдан $Q(h)=Ce^{-kh}$ шығады.

Бастапқы жарық ағыны Q_0 $-$ға тең болсын. Сонда $Q(0)=Q_0$ бастапқы шартынан $Q_0=C$, демек $Q(h)=Q_0e^{-kh}$ болатынын табамыз. Шарты бойынша $Q(1)=\dfrac{3}{4}Q_0$, сондықтан $Q_0=Q_0e^{-k}$. Мұндағы, $e^{-k}=\dfrac{3}{4}$ және $Q(h)=Q_0(\dfrac{3}{4})^h$, жарық ағыны $Q(4)=Q_0(\dfrac{3}{4})^4\approx 0{,}316Q_0$. Осылайша , бастапқы жарық ағынының $1/3$ бөлігінен азы 4 м тереңдікке жетеді.

Мысал 8. A және B заттардың химиялық реакциясы нәтижесінде C заты түзіледі. Егер реакцияға түсу сәтінде A және B заттардың мөлшері тең болса, C затының мөлшерінің уақытқа тәуелділігін анықтаңыз. A және B тиісінше a және b. Реакция жылдамдығы әрекеттесуші массалардың көбейтіндісіне пропорционал.

Шешуі. $x=x(t)-$ реакция басталғаннан кейінгі t уақыт ішіндегі C затының мөлшері болсын; $\dfrac{dx}{dt}-$ заттың пайда болу жылдамдығы. Шарты бойынша,

$$\frac{dx}{dt}=k(a-x)(b-x), k>0,$$

мұндағы $k-$ пропорционалдық коэффициенті. Айнымалыларды ажырата, бізде

$$\frac{dx}{(a-x)(b-x)}=kdt \text{ немесе } \frac{dx}{(x-a)}-\frac{dx}{x-b}=-k(b-a)dt.$$

Интегралдасақ ,

$$\frac{x-a}{x-b} = Ce^{-k(b-a)t}.$$

$x(0)=0$ шартынан $C=\frac{a}{b}$ табамыз, демек,

$$\frac{x-a}{x-b} = \frac{a}{b}e^{-k(b-a)t}.$$

Бұл теңдеуді x үшін шешіп, қажетті тәуелділікті табамыз:

$$x = x(t) = ab\frac{1-e^{-k(b-a)t}}{b-ae^{-k(b-a)t}}.$$

$b>a$, онда $x(t)\to at\to\infty$. Егер $b<a$ болса, онда $x=x(t)$ тәуелділігін

$$x = ab\frac{e^{k(b-a)t}-1}{be^{k(b-a)t}-a},$$

түрінде жаза отырып, $x(t)\to b, t\to\infty$ деп қорытынды жасаймыз.

Егер A және B заттардың мөлшері тең болса, яғни $a=b$ болса, онда реакция теңдеуі $\frac{dx}{dt}=k(a-x)^2$ түрінде болады. Айнымалыларды бөліп, интегралдағанда $\frac{1}{a-x}=kt+C$ аламыз. $x(0)=0$ шартынан біз $C=\frac{1}{a}$ екенін табыңыз. Сондықтан реакция процесі

$$x = a-\frac{a}{1+akt} = a(1-\frac{1}{1+akt}).$$

тәуелділігімен сипатталады. Сонымен $t\to\infty$ болғанда $x(t)\to a$ болады[4].

Қорытындылай келе дифференциалдық теңдеулер тақырыбын үйрету алдында пән аралық байланысты орнатқан абзал. Физика мен химияның, геометрия мен механиканың байланысы дифференциалдық теңдеулерді шешуге машықтанудың бірден бір кепілі. Әрине, математиканың негізгі тарауларының бірі туынды мен интеграл байланысын да алдын ала пысықтап барып бұл тарауға дайындықпен өткен дұрыс.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения: задачи и примеры с подробными решениями: учеб.пособие. –Изд. 6-е. –М.: Изд-во ЛКИ, 2017. –256 с.
2. Аносов Д.В. Дифференциальные уравнения: то решаем, то рисуем. - М.: МЦНМО, 2008. - 200 с.
3. Ястребова Г. Е. о методических особенностях изучения дифференциальных уравнений средней школы//Научние труды МШ'У им. в. Я. Ленина. Серия:естественные науки. -"Прометей", 1995. -С. 192-194.
4. Кудрявцев Л.Д. Мысли о современной математике и ее изучении. - М: Наука,1977. - С. 112.

ӘОЖ 517.18

ДБҮ - ЖОҒАРЫ МЕКТЕП ОҚУШЫЛАРЫН ШЫҒАРМАШЫЛЫҚ МАТЕМАТИКАЛЫҚ ӘРЕКЕТКЕ ДАЙЫНДАУДА

Насрулла Нағима Нұржанқызы
nasrullanagima@gmail.com