МРНТИ 81.14.11

Б.Н. Нурмаханов[1], М.М. Юсупов[2], Б.Б. Белесарова[3]
[1,3]*Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилев*
Нур-Султан, Казахстан
[2]*Таразский региональный университет имени М.Х. Дулати*
Тараз, Казахстан
E-mail: *baimahan.nurmahanov@yandex.kz*

Алгоритм получения уравнений преобразования T_{4-4} специального видаи их свойства

Аннотация: *В статье используются различные методы при решении геометрических задач в начертательной геометрии. Методы преобразования позволяют решить сложные задачи, связанные с кривыми и поверхностями. В данной работе предлагается получить преобразования второго порядка. Приведена пространственная схема получения 2-2–значных точечных преобразований плоскости. А также предлагается получение уравнения этих преобразовании второго порядка.*

Ключевые слова: *начертательная геометрия, геометрические преобразования второго порядка, уравнения дву-двузначного преобразования плоскости.*

DOI: https://doi.org/10.32523/2220-685X-2021-63-4-36-46

Введение. Современная прикладная геометрия и инженерная графика занимается разработкой способов отображения геометрических форм виде нелинейных геометрических преобразований плоскости.

Это научные работы как Михайленко В.Е., Якунин В.И., Волков В.Я., Иванов Г.С., Найдыш В.М., Кучкарова Д.Ф. и др.

Учёные по нашей республике: Есмуханов Ж.М., Мульдеков И.О., Нурмаханов Б.Н., Байдабеков А.К., Жанабаев Ж.Ж., Тусупбекова К.И., Искакова С.Д., Жандарбекова Д.Ж., Фазылов Х., Сексенбай М.С. и др.

Теория геометрических преобразований плоскости разработаны в научных работах Фролова С А, Джапаридзе И.С., Торосяна С.В., Нурмаханова Б.Н., Байдабекова А.К. и др

Исследованию нелинейных геометрических преобразований уделено мало внимания ученых геометров, что ограничило их применение в проектировании технических поверхностей.

В работах [1, 2] исследованы (1-2)-значные преобразования, задаваемые уравнениями:

$$x = x_{1(2)};$$

$$y = \sqrt{y^2_{1(2)} - e^2},$$

где: x и y- декартовы координаты точки-образа;

$x_{1(2)}$ и $y_{1(2)}$ - декартовы координаты точки – прообраза;

e-постоянное число.

Графическая реализация этого преобразования приведена на рисунке 1.

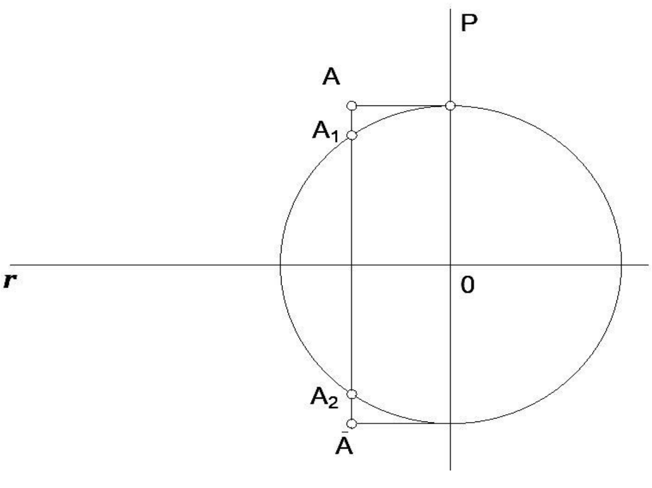

Рисунок 1: Квадратичное преобразование точки.

Преобразует точку А в две точки A_1 и A_2. В обратно точке $A_1(A_2)$ соответствуют две точки, одна из которых является заданной точкой А. То есть оно является взаимно одно-двузначным преобразованием.

Основная часть. В данной работе разработан принцип отображения конуса φ_1 и цилиндра вращения φ_2 на плоскость в виде (1-4)-значного точечного соответствия T_{4-4} специального вида.

Для исследования свойств преобразований $T_{4-4,}$ необходимо получить их уравнения. Алгоритм получения уравнений преобразования T_{4-4} следующий:

1) запишем уравнение поверхностей φ_1 и φ_2 соответственно в виде

$$x_3 = \sqrt{f_1(x_1^2, x_2, R^2)} \quad (1)$$

$$x_3 = \sqrt{f_2(x_1^2, x_2, R^2)} \quad (2)$$

2) вращаем поверхность φ_1 на 90° относительно оси OX_2. Точка $A(x_1, x_2, x_3)$ после вращениязаймет новое положение, при этом координата x_3 расположится вдоль оси OX_1 и обозначим x_1'.

$$x_3 = x_1' \quad (3)$$

Подставив полученное равенство в уравнение поверхности φ_1получим уравнение для определения абсицы точки-образа

$$x_1' = x_3 \mid 2 = f_1(x_1^2, x_2, R^2)$$

или

$$x_1' = \sqrt{f_1(x_1^2, x_2, R^2)}. \quad (4)$$

Вращаем поверхность φ_2 на 90° относительно оси OX_1. Точка $A(x_1, x_2, x_3)$ после вращения займет новое положение, при этом координата x_3 расположится вдоль оси OX_2 и после вращения обозначим x_2'.

$$x_3 = x_2' \ . \quad (5)$$

Подставив полученное равенство в уравнение поверхности φ_2 получим второе уравнение для определения ординат точки-образа:

$$x_2' = x_3 \mid 2 = f_2(x_1^2, x_2, R^2)$$

или

$$x_2' = \sqrt{f_2(x_1^2, x_2, R^2)}. \qquad (6)$$

3) Объединив полученное уравнения в пунктах 4 и 6 в одну систему получим искомые уравнения преобразования T_{4-4} в виде:

$$x_1' = \sqrt{f_1(x_1^2, x_2, R^2)}$$
$$x_2' = \sqrt{f_2(x_1^2, x_2, R^2)}, \qquad (7)$$

где x_1', x_2'- декартовы координаты точки-образа;

$x_{1,}$ x_2 декартовы координаты точки – прообраза;

f_1, f_2 –функции второго порядка;

R - постоянное число.

С использованием данного алгоритма определены уравнения различных преобразований $T_{4-4}^{кц}$, $T_{4-4}^{цк}$, которые приведены ниже (Таблица1). Следует отметить, что преобразование $T_{4-4}^{кк}$, приведенная в примере 1 п.1.1, не включены в таблицу 1, так как полученные в дальнейшем кривые не представляют интереса для исследований.

Пример 1.

Рассмотрим алгоритм получения уравнений преобразования T_{4-4}, в котором участвуют поверхность конуса φ_1 и поверхность цилиндра φ_2 (Рисунок 1).

1) запишем уравнения поверхности φ_1, например

$$x_1'^2 = x_2^2 - x_1^2, \qquad (8)$$

запишем уравнения поверхности цилиндра φ_2, например

$$x_2'^2 + x_1^2 = R^2,$$

или

$$x_2'^2 = R^2 - x_1^2 \qquad (9)$$

2) вращаем поверхность φ_2 на 90° относительно оси OX_2. Точка $A($[illegible]$)$ после вращения займет новое положение, при этом величина [illegible] расположится вдоль оси OX_1 и обозначим [illegible].

$$\lambda = \text{[illegible]} \qquad (10)$$

Подставив полученное равенство в уравнение (8), получим уравнение преобразования $T_{4\text{-}4}$ поверхности конуса φ_1

[illegible]

или

$$(\lambda = \sqrt{\text{[illegible]}}, \qquad (11)$$

вращаем поверхность цилиндра φ_2 на 90° относительно оси OX_1. Точка $A($[illegible]$)$ после вращения займет новое положение, при этом величина [illegible] расположится вдоль оси OX_2и после вращения обозначим [illegible]

$$\lambda = \text{[illegible]} \qquad (12)$$

Таблица 1: Преобразования $T_{4\text{-}4}$ полученные отображением поверхностей вращения (конус, цилиндр).

№	Преобразования	Заданные поверхности	Полученные уравнения преобразования	Обратные преобразования
1.	$T^{кц}_{4\text{-}4}$	Конус, цилиндр	$\lambda = \sqrt{\text{[illegible]}}$ $\lambda = \sqrt{R - \text{[illegible]}}$	$\lambda = \sqrt{\text{[illegible]}}\ R^2$ $\lambda = \sqrt{\text{[illegible]}}$
2.	$T^{цк}_{4\text{-}4}$	Цилиндр, конус	$\lambda = \sqrt{\text{[illegible]}}$ $\lambda = \sqrt{\text{[illegible]} + \text{[illegible]}}$	$\lambda = \sqrt{\text{[illegible]}}$ $\lambda = \sqrt{\text{[illegible]} + \text{[illegible]}}$

Подставив полученное равенство в уравнение поверхности конуса φ_2 получим второе уравнение рассматриваемого преобразования Т $^{кц}{}_{4\text{-}4.}$ В рассматриваемом примере имеем:

$$(x'_2)^2 = R^2 - x_2^2$$

или

$$x'_2 = \sqrt{R^2 - x_2^2}. \qquad (13)$$

3) Объединив полученное уравнения в пункте 2 получим искомые уравнениярассматриваемого преобразования Т$^{кц}{}_{4\text{-}4.}$ Для рассматриваемого случая уравнении преобразования Т$^{кц}{}_{4\text{-}4}$ получим в виде:

$$x'_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$$x'_2 = \sqrt{R^2 - x_2^2}, \qquad (14)$$

где x'_1, x'_2–декартовыкоординаты точки-образа;

x_1, x_2 - декартовы координаты точки – прообраза;

R - постоянное число.

Для достоверности рассмотрим конкретный числовой пример. Пусть задана точка А(50,35) и R=40. Подставим координаты x_1 и x_2 точки А и значение R в уравнение (14), получим следующее значение x'_1=*+61* и x'_2=*+19,3*. Из рисунка-1 видно, что точке А(50,35) на чертеже соответствуют четыре точки с координатами A_1 (-61;19,3), A_2(61;19,3), A_3(61;-19,3) и A_4(-61;-19,3).

Пример 2.

Рассмотрим алгоритм получения уравнений преобразования $T_{4\text{-}4}$, в котором участвуют поверхность цилиндра φ_1 и поверхность конуса φ_2 (Рисуноу 2).

1) запишем уравнение поверхности цилиндра φ_1 виде

$$x_1^2 + x_3^2 = R^2 \qquad (15)$$

или

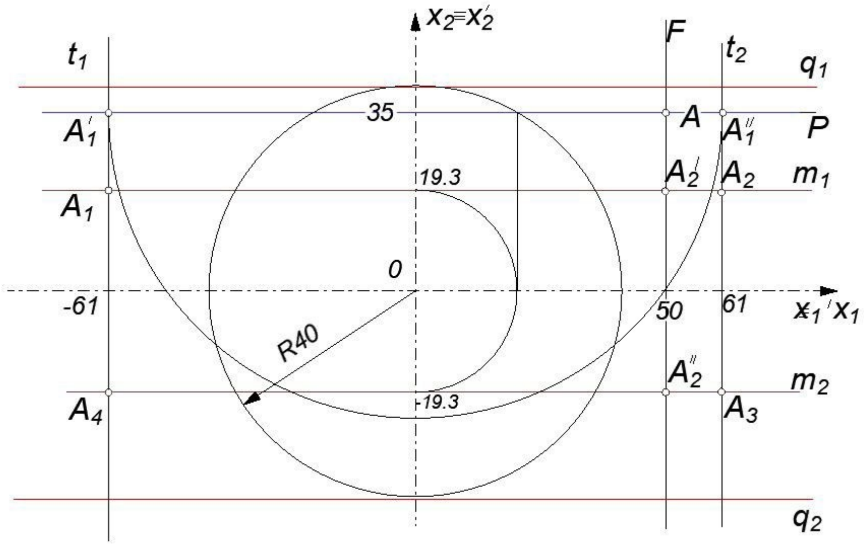

Рисунок 2. Графическая модель (1-4) - значного преобразования $T_{4\text{-}4}^{\text{кц}}$

$$x^{2} = R^{2} - x^{2} \quad [illegible]$$ (16)

запишем уравнение поверхности цилиндра φ_2 в виде

$$x^{2} = x^{2} - x^{2} \quad [illegible],$$

2) вращаем поверхность φ_1 на 90° относительно оси OX_2. Точка $A($[illegible]$, x_2,$ [illegible]$)$ после вращения займет новое положение, при этом величина [illegible] расположится вдоль оси OX_1 и обозначим [illegible].

$$x = x \quad [illegible].$$ (17)

Подставив полученное равенство в уравнение поверхности (17), получим уравнение преобразования $T_{4\text{-}4}$ поверхности цилиндра φ_1

$$(x)^2 = (\ldots)^2 = R^{2} - x^{2} \quad [illegible]$$

или

$$x = \sqrt{R^{2} - x^{2}} \quad [illegible].$$ (18)

Вращаем поверхность цилиндра φ_2 на 90° относительно осиОХ$_1$. Точка $A(x_1, x_2, x_3)$ после вращения займет новое положение, при этом величина x_1 расположится вдоль оси ОХ$_2$ и после вращения обозначим x'_2

$$x'_2 = x_1 . \tag{19}$$

Подставив полученное равенство в уравнение поверхности конуса φ_2 получим второе уравнение рассматриваемого преобразования $T_{4\text{-}4}^{цк}$. В рассматриваемом примере имеем:

$$(x'_2)^2 = \ldots = x_1^2 - x_2^2$$

или

$$(x'_2)^2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \tag{20}$$

3) Объединив полученное уравнения в пункте 2, получим искомые уравнения рассматриваемого преобразования $T_{4\text{-}4}^{цк}$. Для рассматриваемого случая уравнении преобразования $T_{4\text{-}4}^{цк}$ получим в виде:

$$x'_1 = \sqrt{R^2 - x_1^2}$$

$$x'_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \tag{21}$$

где x'_1, x'_2- декартовыкоординаты точки-образа;

$x_{1,} x_2$ декартовы координаты точки – прообраза;

R - постоянное число.

Для достоверности рассмотрим конкретный числовой пример. Пусть задана точка А(30,30) и R=40. Подставим координаты x_1 и x_2 точки А и значение R в уравнение (21), получим следующее значение x_1=+*26,4* и x_2=+*46*. Из рисунка 2 видно, что точке А(30,30) на чертеже соответствуют четыре точки с координатами A_1(-26;4,46), A_2(26;4,46), A_3(26,4;-46) и A_4(-26;-4,-46).

Пример 3.

Рассмотрим алгоритм получения уравнений преобразования $T_{4\text{-}4}$, в котором участвуют поверхность конуса φ_1 и поверхность конуса φ_2 запишем уравнение поверхности конуса φ_1 например

$$x_3^2 = x_1^2 - x_2^2 \tag{22}$$

запишем уравнение поверхности конуса $\varphi_{2,}$ например

$$x_3^2 = x_1^2 - x_2^2 \tag{23}$$

1) вращаем поверхность конуса φ_1 на 90° относительно оси OX_2. Точка $A(x_1, x_2, x_3)$ после вращения займет новое положение, при этом величина x_3 расположится вдоль оси OX_1 и обозначим x_1'.

$$x_1' = x_3 . \tag{24}$$

Подставив полученное равенство в уравнение поверхности (22), получим уравнение преобразования $T_{4\text{-}4}$ поверхности конуса φ_1 (Рисунок 3).

$$(x_1')^2 = (x_3)^2 = x_1^2 - x_2^2$$

или

$$(x_1')^2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \tag{25}$$

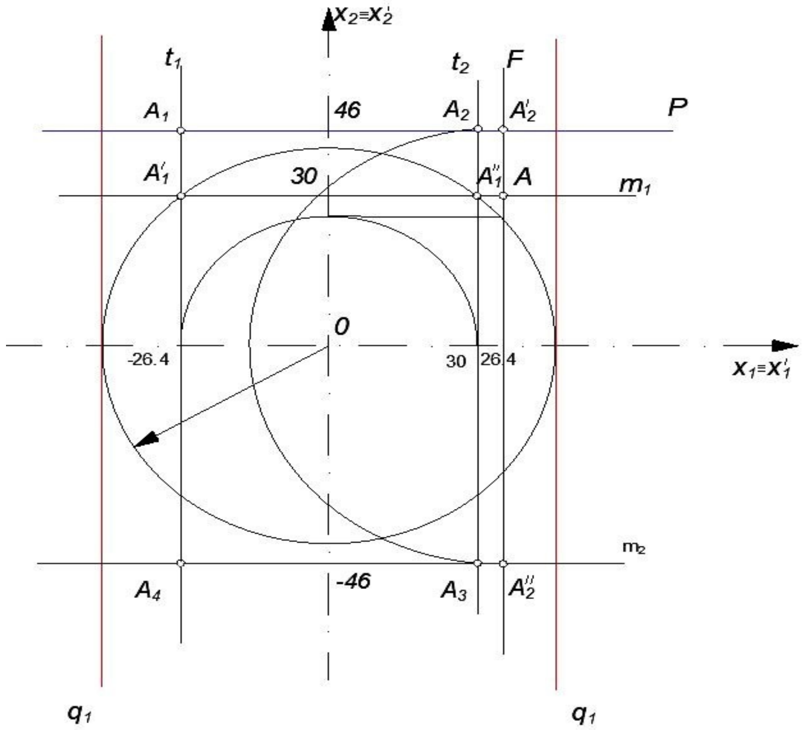

Рисунок 3: Графическая модель (1-4)- значного преобразования $T_{4\text{-}4}^{цк}$

вращаем поверхность конуса φ_2 , на 90° относительно оси OX_1. Точка A(λ [illegible], x_2 [illegible]) после вращения займет новое положение, при этом величина λ [illegible] расположится вдоль оси OX_2 и после вращения обозначим λ [illegible].

$$\lambda \;=\; [illegible] \;. \tag{26}$$

Подставив полученное равенство в уравнение поверхности φ_2 получим второе уравнение рассматриваемого преобразования $T_{4\text{-}4}^{кк}$. В рассматриваемом примере имеем:

$$(\lambda\;)^2 = [illegible] \;) = \lambda^2 - [illegible]$$

или

$$(\lambda\;)^2 = \sqrt{[illegible]^2 - [illegible]^2}. \tag{27}$$

2) Объединив полученное уравнения в пункте 2 получим искомые уравнения рассматриваемого преобразования $T_{4\text{-}4}^{кк}$ (Рисунок 4).

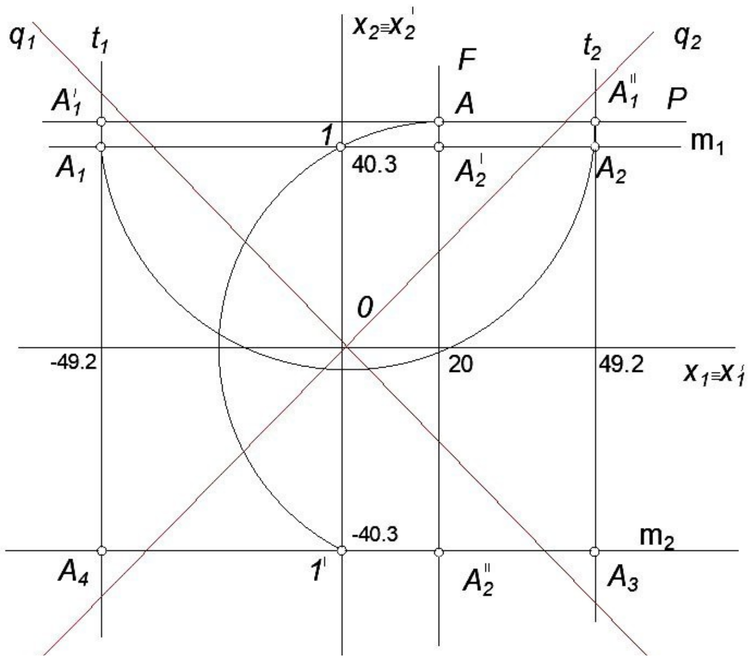

Рисунок 4: Графическая модель (1-4) - значного преобразования $T_{4-4}^{кк}$

$$x'_1 = \pm\sqrt{x_1^2 - x_2^2}$$

$$x'_2 = \pm\sqrt{x_2^2 - x_1^2}, \qquad (28)$$

где x'_1, x'_2-декартовы координаты точки-образа;

$x_{1,}$ x_2 декартовы координаты точки – прообраза;

R - постоянное число.

Выводы. Полученные в работе нелинейные преобразования второго порядка дополняют известные в начертательной геометрии преобразования второго порядка и могут быть использованы для получения новых кривых 4-ого порядка [3].

Использованная литература

1. С.А. Фролов. Методы преобразования ортогональных проекции. - М.: Машиностроение, 1970. -160 с.

2. И.С. Джапаридзе. О некоторых направлениях исследований в области геометрического моделирования // Начертательная геотетрия и ее приложения. Вып. 1. - Саратов: Изд. Саратов университета, 1976.

3. А.А. Каражанов. Способ конструирования криволинейной поверхности подземной выработки по заданным требованиям // Вестник КазНТУ. –Алматы: КазНТУ, 2010. №3.

Б.Н. Нұрмаханов[1], М.М. Усупов[2], Б.Б. Белесарова[3]
[1, 3] Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті
Нұр-Сұлтан, Қазақстан
[2]М.Х. Дулати атындағы Тараз өңірлік университеті
Тараз, Қазақстан
E-mail: *baimahan.nurmahanov@yandex.kz*

Арнайы түрдегі $T_{4\text{-}4}$ түрлендіру теңдеулерін алу алгоритмі және олардың қасиеттері

Аннотация: *Мақалада сызба геометрияда геометриялық есептерді шығару үшін әртүрлі әдістер қолданылады. Трансформация әдістері қисықтар мен беттерге байланысты күрделі есептерді шешуге мүмкіндік береді. Бұл жұмыста біз екінші ретті түрлендірулерді алуды ұсынамыз. Жазықтықтың 2-2 мәнді нүкте түрлендірулерін алудың кеңістіктік схемасы келтірілген. Сондай-ақ осы екінші ретті түрлендірулер үшін теңдеу алу ұсынылады.*

Түйінді сөздер: *сызба геометрия, екінші ретті геометриялық түрлендірулер, екі мәнді жазықтықтан екі мәндіге өту теңдеулері.*

B.N. Nurmakhanov[1], M.M. Usupov[2], B.B. Belesarova[3]
[1.3]Eurasian National University. L.N. Gumilev
Nur-Sultan, Kazakhstan
[2]Taraz Regional University named after M.X. Dulati
Taraz, Kazakhstan
E-mail: *baimahan.nurmahanov@yandex.kz*

Algorithm for obtaining the equations of the $T_{4\text{-}4}$ transformation of a special form and their properties

Abstract: *In descriptive geometry, various methods are used to solve geometric problems. Transformation methods allow you to solve complex problems related to curves and surfaces. In this paper, we*

propose to obtain second-order transformations. A spatial scheme for obtaining 2-2-valued point transformations of the plane is given. It is also proposed to obtain an equation for these second-order transformations.
Keywords: *descriptive geometry, second-order geometric transformations, two-valued plane transformation equations.*

References

1. S.A. Frolov. Methods for transforming orthogonal projections. -M.: Mashinostroenie, 1970. -160 p.
2. I.S. Japaridze. On some directions of research in the field of geometric modeling // Descriptive geometry and its applications. Problem 1. -Saratov: Ed. Saratov University, 1976.
3. A.A. Karazhanov. A method for designing a curved surface of an underground working according to specified requirements // Bulletin of KazNTU. -Almaty: KazNTU, 2010. №3.