

А К А Д Е М И Я Н А У К
С С С Р
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
им. А. Ф. ИОФФЕ

Я. С. УФЛЯНД

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
В ЗАДАЧАХ
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

*ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ДОПОЛНЕННОЕ*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
Л Е Н И Н Г Р А Д . 1 9 6 8

Интегральные преобразования в задачах теории упругости.
Уфлянд Я. С. Изд. 2-е, доп. Изд-во «Наука», Ленингр.-
отд., Л., 1967, 1—402.

В книге дается систематическое изложение одного из эффективных методов современной математической физики — метода интегральных преобразований применительно к задачам теории упругости. Исследуются классы плоских и пространственных задач упругого равновесия, разрешимых с помощью интегральных преобразований. Помимо классических вопросов, рассмотрены некоторые сложные смешанные задачи, служившие предметом оригинальных работ последних лет. В настоящее издание включены некоторые дополнительные вопросы связанные с методом парных интегральных уравнений

Библ. 337 назв., рис. 51, табл. 37.

Ответственный редактор
чл.-корр АН СССР Г. А. ГРИНБЕРГ

О Г Л А В Л Е Н И Е

Стр.

Предисловие ко второму изданию	8
Предисловие	9

ОБЗОР РАБОТ ПО ПРИМЕНЕНИЯМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

1. Двумерные задачи	13
2. Пространственные задачи	18

Часть I

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

<i>Глава I.</i> Плоская задача теории упругости для бесконечной полосы	26
§ 1. Упругое равновесие полуплоскости	26
§ 2. Первая основная задача теории упругости для бесконечной полосы	29
§ 3. Вторая основная задача для бесконечной полосы	33
§ 4. Полоса, закрепленная по контуру и нагруженная сосредоточенным моментом	37
§ 5. Смешанная задача для бесконечной полосы	40
§ 6. Равновесие полосы с закрепленным основанием	42
<i>Глава II.</i> Кручение и изгиб призмы, образованной пересечением двух круговых цилиндров	44
§ 7. Решение задачи Дирихле для области, ограниченной дугами двух пересекающихся окружностей	44
§ 8. Кручение призмы, образованной двумя пересекающимися круговыми цилиндрами	46
§ 9. Вычисление касательных напряжений и жесткости при кручении	47
§ 10. Изгиб поперечной силой стержня луночного профиля	51
§ 11. Изгиб кругового цилиндра, срезанного плоскостью, параллельной оси	54
§ 12. Изгиб стержня с сечением в виде симметричной круговой луночки	56
<i>Глава III.</i> Плоская задача теории упругости для круговой луночки	59
§ 13. Решение основной бигармонической задачи для луночной области	59
§ 14. Сжатие симметричной круговой луночки местной нагрузкой	62
§ 15. Некоторые смешанные задачи для упругой полуплоскости	69

§ 16. Плоская контактная задача при наличии сцепления . . .	74
§ 17. Плоская задача для внешности круговой луночки . . .	80
§ 18. Влияние луночного отверстия на распределение напряжений в растянутой плоскости	82
§ 19. Растяжение полуплоскости с сегментной выемкой	88
§ 20. Концентрация напряжений в плоскости, ослабленной луночным отверстием и находящейся в условиях чистого сдвига	90

Глава IV. Применение преобразования Фурье к задачам изгиба тонких плит 91

§ 21. Изгиб полуплоскости с закрепленным краем	91
§ 22. Приложения преобразования Фурье к решению задач изгиба ленточных плит	95
§ 23. Изгиб бесконечной полосы сосредоточенной силой	101
§ 24. Решение неоднородного бигармонического уравнения в биполярных координатах	105
§ 25. Изгиб луночной плиты с закрепленным контуром	107
§ 26. Решение задачи изгиба для симметричной круговой луночки	110
§ 27. Изгиб кругового сегмента	114
§ 28. Изгиб полуплоскости с сегментной выемкой	117
§ 29. Смешанная задача изгиба полуплоскости	119
§ 30. Луночная плита под равномерной нагрузкой	120

Часть II

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МЕЛЛИНА

Глава V. Плоская задача теории упругости для клина 125

§ 31. Первая основная задача теории упругости для клиновидной области	125
§ 32. Равновесие клина, нагруженного сосредоточенной силой	130
§ 33. Решение второй основной задачи для клина	136
§ 34. Растяжение неограниченного тела, содержащего жестко впаивающую пластинку (плоская задача)	142
§ 35. Смешанная задача теории упругости для клина	144
§ 36. Действие сосредоточенной силы на клин с закрепленной гранью	149

Глава VI. Изгиб клиновидных плит 153

§ 37. Применение преобразования Меллина к задаче изгиба клиновидной плиты	153
§ 38. Изгиб клиновидной плиты с закрепленным контуром	155
§ 39. Клиновидная плита, опертая по краям	158
§ 40. Клиновидная плита со свободным контуром	160
§ 41. Смешанная задача изгиба клиновидной плиты	162

Часть III

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ХАНКЕЛЯ

Глава VII. Деформация упругого слоя 167

§ 42. Сведение первой основной задачи для упругого слоя к краевым задачам математической физики	167
§ 43. Равновесие упругого слоя при заданных нагрузках	171

§ 44. Вторая основная задача теории упругости для слоя . . .	174
§ 45. Деформация упругого слоя при смешанных краевых условиях	177
§ 46. Функция Грина для слоя с закрепленным основанием .	180
Глава VIII. Метод парных интегральных уравнений в пространственных задачах теории упругости	183
§ 47. Кручение упругого слоя	183
§ 48. Осесимметричная деформация упругого слоя с круговой линией раздела краевых условий на одной из граней .	188
§ 49. Осесимметричная контактная задача для упругого слоя	193
§ 50. Общая смешанная задача для упругого слоя	198
§ 51. Контактная задача для упругого слоя при отсутствии трения	203
§ 52. Контактная задача для слоя, сцепленного с основанием	207
§ 53. Концентрация напряжений в упругом слое, ослабленном плоской круглой щелью	211
§ 54. Деформация неограниченного тела, ослабленного двумя круглыми щелями	216
§ 55. Расчеты для случая равномерного осевого растяжения	224
Часть IV	
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МЕЛЛЕРА—ФОКА	
Глава IX. Краевые задачи теории потенциала для полупространства, разрешимые с помощью интегрального преобразования Меллера—Фока	230
§ 56. Уравнение Лапласа в тороидальных координатах . . .	230
§ 57. Применение преобразования Меллера—Фока к решению смешанных краевых задач для полупространства	232
§ 58. О некоторых типах особых гармонических функций . .	238
Глава X. Смешанная задача теории упругости для полупространства с круговой линией раздела краевых условий при задании на всей границе касательных напряжений	241
§ 59. Осесимметричная задача для случая, когда внутри круга задано нормальное перемещение, а вне его — нормальное напряжение	241
§ 60. Контактная задача для кругового в плане штампа при отсутствии трения	245
§ 61. Осесимметричная деформация неограниченного тела, ослабленного внешней круговой щелью	248
§ 62. Постановка и решение общей смешанной задачи	254
§ 63. Общий случай равновесия упругого пространства, содержащего внешнюю круговую щель	258
§ 64. Смешанная задача для случая задания внутри круга нормального напряжения, а вне его — нормального перемещения	262
§ 65. Растяжение упругого тела, ослабленного плоской круглой щелью	264
Глава XI. Решение смешанной задачи для полупространства с круговой линией раздела краевых условий, когда на всей границе известно нормальное напряжение	266
§ 66. Случай задания внутри круга радиального смещения, а вне его — касательного напряжения	266

§ 67.	Приложение к задаче о равновесии упругого тела, содержащего внешнюю круговую щель	269
§ 68.	Общая задача при задании внутри круга касательных перемещений, а вне его — касательных напряжений	272
§ 69.	Антисимметричная деформация тела, содержащего внешнюю круговую щель	277
§ 70.	Осесимметричная задача в случае задания внутри круга касательного напряжения, а вне его — радиального перемещения	280
§ 71.	Напряжения в упругом теле, ослабленном плоской круглой щелью	282
§ 72.	Решение общей задачи для случая, когда внутри круга известны касательные напряжения, а вне его — касательные смещения	284
§ 73.	Приложение к расчету напряжений в неограниченном теле, содержащем внутреннюю круговую щель	288
Глава XII.	Основная смешанная задача теории упругости для полупространства с круговой линией раздела граничных условий	291
§ 74.	Основная смешанная задача в случае осевой симметрии	291
§ 75.	Осесимметричная контактная задача для круглого штампа при наличии сцепления	294
§ 76.	Случай, когда вне круга заданы смещения, а внутри него — напряжения	297
§ 77.	Решение основной смешанной задачи в общем случае	302
§ 78.	Контактная задача для цилиндрического штампа, сцепленного с полупространством	312
§ 79.	Контактная задача со сцеплением при наличии нагрузок, приложенных вне штампа	319
Часть V		
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КОНТОРОВИЧА—ЛЕБЕДЕВА		
Глава XIII.	Пространственная задача теории упругости для клина при заданных перемещениях на границе	324
§ 80.	Некоторые трехмерные краевые задачи для клиновидной области	324
§ 81.	Вторая основная задача теории упругости для клина	328
§ 82.	Растяжение тела, содержащего жестко впаивную пластинку	332
Глава XIV.	Равновесие неограниченного упругого тела, ослабленного плоским разрезом	337
§ 83.	Постановка задачи	337
§ 84.	Случай нормальной симметричной нагрузки	340
§ 85.	Нормальная антисимметричная нагрузка	344
§ 86.	Касательная симметричная нагрузка, перпендикулярная ребру разреза	350
§ 87.	Касательная антисимметричная нагрузка, перпендикулярная ребру разреза	354
§ 88.	Касательная нагрузка, параллельная ребру разреза	359
Глава XV.	Основная смешанная задача теории упругости для полупространства с прямолинейной границей раздела крайних условий	361

	Стр.
§ 89. Сведение задачи к краевым задачам для гармонических функций	361
§ 90. Решение смешанной краевой задачи	364
Литература	371
Дополнение 1. Обзор новых работ по приложениям интегральных преобразований в задачах теории упругости	382
Дополнение 2. О парных интегральных уравнениях, связанных с преобразованием Мелера—Фока, и их приложениях в теории упругости	387
Дополнительная литература	398

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Основной текст настоящей книги сохранен без изменений — в нем сделаны только исправления замеченных опечаток, а также внесены небольшие коррективы редакционного характера.

В связи с тем что за последние годы появилось большое количество новых исследований по приложениям интегральных преобразований в теории упругости, автором в специальном дополнении 1 сделан краткий обзор некоторых новых работ указанного направления.

В книгу включено также дополнение 2, посвященное одному из недавно разработанных вопросов — парным интегральным уравнениям, связанным с интегральным преобразованием Мелера—Фока.

Вся дополнительная литература, ссылки на которую имеются только в дополнениях 1 и 2, помещена отдельным списком в конце книги.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга посвящена некоторым классам задач статической теории упругости, разрешимых с помощью интегральных преобразований.

Методы математической физики, связанные с использованием различных интегральных преобразований, за последние десятилетия проникли также и в теорию упругости. К настоящему времени в работах многих авторов уже рассмотрено значительное количество как двумерных, так и пространственных (главным образом осесимметричных) задач упругого равновесия, точные решения которых получены с помощью классических интегральных преобразований Фурье, Меллина и Ханкеля. Сюда относятся, в частности, плоские задачи для бесконечной полосы и клина, соответствующие вопросы изгиба тонких плит, пространственные задачи для упругого слоя и неограниченного цилиндра.

За последние годы в теории упругости нашли также большое применение менее известные интегральные преобразования по сферическим функциям с комплексным значком (преобразование Мелера—Фока) и по цилиндрическим функциям мнимого значка и аргумента (преобразование Конторовича—Лебедева), позволившие дать эффективное решение некоторых классов смешанных задач теории упругости для полупространства с линией раздела краевых условий в виде окружности или прямой.

Целью данной монографии является систематическое изложение методов, связанных с интегральными преобразованиями различных типов, применительно к краевым задачам теории упругости. Автор пытался охватить с единых позиций широкий класс задач упругого равновесия, начиная со сравнительно простых вопросов, разрешимых с помощью классических интегральных разложений типа Фурье, и кончая сложными смешанными задачами, исследованными в оригинальных работах последних лет путем применения некоторых специальных интегральных преобразований.

Использование интегральных преобразований в краевых задачах математической физики осуществляется, вообще говоря, с помощью двух несколько отличных друг от друга подходов.

В первом варианте применяется, по существу, метод Фурье. т. е. решение ищется в виде некоторого интегрального разложения, содержащего неопределенные функции параметра интегрирования, которые определяются из граничных условий с помощью соответствующей теоремы разложения. Такой метод представляется наиболее удобным в однородных краевых задачах. При втором подходе, обычно называемом методом интегральных преобразований, дифференциальные уравнения и граничные условия задачи переводятся в уравнения и условия для трансформант, после нахождения которых искомое решение дается формулой обращения для рассматриваемого интегрального преобразования. Этот метод имеет несомненные преимущества при решении неоднородных задач.

В настоящей книге применяются оба указанных метода, причем изложение ведется с той степенью строгости, которая обычно принята в книгах прикладного направления. В соответствии с этим основное внимание уделено нахождению эффективных, хотя и формальных результатов, полученных в предположении, что как искомые, так и заданные функции подчинены некоторым условиям общего характера. Во многих случаях можно непосредственно проверить, что найденные решения удовлетворяют всем поставленным условиям.

Монография состоит из пяти частей.

В первой части излагаются методы решения двумерных задач теории упругости, основанные на применении интегрального преобразования Фурье в прямоугольных и биполярных координатах. Здесь рассмотрены первая, вторая и смешанная задачи для бесконечной полосы, кручение и изгиб призмы, образованной пересечением двух круговых цилиндров, плоская задача для внутренности и внешности круговой луночки, вопросы изгиба тонких плит ленточной и луночной формы, а также некоторые смешанные задачи для полудлоскости.

Применению интегрального преобразования Меллина к основным плоским задачам теории упругости для клина и к вопросам изгиба клиновидных плит при различных краевых условиях посвящена часть вторая.

Третья часть данной книги содержит решения некоторых классов трехмерных краевых задач упругого равновесия, получаемые с помощью интегрального преобразования Ханкеля. Кроме исследований, относящихся к основным краевым задачам для упругого слоя, рассмотрены также более сложные смешанные задачи для тех случаев, когда на одной из граней слоя имеется окружность, разделяющая краевые условия различных типов. Задачи этого класса уже не допускают непосредственного точного решения, однако применение к ним интегрального преобразования Ханкеля приводит к так называемым парным интегральным уравнениям, сведение которых к интегральному

уравнению Фредгольма с непрерывным ядром позволяет дать эффективное решение некоторых контактных задач для упругого слоя, а также рассмотреть напряженное состояние в слое с круглой щелью и ряд сходных смешанных задач.

В четвертой части настоящей монографии подробно освещаются методы решения пространственных задач теории упругости, основанные на применении интегрального преобразования Мелера—Фока. Здесь даны точные решения смешанных задач для полупространства с круговой линией раздела граничных условий, а также их приложения к контактным задачам (в том числе и при наличии сцепления) и к сходным вопросам о напряжениях в неограниченном упругом теле, ослабленном внутренней или внешней круговой щелью.

В пятой части книги рассмотрены некоторые трехмерные задачи теории упругости, разрешимые с помощью интегрального преобразования Конторовича—Лебедева: вторая основная задача для клина, равновесие неограниченного тела, ослабленного плоским разрезом, и основная смешанная задача для полупространства с прямолинейной границей раздела краевых условий.

Автор счел необходимым в качестве иллюстрации изложенных общих методов рассмотреть достаточное количество конкретных задач из различных разделов теории упругости и привести необходимые для численных расчетов таблицы связанных с интегральными преобразованиями корней трансцендентных уравнений, а также значения ядер некоторых интегральных уравнений.

Монография рассчитана на научных работников и инженеров, занимающихся вопросами теории упругости и ее приложений, а также на преподавателей и аспирантов высших учебных заведений соответствующего профиля. Предполагается, что читатель знаком с основами теории упругости, а также с аппаратом классических интегральных преобразований в объеме обычных курсов математической физики. Каждой части книги предшествует краткий перечень основных зависимостей, характеризующих соответствующее интегральное преобразование. Что касается менее известных специальных интегральных преобразований по сферическим и цилиндрическим функциям, то относящиеся к ним сведения изложены в тексте несколько более подробно.

В специальном вступительном разделе монографии дан подробный обзор работ по применению интегральных преобразований в теории упругости. В список литературы наряду с известными автору источниками, относящимися к приложениям метода интегральных преобразований в задачах теории упругости, включены также другие работы, связанные с излагаемыми вопросами.

Настоящая монография не претендует на полноту в изложении задач теории упругости, разрешимых с помощью интеграль-

ных преобразований: в нее не вошел ряд вопросов, главными из которых являются деформация неограниченного цилиндра, парные интегральные уравнения, связанные с преобразованием Фурье, температурные напряжения и некоторые задачи для анизотропных тел.

Автор выражает глубокую признательность Н. Н. Лебеву за ценные советы, а также благодарит К. А. Аристову, Т. А. Чернову и А. Я. Черняк, выполнивших трудоемкие расчеты.

ОБЗОР РАБОТ ПО ПРИМЕНЕНИЯМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

1. Двумерные задачи

В первую часть настоящего обзора входят работы, посвященные применению интегральных преобразований Фурье и Меллина к решению двумерных задач статической теории упругости.

Наиболее многочисленные приложения к двумерным задачам теории упругости до последнего времени имело интегральное преобразование Фурье.

Первым решением из области теории упругости, связанным с аппаратом интегралов Фурье, следует, по-видимому, считать исследование Файлона [166] напряженного состояния в бесконечной полосе, по кромкам которой заданы внешние усилия. В дальнейшем этим же вопросом занимались многие авторы (см., например, работы [145, 180, 198]), которые либо видоизменяли и усовершенствовали решение Файлона, либо применяли его к конкретным задачам.

В конечном счете все указанные работы базируются на возможности представления бигармонической функции, через которую выражается решение плоской задачи теории упругости, в виде интеграла по параметру λ от частных решений бигармонического уравнения

$$\left\{ [A(\lambda) + yB(\lambda)]e^{\lambda y} + [C(\lambda) + yD(\lambda)]e^{-\lambda y} \right\} \frac{\cos \lambda x}{\sin \lambda x}, \quad \lambda \geq 0,$$

причем в пределах рассматриваемой полосы $-\infty < x < +\infty$, $|y| < a$.

Если заданные внешние нагрузки разложить в соответствующие интегралы Фурье, то можно найти величины A , B , C , D . Изложение этой методики дано П. Ф. Папковичем в его курсе теории упругости [84]; там же даны основы расчета тепловых напряжений в бесконечной полосе (см. также работу Париа [208]). При расчетах напряжений в полосе встретилась необходимость составления таблиц некоторых специальных трансцендентных уравнений (см. статью Фадле [164]).

В книге Снеддона [100] рассмотрено упругое равновесие бесконечной полосы и, в частности, полуплоскости ($y \geq 0$), причем в последнем случае следует, очевидно, положить $A=B=0$. Применение преобразования Фурье к решению первой основной задачи для полуплоскости изложено в монографии В. В. Новожилова [80].

С помощью интегрального преобразования Фурье можно дать также решение плоской задачи теории упругости для многослойной среды, состоящей из ряда параллельных полос с различными упругими свойствами. Частным случаем такой задачи является задача о балке на упругом основании, рассматривавшаяся в работе И. Г. Альперина [4] (см. также [31, 70, 134, 195]).

Интегральное преобразование Фурье дает возможность получить точное решение плоской задачи для бесконечной полосы при заданных на ее границе перемещениях (вторая основная задача), а также смешанной задачи, когда на одной кроме заданы усилия, а на другой — перемещения (см., например, работу Н. И. Сомова [103]). Заметим, что результаты, относящиеся к последнему случаю, нашли важные практические применения при исследовании явлений откола в толстых плитах [102], а также при расчетах на прочность резино-металлических изделий [99].

За последнее время, в связи с развитием методов акад. Н. И. Мухелишвили решения плоских задач теории упругости, ряд авторов вновь обратился к исследованию напряженного состояния в балках бесконечной длины при задании нагрузок на продольных сторонах. Так, в работах С. Е. Бирмана, получивших завершение в его диссертации [11], решение Файлона преобразовано к виду, весьма удобному для практических целей, а также даны многочисленные приложения этой методики. Применение аналогичных методов к задачам о равновесии балок служило и позднее предметом многих работ (см., например, [173, 226]).

Методы теории функций комплексной переменной дали возможность получить — в виде интегралов Фурье — решения ряда более сложных смешанных задач теории упругости для бесконечной полосы. В работе И. Г. Альперина [5] рассмотрена полоса, сжатая по половине длины, причем задача сведена к парным интегральным уравнениям специального вида, разрешимым по методу факторизации. М. Я. Беленьким [6] исследовалась плоская контактная задача для жесткого штампа, вдавливаемого в упругую полосу.

Среди большого количества работ, связанных с применением интегрального преобразования Фурье к плоским задачам теории упругости в прямоугольных координатах, отметим еще монографию С. Г. Лехницкого [63], в которой рассматривается напряженное состояние в анизотропных пластинках соответствующей формы (см. также статьи [44, 135, 146, 153—155, 223]), работы [176, 201, 224], относящиеся к расчетам напряжений в полубес-

конечной балке, а также интересные исследования Линга [188, 190], посвященные приближенному расчету концентрации напряжений в области выемок на кромках полосы.

Наряду с плоскими задачами теории упругости интегральное преобразование Фурье широко применялось также к вопросам поперечного изгиба упругих тонких плит, имеющих форму бесконечной плоскости, полуплоскости, бесконечной полосы и полуполосы при различных краевых условиях. Отдельные частные случаи таких задач рассматривались во многих журнальных статьях (см., например, [169, 172, 177, 184, 192, 193]). Систематическое изложение методов расчета ленточных плит дано в монографии П. Ф. Папковича [85]; им же рассмотрены некоторые случаи изгиба плиты в виде полуполосы.

Некоторые применения интегралов Фурье к вопросам расчета анизотропных плит имеются в книге С. Г. Лехницкого [63], а также в работе Новацкого и Турского [207]. Многочисленные приложения преобразование Фурье находит также при расчетах тонких плит, лежащих на упругом основании; ограничимся здесь указанием на работы Г. С. Шапиро [130, 131], Б. Г. Коренева [40, 41], Г. Я. Попова [86], а также на монографию С. С. Голушкевича [22].

Характерной особенностью всех рассмотренных выше задач является то обстоятельство, что в область упругого тела входят бесконечно удаленные точки. Наряду с этим интегральное преобразование Фурье может быть применено и к задачам для конечных областей, ограниченных координатными линиями такой системы криволинейных координат, для которой одна из переменных изменяется в бесконечных пределах. Такой системой является, в частности, система биполярных координат (α, β) , причем координата α может изменяться в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, так что в форме интеграла Фурье удобно представлять решения краевых задач для областей, ограниченных кривыми $\beta = \text{const}$. Этими кривыми оказываются дуги двух пересекающихся окружностей, образующие область, обычно называемую круговой луночкой.

Применение интегрального преобразования Фурье дало возможность получить точные решения задач кручения и изгиба призмы, образованной пересечением двух круговых цилиндров, а также ряда плоских задач теории упругости и задач изгиба упругих тонких плит луночной формы. В задачах, связанных с решением бигармонического уравнения, искомая функция может быть представлена в форме интеграла Фурье

$$\int_0^{\infty} [A(\lambda) \operatorname{ch} \lambda \beta \cos \beta + B(\lambda) \operatorname{ch} \lambda \beta \sin \beta + C(\lambda) \operatorname{sh} \lambda \beta \cos \beta + D(\lambda) \operatorname{sh} \lambda \beta \sin \beta] \frac{\cos \lambda \alpha}{\sin \lambda \alpha} d\lambda,$$

причем для первой основной задачи величины A , B , C , D определяются из граничных условий.

Решения задач о растяжении неограниченной плоскости, ослабленной луночным отверстием, были даны Вайнелем [231] и Липгом [185, 187] (см. также монографию Г. Н. Савина [95] и работы Карунеса [181] и М. А. Саврука [96]). Плоская задача для внутренности круговой луночки составила предмет диссертационной работы В. В. Еганияна [28]. Задачи кручения и изгиба стержней луночного профиля, изгиба плит луночной формы, а также некоторые плоские задачи для областей подобного вида рассматривались в работах автора [108—110], Вайнгардена [234], Ху Хай-чана [174], Войновского-Кригера [240, 241], Жарнея [179], Мияо [202]. Отметим, что указанные выше общие решения ряда задач теории упругости для луночных областей включают в себя как частные случаи многие решения, полученные с помощью различных искусственных приемов либо для областей специального вида [15, 220, 232, 233], либо для частных типов нагрузок [13, 165, 199, 205].

Использование аппарата интегралов Фурье в биполярных координатах позволяет дать точное решение плоских контактных задач для одиночного штампа (как при отсутствии трения, так и при наличии сцепления), а также сходных смешанных задач о напряжениях в неограниченном теле, ослабленном плоской щелью (см. книгу Снеддона и Берри [101], а также главу III настоящей монографии). Простейшие из таких задач рассмотрены в книге Снеддона [100] — решение здесь проводится в декартовых координатах, что приводит к парным интегральным уравнениям, разрешимым по способу Басбридж [149]. Нам представляется, однако, что наиболее эффективное решение как указанных, так и более сложных смешанных задач для полуплоскости получается с помощью методов теории функций комплексной переменной (см. монографии Н. И. Мухелишвили [77, 78] и Л. А. Галина [20]).

Наряду с интегральным преобразованием Фурье к решению плоских задач теории упругости часто применяется интегральное преобразование Меллина, которое дает эффективные результаты для клиновидных областей, ограниченных двумя бесконечными лучами, исходящими из одной точки. Применяя систему полярных координат (r, θ) , в которой эти лучи являются линиями $\theta = \text{const}$, бигармоническую функцию представляют в виде комплексного интеграла по параметру p от выражения

$$\{A(p) \cos(1-p)\theta + B(p) \sin(1-p)\theta + C(p) \cos(1+p)\theta + + D(p) \sin(1+p)\theta\} r^{1-p},$$

причем путь интегрирования выбирается в соответствии с поведением искомой функции при $r \rightarrow 0$ и $r \rightarrow \infty$.

На возможность построения функции Эри в указанной форме было, по-видимому, впервые указано В. М. Абрамовым [1] (см. также [148]); однако им не были доведены до конца необходимые выкладки. Частный случай клиновидной пластины — бесконечная плоскость с прямолинейным разрезом — рассматривался в статьях Барнарда [142] и А. И. Лурье [65]. Несколькими позднее А. И. Лурье и Б. З. Брачковским [68] при помощи функций комплексной переменной и интегралов Меллина было дано общее решение плоской задачи для клина с произвольным углом раствора, а также проведены некоторые численные расчеты. Аналогичные задачи впоследствии рассматривались Грантером в работе [228] и книге [406].

С помощью интегрального преобразования Меллина можно получить точное решение как второй основной задачи теории упругости для клина, так и смешанной задачи при задании на одной грани перемещений, а на другой — напряжений. Смешанная задача рассматривалась в статьях автора [121] и Л. М. Курпина [42], причем в последней работе исследован частный случай квадранта.

Применению преобразования Меллина к различным плоским задачам для упругого клина посвящены также статьи С. Г. Лапшина [45], Годфри [170] и работы Пехоцкого и Зорского [213, 214] по расчету температурных напряжений в клине. Плоская задача теории упругости для анизотропного клина исследовалась В. М. Абрамовым [1] (см. также статью П. П. Куфарова [43]). На основе общих решений, относящихся к равновесию безграничного клина, С. Г. Шульманом [139, 140] детально изучались случаи нагрузок, связанные с расчетом плотин треугольного профиля, в том числе и для слоистой структуры. В диссертации того же автора [141] приведен большой численный и графический материал, относящийся к расчетам напряжений в клине, проведенным на электронной машине.

Аналогично плоской задаче теории упругости с помощью интегралов Меллина можно получить решение задачи изгиба клиновидной плиты с закрепленными краями. Этому вопросу посвящена диссертация И. Е. Сахарова [97], в которой дано подробное (вплоть до численных расчетов) решение указанной задачи для случая сосредоточенной нагрузки. Построение функции Грина в этой работе проведено с помощью выделения частного решения неоднородного бигармонического уравнения. Общее решение задачи изгиба клиновидной плиты дано в статье автора [111], причем решение, отвечающее любым образом распределенной внешней нагрузке и произвольным краевым условиям, получено путем непосредственного применения интегрального преобразования Меллина к неоднородному бигармоническому уравнению и граничным условиям задачи. Аналогичные исследования были проведены Войновским-Кригером в статьях [238, 239].

С помощью интегрального преобразования Меллина Вильямс [236, 237] исследовал напряженное состояние в окрестности угловой точки клина (см. также работы [26, 138, 218]). Этот вопрос связан со свойствами корней некоторых классов трансцендентных уравнений, которые рассматривались К. А. Китовером [34] для ряда плоских задач и задач изгиба плит путем конструирования бигармонических функций, удовлетворяющих различным однородным условиям на контуре области.

Преобразование Меллина иногда дает возможность найти некоторые приближенные пути подхода к решению задач для областей, содержащих угловые точки. Укажем в качестве примера на работы Койтера и Албласа [182, 183], в которых рассматриваются консольные прямоугольные плиты.

Существенным этапом в дальнейшем развитии метода интегральных преобразований применительно к задачам теории упругости являются работы С. М. Белоносова [7, 8] и его диссертация [9], в которых использование интегральных преобразований Фурье и Меллина в сочетании с интегралами типа Коши позволило провести ряд исследований, относящихся к областям с угловыми точками, и дать, в частности, эффективное решение некоторых задач для полосы и клина.

2. Пространственные задачи

Вторая часть литературного обзора содержит работы, связанные с применением к трехмерным задачам теории упругости интегральных преобразований Фурье, Ханкеля, Мелера—Фока и Конторовича—Лебедева.

Простым примером, иллюстрирующим применение преобразования Фурье в трехмерной теории упругости, является задача о равновесии полупространства ($z > 0$) при задании на его границе перемещений. В курсе теории упругости Л. С. Лейбензона [57] решение этой задачи проведено путем использования гармонических функций Трефца [107], для которых удается сформулировать отдельные граничные условия, причем перемещения представляются в виде двойных интегралов по параметрам λ и μ от бигармонических функций вида

$$[A(\lambda, \mu) + zB(\lambda, \mu)] \exp[-z\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} + i(\lambda x + \mu y)].$$

Аналогичным способом можно было бы получить решение и первой основной задачи для упругого полупространства, однако выкладки в этом случае сильно усложняются, в то время как решение для произвольной внешней нагрузки, по существу, может быть представлено через простые решения, соответствующие сосредоточенным силам и известные еще со времен Буссинеска [147].

В монографии А. И. Лурье [67] проведено полное исследование первой основной задачи не только для полупространства, но и для упругого слоя ($-\infty < x, y < +\infty, |z| < h$), причем в последнем случае для получения решений уравнений теории упругости использован символический метод того же автора [66].

Интегральное преобразование Фурье нашло большие приложения в пространственных задачах теории упругости для бесконечного цилиндра, нагруженного по боковой поверхности. Простейшими примерами таких приложений являются задачи о кручении, рассмотренные в работе Тимпе [227]. Некоторые соображения о возможности применения интеграла Фурье к более общим задачам имеются в книгах Кокера и Файлона [38] и П. Ф. Папковича [84], а также в работе Рэнкина [245]. В книге Снеддона [100] воспроизводится и обобщается решение Трантера и Крэггса [229] задачи о равновесии бесконечного цилиндра, нагруженного нормальными усилиями по участку боковой поверхности. Случай загрузки касательными усилиями рассмотрен в статье П. З. Лившица [64]. Указанные решения основаны на возможности представления перемещений и напряжений в осесимметричном случае через одну бигармоническую функцию, которая строится в виде интеграла по параметру λ от выражения

$$[A(\lambda)I_0(\lambda r) + rB(\lambda)I_1(\lambda r)]e^{\lambda z} \quad (0 \leq r < a, \quad -\infty < z < +\infty),$$

причем коэффициенты разложений возможно определить из граничных условий.

Наиболее исчерпывающее исследование приложений преобразования Фурье к вопросам деформации бесконечного цилиндра дано в книге А. И. Лурье [67], где разработаны также эффективные методы вычисления получающихся несобственных интегралов. Подобным же образом могут быть решены и соответствующие задачи для полого бесконечного цилиндра, однако результаты в этом случае получаются весьма громоздкими (см. работы Г. С. Шапиро [129, 132]). Выкладки могут быть упрощены, если радиус внешнего цилиндра неограниченно возрастает; некоторые частные типы нагрузки для этого случая рассмотрены в работе Даса [158].

За последние годы в литературе появились исследования, посвященные сложным смешанным задачам теории упругости для бесконечного цилиндра. Первой работой такого типа явилась, по-видимому, статья Б. И. Когана [36], в которой с помощью преобразования Фурье и применения метода факторизации к специальным парным уравнениям было дано решение задачи для случая, когда на половине цилиндра задано смещение. Дальнейшее развитие эта методика получила в работах Б. И. Когана, А. Ф. Хрусталева и Ф. А. Вайнштейна (см. [126—128]).

Интересные применения интегрального преобразования Фурье к пространственным задачам теории упругости даны в работах

А. П. Филиппова [124] и В. Л. Рвачева [90, 91], в которых рассматривается контактная задача для штампа в виде полосы.

Наряду с преобразованием Фурье в пространственных задачах теории упругости, главным образом осесимметричных, широкое применение имеет интегральное преобразование Ханкеля.

Бигармоническая функция, через которую выражается решение осесимметричных задач, может быть представлена в виде интеграла от частных решений

$$\{[A(\lambda) + zB(\lambda)]e^{\lambda z} + [C(\lambda) + zD(\lambda)]e^{-\lambda z}\} J_0(\lambda r) \\ (0 \leq \lambda < \infty, \quad 0 \leq r < \infty),$$

причем выражения такого типа дают возможность получить точные решения различных задач для упругого слоя ($|z| < h$) и, в частности, для полупространства ($z > 0$).

Первое приложение интегрального преобразования Ханкеля к задачам теории упругости дано, по-видимому, в работе Терезава [225], где решена известная задача Буссинека об осесимметричной деформации полупространства нормальными к его границе усилиями. Аналогичное исследование позднее проведено в диссертации Вайнгардена [234] с целью уяснения пределов применимости принципа Сен-Венана. Решение задачи Буссинека с помощью преобразования Ханкеля приведено в книгах Снеддона [100] и Трантера [106]. Приложения интегралов Ханкеля к задачам нормально нагруженного упругого слоя имеются также в работе Г. С. Шапиро [133]. В монографии А. И. Лурье [67] рассмотрены общий случай нагружения поверхности слоя, а также задача о тепловых напряжениях, причем, ввиду того что рассматриваемые задачи уже не обладают осевой симметрией, решение выражается через три гармонические функции.

Кроме первой основной задачи теории упругости, интегральное преобразование Ханкеля может быть применено и к задаче определения напряженного состояния в слое, на границах которого заданы перемещения, а также к смешанному случаю. В работе автора [118] с помощью функций Папковича—Нейбера дано точное решение смешанной задачи для упругого слоя, на одной грани которого заданы внешние усилия, а на другой — перемещения. Некоторые смешанные задачи для слоя рассмотрены в статье К. Е. Егорова [29].

Методы, связанные с интегралами Фурье и Ханкеля, могут быть распространены на случай многослойной среды (статьи Р. М. Раппопорт [89], Б. И. Когана [37] и Париа [209]), а также применены к решению различных задач для анизотропного полупространства или слоя (см. книгу С. Г. Лехницкого [62] и работу [161]). В статье Датта [160] с помощью преобразования Ханкеля дано решение задачи о кручении неограниченного слоя,

когда модуль сдвига является линейной функцией осевой координаты. Ряд задач о кручении цилиндров рассмотрен в статье В. И. Блоха [14] с помощью преобразований Фурье и Ханкеля.

Интегральное преобразование Ханкеля позволяет дать решение некоторых смешанных задач для полупространства с круговой линией раздела граничных условий.

Простейшей из таких задач является контактная задача для кругового в плане жесткого штампа в предположении отсутствия трения, решение которой хорошо известно и может быть получено различными способами (см. монографии И. Я. Штаермана [137], Л. А. Галина [20] и А. И. Лурье [67]). Применение разложения Ханкеля дало возможность В. М. Абрамову [2] свести эту задачу к парным интегральным уравнениям и впервые дать решение контактной задачи для случая вдавливания штампа несевой силой. Эффективное решение соответствующей осесимметричной задачи позднее было дано Гардингом и Снеддоном [171] путем решения методом Титчмарша [105] парных интегральных уравнений вида

$$\int_0^{\infty} A(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = f(r), \quad r < a; \quad \int_0^{\infty} \lambda A(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = 0, \quad r > a,$$

где a — радиус площадки контакта.

С помощью интегрального преобразования Ханкеля можно также дать точное решение некоторых сходных с контактными задач для неограниченного упругого тела, ослабленного плоской круглой щелью. В случае нагружения, симметричного относительно плоскости щели, решение дано Снеддоном [221].* Аналогичным смешанным задачам для полупространства посвящено еще несколько работ, из которых укажем на статьи Чжуна [151, 152] и Пейна [212], а также на работы Ху Хай-чана [175] и Р. Я. Сунчелеева [104], в которых рассматриваются анизотропные тела. Ряд важных и интересных задач термоупругости рассмотрен в монографии В. Новацкого [206] путем применения метода интегральных преобразований.

Хотя интегральное преобразование Ханкеля не является простейшим методом решения упомянутых смешанных задач, однако связанная с ним методика допускает эффективное распространение на класс более сложных задач о деформации упругого слоя, на одной из граничных плоскостей которого имеется круговая линия раздела граничных условий. В отличие от случая полупространства здесь уже не удается найти точных решений по-

* Другие способы решения этой же задачи изложены в работах М. Я. Леонова [59, 60] и Сака [219].

ставленных задач, так как получаемые в результате применения интегралов Ханкеля парные уравнения

$$\int_0^{\infty} A(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = f(r), \quad r < a; \quad \int_0^{\infty} \frac{\lambda A(\lambda)}{1-g(\lambda)} J_0(\lambda r) d\lambda = 0, \quad r > a$$

не могут быть непосредственно разрешены. С помощью специального приема, предложенного в работах [52, 157], эти парные уравнения могут быть сведены к интегральному уравнению Фредгольма с непрерывным ядром, допускающему эффективное приближенное решение.

Указанные методы за последние годы были использованы рядом авторов при решении смешанных задач для упругого слоя. Первым исследованием в этом направлении явилась, по-видимому, работа Н. Н. Лебедева и автора [55], в которой рассмотрена осесимметричная контактная задача без трения для упругого слоя, лежащего на жестком основании.* Распространение этой методики на случай вдавливания штампа неосевой силой осуществлено В. А. Пупыревым [87], К. Е. Егоровым [30] и Флоренсом [167]. В последней работе рассмотрена также более простая задача о кручении упругого слоя, решение которой ранее было дано в статье автора [120] (см. также статью Д. В. Грилицкого [23]). В работе В. А. Пупырева и автора [88] исследованы более общие смешанные задачи для упругого слоя, а также рассмотрен случай сцепления слоя и основания. В. А. Пальмовым [83] с помощью преобразования Ханкеля и сведения получающихся парных интегральных уравнений к уравнению Фредгольма решена интересная задача об изгибе круглой пластинки, лежащей на упругом слое, содержащая в себе как частный случай решение известной задачи о круглой пластинке на упругом полупространстве (см., например, работы А. Г. Ишковой [33] и М. Я. Леонова [58]).

Описанная методика без существенных изменений применима и к сходным смешанным задачам как для упругого слоя, ослабленного круглой щелью [119, 191], так и для неограниченного тела, ослабленного несколькими круглыми щелями (осесимметричная задача для двух щелей рассмотрена в работе [56]).

Переходим теперь к обзору работ по применениям в пространственной теории упругости двух менее известных интегральных преобразований, получивших в литературе последних лет [25, 27, 163] название преобразований Мелера—Фока и Конторовича—Лебедева.

* Иные приближенные подходы к решению аналогичных задач развиты в работах Б. И. Когана [35], И. И. Воровича и Ю. А. Устинова [18], В. М. Александрова и И. И. Воровича [3], Д. В. Грилицкого и Я. М. Кивима [24].

Интегральное преобразование Мелера—Фока, теория которого разработана Мелером [197], В. А. Фоком [125] и Н. Н. Лебедевым [50], широко используется при решении краевых задач математической физики для гиперboloида вращения [47, 54], а также для областей, ограниченных двумя пересекающимися сферами [51, 54, 125]. В краевых задачах теории упругости оно дает возможность получить эффективные решения уже упоминавшихся осесимметричных контактных задач для полупространства, а также родственных им задач о концентрации напряжений в неограниченном упругом теле, ослабленном плоской круглой щелью (см. статьи Пейна [210, 211]).

Однако с помощью интегрального преобразования Мелера—Фока можно получить точные решения и более сложных контактных задач (например, когда жесткий штамп и упругое полупространство находятся в условиях сцепления), являющихся частным случаем основной смешанной задачи для полупространства с круговой линией раздела граничных условий. В работе автора [113] дано точное решение соответствующей осесимметричной задачи, основанное на представлении двух определяющих решение гармонических функций в виде разложений

$$\int_0^{\infty} [A(\tau) \operatorname{ch} \beta\tau + B(\tau) \operatorname{sh} \beta\tau] P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau$$

$$(0 \leq \alpha < \infty)$$

по функциям Лежандра с комплексным значком. Здесь α и β — тороидальные координаты, причем значениям $\beta=0$ и $\beta=\pi$ соответствуют внутренность и внешность некоторой окружности на границе полупространства. Хотя для функций напряжений мы имеем неразделенные граничные условия, преобразование Мелера—Фока позволяет дать точное решение задачи. Заметим, что все иные ранее известные методы решения контактных задач для полупространства оказались непригодными для случая сцепления, в связи с чем В. И. Моссаковским [73, 74] был разработан специальный, довольно сложный прием сведения такой задачи к плоской задаче линейного сопряжения двух аналитических функций.

Контактные задачи со сцеплением, не обладающие осевой симметрией, могут быть эффективно решены с помощью разложения по присоединенным функциям Лежандра $P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha)$. Соответствующее интегральное преобразование, которое уместно называть обобщенным преобразованием Мелера—Фока, исследовалось в работах М. Н. Олевского [81, 82] и Н. Я. Виленкина [17]. К ряду смешанных задач теории упругости для полупространства с круговой границей раздела граничных условий оно было применено автором в работах [112, 114, 115, 122]. Некоторые из этих

задач иным способом были решены В. И. Моссаковским в работах [74, 75].

Интегральное преобразование Конторовича—Лебедева, впервые введенное его авторами в работах [39, 53] и получившее дальнейшее развитие в исследованиях Н. Н. Лебедева [46, 48, 50], нашло большое применение при решении трехмерных краевых задач математической физики, связанных, в частности, с клиновидными областями [25, 51, 54, 98]. При этом искомая гармоническая функция представляется в виде интегрального разложения Фурье по осевой цилиндрической координате (z) и разложения Конторовича—Лебедева по радиальной координате (r)

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} [A(\sigma, \tau) \operatorname{ch} \theta \tau + B(\sigma, \tau) \operatorname{sh} \theta \tau] K_{it}(\sigma r) \frac{\cos \sigma z}{\sin \sigma z} d\sigma d\tau.$$

Для решения соответствующих краевых задач необходимо, следовательно, кроме формул преобразования Фурье, располагать еще специальной теоремой разложения по функциям Макдональда с мнимым значком.

Использование интегрального преобразования Конторовича—Лебедева позволило автору с помощью гармонических функций Папковича—Нейбера дать точное решение пространственной задачи теории упругости для клина при заданных на его гранях перемещениях [123], а также ряда смешанных задач для полупространства с прямолинейной границей раздела краевых условий [115—117].

Часть I

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Преобразованием Фурье некоторой функции $f(x)$, заданной в промежутке $(-\infty, +\infty)$, называется интеграл

$$f(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx, \quad (1)$$

где λ — произвольное вещественное число.

Для существования преобразования Фурье $f(\lambda)$ достаточно предположить, что функция $f(x)$ кусочно непрерывна в любом конечном промежутке и абсолютно интегрируема в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Для функций $f(x)$, удовлетворяющих, сверх того, условиям Дирихле в любом конечном промежутке, в точках непрерывности справедлива формула обращения Фурье *

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda \quad (-\infty < x < +\infty), \quad (2)$$

выражающая функцию $f(x)$ через ее преобразование Фурье.

Подробные сведения по теории преобразований Фурье читатель может найти, например, в монографии [105].

Пара формул (1) и (2) может быть записана в виде одного разложения

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\lambda \xi} d\xi \quad (-\infty < x < +\infty), \quad (3)$$

* В точках разрыва правая часть равенства (2) дает величину

$$\frac{1}{2} [f(x-0) + f(x+0)].$$

которое представляется также в вещественной форме

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\cos \lambda x \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi + \sin \lambda x \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi \right] d\lambda. \quad (4)$$

Для функций, удовлетворяющих условиям Дирихле в любом открытом промежутке $0 < x < A$ и абсолютно интегрируемых в интервале $(0, \infty)$, имеют место разложения в синус- и косинус-интегралы Фурье ($0 < x < \infty$)

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_s(\lambda) \sin \lambda x d\lambda, & f_s(\lambda) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin \lambda x dx, \\ f(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_c(\lambda) \cos \lambda x d\lambda, & f_c(\lambda) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos \lambda x dx. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

С помощью интегрального преобразования Фурье могут быть даны эффективные точные решения некоторых классов двумерных краевых задач теории упругости для полуплоскости, бесконечной полосы и круговой луночки.

В первой части настоящей квивги рассматриваются плоские задачи о равновесии бесконечной полосы при задании на ее границах напряжений или перемещений, кручение и изгиб призмы, образованной пересечением двух круговых цилиндров, плоская задача теории упругости для внутренности и внешности круговой луночки, а также вопросы изгиба упругих тонких плит, имеющих форму бесконечной полосы или круговой луночки.

Глава I. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ПОЛОСЫ

§ 1. Упругое равновесие полуплоскости

При рассмотрении плоских статических задач теории упругости для бесконечной полосы в том случае, когда на контуре области заданы внешние усилия, весьма удобно применять интегральное преобразование Фурье непосредственно к уравнениям теории упругости в напряжениях, а также к граничным условиям задачи.

Мы начнем изложение указанной методики с наиболее простого случая упругой полуплоскости, нагруженной по контуру, причем будем считать, что в прямоугольных координатах рассматриваемое тело занимает область $y \geq 0$. Тогда задача, оче-

видно, состоит в интегрировании системы уравнений для напряжений σ_x , τ_{xy} , σ_y , состоящей из уравнений равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

и условия сплошности

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0, \quad (1.2)$$

при граничных условиях

$$\sigma_y|_{y=0} = f(x), \quad \tau_{xy}|_{y=0} = g(x), \quad (1.3)$$

где f и g — заданные функции.

Предполагается также, что на бесконечности напряжения стремятся к нулю вместе со своими первыми производными.

Вводя преобразования Фурье от напряжений обычными формулами

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_x e^{i\lambda x} dx, & \bar{\tau}_{xy} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tau_{xy} e^{i\lambda x} dx, \\ \bar{\sigma}_y &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_y e^{i\lambda x} dx, \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

умножая уравнения (1.1) и (1.2) на $e^{i\lambda x}$ и интегрируя по x от $-\infty$ до $+\infty$, получаем систему равенств, которые после интегрирования по частям превращаются в следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно величин $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\tau}_{xy}$, $\bar{\sigma}_y$, рассматриваемых как функции переменной y ,

$$\left. \begin{aligned} -i\lambda \bar{\sigma}_x + \bar{\tau}'_{xy} &= 0, \\ -i\lambda \bar{\tau}_{xy} + \bar{\sigma}'_y &= 0, \\ (\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y)'' - \lambda^2(\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

Система (1.5) должна быть решена при граничных условиях

$$\bar{\sigma}_y|_{y=0} = f(\lambda), \quad \bar{\tau}_{xy}|_{y=0} = g(\lambda), \quad (1.6)$$

полученных после преобразования по Фурье условий (1.3). Заметим, что здесь и в дальнейшем мы всегда будем предполагать, что преобразования Фурье как заданных граничных функций, так и искомых величин существуют.

Исключение из системы (1.5) величин $\bar{\sigma}_x$ и $\bar{\tau}_{xy}$ с помощью формул

$$\bar{\sigma}_x = -\frac{1}{\lambda^2} \bar{\sigma}''_y, \quad \bar{\tau}'_{xy} = \frac{1}{i\lambda} \bar{\sigma}'_y \quad (1.7)$$

приводит к уравнению четвертого порядка для функции $\bar{\sigma}_y$

$$\bar{\sigma}_y^{IV} - 2\lambda^2 \bar{\sigma}_y'' + \lambda^4 \bar{\sigma}_y = 0. \quad (1.8)$$

Выбирая в соответствии с условиями на бесконечности общий интеграл уравнения (1.8) в виде

$$\bar{\sigma}_y = [A(\lambda) + yB(\lambda)] e^{-|\lambda|y} \quad (1.9)$$

и удовлетворяя преобразованным граничным условиям (1.6), находим следующие значения величин A и B : $A = f$, $B = f + \frac{\lambda}{|\lambda|} ig$, после чего выражения для преобразованных напряжений принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= \left[(1 - |\lambda|y)f + \left(2 \frac{|\lambda|}{\lambda} - \lambda y \right) ig \right] e^{-|\lambda|y}, \\ \bar{\tau}_{xy} &= [i\lambda y f + (1 - |\lambda|y)g] e^{-|\lambda|y}, \\ \bar{\sigma}_y &= [(1 + |\lambda|y)f + i\lambda y g] e^{-|\lambda|y}. \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

Окончательное решение поставленной задачи может быть теперь получено с помощью формулы обращения Фурье. Например, для напряжения σ_x находим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\sigma}_x e^{-i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(1 - |\lambda|y)f + \right. \\ &\quad \left. + \left(2 \frac{|\lambda|}{\lambda} - \lambda y \right) ig \right] e^{-|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - |\lambda|y) e^{-|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\lambda \xi} d\xi + \\ &+ \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(2 \frac{|\lambda|}{\lambda} - \lambda y \right) e^{-|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{i\lambda \xi} d\xi. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Предполагая, что допустима перестановка порядка интегрирования, получаем

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \lambda y) e^{-\lambda y} \cos \lambda(x - \xi) d\lambda + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} (2 - \lambda y) e^{-\lambda y} \sin \lambda(x - \xi) d\lambda, \end{aligned}$$

что после взятия квадратур по переменной λ приводит к решению в виде однократного интеграла

$$\sigma_x = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yf(\xi) + (x - \xi)g(\xi)}{[(x - \xi)^2 + y^2]^2} (x - \xi)^2 d\xi. \quad (1.12)$$

Аналогичным образом получаются формулы для двух других напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yf(\xi) + (x-\xi)g(\xi)}{[(x-\xi)^2 + y^2]^2} (x-\xi)y d\xi, \\ \sigma_y &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yf(\xi) + (x-\xi)g(\xi)}{[(x-\xi)^2 + y^2]^2} y^2 d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

Таким образом, получено в однократных квадратурах точное решение поставленной задачи для случая произвольного внешнего нагружения. Нетрудно непосредственной проверкой убедиться в том, что выражения (1.12) и (1.13) удовлетворяют всем условиям задачи.

В частности, для случая приложенной в начале координат сосредоточенной силы с составляющими (N, T) , положив в наших формулах

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(\xi) d\xi = N, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} g(\xi) d\xi = T,$$

сразу получаем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2x^2}{\pi} \cdot \frac{yN + xT}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \tau_{xy} = \frac{2xy}{\pi} \cdot \frac{yN + xT}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \sigma_y &= \frac{2y^2}{\pi} \cdot \frac{yN + xT}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

§ 2. Первая основная задача теории упругости для бесконечной полосы

Рассмотрим упругое равновесие бесконечной полосы $(-\infty < x < +\infty, |y| \leq b)$ под действием заданных усилий на ее границах.

Задача состоит в интегрировании уравнений (1.1) и (1.2) плоской задачи теории упругости при задании на границах полосы $y = \pm b$ напряжений σ_y и τ_{xy} .

Применение интегрального преобразования Фурье к уравнениям равновесия и сплошности приводит, как мы видели в предыдущем параграфе, к обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка (1.8) относительно преобразованного напряжения $\bar{\sigma}_y$, причем величины $\bar{\sigma}_x$ и $\bar{\tau}_{xy}$ выражаются через $\bar{\sigma}_y$ формулами (1.7).

Для удобства выкладок разобьем поставленную задачу на две: симметричную и антисимметричную по координате y — и начнем рассмотрение с первого случая, когда граничные значения напряжения σ_y симметричны по координате y , а граничные

значения τ_{xy} антисимметричны по y . Это означает, что в противоположных точках границ полосы ($x = x_0$, $y = \pm b$) напряжения имеют одинаковую величину, причем нормальные напряжения имеют противоположные направления, в то время как касательные напряжения направлены в одну сторону [рис. 1, (А)].

Разумеется, надо предположить, что приложенные к полосе внешние усилия

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y |_{y=\pm b} &= f(x), \\ \tau_{xy} |_{y=\pm b} &= \pm g(x) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

уравновешиваются; это в данном случае приводит к условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = 0. \quad (2.2)$$

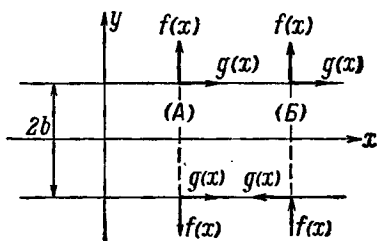


Рис. 1.

Переходя к решению задачи, возьмем общий интеграл уравнения (1.8) в форме функции, четной по координате y ,

$$\bar{\sigma}_y = A(\lambda) \operatorname{ch} \lambda y + B(\lambda) \lambda y \operatorname{sh} \lambda y \quad (2.3)$$

и, рассматривая верхнюю половину полосы ($0 \leq y \leq b$), определим величины A и B из преобразованных по Фурье граничных условий

$$\bar{\sigma}_y |_{y=b} = f(\lambda), \quad \bar{\tau}_{xy} |_{y=b} = g(\lambda). \quad (2.4)$$

Так как, согласно (1.7),

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{1}{i} [A \operatorname{sh} \lambda y + B(\lambda y \operatorname{ch} \lambda y + \operatorname{sh} \lambda y)], \quad (2.5)$$

то для неизвестных A и B получается следующая система уравнений:

$$\left. \begin{aligned} A \operatorname{ch} \mu + B \mu \operatorname{sh} \mu &= f, \\ A \operatorname{sh} \mu + B(\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu) &= g, \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

из которой находим

$$\left. \begin{aligned} A &= 2 \frac{f(\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu) - g \mu \operatorname{sh} \mu}{\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu}, \\ B &= 2 \frac{-f \operatorname{sh} \mu + g \mu \operatorname{ch} \mu}{\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu}, \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

где введено обозначение

$$\mu = \lambda b. \quad (2.8)$$

Таким образом, полное решение поставленной задачи дается формулами

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [A \operatorname{ch} \lambda y + B(\lambda y \operatorname{sh} \lambda y + 2 \operatorname{ch} \lambda y)] e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [A \operatorname{sh} \lambda y + B(\lambda y \operatorname{ch} \lambda y + \operatorname{sh} \lambda y)] e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \sigma_y &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [A \operatorname{ch} \lambda y + B\lambda y \operatorname{sh} \lambda y] e^{-i\lambda x} d\lambda. \end{aligned} \right\} (2.9)$$

Исследуем теперь сходимость входящих в полученное решение интегралов в точке $\lambda=0$, где знаменатель в формулах (2.7) обращается в нуль (сходимость при $\lambda \rightarrow \pm\infty$ очевидна).

Нетрудно видеть, что условием сходимости при $\lambda=0$ будут требования ограниченности величин $A(0)$ и $B(0)$, что в свою очередь приводит к условию

$$g(0) = 0. \quad (2.10)$$

Но так как

$$g(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{i\lambda x} dx,$$

то последнее условие выполнено, ибо оно совпадает с условием статики (2.2).

Аналогичным образом может быть получено точное решение соответствующей антисимметричной задачи, когда граничные значения напряжения σ_y антисимметричны, а значения τ_{xy} симметричны по координате y [рис. 1, (Б)].

Условия статики в этом случае имеют вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} [xf(x) - bg(x)] dx = 0 \quad (2.11)$$

и могут быть записаны еще в следующей форме:

$$f(0) = 0, \quad \left. \frac{df}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = ibg(0). \quad (2.12)$$

Так как в рассматриваемом случае напряжение σ_y является нечетной функцией переменной y , то общий интеграл уравнения (1.8) следует выбрать в таком виде:

$$\bar{\sigma}_y = C(\lambda) \operatorname{sh} \lambda y + D(\lambda) \lambda y \operatorname{ch} \lambda y, \quad (2.13)$$

причем достаточно рассмотреть только область $0 \leq y \leq b$.

Составляя выражение для преобразованного касательного напряжения

$$\tau_{xy} = \frac{1}{i} [C \operatorname{ch} \lambda y + D (\lambda y \operatorname{sh} \lambda y + \operatorname{ch} \lambda y)] \quad (2.14)$$

и подставляя (2.13) и (2.14) в преобразованные граничные условия (2.4), мы приходим к следующей системе уравнений относительно неизвестных величин C и D :

$$\left. \begin{aligned} C \operatorname{sh} \mu + D \mu \operatorname{ch} \mu &= f, \\ C \operatorname{ch} \mu + D (\mu \operatorname{sh} \mu + \operatorname{ch} \mu) &= ig, \quad (\mu = \lambda b) \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

решая которую, найдем

$$\left. \begin{aligned} C &= 2 \frac{f (\mu \operatorname{sh} \mu + \operatorname{ch} \mu) - gi \mu \operatorname{ch} \mu}{\operatorname{sh} 2\mu - 2\mu}, \\ D &= 2 \frac{-f \operatorname{ch} \mu + gi \operatorname{sh} \mu}{\operatorname{sh} 2\mu - 2\mu}. \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Окончательные значения искомых напряжений будут

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [C \operatorname{sh} \lambda y + D (\lambda y \operatorname{ch} \lambda y + 2 \operatorname{sh} \lambda y)] e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [C \operatorname{ch} \lambda y + D (\lambda y \operatorname{sh} \lambda y + \operatorname{ch} \lambda y)] e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \sigma_y &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [C \operatorname{sh} \lambda y + D \lambda y \operatorname{ch} \lambda y] e^{-i\lambda x} d\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Можно проверить, что преобразованные по Фурье условия статики (2.12) обеспечивают сходимость при $\lambda = 0$ входящих в это решение интегралов.

В полученных решениях (2.9) или (2.17) все три искомых напряжения выражаются несобственными интегралами вида

$$f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\mu)}{\operatorname{sh} 2\mu \pm 2\mu} e^{-i\mu \xi} d\mu, \quad (2.18)$$

которые можно находить приближенно с помощью различных численных методов.

Наряду с этим квадратуры типа (2.18) представляются при определенных условиях в виде бесконечного ряда с помощью теоремы о вычетах. Для этого интеграл по вещественной оси дополняется полукругом радиуса $R \rightarrow \infty$ с центром в начале координат, проведенным в верхней (при $\xi < 0$) или нижней (при $\xi > 0$) полуплоскости, и рассматривается интеграл по замкну-

тому контуру от функции, получаемой из подынтегральной функции в (2.18) заменой вещественной переменной на комплексную (например, 2μ на z). Если полученная при этом функция $\Phi(z) = P\left(\frac{z}{2}\right)$ будет мероморфной функцией, то интеграл по замкнутому контуру, согласно теореме Коши, равен умноженной на $2\pi i$ сумме вычетов $\sum a_{-1}$ подынтегральной функции в верхней (нижней) полуплоскости комплексной переменной z . Если удастся доказать, что интеграл по полукругу стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$, то значение искомой функции $f(\xi)$ будет равно $2\pi i \sum a_{-1}$.

В рассматриваемом случае нетрудно показать, что для кусочно-непрерывных внешних нагрузок, приложенных на конечном расстоянии от начала координат, функции типа $\Phi(z)$ будут целыми на всей комплексной плоскости, причем интеграл по полукругу, проведенному в соответствующей полуплоскости, при $R \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Таким образом, все искомые напряжения представляются формулами вида $2\pi i \sum a_{-1}$, где особыми точками (простыми полюсами) в подобных задачах будут корни уравнения

$$\operatorname{sh} z + z = 0 \quad (2.19)$$

в случае симметричной задачи и корни уравнения

$$\operatorname{sh} z - z = 0 \quad (2.20)$$

— в антисимметричном случае.

В табл. 1 приведены значения нескольких первых корней $z = \pm \sigma \pm it$ указанных уравнений. Корни с большими номерами могут быть найдены по легко получаемым асимптотическим формулам (см., например, [68]).

Заметим еще, что для симметричного случая Снеддоном [100] предложен приближенный метод вычисления несобственных интегралов полученного типа, основанный на специальной аппроксимации функции $(\operatorname{sh} z + z)^{-1}$ (см. также [67, стр. 199]).

§ 3. Вторая основная задача для бесконечной полосы

Под второй основной задачей обычно имеют в виду краевую задачу теории упругости для того случая, когда на границе тела заданы значения упругих перемещений. В случае плоской задачи теории упругости можно, вообще говоря, пользоваться

Таблица 1

$\operatorname{sh} z + z = 0$		$\operatorname{sh} z - z = 0$	
σ	τ	σ	τ
2.251	4.213	2.769	7.498
3.103	10.71	3.352	13.90
3.551	17.07	3.717	20.24
3.900	23.40	3.983	26.56
4.094	29.71	—	—

представлением перемещений через бигармоническую функцию. Однако нам представляется более удобным другой метод решения, основанный на использовании функций Папковича—Нейбера, который и будет развит как при решении второй основной задачи, так и при решении смешанной задачи (§ 5).

Приведем прежде всего общее решение уравнений плоской задачи теории упругости, содержащее, согласно Папковичу—Нейберу, три гармонические функции — Φ_0 , Φ_1 , Φ_2 ,

$$2Gu = -\frac{\partial F}{\partial x} + 4(1-\nu)\Phi_1, \quad 2Gv = -\frac{\partial F}{\partial y} + 4(1-\nu)\Phi_2, \quad (3.1)$$

где u , v — перемещения, $F = \Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2$, ν — коэффициент Пуассона.*

Пользуясь произвольностью одной из гармонических функций, положим $\Phi_1 \equiv 0$ и запишем соотношения (3.1) в следующей форме:

$$2Gu = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial x} - y\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}, \quad 2Gv = \kappa\Phi_2 - \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} - y\frac{\partial \Phi_2}{\partial y}, \quad (3.2)$$

где положено

$$\kappa = 3 - 4\nu. \quad (3.3)$$

Поставленная в давном параграфе задача состоит, очевидно, в нахождении двух гармонических функций Φ_0 и Φ_2 , удовлетворяющих следующим краевым условиям на границах полосы $y=0$ и $y=b$:

$$u|_{y=0} = u_0(x), \quad u|_{y=b} = u_b(x), \quad v|_{y=0} = v_0(x), \quad v|_{y=b} = v_b(x), \quad (3.4)$$

где u_0 , u_b , v_0 , v_b — заданные функции.

Представляя гармонические функции Φ_0 и Φ_2 в виде интегралов Фурье

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [A(\lambda) \operatorname{ch} \lambda y + B(\lambda) \operatorname{sh} \lambda y] e^{-i\lambda x} \frac{d\lambda}{\lambda}, \\ \Phi_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [C(\lambda) \operatorname{ch} \lambda y + D(\lambda) \operatorname{sh} \lambda y] e^{-i\lambda x} d\lambda, \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

получим на основании (3.2) следующие выражения для упругих перемещений:

* Модуль сдвига G здесь введен для удобства выкладок, связанных с расчетом напряжений.

$$\left. \begin{aligned} 2Gu &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [A \operatorname{ch} \lambda y + B \operatorname{sh} \lambda y + \lambda y (C \operatorname{ch} \lambda y + D \operatorname{sh} \lambda y)] e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ 2Gv &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [-(A \operatorname{sh} \lambda y + B \operatorname{ch} \lambda y) + C (\kappa \operatorname{ch} \lambda y - \lambda y \operatorname{sh} \lambda y) + \\ &\quad + D (\kappa \operatorname{sh} \lambda y - \lambda y \operatorname{ch} \lambda y)] e^{-i\lambda x} d\lambda. \end{aligned} \right\} (3.6)$$

Подставляя далее (3.6) в граничные условия (3.4) и разлагая правые части последних в интегралы Фурье, мы приходим к следующей системе уравнений относительно A, B, C, D :

$$\left. \begin{aligned} iA &= 2G\bar{u}_0, \quad \kappa C - B = 2G\bar{v}_0, \\ A \operatorname{ch} \mu + B \operatorname{sh} \mu + \mu (C \operatorname{ch} \mu + D \operatorname{sh} \mu) &= \frac{2G}{i} \bar{u}_b, \\ (\kappa \operatorname{ch} \mu - \mu \operatorname{sh} \mu) C + (\kappa \operatorname{sh} \mu - \mu \operatorname{ch} \mu) D - (A \operatorname{sh} \mu + B \operatorname{ch} \mu) &= 2G\bar{v}_b, \end{aligned} \right\} (3.7)$$

где черта, как обычно, означает преобразование Фурье и положено $\mu = \lambda b$.

Исключая теперь величины A и B с помощью соотношений

$$A = -2Gi\bar{u}_0, \quad B = \kappa C - 2G\bar{v}_0, \quad (3.8)$$

приходим к системе двух уравнений с двумя неизвестными величинами C и D :

$$\left. \begin{aligned} (\kappa \operatorname{sh} \mu - \mu \operatorname{ch} \mu) C + \mu \operatorname{sh} \mu D &= \\ = 2G (\bar{v}_0 \operatorname{sh} \mu + i \operatorname{ch} \mu \bar{u}_0 - i\bar{u}_b) &= \psi_1(\mu), \\ -\mu \operatorname{sh} \mu C + (\kappa \operatorname{sh} \mu - \mu \operatorname{ch} \mu) D &= \\ = 2G (\bar{v}_b - \bar{v}_0 \operatorname{ch} \mu - i\bar{u}_0 \operatorname{sh} \mu) &= \psi_2(\mu). \end{aligned} \right\} (3.9)$$

Определив из (3.9) значения C и D :

$$\left. \begin{aligned} C &= \frac{(\kappa \operatorname{sh} \mu - \mu \operatorname{ch} \mu) \psi_1 - \mu \operatorname{sh} \mu \psi_2}{\kappa^2 \operatorname{sh}^2 \mu - \mu^2}, \\ D &= \frac{\mu \operatorname{sh} \mu \psi_1 + (\kappa \operatorname{sh} \mu + \mu \operatorname{ch} \mu) \psi_2}{\kappa^2 \operatorname{sh}^2 \mu - \mu^2} \end{aligned} \right\} (3.10)$$

и подставив их в (3.8) и (3.5), получим окончательное решение задачи.

Перемещения u и v даются формулами (3.6), а напряжения σ_x, τ_{xy} и σ_y выражаются через введенные функции Φ_0, Φ_1 и Φ_2 с помощью следующих зависимостей:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left[2(1-\nu) \Phi_1 - \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \right] + 2\nu \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - \left(x \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} \right), \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \Phi_0}{\partial y} + x \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + y \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right] + \\ &\quad + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial y} + (1-2\nu) \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right), \\ \sigma_y &= \frac{\partial}{\partial y} \left[2(1-\nu) \Phi_2 - \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \right] + 2\nu \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \left(x \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} + y \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2} \right), \end{aligned} \right\} (3.11)$$

так что для получения напряжений в рассматриваемой задаче достаточно положить $\Phi_1 \equiv 0$ и подставить в (3.11) выражения (3.5).

Таблица 2

$\text{sh } z - \frac{z}{3-4\nu} = 0$				$\text{sh } z + \frac{z}{3-4\nu} = 0$			
$\nu = \frac{1}{3}$		$\nu = \frac{1}{4}$		$\nu = \frac{1}{3}$		$\nu = \frac{1}{4}$	
σ	τ	σ	τ	σ	τ	σ	τ
0	1.660	0	1.896	1.692	4.315	1.488	4.350
2.238	7.560	2.047	7.582	2.581	10.76	2.393	10.77
2.834	13.94	2.648	13.95	3.035	17.10	2.850	17.11
3.202	20.26	3.017	20.27	3.345	23.42	3.161	23.43
3.470	26.57	3.287	26.58	3.581	29.72	3.398	29.73

В табл. 2 даны значения нескольких корней $z = \pm \sigma \pm i\tau$ уравнений

$$\text{sh } z - \frac{z}{3-4\nu} = 0, \quad \text{sh } z + \frac{z}{3-4\nu} = 0, \quad (3.12)$$

необходимых при вычислении полученных интегралов по теореме о вычетах* (значение коэффициента ν принято равным $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$).

Заметим, что уравнение $x \text{sh } z - z = 0$ относится к случаю задачи, симметричной относительно средней линии $y = \frac{b}{2}$, а уравнение $x \text{sh } z + z = 0$ — к соответствующему антисимметричному случаю.

Рассмотренная задача относилась к случаю плоской деформации. Для плоского напряженного состояния во всех форму-

* См. § 2.

лах следует величину ν заменить на $\frac{\nu}{1+\nu}$. В частности, вместо (3.12) будем иметь

$$\operatorname{sh} z \mp \frac{1+\nu}{3-\nu} z = 0. \quad (3.13)$$

Результаты расчета корней этого уравнения для $\nu = \frac{1}{4}$ сведены в табл. 3 ($z = \pm \sigma \pm i\tau$). Заметим, что значения z в (3.13) при $\nu = \frac{1}{3}$ совпадают со значениями z в (3.12) при $\nu = \frac{1}{4}$.

Сравнение полученных в §§ 2 и 3 решений с результатами, относящимися к решению первой и второй основных задач для полосы с помощью других методов (см., например, статью Б. А. Берга [10]), убедительно иллюстрирует простоту и эффективность метода интегральных преобразований при рассмотрении данного класса задач теории упругости.

Таблица 3

$\operatorname{sh} z - \frac{1+\nu}{3-\nu} z = 0,$ $\nu = \frac{1}{4}$		$\operatorname{sh} z + \frac{1+\nu}{3-\nu} z = 0,$ $\nu = \frac{1}{4}$	
σ	τ	σ	τ
0	2.001	1.378	4.368
1.946	7.593	2.296	10.78
2.551	13.96	2.754	17.12
2.922	20.28	3.065	23.43
3.190	26.58	3.302	29.73

§ 4. Полоса, закрепленная по контуру и нагруженная сосредоточенным моментом

В качестве примера антисимметричного напряженного состояния при заданных на границе перемещениях рассмотрим равновесие бесконечной полосы, закрепленной по контуру и подверженной действию сосредоточенного момента в центре (рис. 2). При этом, действительно, перемещение v и напряжение τ_{xy} четны, а перемещение u и напряжения σ_x и σ_y нечетны по координате y .

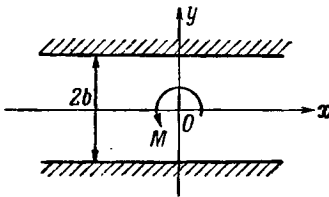


Рис. 2.

Упругие перемещения точек такого тела мы будем представлять в виде суммы перемещений u_0, v_0 , создаваемых моментом M в неограниченной плоскости, и дополнительных

перемещений u_1, v_1 , подобранных так, чтобы выполнялись граничные условия

$$u|_{y=\pm b} = 0, \quad v|_{y=\pm b} = 0, \quad (4.1)$$

причем

$$u = u_0 + u_1, \quad v = v_0 + v_1. \quad (4.2)$$

Первичные перемещения u_0 и v_0 даются следующими формулами: *

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= -N \left[\frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2} + \frac{xy}{x^2+y^2} \right], & v_0 &= N \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, \\ N &= \frac{M}{8\pi G(1-\nu)}, & \alpha &= 3-4\nu. \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Вторичные перемещения u_1 и v_1 мы будем представлять через функции Φ_0 и Φ_2 согласно формулам (3.2), причем соображения симметрии** позволяют выбрать гармонические функции Φ_0 и Φ_2 в виде синус-интегралов Фурье следующего вида:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} A \operatorname{sh} \lambda y \sin \lambda x \frac{d\lambda}{\lambda}, \\ \Phi_2 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} B \operatorname{ch} \lambda y \sin \lambda x \frac{d\lambda}{\lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_1 &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} (A \operatorname{sh} \lambda y + B \lambda y \operatorname{ch} \lambda y) \cos \lambda x d\lambda, \\ 2Gv_1 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} [-A \operatorname{ch} \lambda y + B(x \operatorname{ch} \lambda y - \lambda y \operatorname{sh} \lambda y)] \sin \lambda x d\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

Граничные условия рассматриваемой задачи, которые достаточно взять лишь при $y=b$, имеют вид

$$\left. \begin{aligned} u_1|_{y=b} &= -u_0|_{y=b} = bN \left[\frac{2x^2}{(x^2+b^2)^2} + \frac{x}{x^2+b^2} \right], \\ v_1|_{y=b} &= -v_0|_{y=b} = -N \frac{x(x^2-b^2)}{(x^2+b^2)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

* Зависимости (4.3) получены путем предельного перехода в случае двух сосредоточенных сил величины P каждая, приложенных в точках $x=0$, $y=\pm\epsilon$ соответственно и направленных в разные стороны, причем

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2P\epsilon = M.$$

** Очевидно, что перемещение u симметрично, а перемещение v антисимметрично по координате x .

Подставляя (4.5) в (4.6) и разлагая функции $u_0|_{y=b}$ и $v_0|_{y=b}$ в косинус- и синус-интегралы Фурье соответственно, приходим к следующей системе ($\mu = \lambda b$):

$$\left. \begin{aligned} A \operatorname{sh} \mu + B \mu \operatorname{ch} \mu &= 2G \bar{u}_0|_{y=b} = \\ &= -2GbN \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \left[\frac{2x^2}{(x^2 + b^2)^2} + \frac{x}{x^2 + b^2} \right] \cos \lambda x dx, \\ A \operatorname{ch} \mu + B(\mu \operatorname{sh} \mu - x \operatorname{ch} \mu) &= 2G \bar{v}_0|_{y=b} = \\ &= 2GN \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{x(x^2 - b^2)}{(x^2 + b^2)^2} \sin \lambda x dx. \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

Квадратуры, стоящие в правых частях, вычисляются и приводят к выражению $\bar{u}_0|_{y=b}$ и $\bar{v}_0|_{y=b}$ в явном виде:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_0|_{y=b} &= -N \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\mu} (1 - \mu + x), \\ \bar{v}_0|_{y=b} &= N \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\mu} (1 - \mu). \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

Решение системы (4.7) представляется в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} A &= 4G \frac{(x \operatorname{ch} \mu - \mu \operatorname{sh} \mu) \bar{u}_0|_{y=b} + \mu \operatorname{ch} \mu \bar{v}_0|_{y=b}}{x \operatorname{sh} 2\mu + 2\mu}, \\ B &= 4G \frac{\operatorname{ch} \mu \bar{u}_0|_{y=b} - \operatorname{sh} \mu \bar{v}_0|_{y=b}}{x \operatorname{sh} 2\mu + 2\mu}, \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

после чего окончательное решение задачи дается формулами (4.4) в виде однократных интегралов.

Приведем, в частности, расчетные формулы для нормального и касательного напряжений в заделке, полученные из зависимостей (3.11):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y|_{y=b} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \{-A \operatorname{sh} \mu + [2(1 - \nu) \operatorname{sh} \mu - \mu \operatorname{ch} \mu] B\} \sin \lambda x d\lambda, \\ \tau_{xy}|_{y=b} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \{-A \operatorname{ch} \mu + [(1 - 2\nu) \operatorname{ch} \mu - \mu \operatorname{sh} \mu] B\} \lambda \cos \lambda x d\lambda, \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

что окончательно дает после некоторых преобразований

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_y |_{y=b} &= \frac{M}{2\pi b^2 (1-\nu)} \times \\
 &\times \int_0^\infty \frac{[(1-2\nu) \operatorname{ch} \mu \operatorname{sh} \mu + \mu] (1-\mu+x) - 2(1-\nu)(1-\mu) \operatorname{sh}^2 \mu}{x \operatorname{sh} 2\mu + 2\mu} \times \\
 &\quad \times \mu e^{-\mu} \sin \mu \frac{x}{b} d\mu, \\
 \tau_{xy} |_{y=b} &= \frac{M}{2\pi b^2 (1-\nu)} \times \\
 &\times \int_0^\infty \frac{2(1-\nu)(1-\mu+x) \operatorname{ch}^2 \mu - (1-\mu)[(1-2\nu) \operatorname{ch} \mu \operatorname{sh} \mu + \mu]}{x \operatorname{sh} 2\mu + 2\mu} \times \\
 &\quad \times \mu e^{-\mu} \cos \mu \frac{x}{b} d\mu.
 \end{aligned} \right\} (4.11)$$

Для получения полных напряжений необходимо к найденным выражениям добавить еще первичные напряжения, соответствующие действию момента M в неограниченной плоскости и легко находимые через известные перемещения u_0 и v_0 .

§ 5. Смешанная задача для бесконечной полосы

Рассмотрим упругое равновесие бесконечной полосы ($-\infty < x < +\infty$, $0 \leq y \leq b$), на границе $y=0$ которой заданы значения упругих перемещений u и v , а на остальной части контура ($y=b$) известны напряжения σ_y и τ_{xy} .

Эффективное решение поставленной задачи может быть получено с помощью интегрального преобразования Фурье, если предварительно выразить перемещения u и v , а также напряжения σ_y и τ_{xy} через функции Папковича—Нейбера. Принимая, как и выше, одну из функций напряжений равной нулю ($\Phi_1 \equiv 0$), имеем

$$\left. \begin{aligned}
 2Gu &= -\frac{\partial \Phi_0}{\partial x} - y \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}, \\
 2Gv &= x\Phi_2 - \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} - y \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \quad (x=3-4\nu), \\
 \sigma_y &= \frac{\partial}{\partial y} \left[2(1-\nu)\Phi_2 - \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \right] - y \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2}, \\
 \tau_{xy} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[(1-2\nu)\Phi_2 - \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} - y \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right].
 \end{aligned} \right\} (5.1)$$

Граничные условия рассматриваемой задачи, очевидно, таковы:

$$\left. \begin{aligned} u|_{y=0} &= u_0(x), & v|_{y=0} &= v_0(x), \\ \sigma_y|_{y=b} &= f(x), & \tau_{xy}|_{y=b} &= g(x). \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

Представляя функции напряжений Φ_0 и Φ_2 в виде интегралов Фурье:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (A_0 \operatorname{ch} \lambda y + B_0 \operatorname{sh} \lambda y) e^{-i\lambda x} \frac{d\lambda}{\lambda}, \\ \Phi_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (A_2 \operatorname{ch} \lambda y + B_2 \operatorname{sh} \lambda y) e^{-i\lambda x} d\lambda, \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

подставляя выражения (5.3) в формулы (5.1) и используя граничные условия (5.2), мы приходим к следующей системе уравнений для величин A_0, B_0, A_2, B_2 :

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= 2G\bar{u}_0, & \kappa A_2 - B_0 &= 2G\bar{v}_0, \\ [2(1-\nu) \operatorname{sh} \mu - \mu \operatorname{ch} \mu] A_2 + [2(1-\nu) \operatorname{ch} \mu - \mu \operatorname{sh} \mu] B_2 - \\ & - (A_0 \operatorname{ch} \mu + B_0 \operatorname{sh} \mu) = \frac{j}{\lambda}, \\ [(1-2\nu) \operatorname{ch} \mu - \mu \operatorname{sh} \mu] A_2 + [(1-2\nu) \operatorname{sh} \mu - \mu \operatorname{ch} \mu] B_2 - \\ & - (A_0 \operatorname{sh} \mu + B_0 \operatorname{ch} \mu) = \frac{ig}{\lambda}; \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

здесь, как и выше, положено $\mu = \lambda b$, а символ j означает комплексное преобразование Фурье от функции $f(x)$.

Исключая A_0 и B_0 с помощью соотношений

$$A_0 = -2Gi\bar{u}_0, \quad B_0 = \kappa A_2 - 2G\bar{v}_0, \quad (5.5)$$

получаем систему двух уравнений с неизвестными A_2 и B_2 :

$$\left. \begin{aligned} -[\mu \operatorname{ch} \mu + (1-2\nu) \operatorname{sh} \mu] A_2 + [2(1-\nu) \operatorname{ch} \mu - \mu \operatorname{sh} \mu] B_2 &= \psi_1, \\ -[\mu \operatorname{sh} \mu + 2(1-\nu) \operatorname{ch} \mu] A_2 + [(1-2\nu) \operatorname{sh} \mu - \mu \operatorname{ch} \mu] B_2 &= \psi_2, \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

где введены обозначения

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= \frac{j}{\lambda} - 2Gi \operatorname{ch} \mu \bar{u}_0 - 2G \operatorname{sh} \mu \bar{v}_0, \\ \psi_2 &= \frac{ig}{\lambda} - 2Gi \operatorname{sh} \mu \bar{u}_0 - 2G \operatorname{ch} \mu \bar{v}_0. \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

Решая систему (5.6) и подставляя найденные значения A_2 и B_2 в (5.5) и (5.3), получаем функции напряжений, через которые выражаются перемещения и напряжения.

Составляя определитель основной системы (5.6)

$$x \operatorname{sh}^2 \mu + \mu^2 + 4(1 - \nu)^2 = 0, \quad (5.8)$$

мы приходим к заключению, что для производства численных расчетов по полученным формулам с помощью теоремы о вычетах необходимо иметь корни $z = \pm \sigma \pm i\tau$ уравнения*

$$\operatorname{ch} z + \frac{z^2}{2(3-4\nu)} + \frac{4(1-\nu)^2 + (1-2\nu)^2}{3-4\nu} = 0 \quad (z = 2\mu). \quad (5.9)$$

Таблица 4

$\operatorname{ch} z + \frac{z^2}{2(3-4\nu)} + \frac{4(1-\nu)^2 + (1-2\nu)^2}{3-4\nu} = 0$			
$\nu = \frac{1}{3}$		$\nu = \frac{1}{4}$	
σ	τ	σ	τ
0	1.768	0	1.913
3.005	5.122	2.770	5.164
4.549	11.82	4.353	11.84
5.375	18.27	5.187	18.29
5.932	24.66	5.747	24.67

Таблица 5

$\operatorname{ch} z + \frac{1+\nu}{3-\nu} \cdot \frac{z^2}{2} +$ $+ \frac{4+(1-\nu)^2}{4-(1-\nu)^2} = 0, \nu = \frac{1}{4}$	
σ	τ
0	2.001
2.641	5.183
4.249	11.85
5.091	18.30
5.657	24.68

В случае плоского напряженного состояния (5.9) заменяется таким уравнением

$$\operatorname{ch} z + \frac{1+\nu}{3-\nu} \cdot \frac{z^2}{2} + \frac{4+(1-\nu)^2}{4-(1-\nu)^2} = 0, \quad (5.10)$$

корни которого приведены в табл. 5 [при $\nu = \frac{1}{3}$ уравнение (5.10) совпадает с уравнением (5.9), взятым для $\nu = \frac{1}{4}$].

§ 6. Равновесие полосы с закрепленным основанием

Рассмотрим частный случай общей смешанной задачи, когда основание полосы $y=0$ жестко скреплено с неподвижным телом, т. е. перемещения $u_0(x)$ и $v_0(x)$ тождественно равны нулю.

Предположим, что в произвольной точке верхней кромки $y=b$ приложена произвольно направленная сосредоточенная сила. Не нарушая общности, можно считать, что сила приложена в точке $x=0, y=b$. Заметим также, что случай произвольной нагрузки, приложенной к верхней кромке полосы, сводится к рассматриваемому случаю сосредоточенной силы путем интегрирования по области приложения нагрузки.

* См. табл. 4, соответствующую задаче о плоской деформации.

Решение поставленной в настоящем параграфе задачи может быть непосредственно получено из общего решения смешанной задачи, если в формулах (5.7) положить

$$\bar{u}_0 = \bar{v}_0 = 0, \quad f = -\frac{P}{\sqrt{2\pi}}, \quad g = -\frac{T}{\sqrt{2\pi}}. \quad (6.1)$$

При этом

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= 0, \quad B_0 = \kappa A_2, \\ A_2 &= \frac{b}{\mu \sqrt{2\pi}} \cdot \frac{[\mu \operatorname{ch} \mu - (1 - 2\nu) \operatorname{sh} \mu] P + [2(1 - \nu) \operatorname{ch} \mu - \mu \operatorname{sh} \mu] iT}{\kappa \operatorname{sh}^2 \mu + \mu^2 + 4(1 - \nu)^2}, \\ B_2 &= -\frac{b}{\mu \sqrt{2\pi}} \cdot \frac{[\mu \operatorname{sh} \mu + 2(1 - \nu) \operatorname{ch} \mu] P + [\mu \operatorname{ch} \mu + (1 - 2\nu) \operatorname{sh} \mu] iT}{\kappa \operatorname{sh}^2 \mu + \mu^2 + 4(1 - \nu)^2}. \end{aligned} \right\} (6.2)$$

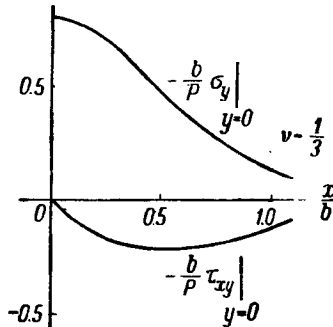


Рис. 3.

Приводим расчетные формулы для напряжений в заделанном основании

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y |_{y=0} &= (1 - \nu) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda B_2 e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \tau_{xy} |_{y=0} &= i(1 - \nu) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda A_2 e^{-i\lambda x} d\lambda \end{aligned} \right\} (6.3)$$

или после выкладок

$$\begin{aligned} \sigma_y |_{y=0} &= \frac{2(1 - \nu)}{\pi b} T \int_0^{\infty} \frac{\mu \operatorname{ch} \mu + (1 - 2\nu) \operatorname{sh} \mu}{(3 - 4\nu) \operatorname{sh}^2 \mu + \mu^2 + 4(1 - \nu)^2} \sin \mu \frac{x}{b} d\mu - \\ &- \frac{2(1 - \nu)}{\pi b} P \int_0^{\infty} \frac{\mu \operatorname{sh} \mu + 2(1 - \nu) \operatorname{ch} \mu}{(3 - 4\nu) \operatorname{sh}^2 \mu + \mu^2 + 4(1 - \nu)^2} \cos \mu \frac{x}{b} d\mu, \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\tau_{xy}|_{y=0} = \frac{2(1-\nu)}{\pi b} T \int_0^{\infty} \frac{\mu \operatorname{sh} \mu - 2(1-\nu) \operatorname{ch} \mu}{(3-4\nu) \operatorname{sh}^2 \mu + \mu^2 + 4(1-\nu)^2} \cos \mu \frac{x}{b} d\mu +$$

$$+ \frac{2(1-\nu)}{\pi b} P \int_0^{\infty} \frac{\mu \operatorname{ch} \mu - (1-2\nu) \operatorname{sh} \mu}{(3-4\nu) \operatorname{sh}^2 \mu + \mu^2 + 4(1-\nu)^2} \sin \mu \frac{x}{b} d\mu. \quad (6.5)$$

На рис. 3 показано распределение напряжений в заделке в случае, когда к верхней кромке приложена только нормальная сила ($T=0$).

Глава II. КРУЧЕНИЕ И ИЗГИБ ПРИЗМЫ, ОБРАЗОВАННОЙ ПЕРЕСЕЧЕНИЕМ ДВУХ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРОВ

§ 7. Решение задачи Дирихле для области, ограниченной дугами двух пересекающихся окружностей

В настоящей главе рассматриваются некоторые задачи кручения и изгиба стержней, разрешимые применением интегрального преобразования Фурье в биполярных координатах. В связи с этим в данном параграфе кратко излагается геометрия этих координат и дается решение связанной с ними первой краевой задачи.

Рассмотрим плоскую область, граница которой образована дугами двух пересекающихся окружностей.

Решение краевых задач для подобного рода областей, называемых обычно круговыми луночками, удобно проводить в биполярных

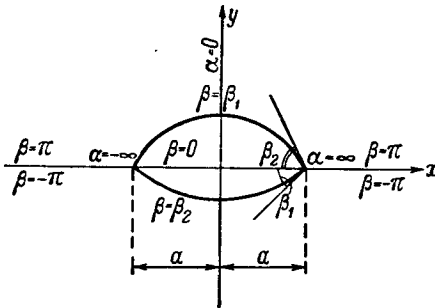


Рис. 4.

координатах (α, β) , определяемых при помощи соотношения

$$x + iy = a \operatorname{th} \frac{\alpha + i\beta}{2} \quad (7.1)$$

(a — размерный параметр).

Из (7.1) легко получаются выражения прямоугольных координат через биполярные

$$x = \frac{a \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}, \quad y = \frac{a \sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}. \quad (7.2)$$

Дуги окружностей, образующие круговую луночку, являются координатными линиями $\beta = \operatorname{const}$ и проходят, очевидно, через точки $x = \pm a, y = 0$. На рис. 4 изображена круговая луночка

ограниченная линиями $\beta = \beta_1$ и $\beta = \beta_2$, причем координата α внутри рассматриваемой области изменяется в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Заметим, что величина β измеряется углом между касательной к дуге в точках $x = \pm a, y = 0$ и отрезком $(-a, +a)$ оси x , соответствующим значению $\beta = 0$.

При частных значениях углов β_1 и β_2 круговая луночка вырождается в такие области, как полуплоскость ($\beta_1 = 0, \beta_2 = \pi$), плоскость с двумя полубесконечными разрезами ($\beta_1 = -\pi, \beta_2 = \pi$), круг ($\beta_2 - \beta_1 = \pi$), полукруг ($\beta_1 = 0, \beta_2 = \frac{\pi}{2}$), полуплоскость с сегментным вырезом или выступом ($\beta_2 = \pi$) и т. п.

Оператор Лапласа в биполярных координатах имеет вид

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{h^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} \right), \quad (7.3)$$

где h — коэффициент Ляме, определяемый по известной формуле:

$$h = \left| \frac{dz}{d\zeta} \right| = \frac{a}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \quad (z = x + iy, \quad \zeta = \alpha + i\beta). \quad (7.4)$$

Путем разделения переменных легко получают частные решения $e^{\pm i\alpha} e^{\pm \lambda \beta}$ ($\lambda \geq 0$) уравнения $\Delta f = 0$, ограниченные при $\alpha \rightarrow \pm \infty$ (углы луночки). Общее решение уравнения Лапласа удобно представить в виде интегрального разложения Фурье по переменной α

$$f(\alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} [A_1(\lambda) \operatorname{sh} \lambda (\beta_2 - \beta) + A_2(\lambda) \operatorname{sh} \lambda (\beta - \beta_1)] \cos \lambda \alpha + \\ + [B_1(\lambda) \operatorname{sh} \lambda (\beta_2 - \beta) + B_2(\lambda) \operatorname{sh} \lambda (\beta - \beta_1)] \sin \lambda \alpha \frac{d\lambda}{\operatorname{sh} \lambda (\beta_2 - \beta_1)}. \quad (7.5)$$

Для задачи Дирихле, когда на границе области заданы значения самой функции

$$f(\alpha, \beta_1) = f_1(\alpha), \quad f(\alpha, \beta_2) = f_2(\alpha), \quad (7.6)$$

краевые условия приводят к разложениям заданных функций в интеграл Фурье

$$\left. \begin{aligned} f_1(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} (A_1 \cos \lambda \alpha + B_1 \sin \lambda \alpha) d\lambda, \\ f_2(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} (A_2 \cos \lambda \alpha + B_2 \sin \lambda \alpha) d\lambda, \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

откуда величины A_i, B_i ($i = 1, 2$) сразу определяются по известным формулам

$$A_i(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_i(\alpha) \cos \lambda \alpha d\alpha, \quad B_i(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_i(\alpha) \sin \lambda \alpha d\alpha. \quad (7.8)$$

Таким образом, с помощью интегрального преобразования Фурье получено решение задачи Дирихле для внутренности круговой луночки.

§ 8. Крочение призмы, образованной двумя пересекающимися круговыми цилиндрами

Профиль призмы, образованной пересечением двух круговых цилиндров, очевидно, представляет собой рассмотренную в § 7 круговую луночку (рис. 4).

Задача крочения, как известно, сводится к решению уравнения

$$\Delta \varphi = -2 \quad (\varphi - \text{функция крочения}) \quad (8.1)$$

при граничных условиях

$$\varphi|_{\beta=\beta_1} = \varphi|_{\beta=\beta_2} = 0 \quad (|\beta_i| < \pi, \quad i = 1, 2). \quad (8.2)$$

С целью сведения задачи к решению гармонического уравнения положим

$$\varphi(\alpha, \beta) = \frac{a^2}{2} \left[f(\alpha, \beta) + 1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2 \right], \quad (8.3)$$

где

$$r^2 = x^2 + y^2 = a^2 \frac{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}. \quad (8.4)$$

Тогда новая неизвестная функция f должна удовлетворять уравнению Лапласа и крайевым условиям

$$f(\alpha, \beta_i) = -\frac{2 \cos \beta_i}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta_i} \quad (i = 1, 2); \quad (8.5)$$

следовательно, ее можно представить в виде интегрального разложения (7.5).

В силу четности функции крочения по переменной α коэффициенты B_1 и B_2 равны нулю. Для нахождения величин A_1 и A_2 по формулам (7.8) следует воспользоваться значением интеграла

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda \alpha}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} d\alpha = \frac{\pi \operatorname{sh} \lambda \beta}{\operatorname{sh} \lambda \pi \sin \beta}, \quad |\beta| < \pi. \quad (8.6)$$

Окончательное решение поставленной задачи может быть представлено в следующей форме:

$$\frac{\varphi(\alpha, \beta)}{a^2} = \frac{\cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} - 2 \left[\operatorname{ctg} \beta_2 \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \lambda \beta_2 \operatorname{sh} \lambda (\beta - \beta_1)}{\operatorname{sh} \lambda \pi \operatorname{sh} \lambda (\beta_2 - \beta_1)} \cos \lambda a d\lambda + \right. \\ \left. + \operatorname{ctg} \beta_1 \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \lambda \beta_1 \operatorname{sh} \lambda (\beta_2 - \beta)}{\operatorname{sh} \lambda \pi \operatorname{sh} \lambda (\beta_2 - \beta_1)} \cos \lambda a d\lambda \right]. \quad (8.7)$$

§ 9. Вычисление касательных напряжений и жесткости при кручении

Касательные напряжения $\tau_{\alpha s}$ и $\tau_{\beta s}$ могут быть вычислены по формулам, полученным заменой производных по касательной и нормали к кривой $\beta = \text{const}$ операциями $\frac{1}{h} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha}$ и $\frac{1}{h} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta}$:

$$\tau_{\alpha s} = \frac{G\theta}{h} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}, \quad \tau_{\beta s} = -\frac{G\theta}{h} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \quad (9.1)$$

(G — модуль сдвига, θ — угол закручивания на единицу длины).

Максимальные касательные напряжения достигаются на контуре луночки в точке $\alpha = 0$ и выражаются следующей формулой (для дуги $\beta = \beta_2$):

$$\left. \frac{\tau_{\alpha s}}{G a \theta} \right|_{\substack{\alpha=0 \\ \beta=\beta_2}} = (1 + \cos \beta_2) \left\{ \frac{\sin \beta_2}{(1 + \cos \beta_2)^2} + \right. \\ \left. + 2 \left[\operatorname{ctg} \beta_2 \int_0^{\infty} \frac{\lambda \operatorname{sh} \lambda \beta_2 \operatorname{ch} \lambda (\beta_2 - \beta_1)}{\operatorname{sh} \lambda \pi \operatorname{sh} \lambda (\beta_2 - \beta_1)} d\lambda - \right. \right. \\ \left. \left. - \operatorname{ctg} \beta_1 \int_0^{\infty} \frac{\lambda \operatorname{sh} \lambda \beta_1}{\operatorname{sh} \lambda \pi \operatorname{sh} \lambda (\beta_2 - \beta_1)} d\lambda \right] \right\}. \quad (9.2)$$

Аналогичной формулой дается максимальное напряжение на дуге $\beta = \beta_1$.

Жесткость при кручении C определяется отношением крутящего момента

$$M = 2G\theta \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \varphi h^2 da d\beta \quad (9.3)$$

к углу закручивания θ на единицу длины.

После интегрирования по переменной α , производимого с помощью формул

$$\int_0^{\infty} \frac{d\alpha}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^3} = \frac{\beta (3 - 2 \sin^2 \beta) - 3 \sin \beta \cos \beta}{2 \sin^5 \beta}, \quad (9.4)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda \alpha d\alpha}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^2} = \frac{\pi}{\operatorname{sh} \lambda \pi \sin \beta} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \cdot \frac{\operatorname{sh} \lambda \beta}{\sin \beta}, \quad (9.5)$$

выражение для жесткости принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{C}{4Ga^4} &= \frac{1}{2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} [\beta (3 - 2 \sin^2 \beta) - 3 \sin \beta \cos \beta] \frac{\cos \beta}{\sin^5 \beta} d\beta - \\ &- 2\pi \operatorname{ctg} \beta_2 \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \lambda \beta_2 d\lambda}{\operatorname{sh}^2 \lambda \pi \operatorname{sh} \lambda (\beta_2 - \beta_1)} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\operatorname{sh} \lambda (\beta - \beta_1)}{\sin \beta} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \cdot \frac{\operatorname{sh} \lambda \beta}{\sin \beta} d\beta - \\ &- 2\pi \operatorname{ctg} \beta_1 \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \lambda \beta_1 d\lambda}{\operatorname{sh}^2 \lambda \pi \operatorname{sh} \lambda (\beta_2 - \beta_1)} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\operatorname{sh} \lambda (\beta_2 - \beta)}{\sin \beta} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \cdot \frac{\operatorname{sh} \lambda \beta}{\sin \beta} d\beta. \quad (9.6) \end{aligned}$$

Квадратуры по переменной β также могут быть выполнены, так как имеет место такая формула:

$$\begin{aligned} 2 \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\operatorname{ch} \lambda \beta}{\sin \beta} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \cdot \frac{\operatorname{sh} \lambda \beta}{\sin \beta} d\beta &= \frac{\operatorname{sh} \lambda \beta_2 \operatorname{ch} \lambda \beta_2}{\sin^2 \beta_2} - \\ &- \frac{\operatorname{sh} \lambda \beta_1 \operatorname{ch} \lambda \beta_1}{\sin^2 \beta_1} - \lambda (\operatorname{ctg} \beta_2 - \operatorname{ctg} \beta_1). \quad (9.7) \end{aligned}$$

Используя еще значение интеграла

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh}^2 \lambda \beta}{\operatorname{sh}^2 \lambda \pi} d\lambda = \frac{1}{2\pi} (1 - \beta \operatorname{ctg} \beta), \quad |\beta| < \pi, \quad (9.8)$$

после некоторых выкладок получаем окончательное выражение для жесткости в таком виде:

$$\begin{aligned} \frac{C}{Ga^4} &= \frac{\beta + \sin \beta \cos \beta (2 \cos^2 \beta - 3)}{2 \sin^4 \beta} \int_{\beta_1}^{\beta_2} - \\ &- 4\pi (\operatorname{ctg} \beta_2 - \operatorname{ctg} \beta_1)^2 \int_0^{\infty} \frac{\lambda \operatorname{sh} \lambda \beta_1 \operatorname{sh} \lambda \beta_2 d\lambda}{\operatorname{sh}^2 \lambda \pi \operatorname{sh} \lambda (\beta_2 - \beta_1)}. \quad (9.9) \end{aligned}$$

Приводим формулы максимальных касательных напряжений и жесткости при кручении для двух частных случаев.

1. $\beta_1 = 0, \beta_2 = \gamma$ — круговой цилиндр, срезанный плоскостью, параллельной оси (рис. 5):

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{1}{GR\theta} \tau_{\alpha s} \Big|_{\substack{\beta=0 \\ \alpha=0}} = 4 \sin \gamma \int_0^{\infty} \frac{\lambda^2 \operatorname{cth} \lambda \gamma}{\operatorname{sh} \lambda \pi} d\lambda - \cos \gamma, \\ \tau_2 &= \frac{1}{GR\theta} \tau_{\alpha s} \Big|_{\substack{\beta=\gamma \\ \alpha=0}} = 1 - 2 \sin \gamma (1 + \cos \gamma) \int_0^{\infty} \frac{\lambda^2 d\lambda}{\operatorname{sh} \lambda \pi \operatorname{sh} \lambda \gamma}, \\ x_\gamma &= \frac{C}{GR^4} \Big|_{\substack{\beta_1=0 \\ \beta_2=\gamma}} = \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{12} \sin 2\gamma (2 \sin^2 \gamma - 3) - \\ &\quad - 4\pi \int_0^{\infty} \frac{\lambda^2 \operatorname{cth} \lambda \gamma}{\operatorname{sh}^2 \lambda \pi} d\lambda. \end{aligned} \right\} (9.10)$$

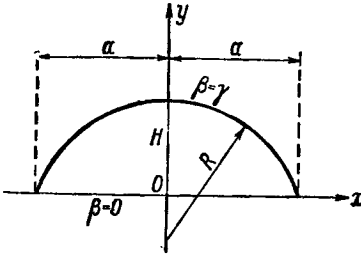


Рис. 5.

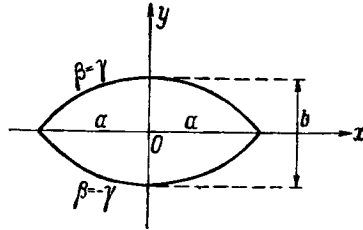


Рис. 6.

В этих формулах $R = \frac{a}{\sin \gamma}$ — радиус дуговой части контура.

2. $\beta_2 = -\beta_1 = \gamma$ — симметричная круговая луночка (рис. 6):

$$\left. \begin{aligned} \tau_0 &= \frac{1}{Ga\theta} \tau_{\alpha s} \Big|_{\substack{\beta=\gamma \\ \alpha=0}} = \frac{1}{\sin \gamma} - 2 \operatorname{ctg} \gamma (1 + \cos \gamma) \int_0^{\infty} \frac{\lambda d\lambda}{\operatorname{sh} \lambda \pi \operatorname{ch} \lambda \gamma}, \\ x_0 &= \frac{C}{Ga^4} \Big|_{\beta_2 = -\beta_1 = \gamma} = \frac{1}{\sin^4 \gamma} \left[\gamma + \sin \gamma \cos \gamma (2 \cos^2 \gamma - 3) - \right. \\ &\quad \left. - 2\pi \sin^2 2\gamma \int_0^{\infty} \frac{\lambda \operatorname{th} \lambda \gamma}{\operatorname{sh}^2 \lambda \pi} d\lambda \right]. \end{aligned} \right\} (9.11)$$

В табл. 6 приведены численные значения величин τ_1, τ_2 и x_γ для значений угла γ , соответствующих различным отношениям ξ высоты луночки H к ее диаметру $2R$:

$$\xi = \sin^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{n}{8} \quad (n = 1, 2, \dots, 8).$$

Таблица 6

ξ	γ	τ_1	τ_2	χ_γ
$\frac{1}{8}$	0.722	0.245	0.221	0.0152
$\frac{1}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	0.444	0.407	0.0375
$\frac{3}{8}$	1.31	0.659	0.562	0.132
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	0.848	0.726	0.297
$\frac{5}{8}$	1.83	1.03	0.824	0.553
$\frac{3}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	1.15	0.920	0.931
$\frac{7}{8}$	2.42	1.21	0.972	1.26
1	π	1	1	$\frac{\pi}{2}$

В случае $\gamma = \frac{\pi}{2}$, соответствующем стержню полукруглого сечения, квадратуры в формулах (9.10) могут быть выполнены, в результате чего получают значения

$$\tau_1 = \frac{8}{3\pi}, \quad \tau_2 = 2 - \frac{4}{\pi}, \quad \chi_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}. \quad (9.12)$$

Эти результаты могут быть, разумеется, получены путем решения задачи кручения в полярных координатах (см., например, [220]).

В предельном случае $\gamma = \pi$ при условии неизменяемости величины радиуса R луночка превращается в круг и формулы (9.10) дают соответствующие значения

$$\tau_1 = \tau_2 = 1, \quad \chi_\pi = \frac{\pi}{2}. \quad (9.13)$$

Для остальных значений угла γ расчеты велись с помощью численного интегрирования.

В табл. 7 представлены результаты вычислений для случая симметричной круговой луночки [формулы (9.11)], причем через $\eta = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ обозначено отношение ширины луночки b к ее длине $2a$.

	γ							
	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	1
γ	0.248	0.490	0.718	0.928	1.12	1.29	1.44	$\frac{\pi}{2}$
τ_0	0.242	0.445	0.601	0.743	0.835	0.912	0.962	1
χ_0	0.0144	0.0352	0.102	0.243	0.472	0.878	1.32	$\frac{\pi}{2}$

Последний столбец этой таблицы ($\gamma = \frac{\pi}{2}$) соответствует круглому сечению.

Можно показать,* что при $\gamma > \frac{\pi}{2}$ напряжения в углах луночки бесконечно возрастают (результат, совершенно естественный при наличии на контуре области входящих углов).

Укажем в заключение еще два частных вида профиля сечения, для которых решение задачи кручения выражается через элементарные функции: а) $\beta_2 - \beta_1 = \frac{\pi}{2}$ — дуги окружностей пересекаются под прямым углом [233]; б) $\beta_2 = 2\beta_1$ — продолжение дуги $\beta = \beta_2 > \frac{\pi}{2}$ проходит через центр дуги $\beta = \beta_1 < \frac{\pi}{2}$.

Во втором случае, исходя из формулы (9. 2), можно показать [110, стр. 39], что максимальное касательное напряжение возникает в середине дуги $\beta = \beta_1$ и оказывается равным

$$\tau_{\max} = G\theta(2R - r), \quad (9. 14)$$

где R — радиус внешней, а r — внутренней дуги. Этот результат был получен Вебером [230] другим способом.

§ 10. Изгиб поперечной силой стержня луночного профиля

Пусть призматический стержень с поперечным сечением в виде круговой луночки подвергается действию поперечной силы P , приложенной на его конце, причем предполагается, что кручение отсутствует, т. е. сила проходит через центр изгиба (x, \bar{y}) поперечного сечения. В силу симметрии сечения

* См. [110, стр. 37].

относительно оси y абсцисса x центра изгиба равна нулю (рис. 7), а ордината \bar{y} центра изгиба находится по известной формуле*

$$\bar{y} = -\frac{M}{P_x},$$

где

$$M = \iint_{(F)} (x\tau_{yx} - y\tau_{xx}) dx dy \quad (10.1)$$

(F — площадь поперечного сечения стержня).

Касательные напряжения τ_{xx} и τ_{yx} могут быть выражены через функцию напряжений $\varphi(x, y)$ следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xx} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{A}{2} x^2, & A &= \frac{P_x}{J_y}, \\ \tau_{yx} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{B}{2} y(2y_0 - y), & B &= \frac{P_y}{J_x}, \end{aligned} \right\} \quad (10.2)$$

где J_x и J_y — моменты инерции поперечного сечения, y_0 — ордината центра тяжести ($x_0 = 0$), причем функция φ должна удовлетворять уравнению

$$\Delta \varphi = \frac{\nu}{1+\nu} \times$$

$$\times [A(y - y_0) - Bx] \quad (10.3)$$

(ν — коэффициент Пуассона) и условию на контуре

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{1}{2} \left[Ax^2 \frac{\partial y}{\partial s} + \right.$$

$$\left. + By(2y_0 - y) \frac{\partial x}{\partial s} \right] \quad (10.4)$$

(s — переменная дуга контура.)

Желая свести задачу изгиба к решению уравнения Лапласа, полагаем

$$\varphi = \frac{\nu}{1+\nu} \left\{ \frac{1}{6} [A(y - y_0)^3 - Bx^3] + a^3 f(\alpha, \beta) \right\}; \quad (10.5)$$

при этом функция f должна быть решением уравнения

$$\Delta f = 0 \quad (10.6)$$

* См. [57, стр. 287]. Разумеется, величина \bar{y} может быть найдена только после решения задачи изгиба, когда будут известны напряжения τ_{xx} и τ_{yx} .

и удовлетворять граничным условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \alpha} \Big|_{\beta=\beta_i} &= \frac{1}{2a^3} \left\{ A \left[\frac{1+\nu}{\nu} r^2 + 2yy_0 - y_0^2 - \frac{1+2\nu}{\nu} y^2 \right] \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \right. \\ &+ B \left[r^2 + 2 \frac{1+\nu}{\nu} yy_0 - \frac{1+2\nu}{\nu} y^2 \right] \frac{\partial x}{\partial \alpha} \Big|_{\beta=\beta_i} = \\ &= F_i(\alpha) \quad (i=1, 2), \quad r^2 = x^2 + y^2. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Представляя гармоническую функцию f в виде интегрального разложения (7.5) и применяя условия (10.7), находим коэффициенты $A_i(\lambda)$ и $B_i(\lambda)$:

$$\left. \begin{aligned} A_i(\lambda) &= \frac{1}{\lambda \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_i(\alpha) \sin \lambda \alpha d\alpha, \\ B_i(\lambda) &= \frac{1}{\lambda \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_i(\alpha) \cos \lambda \alpha d\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (10.8)$$

Опуская выкладки, связанные с вычислением интегралов, приводим окончательные значения величин A_i и B_i :

$$\begin{aligned} A_i(\lambda) &= -\frac{A}{\operatorname{sh} \lambda \pi} \left\{ \frac{1+2\nu}{6\nu} \lambda^2 \operatorname{sh} \lambda \beta_i + \left(\frac{\operatorname{ctg} \beta_i}{2\nu} - \frac{y_0}{a} \right) \lambda \operatorname{ch} \lambda \beta_i + \right. \\ &+ \left[\left(\frac{y_0}{a} \right)^2 + \frac{y_0}{a} \operatorname{ctg} \beta_i - \frac{1+2\nu}{3\nu} - \frac{1}{2\nu \sin^2 \beta_i} \right] \operatorname{sh} \lambda \beta_i \Big\}, \end{aligned} \quad (10.9)$$

$$\begin{aligned} B_i(\lambda) &= \frac{B}{\operatorname{sh} \lambda \pi} \left\{ \frac{1+\nu}{\nu \lambda} \cdot \frac{\operatorname{sh} \lambda \beta_i}{\sin^2 \beta_i} \left(\frac{y_0}{a} + \operatorname{ctg} \beta_i \right) + \right. \\ &+ \operatorname{ch} \lambda \beta_i \left[\frac{1+2\nu}{3\nu} - \frac{1+\nu}{\nu} \left(\frac{1}{\sin^2 \beta_i} + \frac{y_0}{a} \operatorname{ctg} \beta_i \right) \right] + \\ &+ \lambda \operatorname{sh} \lambda \beta_i \left(\frac{\operatorname{ctg} \beta_i}{2\nu} + \frac{y_0}{a} \right) - \frac{1+2\nu}{6\nu} \lambda^2 \operatorname{ch} \lambda \beta_i \Big\}. \end{aligned} \quad (10.10)$$

Подставляя (10.9) и (10.10) в (7.5) и производя некоторые упрощения, получим окончательное решение задачи изгиба

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta) &= A \left\{ \left[\frac{1+2\nu}{3\nu} - \left(\frac{y_0}{a} \right)^2 \right] \frac{y}{2a} - \frac{1+2\nu}{24\nu a^3} y (y^2 - 3x^2 + a^2) + \right. \\ &+ \frac{y_0}{4a^3} (y^2 - x^2 + a^2) + \Phi(\alpha, \beta) \Big\} + B \left\{ \frac{x}{2a} \left[\frac{1+2\nu}{4\nu} + \frac{yy_0}{a^2} - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{1+2\nu}{12\nu a^2} (3y^2 - x^2) + \Psi(\alpha, \beta) \right\}, \end{aligned} \quad (10.11)$$

где функции Φ и Ψ представляются следующими квадратурами:

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha, \beta) = & \int_0^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2\nu \sin^2 \beta_2} - \frac{y_0}{a} \operatorname{ctg} \beta_2 \right) \operatorname{sh} \lambda \beta_2 \operatorname{sh} \lambda (\beta - \beta_1) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{2\nu \sin^2 \beta_1} - \frac{y_0}{a} \operatorname{ctg} \beta_1 \right) \operatorname{sh} \lambda \beta_1 \operatorname{sh} \lambda (\beta_2 - \beta) \right] \frac{\cos \lambda \alpha d \lambda}{\operatorname{sh} \lambda \pi \operatorname{sh} \lambda (\beta_2 - \beta_1)} - \\ & - \frac{1}{2\nu} \int_0^{\infty} \left[\operatorname{ctg} \beta_2 \operatorname{ch} \lambda \beta_2 \operatorname{sh} \lambda (\beta - \beta_1) + \right. \\ & \left. + \operatorname{ctg} \beta_1 \operatorname{ch} \lambda \beta_1 \operatorname{sh} \lambda (\beta_2 - \beta) \right] \frac{\lambda \cos \lambda \alpha d \lambda}{\operatorname{sh} \lambda \pi \operatorname{sh} \lambda (\beta_2 - \beta_1)}, \quad (10.12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi(\alpha, \beta) = & \frac{1}{\nu} \int_0^{\infty} \left\{ \left[\left(\operatorname{ctg} \beta_2 + \frac{y_0}{a} \right) \frac{1+\nu}{\sin^2 \beta_2} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \beta_2 \right] \operatorname{sh} \lambda \beta_2 \operatorname{sh} \lambda (\beta - \beta_1) + \right. \\ & \left. + \left[\left(\operatorname{ctg} \beta_1 + \frac{y_0}{a} \right) \frac{1+\nu}{\sin^2 \beta_1} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \beta_1 \right] \operatorname{sh} \lambda \beta_1 \operatorname{sh} \lambda (\beta_2 - \beta) \right\} \times \\ & \times \frac{\sin \lambda \alpha d \lambda}{\lambda \operatorname{sh} \lambda \pi \operatorname{sh} \lambda (\beta_2 - \beta_1)} - \frac{1+\nu}{\nu} \int_0^{\infty} \left[\left(\frac{1}{\sin^2 \beta_2} + \frac{y_0}{a} \operatorname{ctg} \beta_2 \right) \times \right. \\ & \left. \times \operatorname{ch} \lambda \beta_2 \operatorname{sh} \lambda (\beta - \beta_1) + \left(\frac{1}{\sin^2 \beta_1} + \frac{y_0}{a} \operatorname{ctg} \beta_1 \right) \operatorname{ch} \lambda \beta_1 \operatorname{sh} \lambda (\beta_2 - \beta) \right] \times \\ & \times \frac{\sin \lambda \alpha d \lambda}{\operatorname{sh} \lambda \pi \operatorname{sh} \lambda (\beta_2 - \beta_1)}. \quad (10.13) \end{aligned}$$

§ 11. Изгиб кругового цилиндра, срезанного плоскостью, параллельной оси

Поперечное сечение кругового цилиндра, срезанного параллельной его оси плоскостью, представляет собой круговой сегмент, контур которого ограничен линиями $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = \gamma$ (рис. 5).

Ради упрощения выкладок ограничимся случаем, когда поперечная сила P параллельна хорде сегмента, т. е. положим в формулах предыдущего параграфа

$$P_x = P, \quad P_y = 0, \quad B = 0, \quad A = \frac{P}{J} \quad (J = J_y).$$

Приводим окончательное выражение для функции напряжений φ :

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{P a^3}{J} \cdot \frac{\nu}{1+\nu} \left[\frac{2\nu-1}{24\nu} \left(\frac{y}{a} \right)^3 - \frac{1}{2} \frac{y_0}{a} \left(\frac{y}{a} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{y}{a} \left(\frac{1+2\nu}{4\nu} + \frac{1}{2\nu \sin^2 \gamma} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{y_0}{a} \operatorname{ctg} \gamma \right) + \frac{1+2\nu}{8\nu} \cdot \frac{y}{a} \left(\frac{x}{a} \right)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{y_0}{a} \right)^3 + \left(\frac{y_0}{a} - \frac{\operatorname{ctg} \gamma}{2\nu} \right) \omega \right], \quad (11.1) \end{aligned}$$

где

$$\omega = \int_0^{\infty} \frac{\lambda \operatorname{sh} \lambda \beta}{\operatorname{sh} \lambda \pi} \operatorname{cth} \lambda \gamma \cos \lambda a d\lambda. \quad (11.2)$$

Для полукруглого сечения ($\gamma = \frac{\pi}{2}$) последний интеграл вычисляется

$$\omega \Big|_{\gamma = \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi} \left[2 \frac{\beta (1 - \operatorname{ch} 2\alpha \cos 2\beta) + \alpha \operatorname{sh} 2\alpha \sin 2\beta}{(\operatorname{ch} 2\alpha - \cos 2\beta)^2} + \frac{\sin 2\beta}{\operatorname{ch} 2\alpha - \cos 2\beta} \right]. \quad (11.3)$$

Определим ординату центра изгиба по формуле (10.1). Опуская довольно громоздкие вычисления (см. [110, стр. 53—58]), приведем окончательную формулу

$$\begin{aligned} \frac{y}{R} = & \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{R^4}{J} \left\{ \frac{1}{60} [15 (\sin \gamma - \gamma \cos \gamma) + (5 - 8 \sin^2 \gamma) \sin^3 \gamma] - \right. \\ & - \pi \cos \gamma \sin^4 \gamma \cdot I + \nu \left[\frac{1}{2} (\sin \gamma - \gamma \cos \gamma) - \frac{1}{30} (5 + 2 \sin^2 \gamma) \sin^3 \gamma + \right. \\ & \left. \left. + \frac{y_0}{R} \cdot \frac{3 (\sin \gamma \cos \gamma - \gamma) - 2 \sin^3 \gamma \cos \gamma}{12} + 2\pi \sin^4 \gamma \frac{y_0}{R} I \right] \right\}, \quad (11.4) \end{aligned}$$

где введены обозначения:

$$R = \frac{a}{\sin \gamma}$$

— радиус дуги сегмента;

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\lambda^3 \operatorname{cth} \lambda \gamma}{\operatorname{sh}^2 \lambda \pi} d\lambda. \quad (11.5)$$

При этом ордината центра тяжести и момент инерции могут быть вычислены по формулам

$$\frac{y_0}{R} = \frac{3 (\sin \gamma - \gamma \cos \gamma) - \sin^3 \gamma}{3 (\gamma - \sin \gamma \cos \gamma)}, \quad (11.6)$$

$$\frac{J}{R^4} = \frac{\gamma - \sin \gamma \cos \gamma}{4} - \frac{1}{6} \cos \gamma \sin^3 \gamma. \quad (11.7)$$

В табл. 8 даны значения $\frac{y}{R}$ и $\frac{y_0}{R}$ для тех же значений отношения $\xi = \sin^2 \frac{\gamma}{2}$ высоты луночки к ее диаметру, что и в табл. 6, причем положено $\nu = 0.3$.

	ε							
	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	1
$\frac{y}{R} \dots \dots$	0.151	0.276	0.387	0.511	0.628	0.739	0.892	1
$\frac{y_0}{R} \dots \dots$	0.0924	0.205	0.326	0.424	0.541	0.659	0.829	1

Из рассмотрения данных этой таблицы видно, что во всех случаях ордината центра изгиба превышает ординату центра тяжести (равна ей в случае круглого сечения).

Как уже отмечалось выше, в случае полукруглого сечения решение задачи изгиба выражается в элементарных функциях. В частности, формула (11.4) дает

$$\frac{y}{R} \Big|_{\gamma=\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{15\pi(1+\nu)} \left[3 + \nu \left(\frac{40}{\pi^2} - 1 \right) \right]. \quad (11.8)$$

В курсе теории упругости Л. С. Лейбензона [57, стр. 304] приведена формула для ординаты центра изгиба полукруга, полученная путем решения задачи в полярных координатах,

$$\left. \begin{aligned} \frac{y}{R} &= \frac{8(3+4\nu)}{15\pi(1+\nu)} + \frac{4\nu}{3\pi(1+\nu)} K, \\ K &= 1 + \frac{128}{\pi^2} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{(n-2)n^2(n+2)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (11.9)$$

Если просуммировать входящий сюда ряд, то получится величина $\frac{1}{8} - \frac{3\pi^2}{128}$, после чего формулы (11.9) и (11.8) совпадут.

В предельном случае $\gamma = \pi$ формула (11.4) приводит к значению $\bar{y} \Big|_{\gamma=\pi} = R$, как и должно быть в случае круглого сечения.

§ 12. Изгиб стержня с сечением в виде симметричной круговой луночки

В настоящем параграфе даются результаты расчета касательных напряжений, возникающих при изгибе стержня с поперечным сечением в виде симметричной круговой луночки ($\beta_2 = -\beta_1 = \gamma$) (рис. 6), причем поперечная сила P считается действующей вдоль оси симметрии $\alpha = 0$ ($x = 0$).

Полагая в формулах (10. 5) и (10. 11)—(10. 13) $\beta_2 = -\beta_1 = \gamma$, $P_x = 0$, $P_y = P$, $A = 0$, $B = \frac{P}{J}$ ($J = J_x$), $y_0 = 0$, находим следующее выражение для функции напряжений φ :

$$(1 + \nu) \frac{J}{Pa^3} \varphi = \frac{x}{2a} \left[\frac{1+2\nu}{4} - \frac{1+\nu}{\sin^2 \gamma} + \frac{1-2\nu}{12} \left(\frac{x}{a} \right)^2 - \frac{1+2\nu}{4} \left(\frac{y}{a} \right)^2 \right] + \\ + (1 + \nu) \frac{\text{ctg } \gamma}{\sin^2 \gamma} \int_0^\infty \frac{\text{ch } \lambda \beta \sin \lambda \alpha}{\lambda \text{ sh } \lambda \pi} \text{th } \lambda \gamma d\lambda + \\ + \frac{\text{ctg } \gamma}{2} \int_0^\infty \frac{\lambda \text{ ch } \lambda \beta \sin \lambda \alpha}{\text{sh } \lambda \pi} \text{th } \lambda \gamma d\lambda. \quad (12. 1)$$

Подсчитаем, как это обычно делают для подобного рода профилей, касательное напряжение на горизонтальной оси симметрии $y = 0$ ($\beta = 0$). Из формулы (10. 2) имеем

$$\tau_{yz} |_{y=0} = - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{y=0} = - \left(\frac{1}{h} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\beta=0} = - \frac{\text{ch } \alpha + 1}{a} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \Big|_{\beta=0}$$

или, после выкладок,

$$- \tau_{yz} |_{\beta=0} = \frac{1}{1 + \nu} \cdot \frac{Pa^2}{J} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{1+2\nu}{4} - \frac{1+\nu}{\sin^2 \gamma} + \frac{1-2\nu}{4} \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + (\text{ch } \alpha + 1) \left[(1 + \nu) \frac{\text{ctg } \gamma}{\sin^2 \gamma} \int_0^\infty \frac{\cos \lambda \alpha \text{th } \lambda \gamma}{\text{sh } \lambda \pi} d\lambda + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\text{ctg } \gamma}{2} \int_0^\infty \frac{\lambda^2 \cos \lambda \alpha \text{th } \lambda \gamma}{\text{sh } \lambda \pi} d\lambda \right] \right\}. \quad (12. 2)$$

Если $\gamma \leq \frac{\pi}{2}$, то максимальное касательное напряжение получается в центре луночки ($\alpha = 0$):

$$\tau_{\max} = \tau_{yz} |_{\alpha=\beta=0} = \frac{1}{1 + \nu} \cdot \frac{Pa^2}{J} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1+\nu}{\sin^2 \gamma} - \frac{1+2\nu}{4} \right) - \right. \\ \left. - 2 \text{ctg } \gamma \left[\frac{1+\nu}{\sin^2 \gamma} \int_0^\infty \frac{\text{th } \lambda \gamma}{\text{sh } \lambda \pi} d\lambda + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\lambda^2 \text{th } \lambda \gamma}{\text{sh } \lambda \pi} d\lambda \right] \right\}. \quad (12. 3)$$

В табл. 9 приведены значения величины $\tau = \frac{F}{P} \tau_{\max}$ (F — площадь сечения) для различных значений отношения $\eta = \text{tg } \frac{\gamma}{2}$ ширины луночки к ее длине $2a$ (принято $\nu = 0.3$).

Для установления минимального значения касательного напряжения, которое имеет место в углах луночки, осуществим в формуле (12.2) предельный переход $\alpha \rightarrow \infty$. Применяя теорему о вычетах, находим, что $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \tau_{yz}|_{y=0} = 0$, т. е. напряжения в угловых точках сечения равны нулю.*

Это обстоятельство показывает, что напряжения вдоль горизонтальной оси симметрии луночки распределены более неравномерно, чем, скажем, в случае эллиптического сечения, для которого напряжения на концах большой полуоси отнюдь не нули. В частности, для кругового сечения ($\gamma = \frac{\pi}{2}$) из (12.2)

Таблица 9

γ	τ	γ	τ
$\frac{1}{8}$	1.53	$\frac{5}{8}$	1.45
$\frac{1}{4}$	1.52	$\frac{3}{4}$	1.42
$\frac{3}{8}$	1.50	$\frac{7}{8}$	1.40
$\frac{1}{2}$	1.47	1	1.38

при $\alpha \rightarrow \infty$ получаем известное выражение для минимального касательного напряжения

$$\begin{aligned} \tau_{\min} &= \frac{Pa^2}{4J} \cdot \frac{2\nu + 1}{\nu + 1} \Big|_{\nu=0,3} \\ &= 1.23 \frac{P}{F}. \end{aligned} \quad (12.4)$$

Даже в случае весьма удлиненного эллипса, близкого по форме к луночке (при $\gamma \rightarrow 0$), распределение напряжений вдоль большой полуоси будет сильно отличаться от соответствующего распределения в случае луночки. В самом деле, известно, что для сильно вытянутого эллиптического сечения

$\tau_{\min} \approx 0.92 \frac{P}{F}$ (при $\nu = 0.3$), в то время как для луночного профиля

и при $\gamma \rightarrow 0$ остается в силе равенство $\tau_{\min} = 0$. С другой стороны, максимальное касательное напряжение, имеющее в случае

эллипса значение $\tau_{\max} = 1.54 \frac{P}{F}$, совпадает с соответствующим значением для случая луночки, в чем можно легко убедиться, если в формуле (12.3) устремить γ к нулю и удержать члены первого порядка малости.

Таким образом, элементарное решение, считающее касательные напряжения постоянными по ширине профиля, оказывается неприменимым к рассмотренным луночным сечениям.

* Разумеется, это имеет место при $\gamma < \frac{\pi}{2}$. При $\gamma > \frac{\pi}{2}$ напряжения в углах луночки неограниченно возрастают.

Глава III. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КРУГОВОЙ ЛУНОЧКИ

§ 13. Решение основной бигармонической задачи для луночной области

В настоящей главе с помощью биполярных координат и аппарата интеграла Фурье будет дано точное решение плоской задачи теории упругости для области, ограниченной дугами двух пересекающихся окружностей, а также рассмотрен ряд конкретных задач (в том числе и внешних).

В данном параграфе рассматривается основная бигармоническая задача для внутренней луночной области, т. е. для области, контур которой в биполярных координатах описывается кривыми $\beta = \beta_1$ и $\beta = \beta_2$ (рис. 4). Поставленная задача состоит, очевидно, в интегрировании бигармонического уравнения для функции напряжений $\Phi(\alpha, \beta)$ при задании на границе области (т. е. при $\beta = \beta_i$, $i = 1, 2$) значений самой функции Φ и ее нормальной производной, т. е. фактически значений $\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}$, так как

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n_\beta} = \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}, \quad (13.1)$$

где $h = \frac{a}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}$ — коэффициент Ляме, a — параметр биполярных координат (см. § 7).

Бигармоническое уравнение в биполярных координатах может быть представлено в виде уравнения с постоянными коэффициентами относительно функции $\frac{\Phi}{h}$ [178]

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right] \left(\frac{\Phi}{h} \right) = 0 \quad (13.2)$$

и допускает частные решения вида

$$\Phi_\lambda = h \{ A \operatorname{ch} \lambda \beta \cos \beta + B \operatorname{sh} \lambda \beta \sin \beta + \\ + C \operatorname{sh} \lambda \beta \cos \beta + D \operatorname{ch} \lambda \beta \sin \beta \} e^{\lambda \alpha}. \quad (13.3)$$

В связи с этим становится возможным после представления общего решения основной бигармонической задачи в виде интеграла по параметру от частных решений типа $\Phi_\lambda(\alpha, \beta)$ определить величины A, B, C, D из следующих четырех условий:

$$\left(\frac{\Phi}{h} \right) \Big|_{\beta=\beta_i} = \varphi_i(\alpha), \quad \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\Phi}{h} \right) \Big|_{\beta=\beta_i} = \psi_i(\alpha) \quad (i = 1, 2), \quad (13.4)$$

где функции φ_i и ψ_i легко выражаются через заданные граничные значения Φ и $\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}$. Предполагается также, что φ_i и ψ_i удовлетворяют условиям разложимости в интеграл Фурье.

Для фактического проведения выкладок, а также для исследования получающейся системы четырех уравнений с четырьмя неизвестными удобно представить бигармоническую функцию Φ интегралом Фурье такого вида:

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha, \beta) = & \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [A_1 \operatorname{ch} \lambda (\beta_2 - \beta) \cos (\beta - \beta_1) + \\ & + A_2 \operatorname{ch} \lambda (\beta - \beta_1) \cos (\beta_2 - \beta) + A_3 \operatorname{sh} \lambda (\beta_2 - \beta) \sin (\beta - \beta_1) + \\ & + A_4 \operatorname{sh} \lambda (\beta - \beta_1) \sin (\beta_2 - \beta)] e^{-\epsilon \lambda \alpha} d\lambda. \end{aligned} \quad (13.5)$$

Граничные условия (13.4) приводят нас при этом к двум раздельным системам:

$$A_1 \operatorname{ch} 2\lambda\gamma + A_2 \cos 2\gamma = f_1, \quad A_1 \cos 2\gamma + A_2 \operatorname{ch} 2\lambda\gamma = f_2, \quad (13.6)$$

$$A_3 \operatorname{sh} 2\lambda\gamma + \lambda A_4 \sin 2\gamma = f_3, \quad \lambda A_3 \sin 2\gamma + A_4 \operatorname{sh} 2\lambda\gamma = f_4, \quad (13.7)$$

где через $2\gamma = \beta_2 - \beta_1$ обозначен угол между касательными в угловой точке луночки.

В формулах (13.6) величины f_1 и f_2 являются преобразованиями Фурье от заданных функций φ_1 и φ_2

$$f_i(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(\alpha) e^{i\lambda\alpha} d\alpha, \quad (13.8)$$

так что значения A_1 и A_2 определяются следующими равенствами:

$$A_1 = \frac{f_1 \operatorname{ch} 2\lambda\gamma - f_2 \cos 2\gamma}{\operatorname{ch}^2 2\lambda\gamma - \cos^2 2\gamma}, \quad A_2 = \frac{f_2 \operatorname{ch} 2\lambda\gamma - f_1 \cos 2\gamma}{\operatorname{ch}^2 2\lambda\gamma - \cos^2 2\gamma}. \quad (13.9)$$

Что касается входящих в формулы (13.7) величин f_3 и f_4 , то они выражаются через преобразования заданных величин ψ_1 и ψ_2 и уже найденные значения A_1 и A_2 следующими зависимостями:

$$\left. \begin{aligned} f_3 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(\alpha) e^{i\lambda\alpha} d\alpha - A_1 \lambda \operatorname{sh} 2\lambda\gamma - A_2 \sin 2\gamma, \\ f_4 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_2(\alpha) e^{i\lambda\alpha} d\alpha - A_1 \sin 2\gamma - A_2 \lambda \operatorname{sh} 2\lambda\gamma. \end{aligned} \right\} \quad (13.10)$$

Таким образом, для A_3 и A_4 находим

$$A_3 = \frac{f_3 \operatorname{sh} 2\lambda\gamma - f_4 \lambda \sin 2\gamma}{\operatorname{sh}^2 2\lambda\gamma - \lambda^2 \sin^2 2\gamma}, \quad A_4 = \frac{f_4 \operatorname{sh} 2\lambda\gamma - f_3 \lambda \sin 2\gamma}{\operatorname{sh}^2 2\lambda\gamma - \lambda^2 \sin^2 2\gamma}. \quad (13.11)$$

После того как бигармоническая функция найдена, значения напряжений даются формулами [178].

$$\left. \begin{aligned} a\sigma_\alpha &= \left[(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \operatorname{sh} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \operatorname{ch} \alpha \right] \left(\frac{\Phi}{h} \right), \\ a\sigma_\beta &= \left[(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \operatorname{sh} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} - \cos \beta \right] \left(\frac{\Phi}{h} \right), \\ a\tau_{\alpha\beta} &= -(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \left(\frac{\Phi}{h} \right), \end{aligned} \right\} (13.12)$$

на чем и заканчивается общее решение задачи.

Из полученных в настоящем параграфе общих формул видно, что для фактического вычисления интегралов Фурье типа (13.5) с помощью теоремы о вычетах (см. § 2) необходимо иметь значения корней $z = \pm \sigma \pm i\tau$ трансцендентных уравнений*

$$\operatorname{sh} z + \frac{\sin 2\gamma}{2\gamma} z = 0, \quad (13.13)$$

$$\operatorname{sh} z - \frac{\sin 2\gamma}{2\gamma} z = 0, \quad (13.14)$$

которые представлены в табл. 10 для некоторых значений угла γ .

Таблица 10

$\operatorname{sh} z + \frac{\sin 2\gamma}{2\gamma} z = 0$							
$\gamma = \frac{\pi}{8}$		$\gamma = \frac{\pi}{4}$		$\gamma = \frac{3\pi}{8}$		$\gamma = \frac{5\pi}{8}$	
σ	τ	σ	τ	σ	τ	σ	τ
2.137	4.234	1.758	4.303	0.8501	4.442	0	2.645
2.996	10.72	2.641	10.75	1.863	10.82	0.8702	7.694
3.445	17.08	3.095	17.10	2.331	17.14	1.585	14.02
3.753	23.40	3.404	23.42	2.646	23.45	1.976	20.32
3.951	29.71	3.640	29.72	2.884	29.75	2.253	26.62

$\operatorname{sh} z - \frac{\sin 2\gamma}{2\gamma} z = 0$							
σ	τ	σ	τ	σ	τ	σ	τ
0	0.7854	0	1.571	0	2.356	0	3.927
2.660	7.511	2.300	7.553	1.497	7.641	0	5.114
3.246	13.91	2.894	13.93	2.125	13.98	1.302	10.86
3.611	20.24	3.262	20.26	2.501	20.30	1.801	17.17
3.878	26.56	3.529	26.57	2.772	26.60	2.124	23.47
						2.367	29.77

* Корни уравнений $\operatorname{ch} 2\lambda\gamma \pm \cos 2\gamma = 0$ находятся в явном виде, а именно: $\lambda_n = i \left(1 + \frac{n\pi}{2\gamma} \right)$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Исследование свойств корней уравнений (13.13) и (13.14), проведенное в главе V (§ 31), позволяет установить, что напряжения в угловой точке луночки в случае симметричного нагружения стремятся к нулю, если $2\gamma < \pi$, и к бесконечности при $2\gamma > \pi$ (в антисимметричном случае таким разграничивающим углом будет корень уравнения $\operatorname{tg} 2\gamma = 2\gamma$). В связи с возможностью наличия на контуре области точек разрыва напряжений следует заметить, что при постановке подобных задач необходимо, кроме дифференциальных уравнений и граничных условий, дополнительно сформулировать еще некоторые требования, обеспечивающие единственность решения. Мы в дальнейшем будем предполагать, что при $a \rightarrow \pm \infty$ упругие перемещения остаются ограниченными, а главный вектор усилий, приложенных к дугам окружностей $a = \pm A$, охватывающим угловые точки, стремится к нулю при $A \rightarrow \infty$. Можно показать (см. [78, стр. 140]), что таких дополнительных условий достаточно, для того чтобы поставленная задача имела единственное решение.

Отметим далее, что во многих из рассматриваемых в настоящей главе задачах луночные области содержат бесконечно удаленную точку (см., например, §§ 17—20). В таких случаях, как известно, постановка задачи требует формулировки некоторых условий на бесконечности. Мы не останавливаемся здесь подробно на этих условиях, так как для рассматриваемого случая плоской задачи эти вопросы хорошо изучены в литературе (см., например, [78]). Укажем только, что напряжения при $R = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$ должны иметь порядок $\frac{1}{R}$ (перемещения, как известно, могут при этом стремиться к бесконечности, но не быстрее чем $\ln R$).

В следующем параграфе на примере будет дано применение изложенного метода решения плоской задачи.

Заметим, что можно дать решение поставленной задачи и непосредственно, используя формулы (13.12) (см. работу В. В. Егаяна [28], а также §§ 17—20 данной главы).

§ 14. Сжатие симметричной круговой луночки местной нагрузкой

В качестве приложения изложенной в предыдущем параграфе общей методики рассмотрим симметричную круговую луночку ($\beta_2 = -\beta_1 = \gamma$), подвергающуюся по участкам боковой поверхности $|a| < a_0$ равномерному нормальному обжатию интенсивности q (рис. 8).

Прежде всего необходимо составить граничные значения бигармонической функции Φ и ее производной $\frac{\partial\Phi}{\partial\beta}$ по заданным контурным значениям касательного и нормального напряжений

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\beta} |_{\beta=\pm\gamma} &= \begin{cases} -q, & |\alpha| < \alpha_0, \\ 0, & |\alpha| > \alpha_0, \end{cases} \\ \tau_{\alpha\beta} |_{\beta=\pm\gamma} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14.1)$$

В дальнейшем, в силу симметрии напряженного состояния по обеим биполярным координатам, рассматривается лишь четверть всей луночной области, где $0 \leq \alpha < \infty$, $0 \leq \beta < \gamma$.

Пользуясь известными связями между значениями производных $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$ и составляющими X_{β} , Y_{β} напряжения, действующего по площадке с нормалью β ,

$$X_{\beta} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} \right) = -\frac{1}{h} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} \right),$$

$$Y_{\beta} = -\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} \right) = \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} \right),$$

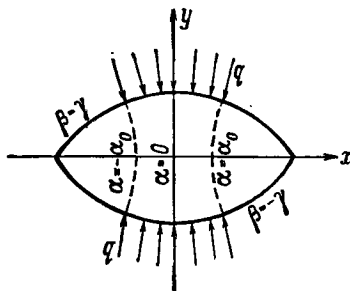


Рис. 8.

где $h = \frac{a}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}$ — коэффициент Ляме, и замечая, что в данном случае

$$X_{\beta} |_{\beta=\gamma} = \begin{cases} -qh \frac{\partial\beta}{\partial x} |_{\beta=\gamma}, & \alpha < \alpha_0, \\ 0, & \alpha > \alpha_0, \end{cases} \quad Y_{\beta} |_{\beta=\gamma} = \begin{cases} qh \frac{\partial\beta}{\partial y} |_{\beta=\gamma}, & \alpha < \alpha_0, \\ 0, & \alpha > \alpha_0, \end{cases} \quad (14.2)$$

причем

$$h^2 \frac{\partial\beta}{\partial x} = -\frac{\partial y}{\partial \alpha}, \quad h^2 \frac{\partial\beta}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial \alpha},$$

находим контурные значения величин $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$ и $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial x} \Big|_{\beta=\gamma} &= -\int_0^{\alpha} (hY_{\beta}) |_{\beta=\gamma} d\alpha = \begin{cases} -qx, & \alpha < \alpha_0 \\ -qx_0, & \alpha > \alpha_0 \end{cases} \quad (x_0 = x |_{\substack{\beta=\gamma \\ \alpha=\alpha_0}}), \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} \Big|_{\beta=\gamma} &= \int_0^{\alpha} (hX_{\beta}) |_{\beta=\gamma} d\alpha = \begin{cases} -qy, & \alpha < \alpha_0 \\ -qy_0, & \alpha > \alpha_0 \end{cases} \quad (y_0 = y |_{\substack{\beta=\gamma \\ \alpha=\alpha_0}}). \end{aligned} \right\} \quad (14.3)$$

Пользуясь формулами (14.3), вычисляем значения производных $\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}$ и $\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}$ на контуре области

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \Big|_{\beta=\gamma} &= \begin{cases} -\frac{q}{2} \frac{\partial r^2}{\partial \alpha} \Big|_{\beta=\gamma}, & \alpha < \alpha_0, \\ -q \left(x_0 \frac{\partial x}{\partial \alpha} + y_0 \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\beta=\gamma}, & \alpha > \alpha_0, \end{cases} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\gamma} &= \begin{cases} -\frac{q}{2} \frac{\partial r^2}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\gamma}, & \alpha < \alpha_0, \\ -q \left(x_0 \frac{\partial x}{\partial \beta} + y_0 \frac{\partial y}{\partial \beta} \right) \Big|_{\beta=\gamma}, & \alpha > \alpha_0. \end{cases} \end{aligned} \right\} (r = \sqrt{x^2 + y^2}) \quad (14.4)$$

Контурные значения самой функции напряжений Φ могут быть теперь получены интегрированием первого из соотношений (14.4):

$$\Phi \Big|_{\beta=\gamma} = \begin{cases} -\frac{q}{2} r^2 \Big|_{\beta=\gamma} + c, & \alpha < \alpha_0, \\ \frac{q}{2} r_0^2 \Big|_{\beta=\gamma} - q (xx_0 + yy_0) \Big|_{\beta=\gamma} + c, & \alpha > \alpha_0, \end{cases} \quad r_0 = r \Big|_{\substack{\beta=\gamma \\ \alpha=\alpha_0}} \quad (14.5)$$

причем величину постоянной интегрирования естественно выбрать таким образом, чтобы $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \Phi \Big|_{\beta=\gamma} = 0$. Так как при $\alpha \rightarrow$

∞ $x \rightarrow a$, $y \rightarrow 0$, то следует принять $c = ax_0 - \frac{r_0^2}{2}$.

В соответствии с изложенной в предыдущем параграфе общей методикой решения основной бигармонической задачи для луночной области необходимо далее составить контурные значения функций

$$\frac{\Phi}{h} \Big|_{\beta=\gamma} = \varphi(\alpha), \quad \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\Phi}{h} \right) \Big|_{\beta=\gamma} = \psi(\alpha). \quad (14.6)$$

Пользуясь формулами (14.4)–(14.6) и переходя от декартовых координат к биполярным по известным зависимостям (см. § 7)

$$\frac{x}{a} = \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}, \quad \frac{y}{a} = \frac{\sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}, \quad (14.7)$$

после некоторых выкладок находим

$$\varphi(\alpha) = \begin{cases} qa \frac{1 - e^{-\alpha} \operatorname{ch} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \gamma} + q (x_0 \cos \gamma - y_0 \sin \gamma), & \alpha < \alpha_0, \\ qx_0 e^{-\alpha} + q (x_0 \cos \gamma - y_0 \sin \gamma), & \alpha > \alpha_0, \end{cases} \quad (14.8)$$

$$\psi(\alpha) = -q (y_0 \cos \gamma + x_0 \sin \gamma). \quad (14.9)$$

Особенностью данной задачи является то обстоятельство, что значения функций $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\alpha)$ не стремятся к нулю при

$\alpha \rightarrow \infty$ и не могут быть поэтому разложены в интеграл Фурье по координате α . Однако нетрудно видеть, что за бигармоническую функцию $\Phi_1(\alpha, \beta)$, удовлетворяющую краевым условиям

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Phi_1}{h} \Big|_{\beta=\gamma} &= q(x_0 \cos \gamma - y_0 \sin \gamma), \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\Phi_1}{h} \right) \Big|_{\beta=\gamma} &= -q(y_0 \cos \gamma + x_0 \sin \gamma), \end{aligned} \right\} \quad (14.10)$$

можно принять выражение*

$$\frac{1}{h} \Phi_1 = q(x_0 \cos \beta - y_0 \sin \beta). \quad (14.11)$$

Если в соответствии с этим положить

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2, \quad (14.12)$$

то для бигармонической функции Φ_2 получим следующие граничные условия:

$$\frac{\Phi_2}{h} \Big|_{\beta=\gamma} = \begin{cases} qa \frac{1 - e^{-\alpha_0} \operatorname{ch} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \gamma}, & \alpha < \alpha_0 \\ qx_0 e^{-\alpha}, & \alpha > \alpha_0 \end{cases}, \quad \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\Phi_2}{h} \right) \Big|_{\beta=\gamma} = 0, \quad (14.13)$$

причем условия разложимости правых частей в интеграл Фурье теперь уже выполняются.

Неизвестную функцию Φ_2 удобно представить в виде интеграла (13.3) по параметру λ от частных решений бигармонического уравнения, причем в силу симметрии следует положить $C = D = 0$ и разложение вести в косинус-интеграл Фурье

$$\Phi_2 = qah \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} (A \operatorname{ch} \lambda \beta \cos \beta + B \operatorname{sh} \lambda \beta \sin \beta) \cos \lambda a d\lambda. \quad (14.14)$$

Применяя граничные условия (14.13) и вычисляя квадратуры, входящие в преобразование Фурье от правой части соотношения (14.13),

$$\begin{aligned} \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \gamma} \int_0^{\alpha_0} (1 - e^{-\alpha} \operatorname{ch} \alpha) \cos \lambda a d\alpha + \frac{x_0}{a} \int_0^{\infty} e^{-\alpha} \cos \lambda a d\alpha &= \\ &= \frac{\sin \lambda \alpha_0}{\lambda (\lambda^2 + 1) (\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \gamma)}, \end{aligned}$$

$$* \Phi_1 = qa \left(x_0 \frac{\cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} - y_0 \frac{\sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \right) = qa \left[\frac{x_0}{2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) - y_0 \frac{y}{a} \right] -$$

бигармоническая функция. Заметим, что второе слагаемое в формуле (14.11) вообще не влияет на напряженное состояние.

мы приходим к следующей системе уравнений относительно величин A и B :

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ch} \lambda \gamma \cos \gamma A + \operatorname{sh} \lambda \gamma \sin \gamma B &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \lambda \alpha_0}{\lambda (\lambda^2 + 1) (\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \gamma)}, \\ (\lambda \operatorname{sh} \lambda \gamma \cos \gamma - \operatorname{ch} \lambda \gamma \sin \gamma) A + (\lambda \operatorname{ch} \lambda \gamma \sin \gamma + \\ + \operatorname{sh} \lambda \gamma \cos \gamma) B &= 0. \end{aligned} \right\} (14.15)$$

Решение этой системы имеет вид

$$A = 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \lambda \alpha_0}{\lambda (\lambda^2 + 1) (\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \gamma)} \cdot \frac{\lambda \operatorname{ch} \lambda \gamma \sin \gamma + \operatorname{sh} \lambda \gamma \cos \gamma}{\operatorname{sh} 2\lambda \gamma + \lambda \sin 2\gamma}, \quad (14.16)$$

$$B = 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \lambda \alpha_0}{\lambda (\lambda^2 + 1) (\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \gamma)} \cdot \frac{\operatorname{ch} \lambda \gamma \sin \gamma - \lambda \operatorname{sh} \lambda \gamma \cos \gamma}{\operatorname{sh} 2\lambda \gamma + \lambda \sin 2\gamma}. \quad (14.17)$$

Таким образом, получено полное решение поставленной плоской задачи теории упругости, причем для проведения численных расчетов с помощью теоремы о вычетах необходимо воспользоваться данными табл. 10 для корней уравнения $\operatorname{sh} z + \frac{\sin 2\gamma}{2\gamma} z = 0$, полученного из определителя системы (14.15) подстановкой $2\lambda\gamma = z$.

Приводим формулу для напряжения σ_z в средней плоскости луночки

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0 = \sigma_z|_{\beta=0} &= \left[(\operatorname{ch} \alpha + 1) \frac{d^2}{d\alpha^2} - \operatorname{sh} \alpha \frac{d}{d\alpha} - 1 \right] \phi - \frac{qx_0}{a}, \\ \phi &= \frac{\Phi_2}{ah} \Big|_{\beta=0} = \frac{4q}{\pi} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \gamma} \times \\ \times \int_0^{\infty} &\frac{(\lambda \operatorname{ch} \lambda \gamma \sin \gamma + \operatorname{sh} \lambda \gamma \cos \gamma) \sin \lambda \alpha_0 \cos \lambda \alpha}{\lambda (\lambda^2 + 1) (\operatorname{sh} 2\lambda \gamma + \lambda \sin 2\gamma)} d\lambda. \end{aligned} \right\} (14.18)$$

Случай двух сосредоточенных сил величины P , приложенных в точках $\alpha = 0$, $\beta = \pm \gamma$, получается предельным переходом

$$\lim_{\alpha_0 \rightarrow 0} (\alpha_0 q) = \frac{P}{a} \cos^2 \frac{\gamma}{2}, \quad \lim_{\alpha_0 \rightarrow 0} qx_0 = \frac{P}{2}.$$

Следует заметить, что в частных случаях $\gamma = \frac{\pi}{2}$ и $\gamma = \pi$ определитель системы (14.15) становится одночленным, в связи с чем применение теоремы о вычетах не требует составления специальных таблиц, а в отдельных случаях может привести и к явным выражениям для напряжений в элементарных функциях.

Мы не будем останавливаться здесь на случае $\gamma = \frac{\pi}{2}$, так

как он соответствует случаю круговой области, для которой решение просто получается в полярных координатах.

Второй частный случай $\gamma = \pi$ дает решение первой основной задачи теории упругости для неограниченной плоскости с двумя полубесконечными разрезами. В частности, в рассмотренной выше задаче с симметричным по координате β распределением напряжений случай $\gamma = \pi$ представляет собой также и решение некоторой смешанной задачи для упругой полуплоскости. В самом деле, в силу симметрии равны нулю касательные напряжения $\tau_{\alpha\beta}$ на всей границе $y=0$ полуплоскости, а также радиальное смещение u на части границы $\beta=0$ ($|x| < a$), в то время как на остальной части ($\beta=\pi$) контура задачи нормальные напряжения σ_β . Более общее решение подобного рода смешанных задач теории упругости для полуплоскости с помощью функций

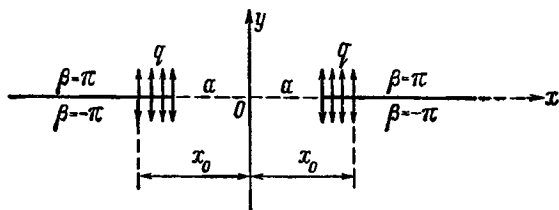


Рис. 9.

Папковича—Нейбера будет дано в следующем параграфе, однако решение одной частной задачи может быть непосредственно выведено из полученных выше результатов, на чем мы кратко и остановимся.

Пусть участки полубесконечных разрезов $a < |x| < x_0$ загружены равномерными сжимающими усилиями интенсивности q (рис. 9). Напряженное состояние в таком теле получится, очевидно, вложением данного выше решения, в котором следует положить $\gamma = \pi$ и изменить знак у множителя q , и решения, соответствующего равномерному сжатию по всей длине обоих берегов разрезов. Но бигармоническая функция, соответствующая этому последнему решению, может быть взята, например, в форме полинома $\Phi^* = \frac{q}{2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$, дающего всестороннее растяжение во всех точках. Так как в биполярных координатах $1 - \frac{r^2}{a^2} = \frac{2 \cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}$, то $\frac{\Phi^*}{h} = qa \cos \beta$, причем слагаемое такого типа удобно включить в функцию Φ_1 [см. формулу (14. 11)].

Таким образом, решение поставленной задачи имеет вид

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2, \quad (14. 19)$$

где

$$\frac{1}{h} \Phi_1 = q(a - x_0) \cos \beta, \quad \frac{x_0}{a} = \operatorname{cth} \frac{\alpha_0}{2}, \quad (14.20)$$

$$\Phi_2 = -qah \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} (A \operatorname{ch} \lambda \beta \cos \beta + B \operatorname{sh} \lambda \beta \sin \beta) \cos \lambda a d\lambda. \quad (14.21)$$

Величины A и B определяются по формулам (14.16) при $\gamma = \pi$, а именно

$$\left. \begin{aligned} A &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \lambda \alpha_0}{2\lambda (\lambda^2 + 1) (\operatorname{ch} \alpha_0 - 1) \operatorname{ch} \pi \lambda}, \\ B &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \lambda \alpha_0}{2\lambda (\lambda^2 + 1) (\operatorname{ch} \alpha_0 - 1) \operatorname{sh} \pi \lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (14.22)$$

Выражение (14.18) для напряжения σ_x в плоскости $\beta = 0$ принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0 &= q \frac{x_0 - a}{a} + \left[(\operatorname{ch} \alpha + 1) \frac{d^2}{da^2} - \operatorname{sh} \alpha \frac{d}{da} - 1 \right] \psi, \\ \psi &= \frac{q}{\pi \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha_0}{2}} \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda \alpha_0 \cos \lambda a}{\lambda (\lambda^2 + 1) \operatorname{ch} \pi \lambda} d\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (14.23)$$

Входящие в последнюю формулу квадратуры могут быть представлены через элементарные функции. В самом деле, преобразуя выражение σ_0 к виду

$$\sigma_0 = q \frac{x_0 - a}{a} + (\psi'' - \psi) + \operatorname{ch}^2 \alpha \left(\frac{\psi'}{\operatorname{ch} \alpha} \right), \quad (14.24)$$

находим следующие значения для входящих сюда квадратур:

$$\begin{aligned} \psi'' - \psi &= -\frac{q}{\pi \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha_0}{2}} \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda \alpha_0}{\lambda \operatorname{ch} \pi \lambda} \cos \lambda a d\lambda = \\ &= -\frac{q}{\pi \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha_0}{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{sh} \frac{\alpha_0}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\alpha_0}{2}}, \\ \psi' &= -\frac{q}{\pi \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha_0}{2}} \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda \alpha_0}{(\lambda^2 + 1) \operatorname{ch} \pi \lambda} \sin \lambda a d\lambda = \\ &= -\frac{q}{2\pi \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha_0}{2}} [f(\alpha - \alpha_0) - f(\alpha + \alpha_0)], \end{aligned}$$

где

$$f(x) = 2 \operatorname{ch} \frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} e^{-|x|} - 2 \operatorname{sh} |x| \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{e^{|x|/2}}.$$

§ 15. Некоторые смешанные задачи для упругой полуплоскости

В данном параграфе рассматривается упругое равновесие полуплоскости ($y \geq 0$) в том случае, когда характер граничных условий различен на различных участках граничной прямой $y=0$, а именно на отрезке $|x| < a$ краевые условия отличаются от условий на линии $|x| > a$. В таких задачах весьма удобно использовать биполярные координаты, так как область $y=0$, $|x| < a$ описывается координатной линией $\beta=0$, а область $y=0$, $|x| > a$ — линией $\beta=\pi$. Наиболее сложная задача такого рода, когда при $|x| > a$ заданы упругие перемещения, а при $|x| < a$ — напряжения (основная смешанная задача), рассматривается в § 16.

В настоящем параграфе будет дано точное решение некоторых более простых смешанных задач, предусматривающих задание на всей границе либо касательного (τ_{xy}), либо нормального (σ_y) напряжения. В такого сорта задачах удобно представлять решение уравнений теории упругости через гармонические функции Папковича—Нейбера. Приведем выражения перемещений u и v и входящих в краевые условия напряжений τ_{xy} и σ_y через две гармонические функции Φ_0 и Φ_2 (см. § 3)

$$\left. \begin{aligned} 2Gu &= -\frac{\partial \Phi_0}{\partial x} - y \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}, & 2Gv &= x\Phi_2 - \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} - y \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}, \\ \sigma_y &= \frac{\partial}{\partial y} \left[2(1-\nu)\Phi_2 - \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \right] - y \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2}, \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[(1-2\nu)\Phi_2 - \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} - y \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right], \end{aligned} \right\} \quad (15.1)$$

где G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, $\kappa = 3 - 4\nu$.

Мы начнем исследование с того случая, когда на всей границе полуплоскости задано касательное напряжение

$$\tau_{xy}|_{y=0} = \tau(x). \quad (15.2)$$

Второе граничное условие носит смешанный характер, причем при $|x| < a$ задается нормальное перемещение v (или нормальное напряжение σ_y), а при $|x| > a$ — напряжение σ_y (или перемещение v).

Рассмотрим поначалу смешанное краевое условие вида

$$v|_{\beta=0} = v_0(\alpha), \quad \sigma_y|_{\beta=\pi} = \sigma(\alpha). \quad (15.3)$$

Поставленная краевая задача может быть сведена к крайним задачам теории потенциала следующим образом: сперва

с помощью граничного условия (15.2) и формул (15.1) находим краевое условие для гармонической функции ψ

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{y=0} = \tau(x), \quad \psi = (1 - 2\nu) \Phi_2 - \frac{\partial \Phi_0}{\partial y}; \quad (15.4)$$

затем, считая функцию ψ найденной, исключая из выражений для ν и σ_y величину $\frac{\partial \Phi_0}{\partial y}$ и применяя краевые условия (15.3), находим следующие граничные условия для функции Φ_2 :

$$\left. \begin{aligned} \Phi_2 \Big|_{\beta=0} &= \frac{G\nu_0(x)}{1-\nu} - \frac{1}{2(1-\nu)} \psi \Big|_{\beta=0}, \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \Big|_{\beta=\pi} &= \sigma(\alpha) - \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{\beta=\pi}. \end{aligned} \right\} \quad (15.5)$$

Таким образом, остается определить гармоническую функцию Φ_2 , удовлетворяющую смешанным краевым условиям

$$\Phi_2 \Big|_{\beta=0} = f(\alpha), \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\pi} = g(\alpha), \quad -\infty < \alpha < \infty. \quad (15.6)$$

Предполагая, что функции f и g удовлетворяют условиям разложимости в интеграл Фурье, представляя искомую функцию в виде

$$\Phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (A \operatorname{sh} \lambda \beta + B \operatorname{ch} \lambda \beta) e^{-i\lambda \alpha} d\lambda \quad (15.7)$$

и используя граничные условия (15.6), приходим к системе двух уравнений для неизвестных величин A и B , на чем и заканчивается общее решение поставленной задачи.

В частности, при $\nu_0 = \text{const}$, $\sigma \equiv 0$ мы приходим к контактной задаче теории упругости для плоского штампа при отсутствии трения, решение которой хорошо известно и может быть получено другими способами.

В качестве другого приложения полученных результатов рассмотрим равновесие упругой плоскости, ослабленной двумя полубесконечными разрезами ($\beta = \pm \pi$).

Если напряжения, приложенные в двух противоположных точках M и N разреза, одинаковы по величине, причем нормальные напряжения имеют противоположное направление, а касательные напряжения направлены в одну и ту же сторону

$$\sigma_y \Big|_{\beta=\pi} = \sigma_y \Big|_{\beta=-\pi} = \sigma(x), \quad \tau_{xy} \Big|_{\beta=\pi} = -\tau_{xy} \Big|_{\beta=-\pi} = \tau(x), \quad (15.8)$$

т. е. напряженное состояние симметрично относительно средней плоскости $y=0$, то на линии $\beta=0$ будут отсутствовать касательные напряжения и нормальные перемещения. Таким образом, такая задача представляет собой частный случай рас-

смотренной выше общей задачи, когда $u_0(x) \equiv 0$ и функция $\tau(x) \equiv 0$ на участке $|x| < a$.

Дадим решение одной конкретной задачи такого типа, когда внешние усилия, приложенные к берегам разрезов, сводятся к двум противоположно направленным сосредоточенным силам величины P , приложенным в точках $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \pm \pi \left(b = a \operatorname{ch} \frac{\alpha_0}{2} \right)$ (рис. 10).

В этом случае $\tau(x) \equiv 0$ и, следовательно, $\psi \equiv 0$.*

Граничные условия (15. 6) для функции Φ_2 принимают в данном случае вид

$$\Phi_2 \Big|_{\beta=0} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\pi} = -\frac{a\sigma(\alpha)}{\operatorname{ch} \alpha - 1}. \quad (15. 9)$$

Представляя Φ_2 в форме

$$\Phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda) \frac{\operatorname{sh} \lambda \beta}{\operatorname{ch} \lambda \pi} e^{-i\lambda \alpha} \frac{d\lambda}{\lambda}, \quad (15. 10)$$

получаем из граничных условий

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda) e^{-i\lambda \alpha} d\lambda = -\frac{a\sigma(\alpha)}{\operatorname{ch} \alpha - 1},$$

откуда для $A(\lambda)$ находим

$$A = -\frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(\alpha)}{\operatorname{ch} \alpha - 1} e^{i\lambda \alpha} d\alpha. \quad (15. 11)$$

Для рассматриваемого случая точечной нагрузки получаем

$$A = \frac{P}{\sqrt{2\pi}} e^{i\lambda \alpha_0}, \quad (15. 12)$$

после чего выражение (15. 10) принимает вид

$$\Phi_2 = \frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \lambda \beta}{\operatorname{ch} \lambda \pi} \cos \lambda (\alpha - \alpha_0) \frac{d\lambda}{\lambda} \quad (15. 13)$$

и может быть представлено в явном виде:

$$\Phi_2 = \frac{P}{2\pi} \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\alpha - \alpha_0}{2} + \sin \frac{\beta}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\alpha - \alpha_0}{2} - \sin \frac{\beta}{2}}. \quad (15. 14)$$

* Можно было бы принять функцию ψ равной любой постоянной. Однако нетрудно проверить, что введение такой постоянной не изменяет напряженно-деформированного состояния.

Приведем простое выражение для напряжений в средней плоскости

$$\sigma_y \Big|_{\beta=0} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \Big|_{\beta=0} = \frac{P}{2\pi} \frac{\operatorname{ch}^2 \frac{a}{2}}{\operatorname{ch} \frac{a - a_0}{2}} = \frac{P}{\pi(b-x)} \frac{\sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 1}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}. \quad (15.15)$$

Аналогичным образом может быть решена смешанная задача для полуплоскости при задании на всей ее границе касательных напряжений [см. (15.2)], если на участке $\beta = 0$ ($y = 0, |x| < a$) заданы нормальные напряжения, а на линии $\beta = \pi$ ($y = 0,$

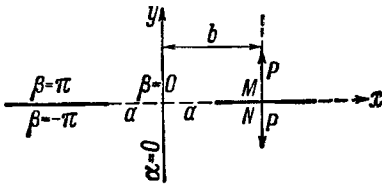


Рис. 10.

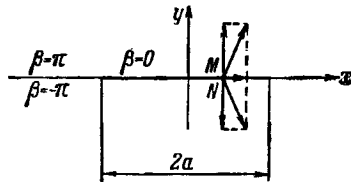


Рис. 11.

$|x| > a$) — нормальное перемещение, т. е. если условия (15.3) заменяются следующими:

$$\sigma_y \Big|_{\beta=0} = \sigma(x), \quad v \Big|_{\beta=\pi} = v_0(x). \quad (15.16)$$

Не останавливаясь на общем решении этой задачи, заметим только, что одним из интересных приложений такого решения является задача о распределении напряжений в упругой плоскости, ослабленной прямолинейной щелью конечной длины. Если внешние усилия в двух противоположных точках M и N разреза имеют одинаковую величину и направления, указанные на рис. 11, то в силу симметрии $v \Big|_{\beta=\pm\pi} = \tau_{xy} \Big|_{\beta=\pm\pi} = 0$, что является частным случаем вышеуказанной общей задачи.

В заключение данного параграфа остановимся коротко на тех смешанных задачах теории упругости для полуплоскости, в которых на всей границе заданы нормальные напряжения

$$\sigma_y \Big|_{y=0} = \sigma(x). \quad (15.17)$$

При этих условиях формулы (15.1) приводят нас к граничным условиям второго рода для гармонической функции ω

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} \Big|_{y=0} = \sigma(x), \quad \omega = 2(1 - \nu)\Phi_2 - \frac{\partial \Phi_0}{\partial y}, \quad (15.18)$$

так что последняя может считаться найденной в результате решения задачи Неймана для полуплоскости.

При дальнейшем решении смешанных задач такого типа могут представиться две различные возможности. Первая из них соответствует следующим краевым условиям:

$$u|_{\beta=0} = u_0(\alpha), \quad \tau_{xy}|_{\beta=\pi} = \tau(\alpha), \quad (15.19)$$

которые с учетом (15.1) и (15.18) могут быть преобразованы в условия для гармонической функции Φ_2

$$\left. \begin{aligned} 2(1-\nu) \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \Big|_{\beta=0} &= \left[2G \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \right]_{\beta=0}, \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \Big|_{\beta=\pi} &= \frac{\partial \omega}{\partial x} \Big|_{\beta=\pi} - \tau. \end{aligned} \right\} \quad (15.20)$$

Поскольку условия (15.20) по существу эквивалентны условиям (15.16), постольку функция Φ_2 может считаться найденной в результате решения соответствующей краевой задачи методом разложения в интеграл Фурье типа (15.7). На этом мы и заканчиваем общее исследование данной задачи.

Одним из приложений полученного решения может явиться задача о концентрации напряжений в неограниченной плоскости, содержащей два полубесконечных разреза («внешние» щели) в случае антисимметричного относительно средней плоскости напряженного состояния:

$$\sigma_y|_{\beta=\pi} = -\sigma_y|_{\beta=-\pi} = \sigma, \quad \tau_{xy}|_{\beta=\pi} = \tau_{xy}|_{\beta=-\pi} = \tau. \quad (15.21)$$

При этом

$$\sigma_y|_{\beta=0} = 0, \quad u|_{\beta=0} = 0, \quad (15.22)$$

так что условия (15.21), (15.22) являются частным случаем поставленных выше общих граничных условий (15.17)—(15.19) при $u_0 \equiv 0$, $\sigma|_{\beta=0} = 0$.

Любопытно отметить, что если внешних касательных усилий на разрезе не приложено ($\tau \equiv 0$), то решение рассматриваемой задачи просто совпадает с решением задачи о равновесии полуплоскости, к части границы которой ($|x| > a$) приложены заданные нормальные усилия (σ). В самом деле, при $u_0 \equiv 0$, $\tau \equiv 0$ гармонические функции Φ_2 и ω удовлетворяют однородным граничным условиям (15.20)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} [2(1-\nu)\Phi_2 - \omega] \Big|_{\beta=0} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} (\omega - \Phi_2) \Big|_{\beta=\pi} &= 0 \quad \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \Big|_{\beta=0} = 0 \right) \end{aligned} \right\} \quad (15.23)$$

и могут поэтому отличаться лишь на постоянную величину: $\omega - \Phi_2 = C$. Но это влечет за собой равенство $\sigma_{xy}|_{\beta=0} = 0$, т. е. действительно касательные напряжения отсутствуют на всей границе полуплоскости.

Наконец, наряду с рассмотренным случаем может встретиться и такая смешанная задача, когда, кроме граничного условия (15. 17), заданы радиальные смещения на участке $|x| > a$ и касательные напряжения на остальной части границы ($|x| < a$), т. е. когда условия (15. 19) заменяются следующими:

$$\tau_{xy}|_{\beta=0} = \tau, \quad u|_{\beta=\pi} = u_x. \quad (15. 24)$$

Общее решение задачи проводится совершенно аналогично предыдущему случаю, и, не останавливаясь на подробностях, заметим лишь, что частным случаем ($u_x \equiv 0$) такой задачи является задача о равновесии плоскости с внутренней щелью (рис. 11) в случае антисимметричного относительно средней плоскости напряженного состояния.

§ 16. Плоская контактная задача при наличии сцепления

Перейдем теперь к так называемой основной смешанной задаче теории упругости для полуплоскости в том случае, когда на отрезке $|x| < a$ ее границы ($y=0$) заданы упругие перемещения u и v , а на остальной части ($|x| > a$) — напряжения σ_y и τ_{xy} :

$$u|_{\beta=0} = u_0(\alpha), \quad v|_{\beta=0} = v_0(\alpha), \quad \sigma_y|_{\beta=\pi} = \sigma(\alpha), \quad \tau_{xy}|_{\beta=\pi} = \tau(\alpha). \quad (16. 1)$$

В частности, для контактной задачи о вдавливании в упругую полуплоскость жесткого штампа при наличии сцепления будем иметь

$$u_0 = 0, \quad v_0 = \text{const}, \quad \sigma = \tau = 0.$$

Решение основной смешанной задачи является более сложным, чем смешанных задач других типов, рассмотренных в предыдущих параграфах, ибо она не может быть сведена к ряду отдельных краевых задач для гармонических функций. В самом деле, подставляя в граничные условия (16. 1) выражения (15. 1) перемещений и напряжений через две гармонические функции (Φ_0 и Φ_2) Папковича—Нейбера, мы приходим к некоторой краевой задаче для полуплоскости с неразделенными граничными условиями такого вида:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \Big|_{\beta=0} &= -2Gu_0, & (x\Phi_2 - \frac{\partial \Phi_0}{\partial y}) \Big|_{\beta=0} &= 2Gv_0, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[2(1-\nu)\Phi_2 - \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \right] \Big|_{\beta=\pi} &= \sigma, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[(1-2\nu)\Phi_2 - \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \right] \Big|_{\beta=\pi} &= \tau. \end{aligned} \right\} \quad (16. 2)$$

Рассматриваемая смешанная краевая задача допускает точное решение в биполярных координатах, если представить искомые функции в виде интегралов Фурье

$$\Phi_{0,2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} (A_{0,2} \operatorname{ch} \lambda \beta + B_{0,2} \operatorname{sh} \lambda \beta) e^{-i\lambda \alpha} d\lambda. \quad (16.3)$$

Подставляя (16.3) в (16.2),* мы приходим к системе четырех линейных алгебраических уравнений для величин $A_{0,2}$, $B_{0,2}$, правые части которых будут содержать преобразования Фурье от заданных функций (разумеется, следует предположить, что эти преобразования существуют).

Не выписывая решения задачи в общем виде, обратимся непосредственно к решению соответствующей контактной задачи со сцеплением, причем начнем со случая вдавливания штампа осевой силой. Как уже указывалось выше, граничные условия будут при этом иметь вид **

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \alpha} \Big|_{\beta=0} = 0, \quad (x\Phi_2 - \Phi_3)_{\beta=0} = \text{const}, \\ \frac{\partial}{\partial \beta} [2(1-\nu)\Phi_2 - \Phi_3] \Big|_{\beta=\pi} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} [(1-2\nu)\Phi_2 - \Phi_3] \Big|_{\beta=\pi} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (16.4)$$

где введена новая гармоническая функция $\Phi_3 = \frac{\partial \Phi_0}{\partial y}$.

В связи с тем, что постоянная величина не может быть разложена в интеграл Фурье, представим искомые функции в виде суммы

$$\Phi_{2,3} = C_{2,3} \Phi^* - \varphi_{2,3}, \quad (16.5)$$

где гармоническая функция Φ^* удовлетворяет условиям

$$\Phi^* \Big|_{\beta=0} = \text{const}, \quad \frac{\partial \Phi^*}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\pi} = 0 \quad (16.6)$$

* При этом следует перейти от производных по x и y к производным по α и β , пользуясь очевидными соотношениями:

$$\frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\beta=0} = \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \Big|_{\beta=0}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{\beta=0} = \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\beta=\pi} = -\frac{1}{h} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \Big|_{\beta=\pi},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \Big|_{\beta=\pi} = -\frac{1}{h} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\pi}, \quad h = \frac{a}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}$$

** Так как задача плоская, то значение входящей во второе равенство постоянной несущественно, ибо фактически задается не значение осевого смещения, а величина осевой силы.

и является, следовательно, логарифмическим потенциалом бесконечной полосы ширины $2a$, выражение которого в биполярных координатах имеет вид

$$\Phi^* = \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{a}{2} + \sin \frac{\beta}{2}}{\operatorname{ch} \frac{a}{2} - \sin \frac{\beta}{2}} + \text{const.} \quad (16.7)$$

Принимая, что постоянные C_2 и C_3 связаны соотношением $(1 - 2\nu) C_2 - C_3 = 0$ и преобразуя первое условие (16.4) $\left. \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \right|_{\beta=0} = 0$ дифференцированием по x к виду

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2} \right|_{\beta=0} = \left. \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right|_{\beta=0} = 0, *$$

находим следующие граничные условия для гармонических функций φ_2 и φ_3 :

$$\left. \begin{aligned} \left. \frac{\partial \varphi_3}{\partial \beta} \right|_{\beta=0} = \frac{C_3}{\operatorname{ch} \frac{a}{2}}, \quad (\kappa \varphi_2 - \varphi_3)_{\beta=0} = 0, \\ \left. \frac{\partial}{\partial \beta} [2(1 - \nu) \varphi_2 - \varphi_3] \right|_{\beta=\pi} = 0, \quad \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} [(1 - 2\nu) \varphi_2 - \varphi_3] \right|_{\beta=\pi} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (16.8)$$

причем единственная не равная тождественно нулю правая часть в этих условиях удовлетворяет разложимости в интеграл Фурье.

В силу симметрии задачи по переменной α , положим

$$\varphi_{2,3} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} [A_{2,3} \operatorname{ch} \lambda \beta + B_{2,3} \operatorname{sh} \lambda \beta] \cos \lambda a d\lambda. \quad (16.9)$$

Подстановка интегралов (16.9) в граничные условия (16.8) с учетом значения косинус-преобразования Фурье от функции $\frac{1}{\operatorname{ch} \frac{a}{2}}$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda a}{\operatorname{ch} \frac{a}{2}} d\lambda = \frac{\sqrt{2\pi}}{\operatorname{ch} \pi \lambda}$$

* Последнее условие эквивалентно исходному, ибо аддитивная постоянная, могущая при этом появиться в граничном значении u_0 перемещения u , равна нулю в силу того, что это перемещение есть нечетная функция переменной α (или x).

и связей $B_3 = \frac{\sqrt{2\pi} C_3}{\lambda \operatorname{ch} \pi \lambda}$, $\kappa A_2 = A_3$ приводит нас к следующей системе уравнений для A_2 и B_2 :

$$\left. \begin{aligned} -2(1-\nu) A_2 \operatorname{ch} \pi \lambda + (1-2\nu) B_2 \operatorname{sh} \pi \lambda &= \sqrt{2\pi} C_3 \frac{\operatorname{th} \pi \lambda}{\lambda}, \\ -(1-2\nu) A_2 \operatorname{sh} \pi \lambda + 2(1-\nu) B_2 \operatorname{ch} \pi \lambda &= \sqrt{2\pi} \frac{C_3}{\lambda} \end{aligned} \right\} \quad (16.10)$$

со знакопостоянным определителем, равным $-\kappa \left[\operatorname{sh}^2 \pi \lambda + \frac{4(1-\nu^2)}{\kappa} \right]$.

Решение системы (16.10) может быть представлено следующими формулами:

$$\begin{aligned} A_2 &= -\frac{2\sqrt{2\pi} C_3 \operatorname{sh} \pi \lambda}{\lambda \kappa D(\lambda)}, \\ A_3 &= \frac{2\sqrt{2\pi} C_3}{\lambda \kappa \operatorname{ch} \pi \lambda D(\lambda)} [2(1-\nu) \operatorname{ch}^2 \pi \lambda - (1-2\nu) \operatorname{sh}^2 \pi \lambda], \end{aligned} \quad (16.11)$$

где введены обозначения

$$\left. \begin{aligned} D(\lambda) &= \operatorname{ch} 2\pi \lambda + \operatorname{ch} 2\pi \vartheta, \\ \operatorname{ch} \pi \vartheta &= \frac{2(1-\nu)}{\sqrt{\kappa}}, \quad \vartheta = \frac{\ln \kappa}{2\pi} \quad (\kappa = 3 - 4\nu). \end{aligned} \right\} \quad (16.12)$$

Для полного решения задачи необходимо еще определить постоянную C_3 из условия статики

$$\int_{-a}^a \sigma_y|_{\beta=0} dx = -P. \quad (16.13)$$

Вычисляем значения нормальных напряжений под штампом

$$\begin{aligned} \sigma_y|_{\beta=0} &= \frac{\partial}{\partial y} [2(1-\nu) \Phi_2 - \Phi_3] \Big|_{\beta=0} = [2(1-\nu) C_2 - C_3] \frac{1}{h} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0} + \\ &+ \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} [2(1-\nu) \varphi_2 - \varphi_3] \Big|_{\beta=0} = -\frac{2C_3 \operatorname{ch} \frac{a}{2}}{a(1-2\nu)} - \\ &- 4C_3 \frac{1-2\nu}{\kappa} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh}^2 \pi \lambda}{\operatorname{ch} 2\pi \lambda + \operatorname{ch} 2\pi \vartheta} \cdot \frac{\cos \lambda a}{\operatorname{ch} \pi \lambda} d\lambda. \end{aligned}$$

Пользуясь значением интеграла

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \pi \lambda \cos \lambda a d\lambda}{\operatorname{ch} 2\pi \lambda + \operatorname{ch} 2\pi \vartheta} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\cos a\vartheta}{\operatorname{ch} \pi \vartheta \operatorname{ch} \frac{a}{2}},$$

находим после выкладок

$$\sigma_y \Big|_{\beta=0} = -\frac{4(1-\nu)C_3}{a(1-2\nu)\sqrt{x}} \operatorname{ch} \frac{a}{2} \cos \alpha \vartheta. \quad (16.14)$$

Подставляя (16.14) в (16.13) и вычисляя квадратуру, находим для постоянной C_3 значение

$$C_3 = \frac{1-2\nu}{2\pi} P. \quad (16.15)$$

Подсчитаем еще касательные напряжения в области контакта

$$\begin{aligned} \tau_{xy} \Big|_{\beta=0} &= \frac{\partial}{\partial x} [(1-2\nu)\varphi_2 - \varphi_3] \Big|_{\beta=0} = \\ &= -\frac{\operatorname{ch} a + 1}{a} \int_0^{\infty} [(1-2\nu)A_2 - A_3] \lambda \sin \lambda \alpha d\lambda = \\ &= -8 \frac{1-\nu}{\alpha a} C_3 (\operatorname{ch} a + 1) \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \pi \lambda \sin \lambda \alpha d\lambda}{\operatorname{ch} 2\pi \lambda + \operatorname{ch} 2\pi \vartheta}. \end{aligned}$$

Использование формулы

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \pi \lambda \sin \lambda \alpha d\lambda}{\operatorname{ch} 2\pi \lambda + \operatorname{ch} 2\pi \vartheta} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sin \alpha \vartheta}{\operatorname{sh} \pi \vartheta \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2}}$$

приводит к следующему выражению:

$$\tau_{xy} \Big|_{\beta=0} = -\frac{4(1-\nu)C_3}{a(1-2\nu)\sqrt{x}} \operatorname{ch} \frac{a}{2} \sin \alpha \vartheta. \quad (16.16)$$

Таким образом, напряжения под штампом могут быть представлены в виде единой формулы такого вида (ср. [78, стр. 433]):

$$-(\sigma_y + i\tau_{xy})_{\beta=0} = \frac{2(1-\nu)P}{\pi a \sqrt{3-4\nu}} \operatorname{ch} \frac{a}{2} e^{\frac{i\alpha}{2} \ln(3-4\nu)}. \quad (16.17)$$

Обратимся теперь к более общему случаю загрузки штампа, когда точка приложения внешней силы смещена относительно оси. Так как воздействие осевой силы уже изучено, то достаточно рассмотреть контактную задачу для штампа, нагруженного опрокидывающим моментом величины M (рис. 12).

При наличии сцепления в области контакта $\beta=0$ осевое перемещение равно γ_x , а горизонтальное перемещение отсут-

ствуется, так что граничные условия (16.4) для рассматриваемого случая с учетом равенства $x|_{\beta=0} = a \operatorname{th} \frac{\alpha}{2}$ заменяются следующими:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_3}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0} = 0, \quad [(3 - 4\nu) \Phi_2 - \Phi_3]_{\beta=0} = 2G\gamma a \operatorname{th} \frac{\alpha}{2}, \\ \frac{\partial}{\partial \beta} [2(1 - \nu) \Phi_2 - \Phi_3] \Big|_{\beta=\pi} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} [(1 - 2\nu) \Phi_2 - \Phi_3] \Big|_{\beta=\pi} = 0. \end{aligned} \right\} (16.18)$$

Так как данная задача антисимметрична по переменной α , то гармонические функции Φ_2 и Φ_3 следует выбирать в форме

$$\begin{aligned} \Phi_{2,3} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} (A_{2,3} \operatorname{ch} \lambda \beta + \\ + B_{2,3} \operatorname{sh} \lambda \beta) \sin \lambda \alpha d\lambda. \end{aligned} \quad (16.19)$$

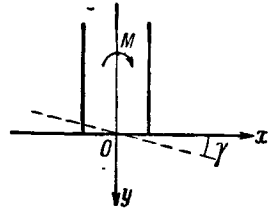


Рис. 12.

Пользуясь легко проверяемым интегральным разложением

$$\operatorname{th} \frac{\alpha}{2} = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda \alpha}{\operatorname{sh} \pi \lambda} d\lambda,$$

мы приходим к следующей системе уравнений, аналогичной (16.10):

$$\left. \begin{aligned} 2(1 - \nu) A_2 \operatorname{ch} \pi \lambda - (1 - 2\nu) B_2 \operatorname{sh} \pi \lambda = N \operatorname{ch} \pi \lambda, \\ (1 - 2\nu) A_2 \operatorname{sh} \pi \lambda - 2(1 - \nu) B_2 \operatorname{ch} \pi \lambda = N \operatorname{sh} \pi \lambda, \end{aligned} \right\} (16.20)$$

где введено обозначение

$$N = \frac{2 \sqrt{2\pi} G \gamma a}{\operatorname{sh} \pi \lambda}.$$

Что касается величины A_3 , то она выражается через A_2 формулой $A_3 = \kappa A_2 + N$, в то время как величина B_3 вообще равна нулю.

Остается вычислить нормальное напряжение в области контакта и воспользоваться условием статики

$$\int_{-a}^a \sigma_y|_{\beta=0} x dx = -M \quad (16.21)$$

для определения величины неизвестного угла γ через заданный момент M : Имеем

$$\begin{aligned} \sigma_y \Big|_{\beta=0} &= \frac{2(1-\nu)}{h} \cdot \frac{\partial \Phi_2}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0} = \frac{2(1-\nu)}{a} (\operatorname{ch} \alpha + 1) \int_0^{\infty} \lambda B_2 \sin \lambda a d\lambda = \\ &= -\frac{16G\gamma(1-\nu)}{x} (\operatorname{ch} \alpha + 1) \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \pi \lambda \cos \lambda a d\lambda}{\operatorname{ch} 2\pi \lambda + \operatorname{ch} 2\pi \vartheta} = \\ &= -\frac{2G\gamma}{\sqrt{x}} \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} \left(2\vartheta \sin \alpha \vartheta + \operatorname{th} \frac{\alpha}{2} \cos \alpha \vartheta \right). \end{aligned}$$

Вычисление квадратур в соотношении (16.21) приводит к следующей связи угла γ и момента M :

$$\gamma = \frac{M(1+x)}{2\pi a^2 G(1+4\vartheta^2)}. \quad (16.22)$$

на чем и заканчивается решение данной задачи.

В заключение вычислим еще касательные напряжения под штампом

$$\begin{aligned} \tau_{xy} \Big|_{\beta=0} &= \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} [(1-2\nu)\Phi_2 - \Phi_3] \Big|_{\beta=0} = \\ &= 8G\gamma \frac{1-2\nu}{x} (\operatorname{ch} \alpha + 1) \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \pi \lambda \sin \lambda a d\lambda}{\operatorname{ch} 2\pi \lambda + \operatorname{ch} 2\pi \vartheta} = \\ &= \frac{2G\gamma}{\sqrt{x}} \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} \left(2\vartheta \cos \alpha \vartheta - \operatorname{th} \frac{\alpha}{2} \sin \alpha \vartheta \right). \end{aligned}$$

Итак, напряжения в области контакта выражаются следующей формулой:*

$$(\sigma_y + i\tau_{xy}) = \frac{2G\gamma}{\sqrt{x}} \left(2i\vartheta - \operatorname{th} \frac{\alpha}{2} \right) \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} e^{i\vartheta \alpha}, \quad \vartheta = \frac{\ln(3-4\nu)}{2\pi}. \quad (16.23)$$

§ 17. Плоская задача для внешности круговой луночки

В предыдущих параграфах настоящей главы исследовались некоторые плоские задачи теории упругости для внутренности круговой луночки. Наряду с этим значительный интерес представляют соответствующие внешние задачи, т. е. задачи о равновесии неограниченного тела, содержащего отверстие, контур которого образован дугами двух пересекающихся окружностей. В частности, существенно установить степень концентрации напряжений в неограниченной плоскости, ослабленной отверстием луночного типа.

* Ср. [78, стр. 435].

Внешние задачи для луночной области удобно решать в несколько видоизмененной системе биполярных координат: именно, вместо основной зависимости (7.1) введем координаты (α, β) с помощью соотношения

$$x + iy = ai \operatorname{cth} \frac{\alpha + i\beta}{2}, \quad 0 \leq \alpha < \infty, \quad -\pi \leq \beta \leq \pi. \quad (17.1)$$

При таком выборе координатной системы линия разреза $x=0$, $|y| < a$, на берегах которого переменная β принимает значения $\beta = \pm\pi$, не попадает в рассматриваемую область (рис. 13).

Связи прямоугольных координат с биполярными даются такими формулами:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{a} &= \frac{\sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \\ \frac{y}{a} &= \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}. \end{aligned} \right\} \quad (17.2)$$

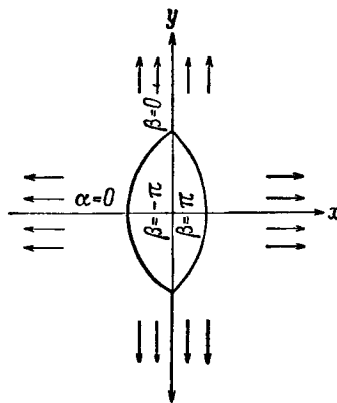


Рис. 13.

Основные зависимости (13.12) для плоской задачи теории упругости в данном случае несколько видоизменяются и принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} a\sigma_x &= \left[(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \operatorname{sh} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \operatorname{ch} \alpha \right] \left(\frac{\Phi}{h} \right), \\ a\sigma_y &= \left[(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \operatorname{sh} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \cos \beta \right] \left(\frac{\Phi}{h} \right), \\ a\tau_{\alpha\beta} &= -(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \frac{\partial}{\partial \alpha \partial \beta} \left(\frac{\Phi}{h} \right), \quad h = \frac{a}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}. \end{aligned} \right\} \quad (17.3)$$

Что же касается бигармонического уравнения (13.2), то оно не меняет своей формы, и, следовательно, общее выражение для бигармонической функции Φ имеет вид

$$\Phi = \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [A \operatorname{ch} \lambda \beta \cos \beta + B \operatorname{sh} \lambda \beta \sin \beta + C \operatorname{sh} \lambda \beta \cos \beta + D \operatorname{ch} \lambda \beta \sin \beta] e^{-i\lambda \alpha} d\lambda. \quad (17.4)$$

Таким образом, если требуется решить основную бигармоническую задачу, когда заданы значения величин Φ и $\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}$ на контуре отверстия, то следует разложить значения $\frac{\Phi}{h}$ и $\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\Phi}{h} \right)$

при $\beta = \beta_1$ и $\beta = \beta_2$ [см. (13.4)] в интегралы Фурье по переменной α и составить систему четырех линейных алгебраических уравнений для неизвестных величин A, B, C, D .

Дополнительная трудность, возникающая при решении внешней задачи, состоит в том, что напряжения, соответствующие функции (17.4), на бесконечности ($\alpha = \beta = 0$) могут не стремиться к нулю, и в тех задачах, в которых напряженное состояние должно исчезать на бесконечности, бигармоническую функцию (17.4) следует дополнять слагаемыми типа $A_1 x^2 + B_1 y^2 + C_1 \ln \frac{r}{a}$, причем коэффициенты A_1, B_1 и C_1 подбираются так, чтобы удовлетворить условиям на бесконечности. Соответствующая методика в следующем параграфе будет продемонстрирована на частной задаче.

§ 18. Влияние луночного отверстия на распределение напряжений в растянутой плоскости

Рассмотрим равновесие упругой плоскости, содержащей луночное отверстие и подвергающейся равномерному растяжению на бесконечности. При этом могут представиться случаи всестороннего или одностороннего растяжения, причем в последнем случае растяжение в произвольном направлении может быть разложено на два направления по осям прямоугольных координат (рис. 13).

Во всех трех случаях бигармоническую функцию напряжений естественно представить в виде суммы

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1, \quad (18.1)$$

где Φ_0 соответствует заданному напряженному состоянию на бесконечности, а бигармоническая функция Φ_1 должна на бесконечности стремиться к нулю и предназначена для снятия напряжений на контуре отверстия.

Нетрудно видеть, что, придавая различные значения параметрам b и c в выражении

$$\Phi_0 = pa^2 \left[\frac{b}{2} \left(\frac{r^2}{a^2} - 1 \right) + c \frac{x^2}{a^2} \right], \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad (18.2)$$

можно получить функцию напряжений для всех трех указанных случаев. В самом деле, при $b=0, c=\frac{1}{2}$ имеем $\Phi_0 = \frac{px^2}{2}$ (одностороннее растяжение интенсивности p в направлении оси x); при $b=1, c=-\frac{1}{2}$ $\Phi_0 = p \left(\frac{y^2}{2} - a^2 \right)$, что соответствует рас-

тяжению по оси x ; наконец, при $b=1$, $c=0$ получается $\Phi_0 = \frac{p}{2}(r^2 - a^2)^*$ — случай всестороннего растяжения.

Записав формулу (18.2) в биполярных координатах

$$\frac{\Phi_0}{pah} = b \cos \beta + \frac{c \sin^2 \beta}{ch \alpha - \cos \beta}, \quad (18.3)$$

заметим прежде всего, что в данной задаче представить функцию $\frac{\Phi_1}{h}$ в виде интеграла Фурье (17.4) невозможно, так как последний на бесконечности ($\alpha, \beta \rightarrow 0$) стремится к величине $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda) d\lambda$, не равной, вообще говоря, нулю. Добавление

к выражению (17.4) членов типа $\frac{1}{h}(Mx^2 + Ny^2)$ позволяет так подобрать величины M и N , чтобы условия на бесконечности были выполнены, но при этом возникает другая трудность, связанная с тем, что правые части граничных условий (13.4) не будут стремиться к нулю при $|\alpha| \rightarrow \infty$ и не будут поэтому разлагаться в интеграл Фурье по переменной α . В соответствии со сказанным мы, следуя идее Линга [185], используем еще гармоническую функцию $\ln r$ и положим

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_1}{pah} = & (2k - b) \cos \beta + k (ch \alpha - \cos \beta) \ln \frac{a^2}{r^2} + \\ & + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [A \cos \beta \operatorname{ch} \lambda \beta + B \sin \beta \operatorname{sh} \lambda \beta + \\ & + C \cos \beta \operatorname{sh} \lambda \beta + D \sin \beta \operatorname{ch} \lambda \beta] e^{-\lambda \alpha} d\lambda, \end{aligned} \quad (18.4)$$

где постоянная k после решения задачи должна быть найдена из условия на бесконечности

$$k = \frac{1}{2} \left[b - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda) d\lambda \right]. \quad (18.5)$$

Нетрудно видеть, что так как функция

$$2 \cos \beta + (ch \alpha - \cos \beta) \ln \frac{ch \alpha - \cos \beta}{ch \alpha + \cos \beta}$$

* Постоянное слагаемое, возникающее во втором и третьем случаях, обеспечивает стремление к нулю функции Φ_0 при $|\alpha| \rightarrow \infty$, что необходимо для дальнейшего ее разложения в интеграл Фурье.

разложима в интеграл Фурье в промежутке $-\infty < \alpha < \infty$, то и правые части краевых условий (13.4) допускают соответствующие разложения.

Таким образом, задача состоит в определении величин A , B , C , D из граничных условий, требующих, чтобы полные напряжения σ_β и $\tau_{\alpha\beta}$ были равны нулю на обоих дугах $\beta = \beta_1$ и $\beta = \beta_2$. Из рассмотрения формул (17.3) ясно, что для выполнения этих условий достаточно принять

$$\frac{\Phi}{h} \Big|_{\beta=\beta_{1,2}} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\Phi}{h} \right) \Big|_{\beta=\beta_{1,2}} = 0, \quad (18.6)$$

после чего задача сводится к решению системы четырех линейных алгебраических уравнений с неизвестными A , B , C , D , в правых частях которой будут стоять преобразования Фурье от известных функций

$$2 \cos \beta + (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \ln \frac{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}, \quad \frac{\sin^2 \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta},$$

а также от их производных по переменной β .

Не приводя довольно громоздкого решения этой задачи в общем виде, остановимся более детально на случае симметричной круговой луночки ($\beta_2 = -\beta_1 = \gamma$). В силу симметрии задачи по обеим координатам имеем

$$\begin{aligned} \frac{\Phi}{\rho a h} = & c \frac{\sin^2 \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} + k \left[2 \cos \beta + (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \ln \frac{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \right] + \\ & + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty (A \cos \beta \operatorname{ch} \lambda \beta + B \sin \beta \operatorname{sh} \lambda \beta) \cos \lambda a d\lambda, \end{aligned} \quad (18.7)$$

причем величины A и B должны быть найдены из граничных условий

$$\frac{\Phi}{h} \Big|_{\beta=\gamma} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\Phi}{h} \right) \Big|_{\beta=\gamma} = 0, \quad (18.8)$$

а постоянная k — из условия на бесконечности:

$$k = \frac{1}{2} \left[b - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty A(\lambda) d\lambda \right]. \quad (18.9)$$

Подстановка (18. 7) в (18. 8) приводит к равенствам

$$\left. \begin{aligned}
 & A \operatorname{ch} \lambda \gamma \cos \gamma + B \operatorname{sh} \lambda \gamma \sin \gamma = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} c \sin^2 \gamma \times \\
 & \times \int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \gamma} d\alpha - \sqrt{\frac{2}{\pi}} k \int_0^{\infty} \left[2 \cos \gamma + (\operatorname{ch} \alpha - \cos \gamma) \times \right. \\
 & \quad \left. \times \ln \frac{\operatorname{ch} \alpha - \cos \gamma}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \gamma} \right] \cos \lambda \alpha d\alpha, \\
 & A(\lambda \operatorname{sh} \lambda \gamma \cos \gamma - \operatorname{ch} \lambda \gamma \sin \gamma) + B(\lambda \operatorname{ch} \lambda \gamma \sin \gamma + \operatorname{sh} \lambda \gamma \cos \gamma) = \\
 & = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} c \sin \gamma \int_0^{\infty} \left[\frac{2 \cos \gamma}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \gamma} - \frac{\sin^2 \gamma}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \gamma)^2} \right] \cos \lambda \alpha d\alpha - \\
 & - \sqrt{\frac{2}{\pi}} k \sin \gamma \int_0^{\infty} \left[\ln \frac{\operatorname{ch} \alpha - \cos \gamma}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \gamma} - \frac{2 \cos \gamma}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \gamma} \right] \cos \lambda \alpha d\alpha.
 \end{aligned} \right\} (18. 10)$$

Воспользовавшись значениями квадратур ($0 < \gamma < \pi$)

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \gamma} d\alpha &= \frac{\pi}{\operatorname{sh} \pi \lambda} \cdot \frac{\operatorname{sh} \lambda (\pi - \gamma)}{\sin \gamma}, \\
 \int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda \alpha d\alpha}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \gamma)^2} &= \frac{\pi}{\operatorname{sh} \pi \lambda} \cdot \frac{\lambda \sin \gamma \operatorname{ch} \lambda (\pi - \gamma) + \cos \gamma \operatorname{sh} \lambda (\pi - \gamma)}{\sin^3 \gamma}, \\
 \int_0^{\infty} \ln \frac{\operatorname{ch} \alpha - \cos \gamma}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \gamma} \cos \lambda \alpha d\alpha &= -\frac{\pi \operatorname{sh} \lambda \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right)}{\lambda \operatorname{ch} \frac{\pi \lambda}{2}}, \\
 \int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda \alpha}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \gamma} d\alpha &= \frac{\pi}{\operatorname{sh} \pi \lambda} \cdot \frac{\operatorname{sh} \lambda \gamma}{\sin \gamma}, \\
 \int_0^{\infty} \left[2 \cos \gamma + (\operatorname{ch} \alpha - \cos \gamma) \ln \frac{\operatorname{ch} \alpha - \cos \gamma}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \gamma} \right] \cos \lambda \alpha d\alpha &= \\
 &= \frac{2\pi}{(\lambda^2 + 1) \operatorname{sh} \pi \lambda} \left[\operatorname{sh} \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right) \lambda \times \right. \\
 & \left. \times \left(\sin \gamma \operatorname{ch} \frac{\pi \lambda}{2} + \frac{1}{\lambda} \cos \gamma \operatorname{sh} \frac{\pi \lambda}{2} \right) - \lambda \cos \gamma \operatorname{ch} \lambda \gamma \right],
 \end{aligned}$$

после некоторых выкладок получаем следующую систему уравнений для A и B :

$$\left. \begin{aligned}
 A \operatorname{ch} \lambda \gamma \cos \gamma + B \operatorname{sh} \lambda \gamma \sin \gamma &= -c \sqrt{2\pi} \frac{\operatorname{sh} \lambda (\pi - \gamma)}{\operatorname{sh} \pi \lambda} + \\
 &+ \frac{2k \sqrt{2\pi}}{(\lambda^2 + 1) \operatorname{sh} \pi \lambda} \left[\lambda \cos \gamma \operatorname{ch} \lambda \gamma - \right. \\
 &\left. - \operatorname{sh} \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right) \lambda \left(\sin \gamma \operatorname{ch} \frac{\pi \lambda}{2} + \frac{1}{\lambda} \cos \gamma \operatorname{ch} \frac{\pi \lambda}{2} \right) \right], \\
 A(\lambda \operatorname{sh} \lambda \gamma \cos \gamma - \operatorname{ch} \lambda \gamma \sin \gamma) + B(\lambda \operatorname{ch} \lambda \gamma \sin \gamma + \operatorname{sh} \lambda \gamma \cos \gamma) &= \\
 &= \frac{c \sqrt{2\pi}}{\operatorname{sh} \pi \lambda} [\lambda \sin \gamma \operatorname{ch} \lambda (\pi - \gamma) - \cos \gamma \operatorname{sh} \lambda (\pi - \gamma)] + \\
 &+ \frac{2k \sqrt{2\pi}}{\lambda \operatorname{sh} \pi \lambda} \left[\sin \gamma \operatorname{sh} \frac{\pi \lambda}{2} \operatorname{sh} \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right) \lambda + \lambda \cos \gamma \operatorname{sh} \lambda \gamma \right].
 \end{aligned} \right\} (18.11)$$

Приводим окончательные выражения для величин A и B , полученные в результате решения системы (18.11),

$$\left. \begin{aligned}
 A &= \frac{2k \sqrt{2\pi}}{\lambda (\lambda^2 + 1)} \left[\frac{\lambda^2 - \operatorname{sh}^2 \frac{\pi \lambda}{2}}{\operatorname{sh} \pi \lambda} + \frac{\operatorname{sh}^2 \lambda \gamma - \lambda^2 \sin^2 \gamma}{\operatorname{sh} 2\lambda \gamma + \lambda \sin 2\gamma} \right] - \\
 &\quad - \frac{2c \sqrt{2\pi} \lambda \sin^2 \gamma}{\operatorname{sh} 2\lambda \gamma + \lambda \sin 2\gamma}, \\
 B &= \frac{2k \sqrt{2\pi}}{\lambda^2 + 1} \left[\frac{1}{2} \operatorname{cth} \frac{\pi \lambda}{2} - \frac{\operatorname{sh}^2 \lambda \gamma + \sin^2 \gamma}{\operatorname{sh} 2\lambda \gamma + \lambda \sin 2\gamma} \right] + \\
 &\quad + c \sqrt{2\pi} \left[\operatorname{cth} \pi \lambda - \frac{2 \operatorname{ch}^2 \lambda \gamma}{\operatorname{sh} 2\lambda \gamma + \lambda \sin 2\gamma} \right].
 \end{aligned} \right\} (18.12)$$

Для полного решения поставленной задачи необходимо еще определить постоянную k из условия (18.9). Подставляя значение A из (18.12) в (18.9) и пользуясь значением интеграла

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh}^2 \frac{\lambda \pi}{2} - \lambda^2}{\lambda (\lambda^2 + 1) \operatorname{sh} \lambda \pi} d\lambda = \frac{1}{2},$$

получаем

$$k = \frac{b + 4c \sin^2 \gamma \int_0^{\infty} \frac{\lambda d\lambda}{\operatorname{sh} 2\lambda \gamma + \lambda \sin 2\gamma}}{4 \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh}^2 \lambda \gamma - \lambda^2 \sin^2 \gamma}{\lambda (\lambda^2 + 1) (\operatorname{sh} 2\lambda \gamma + \lambda \sin 2\gamma)} d\lambda}. \quad (18.13)$$

Из формул (18.12), (18.13) видно, что для проведения расчетов с помощью теоремы о вычетах следует воспользоваться данными табл. 10 для корней уравнения

$$\operatorname{sh} z + \frac{\sin 2\gamma}{2\gamma} z = 0, \quad (18.14)$$

соответствующего рассматриваемому случаю симметричного напряженного состояния ($2\lambda\gamma = z$).

Для практики представляет, в частности, интерес распределение напряжений σ_α в сечениях, перпендикулярных контуру отверстия. Формулу (17.3) для нормальных напряжений σ_α в рассматриваемом случае можно записать в следующем виде:

$$a\sigma_\alpha|_{\beta=\gamma} = (\operatorname{ch} \alpha - \cos \gamma) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \left(\frac{\Phi}{h} \right) \Big|_{\beta=\gamma}. \quad (18.15)$$

Подстановка в (18.15) найденного выше выражения для Φ после некоторых выкладок дает

$$\frac{\sigma_\alpha}{p} \Big|_{\beta=\gamma} = 8 \sin \gamma (\operatorname{ch} \alpha - \cos \gamma) \int_0^\infty \frac{k + c\lambda (\lambda - \operatorname{ctg} \gamma \operatorname{cth} \lambda \gamma)}{\operatorname{sh} 2\lambda\gamma + \lambda \sin 2\gamma} \times \\ \times \operatorname{sh} \lambda\gamma \cos \lambda a d\lambda. \quad (18.16)$$

Результаты некоторых численных расчетов, относящихся к рассматриваемой задаче, читатель может найти, например, в монографиях [95, 110].

В заключение видоизменим формулу (18.16) для особого случая, когда $\gamma \rightarrow 0$.

Предельный переход $\gamma \rightarrow 0$ при условии, что размер a также стремится к нулю, причем величина $R = \frac{a}{\sin \gamma}$ радиуса дуги сохраняет конечное значение, приводит нас к отверстию, имеющему форму двух касающихся кругов одинакового радиуса.

Не останавливаясь подробно на вырожденных биполярных координатах, которые следует применять при решении подобных задач, укажем только, что при вычислении контурных значений напряжения по формуле (18.16) переменную α также следует устремить к нулю и ввести вместо нее координату $\xi = \frac{\alpha}{\gamma}$, изменяющуюся в пределах одной окружности от бесконечности (в начале координат) до нуля (в точке A) и привимающую в точке B (рис. 14) значение $\xi = 1$. Формула (18.16), с учетом

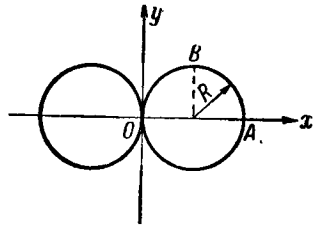


Рис. 14.

сказанного и после введения новой переменной интегрирования $\lambda\gamma = \theta$, может быть записана в таком виде:

$$\frac{\sigma_x}{\rho} \Big|_{\beta=\gamma} = 4(1 + \xi^2) \int_0^{\infty} [L + c\theta(\theta - \text{cth } \theta)] \frac{\text{sh } \theta \cos \xi\theta}{\text{sh } 2\theta + 2\theta} d\theta, \quad (18.17)$$

где введена величина $L = k\gamma^2$, определяемая равенством

$$L = \frac{b + 4c \int_0^{\infty} \frac{\theta d\theta}{\text{sh } 2\theta + 2\theta}}{4 \int_0^{\infty} \frac{\text{sh}^2 \theta - \theta^2}{\theta^3 (\text{ch } 2\theta + 2\theta)} d\theta}. \quad (18.18)$$

§ 19. Растяжение полуплоскости с сегментной выемкой

Представляет интерес рассмотреть частный случай внешней задачи для луночной области при $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = \gamma$, соответствующий полуплоскости, содержащей на краю выемку в виде кругового сегмента.

В том случае, когда граница области свободна от напряжений, а на бесконечности имеет место равномерное напряженное состояние, имеет смысл рассмотреть только продольное растяжение (рис. 15).

Следуя методу, изложенному в предыдущем параграфе, разобьем бигармоническую функцию на две части:

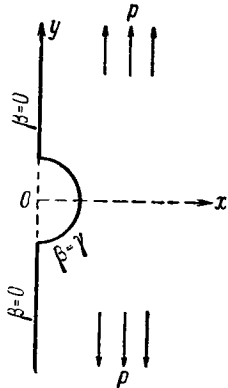


Рис. 15.

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \Phi_0 + \Phi_1, \quad \frac{\Phi_0}{\rho a h} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^2 \beta}{\text{ch } \alpha - \cos \beta}, \\ \frac{\Phi_1}{\rho a h} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} (A \text{ ch } \lambda \beta \cos \beta + \\ &+ B \text{ sh } \lambda \beta \sin \beta + C \text{ sh } \lambda \beta \cos \beta + \\ &+ D \text{ ch } \lambda \beta \sin \beta) \cos \lambda a d\lambda, \end{aligned} \right\} \quad (19.1)$$

причем в данном случае нет необходимости вводить решения типа $\ln r$, ибо условие на бесконечности $\left(\frac{\Phi_1}{h} \Big|_{\alpha=\beta=0} = 0\right)$ будет выполнено, если положить $A = 0$. При этом одновременно удовлетворяется и одно из граничных условий (18.6): $\Phi|_{\beta=0} = 0$. Остающиеся три неизвестные величины B, C, D должны быть найдены из граничных условий

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\Phi}{h} \right) \Big|_{\beta=0} = 0, \quad \frac{\Phi}{h} \Big|_{\beta=\gamma} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\Phi}{h} \right) \Big|_{\beta=\gamma} = 0. \quad (19.2)$$

Первое из этих условий определяет связь $D = -\lambda C$, а последние два приводят к следующей системе уравнений: *

$$\left. \begin{aligned} B \sin \gamma \operatorname{sh} \lambda \gamma + C (\cos \gamma \operatorname{sh} \lambda \gamma - \lambda \sin \gamma \operatorname{ch} \lambda \gamma) = \\ = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sin \gamma \frac{\operatorname{sh} \lambda (\pi - \gamma)}{\operatorname{sh} \lambda \pi}, \\ B (\lambda \sin \gamma \operatorname{ch} \lambda \gamma + \cos \gamma \operatorname{sh} \lambda \gamma) - C (\lambda^2 + 1) \sin \gamma \operatorname{sh} \lambda \gamma = \\ = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\operatorname{sh} \pi \lambda} [\lambda \sin \gamma \operatorname{ch} \lambda (\pi - \gamma) - \cos \gamma \operatorname{sh} \lambda (\pi - \gamma)], \end{aligned} \right\} (19.3)$$

решение которой дает

$$B = \operatorname{cth} \pi \lambda - \frac{\operatorname{sh} \pi \lambda \operatorname{ch} \pi \lambda - \lambda \sin \gamma \cos \gamma}{\operatorname{sh}^2 \lambda \gamma - \lambda^2 \sin^2 \gamma}, \quad C = -\frac{\lambda \sin^2 \gamma}{\operatorname{sh}^2 \lambda \gamma - \lambda^2 \sin^2 \gamma}. \quad (19.4)$$

Поскольку знаменатель этих выражений представляется в виде произведения $(\operatorname{sh} \lambda \gamma + \lambda \sin \gamma)(\operatorname{sh} \lambda \gamma - \lambda \sin \gamma)$, постольку при некоторых вычислениях можно, как и в предыдущем случае, пользоваться табл. 10 для нахождения корней соответствующих трансцендентных уравнений.

Полное решение поставленной задачи дается функцией напряжений:

$$\frac{\Phi}{\rho a h} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^2 \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} [B \sin \beta \operatorname{sh} \lambda \beta + C (\cos \beta \operatorname{sh} \lambda \beta - \lambda \sin \beta \operatorname{ch} \lambda \beta)] \cos \lambda a d\lambda. \quad (19.5)$$

Для величины нормального напряжения σ_{α} на контуре выемки из (18.15) после некоторых преобразований находим

$$\frac{\sigma_{\alpha}}{\rho} \Big|_{\beta=\gamma} = 2 (\operatorname{ch} \alpha - \cos \gamma) \int_0^{\infty} \frac{\lambda \sin \gamma \operatorname{ch} \lambda \gamma - \cos \gamma \operatorname{sh} \lambda \gamma}{\operatorname{sh}^2 \lambda \gamma - \lambda^2 \sin^2 \gamma} \lambda \cos \lambda a d\lambda. \quad (19.6)$$

Максимальное напряжение получается, очевидно, в среднем сечении $\alpha = 0$ и выражается формулой **

$$\frac{\sigma_{\alpha}^{\max}}{\rho} = 2 (1 - \cos \gamma) \int_0^{\infty} \frac{\lambda \sin \gamma \operatorname{ch} \lambda \gamma - \cos \gamma \operatorname{sh} \lambda \gamma}{\operatorname{sh}^2 \lambda \gamma - \lambda^2 \sin^2 \gamma} \lambda d\lambda. \quad (19.7)$$

В предельном случае $\gamma \rightarrow 0$, когда круглое отверстие касается края полуплоскости, вводя подстановку $\lambda \gamma = \theta$, подобно

* См. квадратуры, использованные при выводе формул (18.11).

** Численные расчеты см. в [110, 186].

тому как это было сделано в предыдущем параграфе, находим следующую формулу:

$$\frac{\sigma_{\alpha}^{\max}}{p} = \int_0^{\infty} \frac{\theta \operatorname{ch} \theta - \operatorname{sh} \theta}{\operatorname{sh}^2 \theta - \theta^2} \theta d\theta. \quad (19.8)$$

§ 20. Концентрация напряжений в плоскости, ослабленной луночным отверстием и находящейся в условиях чистого сдвига

В этом параграфе исследуется напряженное состояние в неограниченной упругой плоскости, ослабленной отверстием в виде симметричной круговой луночки, находящейся в условиях чистого сдвига на бесконечности (рис. 16).

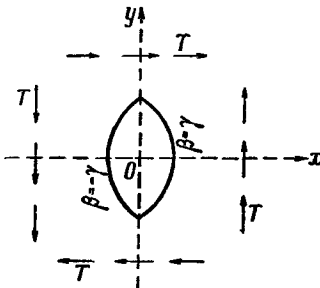


Рис. 16.

Поскольку функция Φ_0 , характеризующая состояние чистого сдвига, дается выражением

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= -Txy = \\ &= -Ta^2 \frac{\operatorname{sh} \alpha \sin \beta}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^2} \end{aligned} \quad (20.1)$$

и является нечетной функцией обеих биполярных координат (α, β) , постольку бигармоническую функцию Φ_1 следует выбрать в форме синусинтеграла Фурье

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_1}{Tah} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} (C \cos \beta \operatorname{sh} \lambda \beta + D \sin \beta \operatorname{ch} \lambda \beta) \sin \lambda \alpha d\lambda \quad (20.2) \\ &\left(h = \frac{a}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} \right). \end{aligned}$$

Заметим, что при таком выборе условие на бесконечности $\left(\frac{\Phi_1}{h} \Big|_{\alpha=\beta=0} = 0 \right)$ выполнено при любых значениях C и D .

Граничные условия, обеспечивающие отсутствие напряжений на контуре отверстия ($\beta = \pm \gamma$), сводятся к следующим требованиям:

$$\frac{\Phi}{h} \Big|_{\beta=\gamma} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\Phi}{h} \right) \Big|_{\beta=\gamma} = 0. \quad (20.3)$$

Если воспользоваться разложением

$$\frac{\Phi_0}{Tah} \Big|_{\beta=\gamma} = -\frac{\operatorname{sh} \alpha \sin \gamma}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \gamma} = -2 \sin \gamma \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \lambda (\pi - \gamma)}{\operatorname{sh} \lambda \pi} \sin \lambda \alpha d\lambda,$$

а также разложением, получаемым из него дифференцированием по параметру γ , то краевые условия (20.3) после подстановки в них выражения (20.2) для функции Φ_1 приводят нас к следующей системе уравнений для неизвестных C и D :

$$\left. \begin{aligned} C \cos \gamma \operatorname{sh} \lambda \gamma + D \sin \gamma \operatorname{ch} \lambda \gamma &= \sqrt{2\pi} \sin \gamma \frac{\operatorname{ch} \lambda (\pi - \gamma)}{\operatorname{sh} \lambda \pi}, \\ C (\lambda \cos \gamma \operatorname{ch} \lambda \gamma - \sin \gamma \operatorname{sh} \lambda \gamma) + D (\lambda \sin \gamma \operatorname{sh} \lambda \gamma + \\ + \cos \gamma \operatorname{ch} \lambda \gamma) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\operatorname{sh} \lambda \pi} [\cos \gamma \operatorname{ch} \lambda (\pi - \gamma) - \lambda \sin \gamma \operatorname{sh} \lambda (\pi - \gamma)]. \end{aligned} \right\} (20.4)$$

Решение этой системы таково:

$$C = \frac{2\sqrt{2\pi}\lambda \sin^2 \gamma}{\operatorname{sh} 2\lambda \gamma - \lambda \sin 2\gamma}, \quad D = \sqrt{2\pi} \operatorname{cth} \pi \lambda - \frac{2\sqrt{2\pi} \operatorname{sh}^2 \lambda \gamma}{\operatorname{sh} 2\lambda \gamma - \lambda \sin 2\gamma}, \quad (20.5)$$

чем и дается решение поставленной задачи.

Заметим, что после подстановки найденных значений C и D из (20.5) в (20.2), а также представления функции $\frac{\Phi_0}{h}$ в виде соответствующего синус-интеграла Фурье полная функция напряжений может быть записана в виде следующей простой формулы:

$$\frac{\Phi}{Tah} = 4 \int_0^{\infty} [\lambda \sin \gamma \sin (\gamma - \beta) \operatorname{sh} \lambda \beta - \sin \beta \operatorname{sh} \lambda \gamma \operatorname{sh} \lambda (\gamma - \beta)] \frac{\sin \lambda a d \lambda}{\operatorname{sh} 2\lambda \gamma - \lambda \sin 2\gamma}. \quad (20.6)$$

Нормальное напряжение по обводу отверстия, вычисленное по формуле (18.15), дается следующим выражением:

$$\frac{\sigma_x}{T} \Big|_{\beta=\gamma} = 8 (\operatorname{ch} \alpha - \cos \gamma) \int_0^{\infty} (\cos \gamma \operatorname{sh} \lambda \gamma - \lambda \sin \gamma \operatorname{ch} \lambda \gamma) \times \times \frac{\lambda \sin \lambda a d \lambda}{\operatorname{sh} 2\lambda \gamma - \lambda \sin 2\gamma}. \quad (20.7)$$

Результаты вычислений по этой формуле для ряда значений параметра читатель может найти в работах [96, 181].

Глава IV. ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ К ЗАДАЧАМ ИЗГИБА ТОНКИХ ПЛИТ

§ 21. Изгиб полуплоскости с закрепленным краем

Простейшим примером применения преобразования Фурье к вопросам изгиба плит является задача об изгибе упругой тонкой плиты в виде полуплоскости ($y \geq 0$).

Прогиб плиты $w(x, y)$, как известно, удовлетворяет неоднородному бигармоническому уравнению

$$\Delta^2 w = \frac{q(x, y)}{D}, \quad (21.1)$$

где q — плотность внешней поперечной нагрузки, D — цилиндрическая жесткость плиты.

Перепишывая уравнение (21.1) в развернутом виде

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D}, \quad (21.2)$$

подвергая его преобразованию Фурье по переменной x и предполагая, что при $|x| \rightarrow \infty$ $w \rightarrow 0$ вместе со своими производными первых трех порядков, мы приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка

$$w^{IV} - 2\lambda^2 w'' + \lambda^4 w = F_\lambda(y) = \frac{1}{D\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q(\xi, y) e^{i\lambda\xi} d\xi \quad (21.3)$$

относительно преобразования Фурье \bar{w} от прогиба w

$$\bar{w}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y) e^{i\lambda x} dx. \quad (21.4)$$

Частное решение \bar{w}_0 уравнения (21.3) проще всего найти с помощью интегрального преобразования Лапласа, для чего необходимо умножить (21.3) на e^{-py} и проинтегрировать по y от нуля до бесконечности. Предполагая, что

$$\bar{w}_0(0) = \bar{w}'_0(0) = \bar{w}''_0(0) = \bar{w}'''_0(0) = 0,$$

получаем

$$(p^4 - 2p^2\lambda^2 + \lambda^4) \bar{w}_0^* = F_\lambda^*, \quad (21.5)$$

где введено обозначение для преобразования Лапласа

$$f^* = \int_0^{\infty} f(y) e^{-py} dy.$$

Находя из (21.5) значение \bar{w}_0^* и применяя формулу обращения Римана—Меллина, получаем

$$\bar{w}_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{F_\lambda^* e^{py}}{(p^2 - \lambda^2)^2} dp,$$

что после применения теоремы Бореля дает

$$\bar{w}_0 = \int_0^y F_\lambda(t) \Phi_\lambda(y-t) dt; \quad (21.6)$$

причем функция $\Phi_\lambda(x)$ определяется следующим комплексным интегралом:

$$\Phi_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{px} dp}{(p^2 - \lambda^2)^2}.$$

Применение теоремы о вычетах приводит к следующему значению:

$$\Phi_\lambda(x) = \frac{K_\lambda(x)}{2\lambda^3}, \quad K_\lambda(x) = \lambda x \operatorname{ch} \lambda x - \operatorname{sh} \lambda x, \quad (21.7)$$

так что частное решение w_0 уравнения (21.3) дается такой формулой:

$$w_0(y) = \frac{1}{2D\sqrt{2\pi}\lambda^3} \int_0^y K_\lambda(y-\eta) d\eta \int_{-\infty}^{\infty} q(\xi, \eta) e^{\lambda\xi} d\xi. \quad (21.8)$$

Общее же решение уравнения (21.3), составленное по известному способу, имеет вид

$$\bar{w} = (A + B\lambda y) e^{-\lambda y} + (C + E\lambda y) e^{\lambda y} + w_0. \quad (21.9)$$

Как известно, решение задачи для случая произвольной внешней нагрузки $q(x, y)$ может быть получено из решения для одноточечной сосредоточенной силы путем интегрирования последнего по области приложения нагрузки. Поэтому в дальнейшем исследуется задача об изгибе плиты сосредоточенной силой P , приложенной в произвольной точке плиты.

Обращаясь к случаю полубесконечной плиты ($0 \leq y < \infty$), считая силу P приложенной в произвольной точке $(0, b)$ оси ординат и вводя косинус-преобразование Фурье от функции $w(x, y)$

$$w(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} w(x, y) \cos \lambda x d\lambda, \quad (21.10)$$

находим, как и выше, значение \bar{w} по формуле (21.9), причем частное решение w_0 для рассматриваемого случая сосредоточенной нагрузки будет

$$w_0 = \begin{cases} 0, & 0 \leq y \leq b, \\ \frac{P}{2D\sqrt{2\pi}\lambda^3} K_\lambda(y-b), & b \leq y < \infty. \end{cases} \quad (21.11)$$

Таким образом, величина \bar{w} дается следующим выражением:

$$w(y) = \begin{cases} (A + B\lambda y) e^{-\lambda y} + (C + E\lambda y) e^{\lambda y}, & 0 \leq y \leq b, \\ (A + B\lambda y) e^{-\lambda y} + (C + E\lambda y) e^{\lambda y} + \\ + \frac{P}{2D\sqrt{2\pi}\lambda^3} K_\lambda(y-b), & b \leq y < \infty. \end{cases} \quad (21.12)$$

Неизвестные C и E определяются из условия на бесконечности ($\bar{w}|_{y \rightarrow \infty} \rightarrow 0$) и, так как $K_\lambda(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\approx} \frac{1}{2}(\lambda x - 1)e^{-\lambda x}$, равны следующим величинам:

$$C = \frac{Pe^{-\lambda b}(\lambda b + 1)}{4\sqrt{2\pi}D\lambda^3}, \quad E = -\frac{Pe^{-\lambda b}}{4\sqrt{2\pi}D\lambda^3}. \quad (21.13)$$

Оставшиеся две величины A и B должны быть найдены из граничных условий на краю плиты ($y=0$).

В случае закрепленного края $w|_{y=0} = \frac{\partial w}{\partial y}|_{y=0} = 0$, т. е. $\bar{w}(0) = \bar{w}'(0) = 0$, что приводит к следующим значениям:

$$A = -C, \quad B = -(2C + E). \quad (21.14)$$

Полное решение поставленной задачи дается формулой обращения косинус-преобразования Фурье

$$w = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \bar{w} \cos \lambda x d\lambda, \quad (21.15)$$

где выражение \bar{w} определяется из (21.12), а значения A , B , C , E — из формул (21.13), (21.14).

Заметим, что аналогичные решения могут быть получены и для других типов граничных условий.

Выведем теперь выражения для изгибающего момента и перерезывающей силы на закрепленном крае, которые даются формулами

$$M = -D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=0}, \quad N = -D \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \Big|_{y=0}. \quad (21.16)$$

Используя значение преобразованного прогиба при $0 \leq y \leq b$

$$\bar{w}|_{0 \leq y \leq b} = \frac{Pe^{-\lambda b}}{2\sqrt{2\pi}D\lambda^3} [(1 + \lambda b + \lambda^2 b y) \operatorname{sh} \lambda y - \lambda y (1 + \lambda b) \operatorname{ch} \lambda y], \quad (21.17)$$

получаем

$$\bar{w}''(0) = \frac{Pbe^{-\lambda b}}{D\sqrt{2\pi}}, \quad \bar{w}'''(0) = -\frac{P(1 + \lambda b)}{D\sqrt{2\pi}} e^{-\lambda b},$$

откуда по формуле обращения находим

$$M = -\frac{P}{\pi} \cdot \frac{b^2}{b^2 + x^2}, \quad N = \frac{2P}{\pi} \cdot \frac{b^3}{(b^2 + x^2)^2}. \quad (21.18)$$

§ 22. Приложения преобразования Фурье к решению задач изгиба ленточных плит

Обратимся теперь к решению задач поперечного изгиба упругих тонких плит, имеющих форму бесконечной полосы и называемых обычно ленточными плитами.

Методика, основанная на использовании интегрального преобразования Фурье по переменной x ($-\infty < x < \infty$), вполне аналогична развитой в предыдущем параграфе, а именно: для преобразованного по Фурье прогиба \bar{w} [см. (21.4)] получается обыкновенное уравнение (21.3), частное решение которого \bar{w}_0 выражается формулой (21.8). Однако общий интеграл последнего уравнения в случае ленточной плиты удобно выбрать в такой форме:

$$\bar{w} = (A + B\lambda y) \operatorname{ch} \lambda y + (C + E\lambda y) \operatorname{sh} \lambda y + \bar{w}_0, \quad (22.1)$$

причем величины A , B , C , E должны быть найдены из четырех граничных условий на двух параллельных кромках плиты.

В дальнейшем в первую очередь будут рассмотрены следующие основные типы граничных условий: а) на обеих кромках заданы прогибы и углы поворота (в частности, защемленные края); б) на обеих кромках заданы прогибы и изгибающие моменты (в частности, шарнирно опертые края); в) на обеих кромках заданы изгибающие моменты и перерезывающие силы (в частности, свободные края); г) на одной кромке ($y=0$) заданы прогибы и углы поворота, а на другой ($y=b$) — изгибающие моменты и перерезывающие силы.

В первых трех случаях начало координат будем располагать на средней линии ($y=0$) полосы шириной $2b$, причем каждая задача разбивается нами на симметричную и антисимметричную относительно средней линии. Очевидно, что в симметричном случае в общем интеграле (22.1) следует принять $B=C=0$, а в антисимметричном — $A=E=0$, причем достаточно рассматривать лишь верхнюю половину полосы ($0 \leq y \leq b$) и граничные условия ставить при $y=b$.*

Начнем рассмотрение с тех задач, в которых на обеих кромках ($y = \pm b$) плиты задаются прогибы и углы поворота, т. е. граничные условия имеют вид

$$w|_{y=b} = f(x), \quad \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=b} = g(x). \quad (22.2)$$

* Легко проверить, что частное решение \bar{w}_0 [см. (21.8)] будет четной (нечетной) функцией координаты y , если нагрузка $q(x, y)$ — четная (нечетная) функция y .

После преобразования по Фурье находим

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}(b) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx = f, \\ \bar{w}'(b) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{i\lambda x} dx = g. \end{aligned} \right\} \quad (22.3)$$

Подстановка (22.1) в (22.3) в симметричном случае приводит нас к следующей системе уравнений для неизвестных величин A и E :

$$\left. \begin{aligned} A \operatorname{ch} \lambda b + E \lambda b \operatorname{sh} \lambda b &= f - \bar{w}_0(b), \\ A \operatorname{sh} \lambda b + E (\lambda b \operatorname{ch} \lambda b + \operatorname{sh} \lambda b) &= \frac{1}{\lambda} [g - \bar{w}'_0(b)]. \end{aligned} \right\} \quad (22.4)$$

Так как в правых частях последней системы стоят известные величины, а ее определитель пропорционален функции $\operatorname{sh} 2\lambda b + 2\lambda b$, корни которой табулированы в главе I (см. табл. 1); то задачу можно считать полностью решенной как с принципиальной стороны, так и с точки зрения получения численных результатов с помощью теоремы о вычетах.

Аналогичным образом в случае антисимметричного нагружения граничные условия (22.2) дают систему уравнений для B и C

$$\left. \begin{aligned} B \lambda b \operatorname{ch} \lambda b + C \operatorname{sh} \lambda b &= f - \bar{w}_0(b), \\ B (\lambda b \operatorname{sh} \lambda b + \operatorname{ch} \lambda b) + C \operatorname{ch} \lambda b &= \frac{1}{\lambda} [g - \bar{w}'_0(b)] \end{aligned} \right\} \quad (22.5)$$

с определителем, пропорциональным функции $\operatorname{sh} 2\lambda b - 2\lambda b$, корни которой также приведены в табл. 1.

Переходим теперь к следующему типу граничных условий, когда на обеих кромках ($y = \pm b$) задается прогиб $f(x)$ и изгибающий момент $M(x)$:*

$$w|_{y=\pm b} = f(x), \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=\pm b} = -\frac{M(x)}{D} - \nu f''(x) = g(x). \quad (22.6)$$

После подстановки (22.1) в преобразованные по Фурье граничные условия (22.6)

$$w|_{y=\pm b} = f, \quad w''|_{y=\pm b} = g \quad (22.7)$$

находим в симметричном случае для величин A и D систему

$$\left. \begin{aligned} A \operatorname{ch} \lambda b + E \lambda b \operatorname{sh} \lambda b &= f - \bar{w}_0(b), \\ A \operatorname{ch} \lambda b + E (\lambda b \operatorname{sh} \lambda b + 2 \operatorname{ch} \lambda b) &= \frac{1}{\lambda^2} [g - \bar{w}''_0(b)], \end{aligned} \right\} \quad (22.8)$$

* См. (22.10), ν — коэффициент Пуассона.

а в антисимметричном случае — следующую систему для B и C :

$$\left. \begin{aligned} B \lambda b \operatorname{ch} \lambda b + C \operatorname{sh} b \lambda b &= f - \bar{w}_0(b), \\ B(2 \operatorname{sh} \lambda b + \lambda b \operatorname{ch} \lambda b) + C \operatorname{sh} \lambda b &= \frac{1}{\lambda^2} [g - \bar{w}_0''(b)]. \end{aligned} \right\} \quad (22.9)$$

Так как в первом случае определитель системы равен $2 \operatorname{ch}^2 \lambda b$, а во втором — $2 \operatorname{sh}^2 \lambda b$, то проведение численных расчетов в таких задачах не требует составления специальных таблиц корней трансцендентных уравнений.

Третий из рассматриваемых типов задач предусматривает задание на обеих кромках плиты изгибающих моментов $M(x)$ и перерезывающих сил $N(x)$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=b} = - \frac{M(x)}{D} = f(x), \quad (22.10)$$

$$\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right]_{y=b} = - \frac{N(x)}{D} = g(x). \quad (22.11)$$

Если умножить эти соотношения на $e^{i\lambda x} dx$, проинтегрировать по x от $-\infty$ до $+\infty$ и предположить, что на бесконечности ($|x| \rightarrow \infty$) прогиб стремится к нулю вместе с первыми двумя производными по x , то получим преобразованные граничные условия

$$\bar{w}''(b) - \nu \lambda^2 \bar{w}(b) = f, \quad \bar{w}'''(b) - (2 - \nu) \lambda^2 \bar{w}'(b) = g. \quad (22.12)$$

В случае симметричного нагружения подстановка в (22.12) выражения для преобразованного прогиба

$$\bar{w} = A \operatorname{ch} \lambda y + D \lambda y \operatorname{sh} \lambda y + \bar{w}_0$$

приводит к системе

$$\left. \begin{aligned} A(1 - \nu) \operatorname{ch} \lambda b + E [2 \operatorname{ch} \lambda b + (1 - \nu) \lambda b \operatorname{sh} \lambda b] &= \\ &= \nu \bar{w}_0(b) + \frac{1}{\lambda^2} [f - \bar{w}_0''(b)] = p_1, \\ -A(1 - \nu) \operatorname{sh} \lambda b + E [(1 + \nu) \operatorname{sh} \lambda b - (1 - \nu) \lambda b \operatorname{ch} \lambda b] &= \\ &= \frac{2 - \nu}{\lambda} \bar{w}_0'(b) + \frac{1}{\lambda^3} [g - \bar{w}_0'''(b)] = p_2, \end{aligned} \right\} \quad (22.13)$$

определитель которой равен

$$\frac{1}{2} (1 - \nu) [(3 + \nu) \operatorname{sh} 2 \lambda b - (1 - \nu) 2 \lambda b].$$

Таким образом, для проведения в этом случае численных расчетов по теореме о вычетах следует табулировать корни $z = \pm \sigma \pm i\tau$ уравнения

$$(3 + \nu) \operatorname{sh} z - (1 - \nu) z = 0. \quad (22.14)$$

Приводим соответствующие результаты для двух значений коэффициента Пуассона: $\nu = \frac{1}{4}$ и $\nu = \frac{1}{3}$ (табл. 11).

Таблица 11

$\text{sh } z - \frac{1-\nu}{3+\nu} z = 0$				$\text{sh } z + \frac{1-\nu}{3+\nu} z = 0$			
$\nu = \frac{1}{3}$		$\nu = \frac{1}{4}$		$\nu = \frac{1}{3}$		$\nu = \frac{1}{4}$	
σ	τ	σ	τ	σ	τ	σ	τ
0	2.596	0	2.521	0	4.105	0.3512	4.484
1.013	7.684	1.193	7.669	0	4.906	1.581	10.84
1.699	14.01	1.851	13.99	1.422	10.85	2.060	17.16
2.086	20.32	2.233	20.31	1.912	17.16	2.379	23.46
2.360	26.61	2.506	26.61	2.232	23.46	2.619	29.76
—	—	—	—	2.474	29.76	—	—

Теперь необходимо провести исследование сходимости полученных интегралов, ибо в рассматриваемом случае, в отличие от остальных типов краевых условий, решение задачи существует только в том случае, когда заданные граничные значения $N(x)$ уравновешиваются поперечной нагрузкой $q(x, y)$.

В исследуемом случае симметричного нагружения условия статики имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} N(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^b q(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} N(x) x dx + \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^b q(\xi, \eta) \xi d\xi d\eta = 0 \end{aligned} \right\} \quad (22.15)$$

и, очевидно, эквивалентны следующему равенству:

$$g - w_0'''(b) = O(\lambda^2) \quad \text{при } \lambda \rightarrow 0. \quad (22.16)$$

При этом имеем: $p_1 = O(\lambda^{-2})$, $p_2 = O(\lambda^{-1})$. Отсюда вытекает, что величина $A(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow 0$ будет иметь порядок λ^{-2} , а это влечет за собой расходимость в точке $\lambda = 0$ интеграла Фурье, представляющего прогиб плиты $w(x, y)$. Причина этого обстоятельства заключается, очевидно, в том, что в принятой нами постановке задачи прогиб определен с точностью до бесконечно большой постоянной и для определенности поставленной задачи необходимо задать значение w в какой-либо точке плиты, например, принять, что $w(0, 0) = 0$. Так как $w(0, 0) =$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda) d\lambda$, то из выражения для преобразованного прогиба w следует вычесть величину $A(\lambda)$, что приведет к окончательному решению задачи в виде следующего сходящегося интеграла:

$$w = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [(A \operatorname{ch} \lambda y + D \lambda y \operatorname{sh} \lambda y + w_0) e^{-\lambda x} - A(\lambda)] d\lambda. \quad (22.17)$$

Аналогичным образом для антисимметричной загрузки находим

$$\left. \begin{aligned} B(1-\nu) \operatorname{sh} \lambda b + C[2 \operatorname{sh} \lambda b + (1-\nu) \lambda b \operatorname{ch} \lambda b] &= p_1, \\ -B(1-\nu) \operatorname{ch} \lambda b + C[(1+\nu) \operatorname{ch} \lambda b - (1-\nu) \lambda b \operatorname{sh} \lambda b] &= p_2, \end{aligned} \right\} (22.18)$$

причем определитель этой системы пропорционален функции ($2\lambda b = z$)

$$(3+\nu) \operatorname{sh} z + (1-\nu) z,$$

корни которой для $\nu = \frac{1}{4}$ и $\nu = \frac{1}{3}$ даны в табл. 11.

Условия статики в рассматриваемом случае будут

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} M(x) dx - b \int_{-\infty}^{\infty} N(x) dx - \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^b \eta q(\xi, \eta) d\xi d\eta &= 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} N(x) x dx + \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^b q(\xi, \eta) \xi d\xi d\eta &= 0 \end{aligned} \right\} (22.19)$$

и могут быть представлены в виде одного равенства

$$[p_1(\lambda) - \lambda b p_2(\lambda)]_{\lambda \rightarrow 0} = O(1). \quad (22.20)$$

Нетрудно видеть, что при этом интеграл Фурье для прогиба w будет сходящимся в точке $\lambda = 0$. В самом деле,

$$w = \lambda y (B + C) + O(\lambda^2),$$

причем

$$B + C = O\left(\frac{p_1 - \lambda b p_2}{\lambda}\right) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

т. е.

$$w = O(1).$$

Обратимся теперь к последнему из рассматриваемых типов краевых условий — случаю смешанных граничных условий, когда на одном краю ($y = 0$) плиты заданы прогибы и углы поворота (в частности, эта кромка может быть жестко заде-

лана), а на другом краю ($y=b$) — изгибающие моменты и пере-
резывающие силы (в частности, свободный край). Граничные
условия в этом случае имеют вид

$$\left. \begin{aligned} w|_{y=0} &= f_0(x), \quad \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0} = g_0(x), \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=b} &= -\frac{M(x)}{D} = f_b(x), \\ \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right]_{y=b} &= -\frac{N(x)}{D} = g_b(x) \end{aligned} \right\} \quad (22.21)$$

или, после преобразования по Фурье,

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}(0) &= f_0, \quad \bar{w}'(0) = g_0, \\ \bar{w}''(b) - \nu \lambda^2 \bar{w}(b) &= f_b, \quad \bar{w}'''(b) - (2-\nu) \lambda^2 \bar{w}'(b) = g_b. \end{aligned} \right\} \quad (22.22)$$

Подстановка в эти преобразованные граничные условия об-
щего выражения (22.1) для \bar{w} , произведенная с учетом равенств
 $\bar{w}_0(0) = \bar{w}'_0(0) = 0$, дает $A = f_0$, $C = -B + \frac{g_0}{\lambda}$, причем вели-
чины E и B должны быть найдены из следующей системы
уравнений:

$$\left. \begin{aligned} [2 \operatorname{ch} \lambda b + (1-\nu) \lambda b \operatorname{sh} \lambda b] E - [(1+\nu) \operatorname{sh} \lambda b + \\ + (1-\nu) \lambda b \operatorname{ch} \lambda b] B &= \nu \bar{w}_0(b) + \frac{1}{\lambda^2} [f_b - \bar{w}''_0(b)] - \\ - (1-\nu) \operatorname{ch} \lambda b \cdot f_0 + [2 \operatorname{sh} \lambda b + (1-\nu) \lambda b \operatorname{ch} \lambda b] \frac{g_0}{\lambda}, \\ [(1+\nu) \operatorname{sh} \lambda b - (1-\nu) \lambda b \operatorname{ch} \lambda b] E - [2 \operatorname{ch} \lambda b - \\ - (1-\nu) \lambda b \operatorname{sh} \lambda b] B &= \frac{2-\nu}{\lambda} \bar{w}'_0(b) + \frac{1}{\lambda^3} [g_b - \bar{w}'''_0(b)] + \\ + (1-\nu) \operatorname{sh} \lambda b \cdot f_0 - [(1+\nu) \operatorname{ch} \lambda b - (1-\nu) \lambda b \operatorname{sh} \lambda b] \frac{g_0}{\lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (22.23)$$

Определитель этой системы пропорционален функции ($z = 2\lambda b$)

$$\operatorname{ch} z + \frac{1-\nu}{3+\nu} \cdot \frac{z^2}{2} + \frac{4+(1+\nu)^2}{4-(1+\nu)^2}, \quad (22.24)$$

корни $z = \pm \sigma \pm i\tau$ которой для $\nu = \frac{1}{4}$ и $\nu = \frac{1}{3}$ сведены в табл. 12.

В следующем параграфе дается решение некоторых конкрет-
ных задач изгиба ленточных плит, основанное на использо-
вании вышеизложенной методики.

Здесь же мы сделаем замечание, касающееся еще двух типов
смешанных граничных условий, когда одна кромка ($y=0$) лен-
точной плиты шириной b находится в условиях свободного опи-
рания. Что касается другой кромки ($y=b$), то на ней могут

быть заданы либо прогиб и угол поворота, либо изгибающий момент и перерезывающая сила. Кроме того, известна поперечная нагрузка $q(x, y)$.

Легко видеть, что если варяду с этим рассмотреть плиту шириной $2b$, нагруженную по области $0 < y < b$ теми же нагрузками $q(x, y)$, а по области $-b < y < 0$ — нагрузками той же величины, но противоположного направления, то краевые условия свободного опирания

$$w|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = 0 \quad (22.25)$$

будут выполнены. Таким образом, рассматриваемый случай сводится к антисимметричному изгибу ленточной плиты шириной $2b$, т. е. для указанных двух случаев задача может считаться решенной. Разумеется, во втором случае заданные силы и моменты должны

Таблица 12

$$\operatorname{ch} z + \frac{1-\nu}{3+\nu} \cdot \frac{z^2}{2} + \frac{4+(1+\nu)^2}{4-(1+\nu)^2} = 0$$

$\nu = \frac{1}{3}$		$\nu = \frac{1}{4}$	
σ	τ	σ	τ
1.055	3.831	0	3.366
0	5.956	1.080	5.004
3.267	11.93	3.460	11.92
4.193	18.36	4.361	18.35
4.797	24.74	4.950	24.73

статически уравниваться внешней нагрузкой.

Наконец, интегральное преобразование Фурье успешно используется для расчетов на изгиб ленточных плит и при более сложных типах граничных условий (см., например, недавно опубликованную работу М. П. Шереметьева и Д. Г. Хлебникова [136]), а также при исследовании деформаций плиты в виде полуполосы ($x \geq 0$). В последнем случае точное решение может быть получено для случая, когда на кромке $x=0$ заданы прогиб и изгибающий момент, путем применения синус-преобразования Фурье.

§ 23. Изгиб бесконечной полосы сосредоточенной силой

Рассмотрим изгиб ленточной плиты ($-\infty < x < \infty, |y| \leq b$), нагруженной сосредоточенной силой $2P$ в произвольной точке $x=0, y=a < b$.

Считая, что краевые условия на обоих краях $y = \pm b$ однотипны, разобьем, как и выше (§ 22), задачу на симметричную [рис. 17, (A)] и антисимметричную [рис. 17, (B)], причем в первом случае следует в (22.1) положить $B=C=0$, во втором — $A=E=0$ и рассматривать лишь половину полосы ($0 \leq y \leq b$).

Частное решение $w_0(y)$, входящее в общее выражение (22.1) для преобразованного прогиба

$$w = (A + B\lambda y) \operatorname{ch} \lambda y + (C + E\lambda y) \operatorname{sh} \lambda y + w_0, \quad (23.1)$$

согласно формуле (21.11), имеет для рассматриваемого типа нагрузки вид

$$w_0 = \begin{cases} 0, & 0 \leq y \leq a, \\ \frac{PK_\lambda(y-a)}{2\sqrt{2\pi}D\lambda^3}, & a \leq y \leq b, \end{cases} \quad (23.2)$$

где обозначено, как и выше,

$$K_\lambda(x) = \lambda x \operatorname{ch} \lambda x - \operatorname{sh} \lambda x. \quad (23.3)$$

Из всех разобранных в предыдущем параграфе случаев в дальнейшем рассматриваются два типа краевых условий: закрепленные края и шарнирно опертые края.

Для решения задачи о симметричном нагружении плиты с закрепленными краями необходимо определить величины A и E из системы

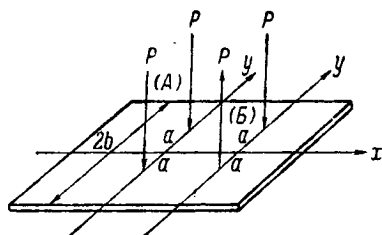


Рис. 17.

$$\left. \begin{aligned} A \operatorname{ch} \lambda b + E \lambda b \operatorname{sh} \lambda b &= \\ &= -\frac{PK_\lambda(b-a)}{2\sqrt{2\pi}D\lambda^3}, \\ A \operatorname{sh} \lambda b + E(\lambda b \operatorname{ch} \lambda b + \\ &+ \operatorname{sh} \lambda b) = \\ &= -\frac{PK'_\lambda(b-a)}{2\sqrt{2\pi}D\lambda^4}, \end{aligned} \right\} \quad (23.4)$$

которая получается подстановкой в (22.4) значений $f=g=0$, соответствующих отсутствию на краях плиты прогибов и углов поворота, а также значений $w_0(b)$ и $w'_0(b)$, взятых из (23.2).

Решение системы (23.4) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} A &= -\frac{P}{2\sqrt{2\pi}D\lambda^3} \frac{(\lambda b \operatorname{ch} \lambda b + \operatorname{sh} \lambda b) K_\lambda(b-a) - b \operatorname{sh} \lambda b K'_\lambda(b-a)}{\operatorname{ch} \lambda b \operatorname{sh} \lambda b + \lambda b}, \\ E &= -\frac{P}{2\sqrt{2\pi}D\lambda^3} \frac{\frac{1}{\lambda} \operatorname{ch} \lambda b K'_\lambda(b-a) - \operatorname{sh} \lambda b K_\lambda(b-a)}{\operatorname{ch} \lambda b \operatorname{sh} \lambda b + \lambda b}, \end{aligned} \right\} \quad (23.5)$$

причем входящая сюда производная от функции $K_\lambda(x)$ дается формулой

$$K'_\lambda(x) = \lambda^2 x \operatorname{sh} \lambda x. \quad (23.6)$$

Подстановка найденных значений в выражение (23.1) ($B=C=0$) и использование формулы обращения

$$w = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \varphi \cos \lambda x d\lambda \quad (23.7)$$

дают полное решение поставленной задачи.

Получим выражение для изгибающего момента $M(x)$ на заделке.

Преобразуя по Фурье справедливую в данном случае формулу

$$M(x) = -D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=b},$$

находим

$$M = -D\lambda^2 \left[A \operatorname{ch} \lambda b + E (\lambda b \operatorname{sh} \lambda b + 2 \operatorname{ch} \lambda b) + \frac{1}{\lambda^2} w_0''(b) \right].$$

Учитывая еще, что

$$K_1''(x) = \lambda^2 (\lambda x \operatorname{ch} \lambda x + \operatorname{sh} \lambda x), \quad (23.8)$$

получаем после некоторых выкладок

$$M = -\frac{P}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{b \operatorname{ch} \lambda a \operatorname{sh} \lambda b - a \operatorname{ch} \lambda b \operatorname{sh} \lambda a}{\operatorname{ch} \lambda b \operatorname{sh} \lambda b + \lambda b}$$

или окончательно, после применения формулы обращения,

$$M(x) = -\frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{b \operatorname{ch} \lambda a \operatorname{sh} \lambda b - a \operatorname{ch} \lambda b \operatorname{sh} \lambda a}{\operatorname{ch} \lambda b \operatorname{sh} \lambda b + \lambda b} \cos \lambda x d\lambda. \quad (23.9)$$

Решение соответствующей задачи об антисимметричном нагружении ленточной плиты с закрепленным контуром приводит к системе уравнений (22.5) при $f = g = 0$

$$\left. \begin{aligned} B\lambda b \operatorname{ch} \lambda b + C \operatorname{sh} \lambda b &= -\frac{PK_\lambda(b-a)}{2\sqrt{2\pi} D\lambda^3}, \\ B(\lambda b \operatorname{sh} \lambda b + \operatorname{ch} \lambda b) + C \operatorname{ch} \lambda b &= -\frac{PK_\lambda'(b-a)}{2\sqrt{2\pi} D\lambda^4}. \end{aligned} \right\} \quad (23.10)$$

Решая эту систему, мы получим

$$\left. \begin{aligned} B &= -\frac{P}{2\sqrt{2\pi} D\lambda^3} \cdot \frac{\operatorname{ch} \lambda b K_\lambda(b-a) - \frac{1}{\lambda} \operatorname{sh} \lambda b K_\lambda'(b-a)}{\lambda b - \operatorname{ch} \lambda b \operatorname{sh} \lambda b}, \\ C &= -\frac{P}{2\sqrt{2\pi} D\lambda^3} \cdot \frac{b \operatorname{ch} \lambda b K_\lambda'(b-a) - (\lambda b \operatorname{sh} \lambda b + \operatorname{ch} \lambda b) K_\lambda(b-a)}{\lambda b - \operatorname{ch} \lambda b \operatorname{sh} \lambda b}, \end{aligned} \right\} \quad (23.11)$$

после чего решение задачи сводится к применению формулы обращения.

Определим, как и в предыдущем случае, значения изгибающего момента на закрепленном крае. Имеем

$$M = -Dw''(b) = -D\lambda^2 \left[B(\lambda b \operatorname{ch} \lambda b + 2 \operatorname{sh} \lambda b) + C \operatorname{sh} \lambda b + \frac{\bar{w}_0''(b)}{\lambda^2} \right] = \\ = -\frac{P}{\sqrt{2\pi}} \frac{b \operatorname{sh} \lambda a \operatorname{ch} \lambda b - a \operatorname{sh} \lambda b \operatorname{ch} \lambda a}{\operatorname{ch} \lambda b \operatorname{sh} \lambda b - \lambda b}$$

или окончательно

$$M(x) = -\frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{b \operatorname{sh} \lambda a \operatorname{ch} \lambda b - a \operatorname{sh} \lambda b \operatorname{ch} \lambda a}{\operatorname{ch} \lambda b \operatorname{sh} \lambda b - \lambda b} \cos \lambda x d\lambda. \quad (23.12)$$

Суммируя значения, даваемые формулами (23.9) и (23.12), находим выражение для изгибающего момента на заделанном краю ($y=b$) ленточной плиты шириной $2b$, нагруженной в точке $x=0$, $y=a$ сосредоточенной силой $2P$,

$$M(x) = -\frac{2P}{\pi} \times \\ \times \int_0^{\infty} \frac{(b-a) \operatorname{sh} 2\lambda b \operatorname{sh} \lambda(b+a) - 2\lambda b(b+a) \operatorname{sh} \lambda(b-a)}{\operatorname{sh}^2 2\lambda b - (2\lambda b)^2} \cos \lambda x d\lambda. \quad (23.13)$$

В качестве второго примера исследуем симметричное напряженное состояние в ленточной плите ($-\infty < x < \infty$, $-b < y < b$), шарнирно опертой по краям и нагруженной сосредоточенными силами в произвольных точках $x=0$, $y=\pm a$, $a < b$.

В этом случае преобразованный прогиб имеет вид

$$w = A \operatorname{ch} \lambda y + E \lambda y \operatorname{sh} \lambda y + \bar{w}_0(y), \quad (23.14)$$

где выражение для \bar{w}_0 дается формулами (23.2) и (23.3). Величины A и E следует определить из системы (22.8), принимающей в рассматриваемом случае ($f=g=0$) вид

$$\left. \begin{aligned} A \operatorname{ch} \lambda b + E \lambda b \operatorname{sh} \lambda b &= -\bar{w}_0(b), \\ A \operatorname{ch} \lambda b + E(\lambda b \operatorname{sh} \lambda b + 2 \operatorname{ch} \lambda b) &= -\frac{1}{\lambda^2} \bar{w}_0''(b). \end{aligned} \right\} \quad (23.15)$$

Вычисление, проведенное с учетом равенств

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}_0(b) &= \frac{P}{2\sqrt{2\pi} D \lambda^3} [\lambda(b-a) \operatorname{ch} \lambda(b-a) - \operatorname{sh} \lambda(b-a)], \\ \bar{w}_0''(b) &= \frac{P}{2\sqrt{2\pi} D \lambda^3} [\lambda(b-a) \operatorname{ch} \lambda(b-a) + \operatorname{sh} \lambda(b-a)], \end{aligned} \right\} \quad (23.16)$$

приводит к следующим значениям:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{P}{2\sqrt{2\pi} D\lambda^3 \operatorname{ch}^2 \lambda b} \{ [\lambda a \operatorname{ch} \lambda (b-a) + \operatorname{sh} \lambda (b-a)] \times \\ &\quad \times \operatorname{ch} \lambda b - \lambda b \operatorname{ch} \lambda a \}, \\ E &= -\frac{P}{2\sqrt{2\pi} D\lambda^3} \cdot \frac{\operatorname{sh} \lambda (b-a)}{\operatorname{ch} \lambda b}, \end{aligned} \right\} (23.17)$$

после чего решение задачи дается формулой обращения косинус-интеграла Фурье.

В частном случае $a=0$ мы приходим к задаче об изгибе полосы шириной $2b$ с опертыми краями силой $2P$, приложенной в произвольной точке ($x=0, y=0$) средней линии. Приводим для этого случая выражение прогиба средней линии

$$w(x, 0) = \frac{Pb^2}{4\pi D} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} 2\mu - 2\mu}{\mu^3 \operatorname{ch}^2 \mu} \cos \mu \frac{x}{b} d\mu. \quad (23.18)$$

Вычисление прогиба непосредственно под силой приводит к следующему значению [$\zeta(x)$ — дзета-функция]:

$$w(0, 0) = \frac{7Pb^2}{2\pi^3 D} \zeta(3) \approx 0.136 \frac{Pb^2}{D}.$$

§ 24. Решение неоднородного бигармонического уравнения в биполярных координатах

С целью рассмотреть далее вопросы изгиба упругих плит луночной формы в настоящем параграфе будет дано общее решение неоднородного бигармонического уравнения

$$\Delta^2 f = p, \quad (24.1)$$

где неизвестная функция f и заданная правая часть p суть функции биполярных координат (α, β) , причем форма искомого решения должна быть специально приспособлена для рассматриваемых луночных областей, внутри которых переменная α изменяется в бесконечном промежутке $(-\infty, +\infty)$, в то время как границу области образуют координатные линии $\beta = \beta_1$ и $\beta = \beta_2$ (рис. 5).

Преобразуем прежде всего оператор Лапласа

$$\Delta f = \frac{1}{h^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} \right), \quad h = \frac{a}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}$$

в биполярных координатах к такому виду:

$$\begin{aligned} \Delta f = \frac{1}{a} \left[(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta) \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) - 2 \operatorname{sh} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + \right. \\ \left. + 2 \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \right] \left(\frac{f}{h} \right). \end{aligned} \quad (24.2)$$

Когда бигармонический оператор после некоторых выкладок может быть представлен в следующей форме:

$$\Delta^2 f = \frac{1}{h^3} \left[\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right] \left(\frac{f}{h} \right). \quad (24.3)$$

Так как выражение в квадратных скобках является ливейным дифференциальным оператором с постоянными коэффициентами, то естественно искать решение неоднородного бигармонического уравнения (24.1)

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right] \left(\frac{f}{h} \right) = p h^3 \quad (24.4)$$

в форме интегрального разложения Фурье по переменной α . В соответствии с этим положим

$$\frac{f}{h} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\lambda}(\beta) e^{-i\alpha\lambda} d\lambda \quad (24.5)$$

и подставим (24.5) в (24.4). Если варяду с этим разложить правую часть уравнения (24.4) в интеграл Фурье

$$p h^3 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} p_{\lambda}(\beta) e^{-i\alpha\lambda} d\lambda, \quad (24.6)$$

где функция $p_{\lambda}(\beta)$ дается теоремой обращения

$$p_{\lambda}(\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} p h^3 e^{i\lambda\alpha} d\alpha \quad (24.7)$$

и может поэтому считаться известной, то получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка относительно преобразованной функции $F_{\lambda}(\beta)$:

$$F_{\lambda}^{IV} + 2(1 - \lambda^2) F_{\lambda}'' + (1 + \lambda^2)^2 F_{\lambda} = p_{\lambda}. \quad (24.8)$$

Общий интеграл уравнения (24.8) может быть, как всегда, представлев в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения $F_{\lambda}^*(\beta)$

$$F_{\lambda}(\beta) = A(\lambda) \operatorname{ch} \lambda \beta \cos \beta + B(\lambda) \operatorname{ch} \lambda \beta \sin \beta + C(\lambda) \operatorname{sh} \lambda \beta \cos \beta + D(\lambda) \operatorname{sh} \lambda \beta \sin \beta + F_{\lambda}^*(\beta), \quad (24.9)$$

где величины A , B , C и D суть искомые функции параметра λ .

Частное решение $F_{\lambda}^*(\beta)$ обычно находят методом Лагранжа вариаций произвольных постоянных; однако нам представляется

более простым операционный метод. В самом деле, если ввести преобразование Лапласа функции $F_\lambda^*(\beta)$

$$\overline{F_\lambda^*} = \int_0^\infty F_\lambda^*(\beta) e^{-p\beta} d\beta, \quad (24. 10)$$

умножить уравнение (24. 8) на $e^{-p\beta} d\beta$ и проинтегрировать по β от 0 до ∞ , предполагая, что

$$F_\lambda^*(0) = F_\lambda^{*'}(0) = F_\lambda^{*''}(0) = F_\lambda^{*'''}(0) = 0,$$

то сразу найдем, что

$$F_\lambda^* = \frac{\overline{p_\lambda}}{p^4 + 2(1 - \lambda^2)p^2 + (1 + \lambda^2)^2}. \quad (24. 11)$$

Теперь, применяя теорему Бореля, получаем

$$F_\lambda^*(\beta) = \int_0^\beta p_\lambda(t) K_\lambda(\beta - t) dt, \quad (24. 12)$$

где

$$K_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \frac{e^{px} dp}{p^4 + 2(1 - \lambda^2)p^2 + (1 + \lambda^2)^2}, \quad (24. 13)$$

(L) — контур Римана—Меллина.

Применение теоремы о вычетах дает

$$K_\lambda(x) = \frac{\lambda \operatorname{ch} \lambda x \sin x - \operatorname{sh} \lambda x \cos x}{2\lambda(\lambda^2 + 1)}. \quad (24. 14)$$

Таким образом, общее решение бигармонического уравнения (24. 1) дается формулами (24. 5), (24. 9), (24. 12) и (24. 14).

Некоторые соображения, связанные с постановкой рассматриваемых бигармонических задач и единственностью их решения, приведены в § 13.

§ 25. Изгиб луночной плиты с закрепленным контуром

Прогиб $w(\alpha, \beta)$ точек упругой тонкой плиты, изгибаемой поперечной нагрузкой $q(\alpha, \beta)$ на единицу площади, как известно, удовлетворяет уравнению

$$\Delta^2 w = \frac{q}{D}, \quad D = \frac{El^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad (25. 1)$$

где l — толщина плиты, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

Общее решение уравнения (25. 1) в биполярных координатах, удобное для случая луночной плиты (рис. 18), было дано

в предыдущем параграфе, причем следует только функцию f заменить на w , а функцию p на $\frac{q}{D}$. Входящие в решение неизвестные величины A, B, C, D должны быть найдены из граничных условий задачи.

Если края плиты ($\beta = \beta_1$ и $\beta = \beta_2$) закреплены, то граничные условия имеют вид

$$w \Big|_{\beta=\beta_i} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\beta_i} = 0 \quad (i=1, 2). \quad (25.2)$$

Легко видеть из формулы (24.5)

$$w = \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\lambda}(\beta) e^{-i\lambda\alpha} d\lambda \left(h = \frac{a}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \right), \quad (25.3)$$

что условия (25.2) эквивалентны следующим условиям для функции $F_{\lambda}(\beta)$:

$$F_{\lambda}(\beta_i) = 0, \quad F'_{\lambda}(\beta_i) = 0. \quad (25.4)$$

Последняя форма граничных условий на основании (24.9) дает возможность определить величины $A(\lambda), B(\lambda), C(\lambda), D(\lambda)$, на чем и заканчивается общее решение поставленной задачи.

Обратимся теперь к изгибу плиты сосредоточенной внешней нагрузкой. Предположим, что в произвольной точке (α_0, β_0) плиты приложена сосредоточенная сила P . Решение задачи для этого случая дает, по существу, функцию Грина для луночной плиты с закрепленным контуром. Легко видеть, что окончательной формой решения в этом

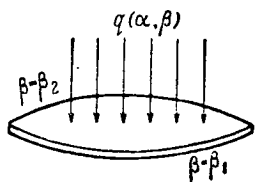


Рис. 18.

случае являются однократные квадратуры. В самом деле, подставляя (24.7) в (24.12) и заменяя p на $\frac{q}{D}$, находим*

$$F_{\lambda}^*(\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} D} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\beta} (qh^3)_{\beta=t} e^{i\lambda\alpha} K_{\lambda}(\beta - t) d\alpha dt. \quad (25.5)$$

Распределяя теперь сосредоточенную силу P по малой области $\alpha_0 - \varepsilon < \alpha < \alpha_0 + \varepsilon, \beta_0 - \delta < \beta < \beta_0 + \delta$, окружающей точку (α_0, β_0) , и устремляя величины ε и δ к нулю, сразу получаем для рассматриваемого случая**

* Не нарушая общности, можно считать, что $\beta_0 \geq 0$.

** Здесь еще учтено то обстоятельство, что площадь области, по которой распределяется сила P , будет $4h^2\varepsilon\delta$.

$$F_{\lambda}^*(\beta) = \begin{cases} 0 & \text{при } \beta \leq \beta_0, \\ \frac{Pa}{\sqrt{2\pi D}} \cdot \frac{e^{i\alpha_0\lambda}}{\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0} K_{\lambda}(\beta - \beta_0) & \text{при } \beta \geq \beta_0. \end{cases} \quad (25.6)$$

Окончательное решение запишем в вещественной форме

$$w = \frac{Pa^2}{\pi D} \cdot \frac{1}{(\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0)(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)} \int_0^{\infty} w_{\lambda}(\beta) \cos \lambda(\alpha - \alpha_0) d\lambda, \quad (25.7)$$

где введено обозначение

$$w_{\lambda}(\beta) = A_1(\lambda) \operatorname{ch} \lambda\beta \cos \beta + A_2(\lambda) \operatorname{ch} \lambda\beta \sin \beta + B_1(\lambda) \operatorname{sh} \lambda\beta \sin \beta + \\ + B_2(\lambda) \operatorname{sh} \lambda\beta \cos \beta + \begin{cases} 0 & \text{при } \beta \leq \beta_0, \\ K_{\lambda}(\beta - \beta_0) & \text{при } \beta \geq \beta_0. \end{cases} \quad (25.8)$$

Постоянные A_i , B_i ($i=1, 2$), как уже указывалось, должны быть найдены из условий закрепления

$$\overline{w}_{\lambda}(\beta_i) = 0, \quad w'_{\lambda}(\beta_i) = 0 \quad (i=1, 2), \quad (25.9)$$

которые в общем случае представляют собой систему четырех линейных алгебраических уравнений.

В дальнейшем будут приводиться расчеты не только прогибов точек плиты, но также значений изгибающих моментов по известной формуле

$$M = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial w}{\partial n} \right) \right], \quad (25.10)$$

где n — нормаль к контуру, s — переменная длина дуги контура, ρ — радиус кривизны, D — цилиндрическая жесткость плиты, причем рассматриваемый момент направлен по касательной к контуру.

Если край плиты ($\beta = \beta_i$) закреплен, а нагрузкой является сила P , сосредоточенная в точке (α_0, β_0) , то формула (25.10) упрощается и для контурного значения изгибающего момента дает

$$M|_{\beta=\beta_i} = -\frac{D}{h} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \left(\frac{w}{h} \right) \Big|_{\beta=\beta_i}$$

или окончательно

$$M|_{\beta=\beta_i} = -\frac{P(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta_i)}{\pi(\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0)} \int_0^{\infty} w'_{\lambda}(\beta_i) \cos \lambda(\alpha - \alpha_0) d\lambda. \quad (25.11)$$

§ 26. Решение задачи изгиба для симметричной круговой луночки

Как уже указывалось в главе II, в случае симметричной круговой луночки следует положить $\beta_2 = -\beta_1 = \gamma$ (см. рис. 6).

При этом общую задачу об изгибе такой плиты под действием сосредоточенной силы $2P$ удобно разбить на две отдельные задачи: симметричную и антисимметричную относительно оси x . В симметричной задаче внешняя нагрузка представляет собой две одинаково направленные сосредоточенные силы величин P , приложенные в точках $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \pm \beta_0$, в то время как в антисимметричной задаче эти силы имеют противоположное направление.

Очевидно, что в первой задаче прогиб точек плиты будет четвой функцией координаты β , так что в выражении (25.8) следует положить $A_2 = B_2 = 0$. Если ограничиться в дальнейшем значениями $\beta \geq 0$, то формула (25.8) принимает вид

$$w_{\lambda}^{(1)}(\beta) = A_1(\lambda) \operatorname{ch} \lambda \beta \cos \beta + B_1(\lambda) \operatorname{sh} \lambda \beta \sin \beta + \begin{cases} 0 & \text{при } \beta \leq \beta_0, \\ K_{\lambda}(\beta - \beta_0) & \text{при } \beta \geq \beta_0, \end{cases} \quad (26.1)$$

где $K_{\lambda}(x)$ по-прежнему выражается формулой (24.14)

$$K_{\lambda}(x) = \frac{\lambda \operatorname{ch} \lambda x \sin x - \operatorname{sh} \lambda x \cos x}{2\lambda(\lambda^2 + 1)}. \quad (26.2)$$

В случае закрепленных краев граничные условия

$$w_{\lambda}(\gamma) = 0, \quad w'_{\lambda}(\gamma) = 0 \quad (26.3)$$

приводят к следующим значениям величин A_1 и B_1 :

$$\left. \begin{aligned} \Delta^{(1)} A_1 &= -(\lambda \operatorname{ch} \lambda \gamma \sin \gamma + \operatorname{sh} \lambda \gamma \cos \gamma) K_{\lambda}(\gamma - \beta_0) + \\ &\quad + \operatorname{sh} \lambda \gamma \sin \gamma K'_{\lambda}(\gamma - \beta_0), \\ \Delta^{(1)} B_1 &= (\lambda \operatorname{sh} \lambda \gamma \cos \gamma - \operatorname{ch} \lambda \gamma \sin \gamma) K_{\lambda}(\gamma - \beta_0) - \\ &\quad - \operatorname{ch} \lambda \gamma \cos \gamma K'_{\lambda}(\gamma - \beta_0), \\ \Delta^{(1)} &= \lambda \sin \gamma \cos \gamma + \operatorname{ch} \lambda \gamma \operatorname{sh} \lambda \gamma, \end{aligned} \right\} \quad (26.4)$$

причем

$$K'_{\lambda}(x) = \frac{1}{2\lambda} \operatorname{sh} \lambda x \sin x. \quad (26.5)$$

Аналогично в антисимметричном случае при $\beta \geq 0$ находим

$$w_{\lambda}^{(2)}(\beta) = A_2(\lambda) \operatorname{ch} \lambda \beta \sin \beta + B_2(\lambda) \operatorname{sh} \lambda \beta \cos \beta + \begin{cases} 0 & \text{при } \beta \leq \beta_0, \\ K_{\lambda}(\beta - \beta_0) & \text{при } \beta \geq \beta_0. \end{cases} \quad (26.6)$$

При этом из условий (26.3) получаем

$$\left. \begin{aligned} \Delta^{(2)} A_2 &= (\text{sh } \lambda \gamma \sin \gamma - \lambda \text{ch } \lambda \gamma \cos \gamma) K_\lambda (\gamma - \beta_0) + \\ &\quad + \text{sh } \lambda \gamma \cos \gamma K'_\lambda (\gamma - \beta_0), \\ \Delta^{(2)} B_2 &= (\text{ch } \lambda \gamma \cos \gamma + \lambda \text{sh } \lambda \gamma \sin \gamma) K_\lambda (\gamma - \beta_0) - \\ &\quad - \text{ch } \lambda \gamma \sin \gamma K'_\lambda (\gamma - \beta_0), \\ \Delta^{(2)} &= \lambda \sin \gamma \cos \gamma - \text{ch } \lambda \gamma \text{sh } \lambda \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (26.7)$$

Прогиб точек плиты в обоих случаях дается формулой (25.7)

$$w^{(i)} = \frac{Pa^2}{\pi D (\text{ch } \alpha_0 + \cos \beta_0) (\text{ch } \alpha + \cos \beta)} \int_0^\infty w_\lambda^{(i)}(\beta) \cos \lambda (\alpha - \alpha_0) d\lambda \quad (26.8)$$

($i = 1, 2$).

Исследование корней уравнений $\Delta^{(1)} = 0$ и $\Delta^{(2)} = 0$, проводимое в § 31 следующей главы, дает возможность, в частности, сделать заключение о поведении изгибающих моментов в угловых точках луночной плиты ($\alpha \rightarrow \pm \infty$). Оказывается, что в случае симметричного изгиба при $\gamma < \frac{\pi}{2}$ изгибающий момент в угловых точках стремится к нулю, а при $\gamma > \frac{\pi}{2}$ («входящий» угол) неограниченно возрастает. Таким образом, предельный угол раствора луночки, при котором напряжения в угловых точках еще остаются ограниченными, равен в этом случае π . Что касается антисимметричного случая, то при этом таким предельным углом оказывается значение $x \approx 257^\circ$, являющееся корнем уравнения $\text{tg } x = x$.

В частном случае $\beta_0 = 0$, когда сила $2P$ приложена в точке $\alpha = \alpha_0$ оси x , мы имеем дело с симметричной задачей, причем выражение (26.1) принимает следующий вид:

$$w_\lambda(\beta) = A_1 \text{ch } \lambda \beta \cos \beta + B_1 \text{sh } \lambda \beta \sin \beta + K_\lambda(\beta) \quad (\beta \geq 0). \quad (26.9)$$

Произведем для этого случая расчет прогиба под силой, а также контурных значений изгибающих моментов.

Выражение $w_\lambda(0)$, необходимое для расчета прогиба $w(\alpha_0, 0)$, после подстановки значений A_1 и B_1 из (26.4) в (26.9) принимает вид

$$w_\lambda(0) = \frac{\text{sh}^2 \lambda \gamma - \lambda^2 \sin^2 \gamma}{2\lambda (\lambda^2 + 1) \Delta^{(1)}},$$

после чего получаем окончательную формулу для прогиба плиты в точке приложения силы

$$w_0 = w(\alpha_0, 0) = \frac{Pa^2}{\pi D (\text{ch } \alpha_0 + 1)^2} \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 \lambda \gamma - \lambda^2 \sin^2 \gamma}{\text{sh } 2\lambda \gamma + \lambda \sin 2\gamma} \cdot \frac{d\lambda}{\lambda (\lambda^2 + 1)}. \quad (26.10)$$

Для вычисления контурных значений изгибающих моментов, даваемых формулой (25.11), подсчитаем величину $w'_\lambda(\gamma)$. Учитывая равенство

$$K'_\lambda(x) = \frac{1}{2\lambda} (\lambda \operatorname{ch} \lambda x \sin x + \operatorname{sh} \lambda x \cos x), \quad (26.11)$$

находим

$$w'_\lambda(\gamma) = \frac{\sin \gamma \operatorname{sh} \lambda \gamma}{\Delta^{(1)}}, \quad (26.12)$$

что и дает следующую расчетную формулу для изгибающего момента на заделке:

$$-M(\alpha)|_{\beta=\gamma} = \frac{2P}{\pi} \sin \gamma \frac{\operatorname{ch} \alpha + \cos \gamma}{\operatorname{ch} \alpha_0 + 1} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} \lambda \gamma \cos \lambda (\alpha - \alpha_0)}{\operatorname{sh} 2\lambda \gamma + \lambda \sin 2\gamma} d\lambda. \quad (26.13)$$

Для вычисления получающихся интегралов можно воспользоваться теоремой о вычетах и табл. 10 корней знаменателя подынтегральной функции.

При $\gamma = \frac{\pi}{2}$ (круглая плита) квадратуры в общей формуле (25.7) для прогиба w могут быть выполнены. Полагая $\beta_0 = 0$,* находим

$$w = \frac{Pa^2}{2\pi D} \cdot \frac{1}{(\operatorname{ch} \alpha_0 + 1)(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{2} [\cos \beta - \operatorname{ch}(\alpha - \alpha_0)] \ln \frac{\operatorname{ch}(\alpha - \alpha_0) + \cos \beta}{\operatorname{ch}(\alpha - \alpha_0) - \cos \beta} + \cos \beta \right\}. \quad (26.14)$$

Другой частный случай, в котором решение задачи изгиба может быть выражено в замкнутой форме через элементарные функции, представляет неограниченная плита, закрепленная по двум полубесконечным лучам $y=0$, $x \leq -a$ и $y=0$, $x \geq +a$.** Такая плита соответствует, очевидно, частному случаю $\gamma = \pi$ рассмотренной симметричной луночки. Произведем вычисление прогиба такой плиты при произвольном местоположении силы $2P$. Выражения (26.4) и (26.7) для величин A_1 , B_1 , A_2 , B_2 при $\gamma = \pi$ упрощаются и принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \Delta^{(1)} A_1 &= \operatorname{sh} \lambda \pi K_\lambda (\pi - \beta_0), \\ \Delta^{(1)} B_1 &= -\lambda \operatorname{sh} \lambda \pi K_\lambda (\pi - \beta_0) + \operatorname{ch} \lambda \pi K'_\lambda (\pi - \beta_0), \\ \Delta^{(2)} A_2 &= \lambda \operatorname{ch} \lambda \pi K_\lambda (\pi - \beta_0) - \operatorname{sh} \lambda \pi K'_\lambda (\pi - \beta_0), \\ \Delta^{(2)} B_2 &= -\operatorname{ch} \lambda \pi K_\lambda (\pi - \beta_0), \quad \Delta^{(1)} = -\Delta^{(2)} = \operatorname{ch} \lambda \pi \operatorname{sh} \lambda \pi. \end{aligned} \right\} \quad (26.15)$$

* В случае круглой плиты это не нарушает общности. Решение этой задачи хорошо известно (см., например, [200]).

** Эта задача решена другим способом в статье [159].

Подстановка этих значений в общие формулы (26.1), (26.6) и (26.8) приводит в конечном счете к квадратурам такого типа:

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sh } \lambda p \cos \lambda q d\lambda}{(\lambda^2 + 1) \text{sh } 2\lambda\pi} = \frac{1}{2} \text{ch } q \sin p \ln 2 \left(\text{ch } \frac{q}{2} - \cos \frac{p}{2} \right) +$$

$$+ \text{sh } q \cos p \arctg \frac{\sin \frac{p}{2}}{e^{\frac{q}{2}} - \cos \frac{p}{2}} + \text{ch } \frac{q}{2} \sin \frac{p}{2} +$$

$$+ \frac{p}{4} e^{-q} \cos p - \frac{q}{4} \sin p \text{sh } q \quad (q > 0). \quad (26.16)$$

Окончательная формула для прогиба после некоторых выкладок принимает следующий вид:

$$w = \frac{Pa^2}{4\pi(\text{ch } \alpha_0 + \cos \beta_0)(\text{ch } \alpha + \cos \beta) D} \times$$

$$\times \left\{ \text{ch}(\alpha - \alpha_0) - \cos(\beta - \beta_0) \right\} \ln \frac{\text{ch} \frac{\alpha - \alpha_0}{2} - \cos \frac{\beta - \beta_0}{2}}{\text{ch} \frac{\alpha - \alpha_0}{2} + \cos \frac{\beta + \beta_0}{2}} +$$

$$+ 4 \text{ch} \frac{\alpha - \alpha_0}{2} \cos \frac{\beta_0}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \beta_0 \sin \beta \left. \right\}. \quad (26.17)$$

Если сила $2P$ приложена в начале координат, то значение прогиба под силой будет $w_0 = \frac{Pa^2}{4\pi D}$, т. е. вдвое больше, чем соответствующее значение для случая круглой плиты.

Таблица 13

	γ						
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$		2	∞	∞
k	0.0356	0.0832	0.153	0.239	0.381	0.427	0.478
m	0.169	0.133	0.105	0.0796	—	—	—

Приводим в табл. 13 значения величин

$$k = \frac{E I^3 w_0}{2 P a^2 (1 - \nu^2)} \quad \text{и} \quad m = \frac{M^{(0)}}{2P} \Big|_{y=\gamma},$$

характеризующих прогиб под силой и максимальное контурное значение изгибающего момента,* причем сила $2P$ считалась

* Имеется в виду, что $\gamma < \frac{\pi}{2}$.

приложенной в центре ($\alpha_0 = 0$) симметричной круговой луночки, а в качестве входной данной принималась величина $\eta = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ отношения ширины луночки b к ее длине $2a$ (рис. 6).

§ 27. Изгиб кругового сегмента

Как уже указывалось, круговой сегмент получается при значениях $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = \gamma$ (рис. 5). Так как такая область уже не обладает симметрией относительно оси Ox , то не имеет смысла производить разбиение задачи на симметричную и антисимметричную по координате β , как это делалось для симметричной луночки. Обращаясь поэтому к общим формулам (25. 7), (25. 8) для прогиба плиты под действием сосредоточенной силы и полагая в условиях закрепления (25. 9) $\beta_1 = 0$ и $\beta_2 = \gamma$, получим следующую систему уравнений для величин A_2 , B_1 , B_2 .*

$$\left. \begin{aligned} A_2 + \lambda B_2 &= 0, \\ A_2 \operatorname{ch} \lambda \gamma \sin \gamma + B_1 \operatorname{sh} \lambda \gamma \sin \gamma + B_2 \operatorname{sh} \lambda \gamma \cos \gamma &= \\ &= -K_\lambda (\gamma - \beta_0), \\ A_2 (\lambda \operatorname{sh} \lambda \gamma \sin \gamma + \operatorname{ch} \lambda \gamma \cos \gamma) + B_1 (\lambda \operatorname{ch} \lambda \gamma \sin \gamma + \\ + \operatorname{sh} \lambda \gamma \cos \gamma) + B_2 (\lambda \operatorname{ch} \lambda \gamma \cos \gamma - \operatorname{sh} \lambda \gamma \sin \gamma) &= \\ &= -K'_\lambda (\gamma - \beta_0). \end{aligned} \right\} \quad (27. 1)$$

Не оставаясь ввиду громоздкости выкладок на вычислении прогибов точек плиты, переходим к определению изгибающих моментов на заделанных краях, для чего находим вторые производные величины $w_\lambda(\beta)$ при $\beta = 0$ и $\beta = \gamma$:

$$w''_\lambda(0) = 2\lambda B_1, \quad (27. 2)$$

$$\begin{aligned} w''_\lambda(\gamma) &= A_2 (\lambda^2 \operatorname{ch} \lambda \gamma \sin \gamma + 2\lambda \operatorname{sh} \lambda \gamma \cos \gamma - \operatorname{ch} \lambda \gamma \sin \gamma) + \\ + B_1 (\lambda^2 \operatorname{sh} \lambda \gamma \sin \gamma + 2\lambda \operatorname{ch} \lambda \gamma \cos \gamma - \operatorname{sh} \lambda \gamma \sin \gamma) + B_2 (\lambda^2 \operatorname{sh} \lambda \gamma \cos \gamma - \\ - 2\lambda \operatorname{ch} \lambda \gamma \sin \gamma - \operatorname{sh} \lambda \gamma \cos \gamma) + K''_\lambda (\gamma - \beta_0). \end{aligned} \quad (27. 3)$$

Подставляя в (27. 2) и (27. 3) найденные из (27. 1) значения A_2 , B_1 , B_2 и применяя соотношение (26. 11), а также общую

* Величина A_1 из условия $w_\lambda(0) = 0$ сразу получается равной нулю.

формулу (25.11) для значений изгибающего момента при $\beta=0$ и $\beta=\gamma$ соответственно, получаем после выкладок

$$-\frac{M}{P} \Big|_{\beta=0} = \frac{\operatorname{ch} \alpha + 1}{\pi (\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0)} \times \int_0^{\infty} \frac{\sin \beta_0 \operatorname{sh} \lambda \gamma \operatorname{sh} \lambda (\gamma - \beta_0) - \lambda \sin \gamma \sin (\gamma - \beta_0) \operatorname{sh} \lambda \beta_0}{\operatorname{sh}^2 \lambda \gamma - \lambda^2 \sin^2 \gamma} \times \cos \lambda (\alpha - \alpha_0) d\lambda, \quad (27.4)$$

$$-\frac{M}{P} \Big|_{\beta=\gamma} = \frac{\operatorname{ch} \alpha + \cos \gamma}{\pi (\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0)} \times \int_0^{\infty} \frac{\sin (\gamma - \beta_0) \operatorname{sh} \lambda \gamma \operatorname{sh} \lambda \beta_0 - \lambda \sin \gamma \sin \beta_0 \operatorname{sh} \lambda (\gamma - \beta_0)}{\operatorname{sh}^2 \lambda \gamma - \lambda^2 \sin^2 \gamma} \times \cos \lambda (\alpha - \alpha_0) d\lambda. \quad (27.5)$$

В предельном случае $\gamma=\pi$, когда рассматриваемый сегмент превращается в полуплоскость с закрепленным краем, изгибаемую приложенной в точке (α_0, β_0) силой P , квадратуры в (27.4) и (27.5) выполняются и приводят к формулам*

$$\left. \begin{aligned} -\frac{M}{P} \Big|_{\beta=0} &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{(\operatorname{ch} \alpha + 1)(1 - \cos \beta_0)}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta_0}, \\ -\frac{M}{P} \Big|_{\beta=\pi} &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{(\operatorname{ch} \alpha - 1)(1 - \cos \beta_0)}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta_0}. \end{aligned} \right\} \quad (27.6)$$

Если перейти к декартовым координатам, то формулы (27.6) могут быть записаны в виде одного соотношения

$$-\frac{M}{P} \Big|_{y=0} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{y_0^2}{x^2 + y_0^2}, \quad (27.7)$$

где y_0 — ордината точки приложения силы [ср. (21.18)].

В табл. 14 приведены значения максимальных контурных моментов для сегментной плиты, нагруженной силой P в центре (середине высоты), причем положено $m_0 = -\frac{M}{P} \Big|_{\beta=0}$, $m_\gamma = -\frac{M}{P} \Big|_{\beta=\gamma}$; $\xi = \sin^2 \frac{\gamma}{2}$ — отношение высоты луночки H к ее диаметру $2R$ (рис. 5).

Что касается поведения изгибающих моментов в углах сегментной плиты, то можно показать, что они во всех случаях равны нулю.

* Здесь положено $\alpha_0=0$, что для случая полуплоскости не нарушает общности задачи.

В заключение рассмотрим еще случай сегментной плиты со свободно опертой хордой и закрепленной дугой. Легко видеть, что хорда $\beta=0$ сегментной плиты будет находиться в условиях свободного опирания, если рассмотреть плиту в виде симметричной луночки с тем же значением параметра γ , что

Таблица 14

	ξ			
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
$m_0 \dots$	0.161	0.158	0.129	0.0796
$m_\gamma \dots$	0.152	0.132	0.114	0.0796

и для рассматриваемого сегмента, изогнутой двумя противоположно направленными силами величины P , приложенными в точках $\alpha=\alpha_0$, $\beta=\pm\beta_0$ соответственно. В самом деле, прогиб симметричной луночки при указанном анти симметричном изгибе будет нечетной функцией координаты β и при $\beta=0$ обратится в нуль, а изгибающий момент на хорде, вычисляемый по формуле (25.10), при $\beta=0$ также будет равен нулю (так как $\rho|_{\beta \rightarrow 0} \rightarrow \infty$), а в этом и заключаются условия для свободно опертого края плиты.

Применяя относящиеся к данному случаю соотношения (26.7), можно прийти к следующей формуле:

$$-\frac{M}{P} \Big|_{\beta=\gamma} = \frac{\operatorname{ch} \alpha + \cos \gamma}{\pi(\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0)} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \frac{\sin(\gamma - \beta_0) \operatorname{sh} \lambda(\gamma + \beta_0) - \sin(\gamma + \beta_0) \operatorname{sh} \lambda(\gamma - \beta_0)}{\operatorname{sh} 2\lambda\gamma - \lambda \sin 2\gamma} \times$$

$$\times \cos \lambda(\alpha - \alpha_0) d\lambda, \quad (27.8)$$

дающей значение изгибающего момента на закрепленной дуге $\beta=\gamma$, при условии, что хорда $\beta=0$ свободно оперта, а внешней нагрузкой является сосредоточенная сила P , приложенная в произвольной точке (α_0, β_0) плиты.

При $\gamma = \frac{\pi}{2}$, когда сегмент является полукругом, имеем после взятия интегралов

$$-\frac{M}{P} \Big|_{\beta=\frac{\pi}{2}} = \frac{\operatorname{ch} \alpha \cos \beta_0}{\pi(\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0)} \cdot \frac{\sin 2\beta_0}{\operatorname{ch} 2(\alpha - \alpha_0) + \cos 2\beta_0}. \quad (27.9)$$

Если сила приложена по оси симметрии ($\alpha_0=0$), то максимальное значение момента на заделке будет $\frac{P}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\beta_0}{2}$.

§ 28. Изгиб полуплоскости с сегментной выемкой

Если на краю полуплоскости имеется выемка в виде кругового сегмента, то граница такой плиты состоит из координатной ливии $\beta = \pi$ (прямолинейный край) и дуги $\beta = \gamma < \pi$.

Мы рассмотрим два типа краевых условий, когда прямолинейная часть контура закреплена или свободно оперта, причем край выемки в обоих случаях считается заделанным.

Общее решение задачи изгиба рассматриваемой плиты с закрепленным краем под действием сосредоточенной силы дается формулами (25.7), (25.8), причем постоянные A_1, A_2, B_1, B_2 должны быть найдены из системы (25.9) при $\beta_1 = 0, \beta_2 = \gamma$.

Однако в данном случае можно легко показать, что решение рассматриваемой задачи непосредственно получается из решения задачи об изгибе кругового сегмента с закрепленным контуром (§ 27) заменой в выражении (25.8) для $w_\lambda(\beta)$ величины β на $\pi - \beta$, β_0 на $\pi - \beta_0$ и γ на $\pi - \gamma$. В самом деле, если заменить в формуле (25.8) величину β на $\pi - \beta$ и заметить, на основании (24.14) и (26.5), что

$$K_\lambda(\beta - \beta_0) = -K_\lambda[(\pi - \beta) - (\pi - \beta_0)],$$

$$K'_\lambda(\beta - \beta_0) = K'_\lambda[(\pi - \beta) - (\pi - \beta_0)],$$

то система уравнений (25.9) для рассматриваемого случая в точности перейдет в систему (27.1) предыдущего параграфа, если только в последней вместо величины γ подставить $\pi - \gamma$.

В частности, выражение для изгибающего момента на дуге $\beta = \gamma$ сразу получается из (27.5) указанной заменой*

$$\begin{aligned} -\frac{M}{P} \Big|_{\beta=\gamma} &= \frac{\operatorname{ch} \alpha + \cos \gamma}{\pi (\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0)} \times \\ &\times \int_0^\infty \frac{\lambda \sin \gamma \sin \beta_0 \operatorname{sh} \lambda (\gamma - \beta_0) - \sin (\gamma - \beta_0) \operatorname{sh} \lambda (\pi - \gamma) \operatorname{sh} \lambda (\pi - \beta_0)}{\operatorname{sh}^2 \lambda (\pi - \gamma) - \lambda^2 \sin^2 \gamma} \times \\ &\times \cos \lambda (\alpha - \alpha_0) d\lambda. \end{aligned} \quad (28.1)$$

Для полукруглой выемки ($\gamma = \frac{\pi}{2}$) нами произведены расчеты максимального значения изгибающего момента на контуре

* Множитель перед интегралом, не связанный с величиной $w_\lambda(\beta)$, остается при этом без изменения.

выемки, которое достигается при $\alpha = 0$ (сила P считается при этом приложенной в точке оси симметрии, т. е. принято $\alpha_0 = 0$),

$$m_{\frac{\pi}{2}} = -\frac{M}{P} \bigg|_{\substack{\beta=\gamma=\frac{\pi}{2} \\ \alpha=\alpha_0=0}} = \frac{y_0}{R} \times \\ \times \int_0^{\infty} \frac{\lambda \operatorname{sh} \lambda \left(\frac{\pi}{2} - \beta_0 \right) - \operatorname{ctg} \beta_0 \operatorname{sh} \frac{\lambda \pi}{2} \operatorname{sh} \lambda (\pi - \beta_0)}{\operatorname{sh}^2 \frac{\lambda \pi}{2} - \lambda^2} d\lambda; \quad (28.2)$$

здесь y_0 — ордината точки приложения силы, а R — радиус выемки, так что

$$\frac{y_0}{R} = \operatorname{tg} \frac{\beta_0}{2}. \quad (28.3)$$

Наряду с этим интерес представляет выемка в виде круга радиуса R , касающегося прямолинейного края, — случай, который может быть получен из формулы (28.1) предельным переходом $\gamma \rightarrow \pi$, причем одновременно и величина a также стремится к нулю таким образом, что радиус R остается конечным. При этом следует учесть, что величина β_0 тоже стремится к π , а условие конечности ординаты y_0 точки приложения силы приводит к соотношению $\frac{y_0}{2R} \approx \frac{\pi - \gamma}{\pi - \beta_0}$. Учитывая сказанное и вводя новую переменную интегрирования $\mu = \lambda (\pi - \gamma)$, получаем

$$m_{\frac{\pi}{2}} = -\frac{M}{P} \bigg|_{\substack{\beta=\gamma=\pi \\ \alpha=\alpha_0=0}} = \frac{y_0}{2R} \int_0^{\infty} \left[\mu \operatorname{sh} \left(\frac{2R}{y_0} - 1 \right) \mu - \right. \\ \left. - \left(1 - \frac{y_0}{2R} \right) \operatorname{sh} \mu \operatorname{sh} \frac{2R}{y_0} \mu \right] \frac{d\mu}{\operatorname{sh}^2 \mu - \mu^2}. \quad (28.4)$$

В табл. 15 даны значения $m_{\frac{\pi}{2}}$ и m_{π} для некоторых отношений $\frac{y_0}{R}$.

Рассуждениями, совершенно аналогичными приведенным в начале данного параграфа, можно показать, что решение задачи об изгибе плиты в виде полуплоскости со свободно опертым краем ($\beta = \pi$), содержащей закрепленную сегментную выемку ($\beta = \gamma$), получится из данного в конце § 27 решения соответствующей задачи для кругового сегмента с закрепленной дугой и свободно опертой хордой формальной заменой β на $\pi - \beta$, β_0 на $\pi - \beta_0$ и γ на $\pi - \gamma$ в выражении $\omega_{\lambda}(\beta)$ [см.

	$\frac{y_0}{R}$				
	2	3	4	5	∞
$m \frac{\pi}{2}$	1.57	1.95	2.26	2.40	3.07
m_{π}	—	1.97	2.58	3.24	3.999

формулу (25.8)]. В соответствии с этим из (27.8) сразу получаем для изгибающего момента на краю выемки следующую формулу:

$$-\frac{M}{P} \Big|_{\beta=\gamma} = \frac{\operatorname{ch} \alpha + \cos \gamma}{\pi (\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0)} \times \\ \times \int_0^{\infty} \frac{\sin (\beta_0 - \gamma) \operatorname{sh} (2\pi - \gamma - \beta_0) \lambda + \sin (\beta_0 + \gamma) \operatorname{sh} (\beta_0 - \gamma) \lambda}{\operatorname{sh} 2\lambda (\pi - \gamma) + \lambda \sin 2\gamma} \times \\ \times \cos \lambda (\alpha - \alpha_0) d\lambda. \quad (28.5)$$

Заметим еще, что при отрицательных значениях γ вместо выемки мы будем иметь сегментный выступ на краю полуплоскости, влияние которого на напряженное состояние изогнутой плиты с закрепленным краем можно было бы учесть, исходя из приведенной выше общей формулы (28.1). Аналогичным образом можно было бы рассмотреть влияние подобного выступа в том случае, когда прямолинейная часть контура находится в условиях свободного опирания.

§ 29. Смешанная задача изгиба полуплоскости

Результаты, полученные в предыдущих параграфах, позволяют дать в замкнутой форме решения некоторых смешанных задач об изгибе плиты в виде полуплоскости, когда граничные условия на конечном отрезке контура отличны от краевых условий на остальной части края.

Так, например, если участок края плиты длины $2a$ свободно оперт, а участки $y=0$, $|x| > a$ закреплены (рис. 19), то формула (27.11) при $\gamma=\pi$ сразу дает значение изгибающего момента на закрепленном краю $|x| > a$, возникающего при действии сосредоточенной силы P , приложенной в произвольной точке (α_0, β_0) ,

$$-\frac{M}{P} \Big|_{\beta=\pi} = \frac{(\operatorname{ch} \alpha - 1) \sin \beta_0}{\pi (\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0)} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \lambda \beta_0}{\operatorname{ch} \lambda \pi} \cos \lambda (\alpha - \alpha_0) d\lambda. \quad (29.1)$$

Вычисляя квадратуру, находим окончательно

$$-\frac{M}{P} \Big|_{\beta=\pi} = \frac{y_0}{a} \cdot \frac{\operatorname{ch} \alpha - 1}{\pi} \cdot \frac{\cos \frac{\beta_0}{2} \operatorname{ch} \frac{\alpha - \alpha_0}{2}}{\operatorname{ch}(\alpha - \alpha_0) + \cos \beta_0} \quad (29.2)$$

Точно таким же образом, полагая в (28.7) $\gamma = 0$, получим выражение

$$-\frac{M}{P} \Big|_{\beta=0} = \frac{y_0}{a} \cdot \frac{\operatorname{ch} \alpha + 1}{\pi} \cdot \frac{\sin \frac{\beta_0}{2} \operatorname{ch} \frac{\alpha - \alpha_0}{2}}{\operatorname{ch}(\alpha - \alpha_0) - \cos \beta_0} \quad (29.3)$$

дающее значения изгибающего момента на закрепленном участке $|x| < a$ края $y = 0$ полуплоскости, при условии, что

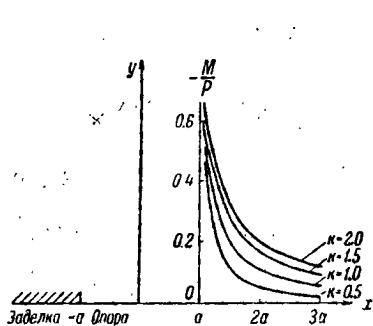


Рис. 19.

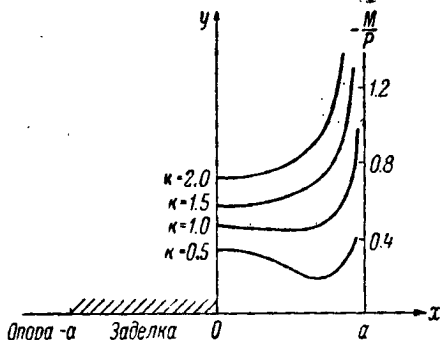


Рис. 20.

остальная часть контура свободно оперта (рис. 20), а сила P по-прежнему приложена в точке (α_0, β_0) .

На тех же рис. 19 и 20 построены графики соответствующих распределений контурных значений изгибающих моментов, причем сила P считается приложенной в точке оси симметрии $(x = 0, y = y_0)$ и принято $k = \frac{y_0}{a} = \operatorname{tg} \frac{\beta_0}{2} = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$.

§ 30. Луночная плита под равномерной нагрузкой

Поскольку построена функция Грина для задачи об изгибе плиты в виде круговой луночки с закрепленным контуром (§ 25), то решение задачи в случае любой внешней нагрузки получится интегрированием по области приложения нагрузки. Однако для простейших видов внешней нагрузки удобнее непосредственно находить частное решение неоднородного бигармонического уравнения.

В частности, для случая равномерно распределенной внешней нагрузки $q(\alpha, \beta) = q = \text{const}$ будем искать прогиб плиты $w(\alpha, \beta)$ в следующей форме: *

$$w = w_0 + \frac{qa^4}{16D(\text{ch } \alpha + \cos \beta)} \int_0^{\infty} w_\lambda(\beta) \cos \lambda \alpha d\lambda, \quad (30.1)$$

где

$$w_\lambda(\beta) = A_1(\lambda) \text{ch } \lambda \beta \cos \beta + A_2(\lambda) \text{ch } \lambda \beta \sin \beta + B_1(\lambda) \text{sh } \lambda \beta \sin \beta + B_2(\lambda) \text{sh } \lambda \beta \cos \beta, \quad (30.2)$$

причем за частное решение уравнения $\Delta^2 w = \frac{q}{D}$ примем выражение

$$w_0 = \frac{qa^4}{16D(\text{ch } \alpha + \cos \beta)^2}. \quad (30.3)$$

Переписывая (30.1) в форме

$$\frac{w}{h} = \frac{qa^3}{16D} \left[\frac{1}{\text{ch } \alpha + \cos \beta} + \int_0^{\infty} w_\lambda(\beta) \cos \lambda \alpha d\lambda \right] \quad \left(h = \frac{a}{\text{ch } \alpha + \cos \beta} \right) \quad (30.4)$$

и разлагая функцию $\frac{1}{\text{ch } \alpha + \cos \beta}$ в косинус-интеграл Фурье, находим

$$\frac{w}{h} = \frac{qa^3}{16D} \int_0^{\infty} \left[\frac{2 \text{sh } \lambda \beta}{\sin \beta \text{sh } \lambda \pi} + w_\lambda(\beta) \right] \cos \lambda \alpha d\lambda. \quad (30.5)$$

Условия закрепления дуг $\beta = \beta_i$, записанные в виде

$$\left(\frac{w}{h} \right)_{\beta=\beta_i} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{w}{h} \right)_{\beta=\beta_i} = 0, \quad (30.6)$$

приводят к равенствам

$$w_\lambda(\beta_i) = - \frac{2 \text{sh } \lambda \beta_i}{\sin \beta_i \text{sh } \lambda \pi}, \quad w'_\lambda(\beta_i) = - \frac{2}{\text{sh } \lambda \pi} \left(\frac{\text{sh } \lambda \beta}{\sin \beta} \right)'_{\beta=\beta_i}, \quad (30.7)$$

которые дают систему четырех линейных алгебраических уравнений для неизвестных величин A_1, A_2, B_1, B_2 .

Не рассматривая указанную систему в общем виде, обратимся сразу к некоторым частным случаям.

а) Симметричная круговая луночка ($\beta_2 = -\beta_1 = \gamma$). В этом случае в силу симметрии области по координате β величины A_2 и B_2 равны нулю, а для A_1 и B_1 имеем систему

* Очевидно, что прогиб w будет четной функцией координаты α .

$$\left. \begin{aligned} A_1 \operatorname{ch} \lambda \gamma \cos \gamma + B_1 \operatorname{sh} \lambda \gamma \sin \gamma &= -\frac{2 \operatorname{sh} \lambda \gamma}{\sin \gamma \operatorname{sh} \lambda \pi}, \\ A_1 (\lambda \operatorname{sh} \lambda \gamma \cos \gamma - \operatorname{ch} \lambda \gamma \sin \gamma) + B_1 (\lambda \operatorname{ch} \lambda \gamma \sin \gamma + \\ + \operatorname{sh} \lambda \gamma \cos \gamma) &= -\frac{2}{\operatorname{sh} \lambda \pi} \left[\frac{\lambda \operatorname{ch} \lambda \gamma}{\sin \gamma} - \frac{\operatorname{sh} \lambda \gamma \cos \gamma}{\sin^2 \gamma} \right]. \end{aligned} \right\} (30.8)$$

Решая систему (30.8) и подставляя найденные значения A_1 и B_1 в формулу (30.1) для прогиба плиты, после некоторых выкладок приходим к следующей расчетной формуле:

$$\begin{aligned} w(\alpha, \beta) &= \frac{qa^4}{8D(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)} \left[\frac{\sin^2 \gamma - \sin^2 \beta}{2 \sin^2 \gamma (\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)} - \right. \\ &- \frac{4 \cos \gamma}{\sin^2 \gamma} \int_0^{\infty} (\sin \gamma \cos \beta \operatorname{sh} \lambda \gamma \operatorname{ch} \lambda \beta - \sin \beta \cos \gamma \operatorname{sh} \lambda \beta \operatorname{ch} \lambda \gamma) \times \\ &\times \frac{\operatorname{sh} \lambda \gamma \cos \lambda \alpha d\lambda}{\operatorname{sh} \lambda \pi (\operatorname{sh} 2\lambda \gamma + \lambda \sin 2\gamma)}. \end{aligned} \quad (30.9)$$

При $\gamma = \frac{\pi}{2}$ получаем после вычисления квадратур

$$w = \frac{qa^4}{16D} \cdot \frac{\cos^2 \beta}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^2} \quad \text{или} \quad w = \frac{qa^4}{64D} \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2} \right)^2,$$

что совпадает с известным решением для случая изгиба круглой плиты с закрепленным краем под действием равномерной нагрузки.

б) Полукруглая плита * ($\beta_1 = 0, \beta_2 = \frac{\pi}{2}$). В этом случае система (30.7) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -\frac{2\lambda}{\operatorname{sh} \lambda \pi}, \quad B_1 \operatorname{sh} \frac{\lambda \pi}{2} + A_2 \operatorname{ch} \frac{\lambda \pi}{2} = -\frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\lambda \pi}{2}}, \\ A_2 + \lambda B_2 &= 0, \\ -A_1 \operatorname{ch} \frac{\lambda \pi}{2} + \lambda B_1 \operatorname{ch} \frac{\lambda \pi}{2} + \lambda A_2 \operatorname{sh} \frac{\lambda \pi}{2} - B_2 \operatorname{sh} \frac{\lambda \pi}{2} &= -\frac{\lambda}{\operatorname{sh} \frac{\lambda \pi}{2}}. \end{aligned} \right\} (30.10)$$

Приводим окончательную формулу для прогиба $w(\alpha, \beta)$ в произвольной точке плиты

$$\begin{aligned} w(\alpha, \beta) &= \frac{qa^4}{16D(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)} \left\{ \int_0^{\infty} \left[\cos \beta \operatorname{sh} \lambda \beta - \lambda \sin \beta \times \right. \right. \\ &\times \left. \left. \left(\operatorname{ch} \lambda \beta - \operatorname{cth} \frac{\lambda \pi}{2} \operatorname{sh} \lambda \beta \right) \right] \frac{\lambda \cos \lambda \alpha d\lambda}{\operatorname{sh}^2 \frac{\lambda \pi}{2} - \lambda^2} - \frac{\cos \beta \sin^2 \beta}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (30.11)$$

* Известно много приближенных решений этой задачи (см., например, [156]).

Прогиб центра плиты, где $\operatorname{tg} \frac{\beta_0}{2} = \frac{1}{2}$, выражается следующей квадратурой:

$$w_0 = w \Big|_{\substack{\alpha=0 \\ \beta=\beta_0}} = \frac{qa^4}{128D} \left\{ \int_0^{\infty} \left[3 \operatorname{sh} \lambda \beta_0 - 4\lambda \left(\operatorname{ch} \lambda \beta_0 - \operatorname{cth} \frac{\lambda \pi}{2} \operatorname{sh} \lambda \beta_0 \right) \right] \frac{\lambda d\lambda}{\operatorname{sh}^2 \frac{\lambda \pi}{2} - \lambda^2} - \frac{3}{4} \right\}. \quad (30.12)$$

Численный расчет дает $w_0 = 0.00201 \frac{qa^4}{D}$.

Нами произведены еще расчеты максимальных контурных значений изгибающих моментов по формулам

$$-\frac{M}{qa^2} \Big|_{\substack{\alpha=0 \\ \beta=0}} = \frac{1}{8} \left[\int_0^{\infty} \frac{\lambda^3 \operatorname{cth} \frac{\lambda \pi}{2} d\lambda}{\operatorname{sh}^2 \frac{\lambda \pi}{2} - \lambda^2} - \frac{1}{2} \right], \quad (30.13)$$

$$-\frac{M}{qa^2} \Big|_{\substack{\alpha=0 \\ \beta=\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{8} \left[2 - \int_0^{\infty} \frac{\lambda^2 \operatorname{ch} \frac{\lambda \pi}{2} d\lambda}{\operatorname{sh}^2 \frac{\lambda \pi}{2} - \lambda^2} \right]. \quad (30.14)$$

Численные значения этих максимальных моментов будут: на диаметре $-M_{\max} = 0.0732qa^2$, а на дуге $-M_{\max} = 0.0586qa^2$.

Часть II

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МЕЛЛИНА

Преобразованием Меллина заданной на промежутке $(0, \infty)$ функции $f(r)$ называется интеграл

$$f(p) = \int_0^{\infty} f(r) r^{p-1} dr, \quad (1)$$

где p — некоторое комплексное число, принадлежащее полюсе

$$\sigma_1 < \operatorname{Re} p < \sigma_2. \quad (2)$$

Достаточными условиями для существования преобразования Меллина являются кусочная непрерывность функции $f(r)$ в любом промежутке $0 < \rho \leq r \leq R < \infty$ и сходимость интегралов

$$\int_0^1 r^{\sigma_1-1} |f(r)| dr, \quad \int_1^{\infty} r^{\sigma_2-1} |f(r)| dr. \quad (3)$$

Если, кроме этого, функция $f(r)$ удовлетворяет условиям Дирихле в любом конечном промежутке, принадлежащем интервалу $(0, \infty)$, то имеет место формула обращения Меллина, представляющая функцию $f(r)$ через ее преобразование Меллина $f(p)$,

$$f(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} f(p) r^{-p} dp \quad (0 < r < \infty); \quad (4)$$

здесь путь (L) есть бесконечная прямая, параллельная мнимой оси плоскости комплексной переменной p и лежащая в полюсе (2).

Если поведение функции $f(r)$ известно как при $r \rightarrow 0$, так и при $r \rightarrow \infty$, то значения σ_1 и σ_2 находятся из требования абсолютной сходимости интеграла (1). Если же поведение $f(r)$ известно лишь вблизи одного из концов промежутка $(0, \infty)$, на-

пример при $r \rightarrow \infty$, то определяется величина σ_2 , и прямая (L) проводится левее прямой $\operatorname{Re} p = \sigma_2$, но правее ближайшей особой точки функции $f(p)$.

Более подробное изложение теории преобразования Меллина имеется, например, в книге [105].

Интегральное преобразование Меллина является эффективным способом получения точных решений ряда двумерных задач теории упругости для клиновидной области.

Во II части данной книги рассмотрены плоские задачи теории упругости для клина: первая, вторая и смешанная задачи, а также изгиб клиновидных плит при различных краевых условиях.

Глава V. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КЛИНА

§ 31. Первая основная задача теории упругости для клиновидной области

В настоящем параграфе с помощью интегрального преобразования Меллина дается точное решение плоской задачи теории упругости для бесконечного клина при задании на его границах внешних усилий.

Краевые задачи теории упругости для клиновидной области естественно решать в полярных координатах (r, θ) . В дальнейшем принимается, что клин ограничен лучами $\theta = \pm \alpha$ ($0 \leq r < \infty$).

В том случае, когда на контуре заданы напряжения, можно применять интегральное преобразование Меллина непосредственно к уравнениям статики

$$\left. \begin{aligned} r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \sigma_r - \sigma_\theta &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + r \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2\tau_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (31.1)$$

и к условиям сплошности

$$\Delta(\sigma_r + \sigma_\theta) = 0. \quad (31.2)$$

Введем преобразования $\bar{\sigma}_r$, $\bar{\sigma}_\theta$, $\bar{\tau}_{r\theta}$ напряжений σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ следующими формулами: *

$$\bar{\sigma}_r = \int_0^\infty \sigma_r r^p dr, \quad \bar{\sigma}_\theta = \int_0^\infty \sigma_\theta r^p dr, \quad \bar{\tau}_{r\theta} = \int_0^\infty \tau_{r\theta} r^p dr. \quad (31.3)$$

где p — соответствующим образом выбранное комплексное число.

* В этом параграфе, так же как и в § 37, форма преобразования Меллина несколько отличается от стандартной.

Если предположить, что напряжения на бесконечности имеют порядок $\frac{1}{r}$, а на ребре клина (при $r \rightarrow 0$) — порядок $r^{-\varepsilon}$ ($\varepsilon < 1$), то для обеспечения сходимости интегралов (31.3) достаточно считать, что переменная p меняется в пределах полосы

$$\varepsilon - 1 < \operatorname{Re} p < 0. \quad (31.4)$$

Умножая уравнения равновесия (31.3) на r^p , условие сплошности (31.2) — на r^{p+2} , интегрируя полученные равенства по переменной r в пределах от 0 до ∞ и применяя формулу интегрирования по частям, мы приходим к трем обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно преобразованных величин $\bar{\sigma}_r$, $\bar{\sigma}_\theta$, $\bar{\tau}_{r\theta}$:

$$\left. \begin{aligned} -p\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta + \bar{\tau}'_{r\theta} &= 0, \\ \bar{\sigma}'_\theta + (1-p)\bar{\tau}_{r\theta} &= 0, \\ \bar{\sigma}'_r + \bar{\sigma}''_\theta + (p+1)^2(\bar{\sigma}_r + \bar{\sigma}_\theta) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (31.5)$$

Выражая величины $\bar{\sigma}_r$ и $\bar{\sigma}_\theta$ через $\bar{\sigma}_\theta$ формулами

$$\bar{\sigma}_r = \frac{1}{p} \left(\frac{\bar{\sigma}''_\theta}{p-1} - \bar{\sigma}_\theta \right), \quad \bar{\tau}_{r\theta} = \frac{1}{p-1} \bar{\sigma}'_\theta, \quad (31.6)$$

для функции $\bar{\sigma}_\theta$ получим следующее уравнение четвертого порядка:

$$\bar{\sigma}_\theta^{\text{IV}} + [(p+1)^2 + (p-1)^2] \bar{\sigma}''_\theta + (p+1)^2(p-1)^2 \bar{\sigma}_\theta = 0. \quad (31.7)$$

Общий интеграл последнего уравнения

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_\theta &= A \cos(p+1)\theta + B \cos(p-1)\theta + \\ &+ C \sin(p+1)\theta + D \sin(p-1)\theta \end{aligned} \quad (31.8)$$

содержит четыре произвольные функции параметра p , которые надлежит определять из граничных условий, также предварительно подвергнутых преобразованию Меллина.

После того как величины $A(p)$, $B(p)$, $C(p)$, $D(p)$ будут найдены, решение задачи дается формулами обращения

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \bar{\sigma}_r r^{-p-1} dp, & \sigma_\theta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \bar{\sigma}_\theta r^{-p-1} dp, \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \bar{\tau}_{r\theta} r^{-p-1} dp, \end{aligned} \right\} \quad (31.9)$$

где за путь интегрирования (L) можно принять бесконечную прямую, параллельную мнимой оси плоскости комплексной переменной p и проходящую внутри полосы (31.4). Практически эту прямую следует проводить левее мнимой оси, но правее первой особой точки соответствующей подынтегральной функции (см. [54]).

Фактическое проведение выкладок удобно проводить, разбив предварительно поставленную задачу на две: симметричную и антисимметричную относительно средней плоскости $\theta = 0$ клина. При этом в каждом случае можно рассматривать лишь половину клина ($0 \leq \theta \leq \alpha$), учитывая соответствующие условия симметрии и ставя граничные условия на грани $\theta = \alpha$

$$\sigma_{\theta}|_{\theta=\alpha} = f(r), \quad \tau_{r\theta}|_{\theta=\alpha} = g(r), \quad (31.10)$$

или, после преобразования по Меллину,

$$\bar{\sigma}_r|_{\theta=0} = f = \int_0^{\infty} f(r) r^p dr, \quad \bar{\tau}_{r\theta}|_{\theta=\alpha} = g = \int_0^{\infty} g(r) r^p dr. \quad (31.11)$$

Начнем рассмотрение со случая напряженного состояния, симметричного относительно средней плоскости, когда напряжения σ_r и σ_{θ} являются четными, а $\tau_{r\theta}$ — нечетной функцией координаты θ .

В общем интеграле (31.8) в этом случае следует положить $C = D = 0$, после чего можно написать общие выражения для напряжений

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{p+3}{p-1} A \cos(p+1)\theta - B \cos(p-1)\theta, \\ \sigma_{\theta} &= A \cos(p+1)\theta + B \cos(p-1)\theta, \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{p+1}{p-1} A \sin(p+1)\theta - B \sin(p-1)\theta. \end{aligned} \right\} \quad (31.12)$$

Применение к выражениям $\bar{\sigma}_{\theta}$ и $\bar{\tau}_{r\theta}$ граничных условий (31.11) сразу дает нам следующую систему уравнений для A и B :

$$\left. \begin{aligned} A \cos(p+1)\alpha + B \cos(p-1)\alpha &= f, \\ -(p+1)A \sin(p+1)\alpha - (p-1)B \sin(p-1)\alpha &= \\ &= (p-1)g. \end{aligned} \right\} \quad (31.13)$$

Таким образом, после нахождения величин A и B точное решение поставленной задачи дается формулами (31.12) и (31.9).

В тех случаях, когда допустимо проведение численных расчетов по теореме о вычетах, необходимо иметь таблицу корней определителя системы (31.13), равного $\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha$.

Заметим, что путем замены переменных $2p\alpha = iz$ мы приходим к уравнению

$$\operatorname{sh} z + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} z = 0, \quad (31.14)$$

уже рассмотренному при решении аналогичной задачи для круговой луночки (см. главу III). Несколько первых корней

$z = \pm \sigma \pm i\tau$ этого уравнения при $\alpha = \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}$ приведены в табл. 10 (§ 13).

Аналогичным образом может быть решена и соответствующая антисимметричная задача, в которой напряжения σ_r и σ_θ нечетны, а $\tau_{r\theta}$ четно по переменной θ .

Полагая в (31.8) $A = B = 0$, находим

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_r &= -\frac{p+3}{p-1} C \sin(p+1)\theta - D \sin(p-1)\theta, \\ \bar{\sigma}_\theta &= C \sin(p+1)\theta + D \sin(p-1)\theta, \\ \bar{\tau}_{r\theta} &= \frac{p+1}{p-1} C \cos(p+1)\theta + D \cos(p-1)\theta. \end{aligned} \right\} (31.15)$$

Подстановка выражений $\bar{\sigma}_\theta$ и $\bar{\tau}_{r\theta}$ в условия (31.11) приводит к системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} C \sin(p+1)\alpha + D \sin(p-1)\alpha &= f, \\ -(p+1)C \cos(p+1)\alpha - (p-1)D \cos(p-1)\alpha &= \\ &= -(p-1)g \end{aligned} \right\} (31.16)$$

с определителем $\sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha$.

Замена переменных $2p\alpha = iz$ позволяет свести нахождение корней этого определителя к решению уравнения

$$\operatorname{sh} z - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} z = 0, \quad (31.17)$$

корни которого были даны в табл. 10 (§ 13).

Изложим теперь некоторые общие соображения, относящиеся к исследованию поведения напряжений в угловой точке клина.

Так как любое из трех напряжений может быть представлено формулой обращения

$$f(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} f(\theta, p) r^{-p-1} dp, \quad (31.18)$$

то для исследования поведения функции $f(r, \theta)$ при $r \rightarrow 0$ дополним прямую (L) влево полукругом некоторого радиуса $|p| = R$ и применим теорему о вычетах, предполагая, что f мероморфна и при $R \rightarrow \infty$ интеграл по полукругу стремится к нулю (эти предположения выполняются при сосредоточенных внешних нагрузках; см. § 32). Таким образом (см. § 2),

$$f(r, \theta) = \sum_{(n)} r^{a_n-1} [C_n(\theta) r^{ib_n} + \bar{C}_n(\theta) r^{-ib_n}], \quad (31.19)$$

где $p_n = -a_n + ib_n$ — корни уравнения

$$\sin 2p\alpha = \mp p \sin 2\alpha \quad (a_n > 0, b_n \geq 0) \quad (31.20)$$

(верхний знак относится к симметричной задаче, а нижний — к антисимметричной).

Выражение (31.19) показывает, что если все числа $a_n > 1$, то напряжения в углу клива стремятся к нулю; если же среди значений a_n есть хотя бы одно, меньшее единицы, то напряжения при приближении к угловой точке неограниченно возрастают. Заметим также, что $p_n = -1$ — корень уравнения (31.20) в антисимметричном случае — вообще не является особой точкой [см. (32.7)—(32.9)].

Разделяя в уравнении (31.20) вещественную и мнимую части, получаем в симметричном случае систему

$$\left. \begin{aligned} \sin 2\alpha_n \operatorname{ch} 2ab_n &= -a_n \sin 2\alpha, \\ \cos 2\alpha_n \operatorname{sh} 2ab_n &= -b_n \sin 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (31.21)$$

Исследование этой системы показывает, что при $0 < 2\alpha < \pi$ все значения a_n будут больше единицы, в то время как при $\pi < 2\alpha < 2\pi$ существует вещественный корень $p_n = -a_n$, причем $a_n < 1$. Таким образом, напряжения в углу клина при $2\alpha < \pi$ стремятся к нулю, а при $2\alpha > \pi$ — к бесконечности.

В антисимметричном случае вместо (31.21) имеем

$$\left. \begin{aligned} \sin 2\alpha_n \operatorname{ch} 2ab_n &= a_n \sin 2\alpha, \\ \cos 2\alpha_n \operatorname{sh} 2ab_n &= b_n \sin 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (31.22)$$

В этом случае оказывается, что при $0 < 2\alpha < 2\alpha^*$, где

$$\operatorname{tg} 2^* = 2\alpha^*, \quad 2\alpha^* \approx 275^\circ \approx 4.493, \quad (31.23)$$

для всех a_n будет выполняться неравенство $a_n > 1$. Если же $2\alpha^* < 2\alpha < 2\pi$, то имеется значение $a_n < 1$ ($b_n = 0$). Следовательно, в случае антисимметрично загруженного клина напряжения в углу будут стремиться к нулю при угле раствора, меняющемся до значения $2\alpha^*$, и только при $2\alpha > 2\alpha^*$ в окрестности угловой точки появятся неограниченно возрастающие напряжения. Разумеется, в общем случае загрузки разграничивающее значение угла будет равно 180° .

В предыдущем изложении предполагалось, что внешние усилия сосредоточены в точках $r = a$, $\theta = \pm\alpha$. Если же нагрузки $q(r)$ распределены по некоторому участку $b < r < c$ грани клина, то в соответствующих формулах [например, (32.2)] нужно заме-

нить величины Ra^p и Ta^p на интегралы типа $\int_b^c q(a) a^p da$, кото-

рые являются целыми функциями p , причем не нарушается и требование стремления к нулю интеграла по полукругу $R \rightarrow \infty$. Поэтому сделанные выше выводы о поведении напряжений при $r \rightarrow 0$ остаются справедливыми и в общем случае (по крайней мере для кусочно непрерывных нагрузок).

Заметим, что допущение возможности неограниченного возрастания напряжений в угловой точке клина (при $r \rightarrow 0$), а также наличие бесконечно удаленной точки ($r \rightarrow \infty$) требует видоизменения постановки подобных задач, а именно: искомые напряжения, кроме уравнений равновесия и граничных условий, должны удовлетворять еще некоторым условиям на бесконечности и в окрестности угловой точки клина (см. § 13).

§ 32. Равновесие клина, нагруженного сосредоточенной силой

Применим полученные результаты к конкретному случаю, когда внешняя нагрузка на клин сводится к сосредоточенной силе, приложенной в произвольной точке грани $\theta = \alpha$, что дает, по существу, функцию Грина для рассматриваемой задачи.

Если обозначить через $2P$ и $2T$ составляющие силы по осям полярных координат, то разбиению задачи на симметричную и антисимметричную относительно плоскости $\theta = 0$ будут соответствовать нагрузки, изображенные на рис. 21, (А) и (Б).

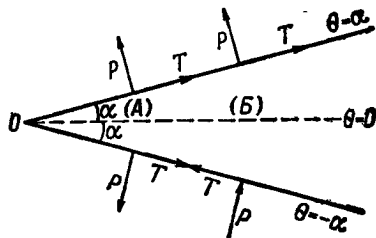


Рис. 21.

применяя формулы (31.11) и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, находим:

$$f = Pa^p, \quad g = Ta^p. \quad (32.1)$$

Решая при этих значениях f и g систему (31.13), подставляя найденные значения A и B в формулы (31.12) и применяя теорему обращения Меллина (31.9), находим после некоторых выкладок общие выражения для напряжений в симметричном случае в виде следующих комплексных интегралов:

$$\sigma_r = \frac{P}{2\pi i r} \int_{(L)} \frac{(p+3) \sin(p-1)\alpha \cos(p+1)\theta - (p+1) \sin(p+1)\alpha \cos(p-1)\theta}{\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha} \times \\ \times \left(\frac{a}{r}\right)^p dp + \frac{T}{2\pi i r} \times$$

$$\times \int_{(L)} \frac{(p+3) \cos(p-1)\alpha \cos(p+1)\theta - (p-1) \cos(p+1)\alpha \cos(p-1)\theta}{\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha} \times$$

$$\times \left(\frac{a}{r}\right)^p dp, \quad (32.2)$$

$$\sigma_\theta = \frac{P}{2\pi ir} \int \frac{(p+1) \sin(p+1)\alpha \cos(p-1)\theta - (p-1) \sin(p-1)\alpha \cos(p+1)\theta}{\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha} \times$$

$$\times \left(\frac{a}{r}\right)^p dp + \frac{T}{2\pi ir} \times$$

$$\times \int_{(L)} \frac{\cos(p+1)\alpha \cos(p-1)\theta - \cos(p-1)\alpha \cos(p+1)\theta}{\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha} \times$$

$$\times \left(\frac{a}{r}\right)^p (p-1) dp, \quad (32.3)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{P}{2\pi ir} \int_{(L)} \frac{\sin(p-1)\alpha \sin(p+1)\theta - \sin(p+1)\alpha \sin(p-1)\theta}{\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha} \times$$

$$\times \left(\frac{a}{r}\right)^p (p+1) dp + \frac{T}{2\pi ir} \times$$

$$\times \int_{(L)} \frac{(p+1) \cos(p-1)\alpha \sin(p+1)\theta - (p-1) \cos(p+1)\alpha \sin(p-1)\theta}{\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha} \times$$

$$\times \left(\frac{a}{r}\right)^p dp. \quad (32.4)$$

Из формул (32.3) и (32.4) видно, что, поскольку для входящих в них интегралов точка $p=0$ не является особой, путь интегрирования (L) может быть сдвинут на мнимую ось плоскости комплексной переменной p . При этом, как уже указывалось в предыдущем параграфе, замена переменных $2p\alpha = iz$ переводит знаменатель подынтегральных выражений в функцию $\operatorname{sh} z + z \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}$, корни которой табулированы. Это дает возможность проводить численные расчеты с помощью теоремы о вычетах, причем при $r < a$ ($r > a$) следует брать сумму вычетов в точках комплексной плоскости z , имеющих положительную (отрицательную) мнимую часть.

Что касается напряжения σ_r , даваемого формулой (32.2), то все сказанное выше остается в силе с той лишь разницей, что при сдвиге пути интегрирования на мнимую ось плоскости p следует учесть интеграл по полукругу малого радиуса $\delta \rightarrow 0$, окружающему слева точку $p=0$.

Выведем еще формулу для поперечного напряжения σ_θ на гранях клина, нагруженного нормальной силой P ($T=0$).

Из формул (32.2) и (32.3) можно получить следующее выражение для разности напряжений σ_r и σ_θ :

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \frac{P}{\pi i r} \int_{(L)} \frac{\sin(p-1)\alpha \cos(p+1)\theta - \sin(p+1)\alpha \cos(p-1)\theta}{\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha} \times \\ \times (p+1) \left(\frac{a}{r}\right)^p dp. \quad (32.5)$$

Так как при $\theta = \alpha$ напряжение σ_θ равно нулю (за исключением, конечно, особой точки $r = a$, где приложена сила P), то для искомого напряжения σ_r находим простое выражение:

$$\sigma_r|_{\theta=\alpha} = -\frac{P \sin 2\alpha}{\pi i r} \int_{(L)} \frac{p+1}{\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha} \left(\frac{a}{r}\right)^p dp. \quad (32.6)$$

Переходим теперь к случаю антисимметричного нагружения [рис. 21, (Б)].

Решая систему (31.16) с учетом (32.1), подставляя найденные величины C и D в формулы (31.15) для преобразованных напряжений $\bar{\sigma}_r$, $\bar{\sigma}_\theta$ и $\bar{\tau}_{r\theta}$ и применяя теорему обращения Меллина, находим

$$\sigma_r = \frac{P}{2\pi i r} \int_{(L)} \frac{(p+3) \cos(p-1)\alpha \sin(p+1)\theta - (p+1) \cos(p+1)\alpha \sin(p-1)\theta}{\sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha} \times \\ \times \left(\frac{a}{r}\right)^p dp + \frac{T}{2\pi i r} \times$$

$$\times \int_{(L)} \frac{(p-1) \sin(p+1)\alpha \sin(p-1)\theta - (p+3) \sin(p-1)\alpha \sin(p+1)\theta}{\sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha} \left(\frac{a}{r}\right)^p dp, \quad (32.7)$$

$$\sigma_\theta = \frac{P}{2\pi i r} \int_{(L)} \frac{(p+1) \cos(p+1)\alpha \sin(p-1)\theta - (p-1) \cos(p-1)\alpha \sin(p+1)\theta}{\sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha} \times \\ \times \left(\frac{a}{r}\right)^p dp + \frac{T}{2\pi i r} \times$$

$$\times \int_{(L)} \frac{\sin(p-1)\alpha \sin(p+1)\theta - \sin(p+1)\alpha \sin(p-1)\theta}{\sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha} \times \\ \times (p-1) \left(\frac{a}{r}\right)^p dp, \quad (32.8)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{P}{2\pi i r} \int_{(L)} \frac{\cos(p+1)\alpha \cos(p-1)\theta - \cos(p-1)\alpha \cos(p+1)\theta}{\sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha} \times \\ \times (p+1) \left(\frac{a}{r}\right)^p dp + \frac{T}{2\pi i r} \times$$

$$\times \int_{(L)} \frac{(p+1) \sin(p-1)\alpha \cos(p+1)\theta - (p-1) \sin(p+1)\alpha \cos(p-1)\theta}{\sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha} \left(\frac{a}{r}\right)^p dp. \quad (32.9)$$

Общие соображения, касающиеся возможности превращения этих комплексных интегралов в вещественные, а также способов их вычисления по теореме о вычетах, изложены выше.

Для вычислений напряжения σ_r на грани $\theta = \alpha$ в случае действия нормальной силы ($T = 0$) составляем, как и выше, разность напряжений σ_r и σ_θ , что приводит нас к следующему соотношению:

$$\sigma_r|_{\theta=\alpha} = \frac{P \sin 2\alpha}{\pi i r} \int_{(L)} \frac{p+1}{\sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha} \left(\frac{a}{r}\right)^p dp. \quad (32.10)$$

Численные данные, относящиеся к рассматриваемому случаю загрузки клина сосредоточенной силой, читатель может найти в работах [7, 68, 141].

В заключение настоящего параграфа рассмотрим некоторые предельные случаи, вытекающие из полученного решения.

При $a = 0$ мы имеем дело с клином, нагруженным в вершине. Очевидно, что при этом, не нарушая общности, можно рассмотреть только действие нормальной силы P , ибо при $a = 0$ симметричный случай приводит к силе величины $2P \sin \alpha$, действующей в средней плоскости $\theta = 0$ клина, а антисимметричный — к силе величины $2P \cos \alpha$, направленной перпендикулярно этой же плоскости.

Для осуществления предельного перехода $a \rightarrow 0$ в случае симметричного по θ напряженного состояния представим при $T = 0$ комплексные интегралы, входящие в формулы (32.2)—(32.4), в виде суммы вычетов в полюсах, расположенных правее мнимой оси. При этом все напряжения выразятся суммами, содержащими степени a^{2n} , где $p_0 = 0$, а p_n — корни уравнения

$$\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha = 0,$$

имеющие положительную вещественную часть. Таким образом, при предельном переходе $a \rightarrow 0$ в упомянутых суммах останутся только члены, соответствующие вычету в полюсе $p = 0$. Так как для напряжений σ_θ и $\tau_{r\theta}$ точка $p = 0$ вообще не является особой, то при $a = 0$

$$\sigma_\theta \equiv 0, \quad \tau_{r\theta} \equiv 0. \quad (32.11)$$

Подсчет вычета в формуле (32.2) для σ_r приводит к результату

$$\sigma_r = \frac{4P}{r} \cdot \frac{\sin \alpha \cos \theta}{\sin 2\alpha + 2\alpha}, \quad (32.12)$$

полностью совпадающему с известной формулой, получаемой обычно иным способом.

Аналогичный предельный переход в формулах (32.7)—(32.9) для антисимметричного случая также приводит к известным результатам

$$\sigma_\theta \equiv 0, \quad \tau_{r\theta} \equiv 0, \quad \sigma_r = \frac{4P}{r} \cdot \frac{\cos \alpha \sin \theta}{\sin 2\alpha - 2\alpha}. \quad (32.13)$$

Представляют также интерес предельные случаи $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $\alpha = \pi$, ибо при этом основные определители, входящие в знаменатели комплексных интегралов, становятся одночленными, их корни сразу находятся, и в ряде случаев решение выражается в явном виде через элементарные функции.

Случай $\alpha = \frac{\pi}{2}$ соответствует полуплоскости, для которой решение легко получается в декартовых координатах.

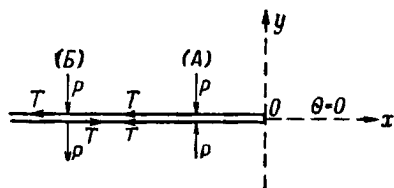


Рис. 22.

При $\alpha = \pi$ клин вырождается в плоскость с прямолинейным разрезом.* Можно показать, что в этом случае квадратуры в формулах для напряжений могут быть выполнены. Не останавливаясь на выкладках в общем виде, приведем один частный результат, а именно значения напряжений в средней плоскости $\theta = 0$.

В случае симметричного по θ напряженного состояния [рис. 22, (A)] подстановка значений $\alpha = \pi$ и $\theta = 0$ в основные формулы (32. 2)—(32. 4) приводит к таким комплексным интегралам:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r |_{\theta=0} &= -\frac{P}{2\pi i r} \int_{(L)} \left(\frac{a}{r}\right)^p \frac{dp}{\cos p\pi} - \frac{T}{\pi i r} \int_{(L)} \left(\frac{a}{r}\right)^p \frac{dp}{\sin p\pi}, \\ \sigma_\theta |_{\theta=0} &= -\frac{P}{2\pi i r} \int_{(L)} \left(\frac{a}{r}\right)^p \frac{dp}{\cos p\pi}. \end{aligned} \right\} (32. 14)$$

Переноса путь интегрирования на мнимую ось ($p = i\lambda$), используя известные значения квадратур

$$\int_0^\infty \frac{\cos \lambda \ln \frac{a}{r}}{\operatorname{ch} \pi \lambda} d\lambda = \frac{\sqrt{ar}}{r+a},$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin \lambda \ln \frac{a}{r}}{\operatorname{sh} \pi \lambda} d\lambda = \frac{1}{2} \frac{a-r}{a+r},$$

* Эта задача в работах [65, 142] была решена несколько иным способом.

а также вычисляя во втором слагаемом, входящем в значение σ_r , интеграл по полукругу радиуса δ , находим следующие явные выражения для искомых напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r|_{\theta=0} &= \frac{2T}{\pi(a+r)} - \frac{P}{\pi} \sqrt{\frac{a}{r}} \frac{1}{a+r}, \\ \sigma_\theta|_{\theta=0} &= -\frac{P}{\pi} \sqrt{\frac{a}{r}} \frac{1}{a+r}. \end{aligned} \right\} \quad (32.15)$$

Любопытно отметить, что значение нормального напряжения σ_θ в средней плоскости не зависит от величины внешнего касательного усилия T . Это означает, что в том случае, когда к берегам разреза приложены только касательные силы [в направлениях, указанных на рис. 22, (А)], в средней плоскости $\theta=0$ отсутствуют не только касательные напряжения $\tau_{r\theta}$, но и нормальные напряжения σ_θ . Таким образом, вся плоскость $y=0$ (за исключением, конечно, точек приложения внешних сил) оказывается свободной от напряжений, т. е. решение такой задачи просто совпадает с более простым решением первой краевой задачи для упругого полупространства (как верхнего, так и нижнего).

Приведем также аналогичные результаты для напряжений, возникающих в средней плоскости антисимметрично нагруженного неограниченного упругого тела, ослабленного плоским разрезом [рис. 22, (В)].

Полагая в общих формулах (32.7)—(32.9) $\alpha=\pi$, $\theta=0$, находим выражение для напряжения $\tau_{r\theta}$ в виде следующего комплексного интеграла (напряжения σ_r и σ_θ в средней плоскости отсутствуют):

$$\tau_{r\theta}|_{\theta=0} = -\frac{T}{2\pi ir} \int_{(L)} \left(\frac{a}{r}\right)^p \frac{dp}{\cos p\pi}. \quad (32.16)$$

Преобразование последнего интеграла к вещественному виду приводит к квадратуре, выражающейся через элементарные функции:

$$\tau_{r\theta}|_{\theta=0} = -\frac{T}{\pi} \sqrt{\frac{a}{r}} \frac{1}{a+r}. \quad (32.17)$$

Из того факта, что касательное напряжение в средней плоскости не зависит от приложенной нормальной силы P , вытекает следующее утверждение: если к берегам разреза приложены только одинаково направленные нормальные силы [см. рис. 22, (В)], то в средней плоскости тела, наряду с нормальными напряжениями σ_θ , равны нулю также и касательные напряжения $\tau_{r\theta}$. Таким образом, эта задача, по существу, совпадает с известной задачей Фламана о действии нормальной сосредоточенной силы на упругую полуплоскость.

§ 33. Решение второй основной задачи для клина

В данном параграфе, как и во всех следующих параграфах главы V, мы будем пользоваться решением уравнений плоской задачи теории упругости в полярных координатах в форме Папковича—Нейбера.

Приведем для случая плоской деформации выражения упругих перемещений u и v в направлении осей r и θ полярных координат через три функции Φ_0 , Φ_1 , Φ_2 Папковича—Нейбера*

$$\left. \begin{aligned} 2Gu &= \kappa (\Phi_1 \cos \theta + \Phi_2 \sin \theta) - \\ &- r \left(\cos \theta \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \sin \theta \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \right) - \frac{\partial \Phi_0}{\partial r}, \\ 2Gv &= \kappa (\Phi_2 \cos \theta - \Phi_1 \sin \theta) - \\ &- r \left(\cos \theta \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi_0}{\partial \theta}, \end{aligned} \right\} \quad (33.1)$$

где G — модуль сдвига, $\kappa = 3 - 4\nu$, ν — коэффициент Пуассона.

В случае плоского напряженного состояния достаточно в приведенных формулах произвести замену ν на $\frac{\nu}{\nu+1}$.

В настоящем параграфе с помощью интегрального преобразования Меллина будет дано точное решение задачи о плоской деформации клина в том случае, когда на его границах заданы значения упругих перемещений u и v .

Для удобства выкладок разобьем такую задачу, как обычно, на две отдельные задачи: симметричную и антисимметричную относительно средней плоскости клина. В соответствии с этим в каждой из таких задач мы будем считать, что клин занимает область $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq +\alpha$, и граничные условия ставить только на прямой $\theta = \alpha$, учитывая одновременно с этим соответствующие требования симметрии или антисимметрии напряженно-деформированного состояния относительно средней линии $\theta = 0$.

Прежде чем переходить к решению двух вышеупомянутых задач, заметим, что в данном параграфе мы будем принимать гармоническую функцию Φ_0 равной нулю.**

Таким образом, в случае первой задачи, симметричной относительно средней плоскости, требуется определить гармонические в клиновидной области функции Φ_1 и Φ_2 при граничных условиях

$$u|_{\theta=\alpha} = u_\alpha(r), \quad v|_{\theta=\alpha} = v_\alpha(r), \quad (33.2)$$

* См., например, [79], где соответствующие формулы выведены для любых ортогональных криволинейных координат.

** Известно, что в случае плоской задачи одна из трех функций Папковича—Нейбера может быть выбрана произвольно.

где u_α, v_α — заданные функции, причем связи перемещений u, v и функций Φ_1, Φ_2 таковы:

$$\left. \begin{aligned} 2Gu &= \kappa (\Phi_1 \cos \theta + \Phi_2 \sin \theta) - r \left(\cos \theta \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \sin \theta \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \right), \\ 2Gv &= \kappa (\Phi_2 \cos \theta - \Phi_1 \sin \theta) - \left(\cos \theta \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \right\} \quad (33.3)$$

В силу симметрии напряженно-деформированного состояния по переменной θ перемещение u является четной, а v — нечетной функцией координаты θ . Отсюда следует четность по переменной θ функции Φ_1 и нечетность функции Φ_2 .

Будем искать гармонические функции Φ_1 и Φ_2 в форме интегралов Меллина

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} A_1(p) \cos p\theta r^{-p} dp, \\ \Phi_2 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} A_2(p) \sin p\theta r^{-p} dp, \end{aligned} \right\} \quad (33.4)$$

где (L) — прямая, проведенная на плоскости комплексной переменной p параллельно мнимой оси внутри некоторой полосы, границы которой определяются в дальнейшем.

Остается определить функции $A_1(p)$ и $A_2(p)$ из граничных условий. Подставляя выражения (33.4) в формулы (33.2), мы приходим к двум следующим соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} (\kappa + p) [\cos \alpha \cos p\alpha A_1 + \sin \alpha \sin p\alpha A_2] r^{-p} dp &= 2Gu_\alpha(r), \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} [(p \cos \alpha \sin p\alpha - \kappa \sin \alpha \cos p\alpha) A_1 + \\ + (\kappa \cos \alpha \sin p\alpha - p \sin \alpha \cos p\alpha) A_2] r^{-p} dp &= 2Gv_\alpha(r). \end{aligned} \right\} \quad (33.5)$$

Если предположить, что заданные функции $u_\alpha(r)$ и $v_\alpha(r)$ разлагаются в интегралы Меллина

$$u_\alpha(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \tilde{u}_\alpha(p) r^{-p} dp, \quad v_\alpha(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \tilde{v}_\alpha(p) r^{-p} dp, \quad (33.6)$$

то мы приходим к линейной алгебраической системе для неизвестных величин A_1 и A_2

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha \cos p\alpha A_1 + \sin \alpha \sin p\alpha A_2 &= \frac{2G\tilde{u}_\alpha}{\kappa + p}, \\ (p \cos \alpha \sin p\alpha - \kappa \sin \alpha \cos p\alpha) A_1 + (\kappa \cos \alpha \sin p\alpha - \\ - p \sin \alpha \cos p\alpha) A_2 &= 2G\tilde{v}_\alpha \end{aligned} \right\} \quad (33.7)$$

с определителем, равным

$$\times \cos pa \sin pa - p \sin a \cos a.$$

Величины \bar{u}_α и \bar{v}_α , стоящие в правых частях системы (33. 7) и являющиеся преобразованиями Меллина от заданных на границах клина перемещений, могут быть найдены по известной формуле Меллина

$$\bar{u}_\alpha(p) = \int_0^\infty u_\alpha(r) r^{p-1} dr, \quad \bar{v}_\alpha(p) = \int_0^\infty v_\alpha(r) r^{p-1} dr. \quad (33. 8)$$

Если предположить, что на бесконечности перемещения имеют порядок $r^{-\delta}$, а на ребре клина ($r=0$) остаются ограниченными, то интегралы (33. 8) будут сходиться при условии

$$0 < \operatorname{Re} p < \delta, \quad (33. 9)$$

что и определяет границы полосы, заключающей в себе путь интегрирования (L) в исходных формулах (33. 4). Фактически прямую (L) следует проводить правее мнимой оси, но левее ближайшей особой точки.

При сделанных предположениях полное решение задачи дается формулами (33. 4), в которые следует подставить значения функций $A_1(p)$ и $A_2(p)$, найденных в результате решения системы (33. 7).

Для проведения расчетов в конкретных задачах часто можно пользоваться теоремой о вычетах, для чего необходимо иметь таблицы корней (вообще говоря, комплексных) определителя основной системы (33. 7). Делая замену $2pa = iz$, мы приходим к уравнению

$$\operatorname{sh} z - \frac{1}{3-4\nu} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} z = 0. \quad (33. 10)$$

С трансцендентными уравнениями сходного вида мы уже встречались в первой части настоящей книги; в частности, случай $\alpha=0$ имел место в симметричной задаче о равновесии полосы при задавии перемещений на ее контуре (см. § 3).

Корни уравнения (33. 10) для некоторых значений угла α и коэффициента Пуассона ν даны в табл. 16.

Рассмотрим теперь плоскую деформацию клина в случае, антисимметричном относительно средней плоскости.

Легко видеть, что гармонические функции Φ_1 и Φ_2 , через которые с помощью формул (33. 3) выражается решение поставленной задачи, в данном случае следует выбрать так:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(L_1)} B_1(p) \sin p\theta r^{-p} dp, \\ \Phi_2 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(L_2)} B_2(p) \cos p\theta r^{-p} dp. \end{aligned} \right\} \quad (33. 11)$$

Выкладки, аналогичные проведенным выше, приводят к следующей системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha \sin p\alpha B_1 + \sin \alpha \cos p\alpha B_2 &= \frac{2G\bar{u}_\alpha}{x+p}, \\ - (x \sin \alpha \sin p\alpha + p \cos \alpha \cos p\alpha) B_1 + \\ + (x \cos \alpha \cos p\alpha + p \sin \alpha \sin p\alpha) B_2 &= 2G\bar{v}_\alpha \end{aligned} \right\} \quad (33.12)$$

с определителем, пропорциональным выражению

$$\operatorname{sh} z + \frac{1}{3-4v} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} z \quad (2p\alpha = iz). \quad (33.13)$$

Корни соответствующего уравнения приведены в табл. 16.

Таблица 16

		$\operatorname{sh} z - \frac{z}{3-4v} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} = 0$							
		$\alpha = \frac{\pi}{8}$		$\alpha = \frac{\pi}{4}$		$\alpha = \frac{3\pi}{8}$		$\alpha = \frac{5\pi}{8}$	
		σ	τ	σ	τ	σ	τ	σ	τ
$v = \frac{1}{3}$	}	0	1.802	0	2.167	0	2.645	0	3.533
		2.128	7.573	1.761	7.613	0.8703	7.694	0	5.629
		2.727	13.94	2.374	13.97	1.585	14.02	0.5962	10.89
		3.096	20.27	2.746	20.28	1.976	20.32	1.235	17.19
		3.364	26.58	3.015	26.59	2.253	26.62	1.586	23.49
		—	—	—	—	—	1.839	29.78	
$v = \frac{1}{4}$	}	0	2.010	0	2.314	0	2.721	0	3.458
		1.936	7.954	1.562	7.634	0.5731	7.711	0	5.740
		2.541	13.96	2.186	13.98	1.382	14.03	0	10.74
		2.912	20.28	2.561	20.29	1.785	20.33	0	11.07
		3.181	26.58	2.832	26.60	2.066	26.62	1.009	17.20
		—	—	—	—	—	1.384	23.50	
		—	—	—	—	—	1.645	29.79	

		$\operatorname{sh} z + \frac{z}{3-4v} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} = 0$							
$v = \frac{1}{3}$	}	1.575	4.336	1.170	4.400	0	3.927	0	2.831
		2.473	10.77	2.116	10.80	0	5.114	0	7.169
		2.929	17.10	2.577	17.13	1.301	10.86	0	8.310
		3.239	23.42	2.890	23.44	1.801	17.17	0.9831	14.05
		3.475	29.73	3.127	29.74	2.125	23.47	1.428	20.34
		—	—	—	2.367	29.76	1.721	26.64	
$v = \frac{1}{4}$	}	1.365	4.370	0.9331	4.432	0	3.737	0	2.879
		2.286	10.78	1.925	10.81	0	5.351	0	6.960
		2.744	17.12	2.391	17.14	1.081	10.87	0	8.547
		3.055	23.43	2.705	23.44	1.606	17.18	0.7192	14.05
		3.292	29.74	2.943	29.75	1.935	23.48	1.217	20.35
		—	—	—	2.180	29.77	1.524	26.64	

$$\operatorname{sh} z - z \frac{1+\nu}{3-\nu} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} = 0, \quad \nu = \frac{1}{4}$$

$\alpha = \frac{\pi}{8}$		$\alpha = \frac{\pi}{4}$		$\alpha = \frac{3\pi}{8}$		$\alpha = \frac{5\pi}{8}$	
σ	τ	σ	τ	σ	τ	σ	τ
0	2.104	0	2.382	0	2.756	0	3.426
1.834	7.605	1.456	7.645	0.3521	7.720	0	5.790
2.444	13.96	2.088	13.98	1.273	14.03	0	10.45
2.816	20.28	2.464	20.30	1.683	20.33	0	11.37
3.085	26.59	2.735	26.60	1.966	26.63	0.8791	17.21
—	—	—	—	—	—	1.274	23.50
—	—	—	—	—	—	1.541	29.79

$$\operatorname{sh} z + z \frac{1+\nu}{3-\nu} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} = 0, \quad \nu = \frac{1}{4}$$

1.254	4.388	0.7952	4.448	0	3.665	0	2.902
2.187	10.79	1.824	10.82	0	5.446	0	6.882
2.647	17.12	2.294	17.14	0.9573	10.88	0	8.639
2.959	23.44	2.609	23.45	1.501	17.18	0.5492	14.06
3.196	29.74	2.847	29.75	1.835	23.48	1.101	20.35
—	—	—	—	2.082	29.77	1.418	26.64

Табл. 17 содержит корни уравнения

$$\operatorname{sh} z \mp z \frac{1+\nu}{3-\nu} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} z = 0, \quad (33.14)$$

необходимые для расчетов плоского напряженного состояния в клине при заданных перемещениях на его гранях (значения для случая $\nu = \frac{1}{3}$ не включены, так как они совпадают с данными табл. 16 при $\nu = \frac{1}{4}$).

После определения функций Папковича—Нейбера напряжения могут быть найдены по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
 \tau_r &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \theta^2} - r \left(\cos \theta \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} + \sin \theta \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial r^2} \right) + \\
 &+ 2(1-\nu) \left(\cos \theta \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \sin \theta \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \right) + \frac{2\nu}{r} \left(\cos \theta \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} - \sin \theta \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \right), \\
 \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \left(\cos \theta \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \theta^2} + \sin \theta \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \theta^2} \right) - (1-2\nu) \left(\cos \theta \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \right. \\
 &\quad \left. + \sin \theta \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \right) + \frac{2(1-\nu)}{r} \left(\cos \theta \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} - \sin \theta \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \right), \\
 \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi_0}{\partial \theta} \right) - \left(\cos \theta \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r \partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial r \partial \theta} \right) - (1-2\nu) \times \\
 &\quad \times \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} - \cos \theta \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \right) + \frac{2(1-\nu)}{r} \left(\cos \theta \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} \right),
 \end{aligned} \tag{33.15}$$

причем в данном случае следует положить $\Phi_0 \equiv 0$.

Из формул (33.4) и (33.15) видно, что любое из трех напряжений представляется комплексным интегралом вида

$$f(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} f(\theta, p) r^{-p-1} dp. \tag{33.16}$$

Для исследования поведения напряжений в угловой точке клина применим теорему о вычетах и представим напряжение $f(r, \theta)$ в виде [см. (31.19)]

$$f(r, \theta) = \sum_{(n)} r^{a_n-1} [d_n(\theta) r^{ib_n} + \bar{d}_n(\theta) r^{-ib_n}], \tag{33.17}$$

где $p_n = -a_n \pm ib_n$ — корни уравнения

$$\sin 2p\alpha \mp kp \sin 2\alpha = 0 \quad (a_n > 0, b_n \geq 0), \tag{33.18}$$

причем верхний знак относится к симметричному, нижний — к антисимметричному случаю, а величина k принимает значения $\frac{1}{3-4\nu}$ (плоская деформация) или $\frac{1+\nu}{3-\nu}$ (плоское напряженное состояние).

Разделение вещественной и мнимой частей в уравнении (33.18) приводит к следующей системе:

$$\left. \begin{aligned}
 \sin 2a_n \operatorname{ch} 2ab_n &= \pm ka_n \sin 2\alpha, \\
 \cos 2a_n \operatorname{sh} 2ab_n &= \pm kb_n \sin 2\alpha.
 \end{aligned} \right\} \tag{33.19}$$

Легко показать, что так как для всех значений $0 < \nu < \frac{1}{2}$ величина k остается меньше единицы, то при $2\alpha < \pi$ все $a_n > 1$. Если же $2\alpha > \pi$, то имеется корень $a_n < 1$ ($b_n = 0$). Таким образом, во второй основной задаче (как симметричной, так и антисимметричной) угол раствора клина, равный 180° , разграничивает углы, для которых напряжения при $r \rightarrow 0$ стремятся

к нулю, от углов, для которых напряжения при приближении к угловой точке клина неограниченно возрастают.

Отметим еще, что частные случаи $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $\alpha = \pi$ являются вырожденными в том смысле, что при этом клин превращается в полуплоскость или в неограниченную плоскость с разрезом. В указанных двух случаях уравнение (33.18) превращается в элементарное $\sin 2\alpha = 0$, корни которого не требуют специального табулирования. Решение задачи для первого случая (полуплоскость при заданных на границе перемещениях) легко получается в декартовых координатах. Второй из упомянутых вырожденных случаев рассматривается в следующем параграфе на примере одвой конкретной задачи.

§ 34. Растяжение неограниченного тела, содержащего жестко впаянную пластинку (плоская задача)

Одним из простых приложений лучевых выше результатов является задача о деформации неограниченного упругого тела, содержащего жестко впаянную полубесконечную неподвижную пластинку и подверженного растяжению сосредоточенной силой P (рис. 23).

Упругие перемещения u и v мы будем представлять в виде двух частей:

$$u = u_0 - u_1, \quad v = v_0 - v_1, \quad (34.1)$$

где величины

$$u_0 = -A \cos \theta \ln \rho, \quad v_0 = A \sin \theta \left(\frac{1}{x} + \ln \rho \right)$$

Рис. 23.

$$\left(A = \frac{xP}{8\pi G(1-\nu)}, \quad x = 3 - 4\nu, \quad \rho = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} \right) \quad (34.2)$$

являются перемещениями, создаваемыми сосредоточенной силой P в неограниченной плоскости.

На поверхности неподвижной пластинки ($\theta = \pm\pi$) полные перемещения u и v должны равняться нулю, что приводит нас к следующим граничным условиям для неизвестных перемещений u_1 и v_1 :

$$u_1|_{\theta=\pm\pi} = A \ln(r+a), \quad v_1|_{\theta=\pm\pi} = 0. \quad (34.3)$$

В дальнейшем перемещения u_1 и v_1 представляются через две гармонические функции Φ_1 и Φ_2 по формулам (33.3) предыдущего параграфа.

Рассматриваемая задача принадлежит, очевидно, к категории задач, симметричных относительно средней плоскости $\theta = 0$,

в связи с чем функции Φ_1 и Φ_2 выражаются следующими интегралами:

$$\Phi_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} A_1 \cos p\theta r^{-p} dp, \quad \Phi_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} A_2 \sin p\theta r^{-p} dp. \quad (34.4)$$

Подстановка (34.4) в граничные условия (33.3) дает при $\theta = \pi$

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_1|_{\theta=\pi} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} (\kappa + p) A_1 \cos p\pi r^{-p} dp, \\ 2Gv_1|_{\theta=\pi} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} (pA_1 + \kappa A_2) \sin p\pi r^{-p} dp. \end{aligned} \right\} \quad (34.5)$$

Второе из этих выражений с учетом граничного условия $v_1|_{\theta=\pi} = 0$ сразу приводит к связи

$$A_2 = -\frac{p}{\kappa} A_1. \quad (34.6)$$

Однако непосредственное применение первого краевого условия (34.3) невозможно, так как функция $\ln(r+a)$ не разлагается в интеграл меллиновского типа. С целью преодоления этого затруднения сперва продифференцируем первое из граничных условий (34.3) по параметру r . Имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} p(p+\kappa) A_1 \cos p\pi r^{-(p+1)} dp = \frac{2GA}{r+a}, \quad (34.7)$$

откуда по формуле обращения находим A_1

$$A_1 = \frac{2GA}{p(p+\kappa) \cos p\pi} \int_0^{\infty} \frac{r^p dr}{r+a} = -\frac{2\pi AGa^p}{p(p+\kappa) \sin p\pi \cos p\pi}. \quad (34.8)$$

Заметим, что условие (33.9) заменяется при этом на такое:

$$-1 < \operatorname{Re} p < \delta - 1. \quad (34.9)$$

Не останавливаясь на дальнейшем преобразовании полученного решения, обратимся к нахождению касательных напряжений в заделке. Исходя из общей формулы

$$\tau_{r\theta} = G \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \quad (34.10)$$

и замечая, что $v_0|_{\theta=\pi} = 0$, $\frac{\partial u_0}{\partial \theta}|_{\theta=\pi} = 0$, $v_1|_{\theta=\pi} = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta}|_{\theta=\pi} &= -\frac{1}{2r} \cdot \frac{\partial (2Gu_1)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\pi} = -\frac{1}{2r} \left[r \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r \partial \theta} + r \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} - \right. \\ &- \left. \kappa \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} + \Phi_2 \right) \right] \Big|_{\theta=\pi} = -\frac{\kappa + 1}{4r\kappa\pi i} \int_{(L)} p(p + \kappa) A_1 \sin p\pi r^{-p} dp = \\ &= \frac{(\kappa + 1)P}{16(1 - \nu)r\pi i} \int_{(L)} \left(\frac{a}{r} \right)^p \frac{dp}{\cos p\pi}. \end{aligned}$$

Из последнего выражения следует, что интегрирование можно производить по мнимой оси. Полагая $p = i\gamma$, находим

$$\tau_{r\theta}|_{\theta=\pi} = \frac{P}{2\pi r} \int_0^{\infty} \frac{\cos \gamma \ln \frac{r}{a}}{\operatorname{ch} \pi \gamma} d\gamma$$

или окончательно, после взятия квадратур,

$$\tau_{r\theta}|_{\theta=\pi} = \frac{P}{2\pi} \sqrt{\frac{a}{r}} \frac{1}{r + a}. \quad (34.11)$$

§ 35. Смешанная задача теории упругости для клина

Переходим теперь к применению преобразования Меллина к решению такой краевой задачи теории упругости для клиновидной области, когда на одной грани клина заданы перемещения, а на другой — напряжения.

Для решения указанной смешанной задачи нам потребуются выражения (33.1) упругих перемещений через четыре функции Папковича—Нейбера

$$\left. \begin{aligned} 2Gu &= \kappa(\Phi_1 \cos \theta + \Phi_2 \sin \theta) - r \left(\cos \theta \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \sin \theta \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \right) - \frac{\partial \Phi_0}{\partial r}, \\ 2Gv &= \kappa(\Phi_2 \cos \theta - \Phi_1 \sin \theta) - \left(\cos \theta \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi_0}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} (35.1)$$

($\kappa = 3 - 4\nu$),

а также соответствующие формулы (33.15) для упругих напряжений.

Для упрощения дальнейших выкладок предлагается заметить предвзятый выбор какой-либо из трех функций * не-

* Например, в § 33, когда на границе клина были заданы перемещения, представлялось удобным принять $\Phi_0 \equiv 0$.

которой связью между двумя функциями, а именно, считать функции Φ_1 и Φ_2 связанными условиями Коши—Римана

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} = -\frac{\partial \Phi_2}{\partial r}. \quad (35.2)$$

При этом зависимости (33.15) упрощаются и принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \theta^2} + 2 \left(\cos \theta \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \sin \theta \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \right) - \\ &\quad - r \left(\cos \theta \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} + \sin \theta \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial r^2} \right), \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial r^2} + \left(\cos \theta \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \sin \theta \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{r} \left(\cos \theta \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \theta^2} + \sin \theta \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \theta^2} \right), \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi_0}{\partial \theta} \right) + \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} - \cos \theta \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \right) - \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial r} \left(\cos \theta \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \right\} \quad (35.3)$$

В соответствии с равенствами (35.2) мы примем, что гармонические функции Φ_0 , Φ_1 и Φ_2 могут быть представлены следующими комплексными интегралами:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} [A_0(p) \cos(p-1)\theta + B_0(p) \sin(p-1)\theta] r^{1-p} dp, \\ \Phi_1 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} [A_1(p) \cos p\theta + B_1(p) \sin p\theta] r^{-p} dp, \\ \Phi_2 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} [-A_1(p) \sin p\theta + B_1(p) \cos p\theta] r^{-p} dp, \end{aligned} \right\} \quad (35.4)$$

причем положение прямой (L) , параллельной мнимой оси плоскости комплексной переменной p , будет установлено несколько позднее.

Неизвестные функции $A_0(p)$, $B_0(p)$, $A_1(p)$, $B_1(p)$ должны быть найдены из граничных условий задачи.

Предположим, что на грани $\theta=0$ заданы значения перемещений (u, v) , а на другой грани ($\theta=\alpha$) — значения напряжений $(\sigma_\theta, \tau_{r\theta})$. Тогда краевые условия имеют вид

$$u|_{\theta=0} = u_0(r), \quad v|_{\theta=0} = v_0(r), \quad \sigma_\theta|_{\theta=\alpha} = \sigma(r), \quad \tau_{r\theta}|_{\theta=\alpha} = \tau(r). \quad (35.5)$$

Подставляя комплексные интегралы (35.4), через которые представляются функции напряжений Φ_0 , Φ_1 , Φ_2 , в формулы (35.1)

и (35.3) для перемещений и напряжений, а затем полученные выражения — в граничные условия (35.5), мы приходим к четырем соотношениям такого вида:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} [(p-1)A_0 + (p+\kappa)A_1] r^{-p} dp &= 2Gu_0(r), \\
 \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} [-(p-1)B_0 + (\kappa-p)B_1] r^{-p} dp &= 2Gv_0(r), \\
 \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} p(p-1)[A_0 \cos(p-1)\alpha + B_0 \sin(p-1)\alpha + \\
 &+ \cos\alpha(A_1 \cos p\alpha + B_1 \sin p\alpha) - \\
 &- \sin\alpha(A_1 \sin p\alpha - B_1 \cos p\alpha)] r^{-p-1} dp = \sigma(r), \\
 \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} p\{(p-1)[-A_0 \sin(p-1)\alpha + B_0 \cos(p-1)\alpha] - \\
 &- (p+1)\sin\alpha(A_1 \cos p\alpha + B_1 \sin p\alpha) - \\
 &- (p+1)\cos\alpha(A_1 \sin p\alpha - B_1 \cos p\alpha)\} r^{-p-1} dp = \tau(r).
 \end{aligned} \right\} (35.6)$$

Предположим, как это было сделано в § 33, что заданные функции $u_0(r)$, $v_0(r)$, $\sigma(r)$, $\tau(r)$ могут быть разложены в комплексные интегралы следующего вида:

$$u_0(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \bar{u}_0(p) r^{-p} dp, \quad v_0(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \bar{v}_0(p) r^{-p} dp, \quad (35.7)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma(r) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \bar{\sigma}(p+1) r^{-p-1} dp, \\
 \tau(r) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \bar{\tau}(p+1) r^{-p-1} dp,
 \end{aligned} \right\} (35.8)$$

причем в последних двух формулах введены величины $\bar{\sigma}(p+1)$ и $\bar{\tau}(p+1)$ для того, чтобы можно было пользоваться интегралами Меллина в стандартной форме

$$f(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} f(p) r^{-p} dp, \quad f(p) = \int_0^{\infty} f(r) r^{p-1} dr. \quad (35.9)$$

Подстановка выражений (35.7) и (35.8) в правые части соотношений (35.6) приводит к следующей системе двух линейных

алгебраических уравнений относительно неизвестных величин $A_1(p)$ и $A_2(p)$:

$$\left. \begin{aligned} & [(p-1) \cos(p+1)\alpha - (x+p) \cos(p-1)\alpha] A_1 + \\ & + [(p-1) \sin(p+1)\alpha + (x-p) \sin(p-1)\alpha] B_1 = \\ = & \frac{\bar{\sigma}(p+1)}{p} - 2G\bar{u}_0(p) \cos(p-1)\alpha + 2G\bar{v}_0(p) \sin(p-1)\alpha, \\ & [-(p+1) \sin(p+1)\alpha + (x+p) \sin(p-1)\alpha] A_1 + \\ & + [(p+1) \cos(p+1)\alpha + (x-p) \cos(p-1)\alpha] B_1 = \\ = & \frac{\tau(p+1)}{p} + 2G\bar{u}_0(p) \sin(p-1)\alpha + 2G\bar{v}_0(p) \cos(p-1)\alpha, \end{aligned} \right\} (35.10)$$

причем значения двух других неизвестных $A_0(p)$ и $B_0(p)$ даются следующими формулами:

$$A_0 = 2G \frac{\bar{u}_0(p)}{p-1} - \frac{x+p}{p-1} A_1, \quad B_0 = -2G \frac{\bar{v}_0(p)}{p-1} + \frac{x-p}{p-1} B_1. \quad (35.11)$$

Правые части системы (35.10) могут считаться известными, так как входящие туда преобразованные по Меллину граничные значения перемещений и напряжений даются известными формулами:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_0(p) &= \int_0^{\infty} u_0(r) r^{p-1} dr, & \bar{v}_0(p) &= \int_0^{\infty} v_0(r) r^{p-1} dr, \\ \bar{\sigma}(p+1) &= \int_0^{\infty} \sigma(r) r^p dr, & \bar{\tau}(p+1) &= \int_0^{\infty} \tau(r) r^p dr. \end{aligned} \right\} (35.12)$$

Исследование сходимости последних интегралов дает возможность указать ту полосу на плоскости комплексной переменной p , в которой должен помещаться путь интегрирования (L).

Если предположить, как обычно, что на бесконечности ($r \rightarrow \infty$) порядок убывания перемещений будет $r^{-\delta}$ ($\delta > 0$), а напряжений — $r^{-1-\delta}$, то интегралы (35.12) сходятся на верхнем пределе при условии, что $\operatorname{Re} p < \delta$. Далее, условие ограниченности перемещений на ребре ($r \rightarrow 0$) приводит к требованию $\operatorname{Re} p > 0$ сходимости тех же интегралов на нижнем пределе.* Следовательно, на пути интегрирования (L) в основных формулах (35.4) должно выполняться условие

$$0 < \operatorname{Re} p < \delta. \quad (35.13)$$

Таким образом, точное решение поставленной задачи дается формулами (35.4), в которые следует подставить значения вели-

* Напряжения на ребре могут и возрастать, но не быстрее, чем величина порядка $r^{-\epsilon}$ ($\epsilon < 1$).

чин A_0, B_0, A_1, B_1 , найденные из системы (35.10) и соотношений (35.11).

Определитель основной системы (35.10) имеет вид

$$D(p) = 4x \sin^2 pa + 4p^2 \sin^2 a - (x+1)^2, \quad (35.14)$$

и нахождение его корней после замены переменных

$$2pa = iz \quad (35.15)$$

равносильно решению такого уравнения:

$$\operatorname{ch} z + \frac{1}{2(3-4\nu)} \cdot \frac{\sin^2 a}{a^2} z^2 + \frac{4(1-\nu)^2 + (1-2\nu)^2}{3-4\nu} = 0. \quad (35.16)$$

Корни последнего уравнения для значений угла $\alpha = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ и коэффициента Пуассона $\nu = \frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$ приведены в табл. 18.

Таблица 18

		$\operatorname{ch} z + \frac{1}{2(3-4\nu)} \cdot \frac{\sin^2 a}{a^2} z^2 + \frac{4(1-\nu)^2 + (1-2\nu)^2}{3-4\nu} = 0$							
		$\alpha = \frac{\pi}{4}$		$\alpha = \frac{\pi}{2}$		$\alpha = \frac{3\pi}{4}$		$\alpha = \frac{5\pi}{4}$	
		σ	τ	σ	τ	σ	τ	σ	τ
$\nu = \frac{1}{3}$	{	0	1.864	0	2.168	0	2.759	0.275	3.203
		2.749	5.185	1.832	5.377	0	3.908	0	8.330
		4.326	11.85	3.582	11.95	0	7.470	0	11.05
		5.160	18.29	4.440	18.36	1.774	12.15	0	13.46
		5.720	24.68	4.713	24.75	2.817	18.51	1.468	18.59
		—	—	—	—	3.461	24.82	2.295	24.90
$\nu = \frac{1}{4}$	{	0	2.014	0	2.340	0.196	3.289	0.577	3.191
		2.504	5.223	1.491	5.399	0	7.751	0	8.568
		4.128	11.87	3.375	11.97	1.433	12.16	0	10.66
		4.966	18.31	4.248	18.38	2.590	18.52	0	13.83
		5.535	24.69	4.832	24.74	3.349	24.86	1.043	18.60
		—	—	—	—	—	—	2.029	24.91

Для той же смешанной задачи в случае плоского напряженного состояния уравнение (35.16) заменяется следующим:

$$\operatorname{ch} z + \frac{1+\nu}{2(3-\nu)} \cdot \frac{\sin^2 a}{a^2} z^2 + \frac{4+(1-\nu)^2}{4-(1-\nu)^2} = 0, \quad (35.17)$$

корни которого для $\nu = \frac{1}{4}$ даны в табл. 19 (при $\nu = \frac{1}{3}$ они совпадают с данными табл. 18 для $\nu = \frac{1}{4}$).

$$\operatorname{ch} z + \frac{1+\nu}{2(3-\nu)} \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} z^2 + \frac{4+(1-\nu)^2}{4-(1-\nu)^2} = 0, \quad \nu = \frac{1}{4}$$

$\alpha = \frac{\pi}{4}$		$\alpha = \frac{\pi}{2}$		$\alpha = \frac{3\pi}{4}$		$\alpha = \frac{5\pi}{4}$	
σ	τ	σ	τ	σ	τ	σ	τ
0	2.106	0	2.454	0.492	3.270	-0.710	3.185
2.365	5.237	1.263	5.400	0	7.903	0	8.727
4.024	11.88	3.263	11.98	1.205	12.16	0	10.45
4.872	18.32	4.143	18.38	2.458	18.52	0	14.02
5.438	24.69	4.734	24.75	3.142	24.85	0.705	18.59
—	—	—	—	—	—	1.872	24.92

Для исследования поведения напряжений в угловой точке клина необходимо, вообще говоря, разделить в уравнении (35. 16) или (35. 17) вещественную и мнимую части, положить $z = 2\alpha(\lambda + i)^*$ и, исключая значение параметра λ , найти величину угла раствора клина α^* , разграничивающего углы, при которых напряжения при $r \rightarrow 0$ стремятся к нулю, от углов, для которых при $r \rightarrow 0$ напряжения стремятся к бесконечности. При этом величина α^* будет, конечно, зависеть от значения коэффициента Пуассона. Однако в данном случае оказывается, что $\lambda = 0$, и для α^* получается явное выражение: $\alpha^* = \operatorname{arcsin} \sqrt{1 - \nu}$

в случае плоской деформации и $\alpha^* = \operatorname{arcsin} \frac{1}{\sqrt{1 + \nu}}$ для плоского напряженного состояния. Таким образом, в первом случае при $\nu = \frac{1}{3}$ $\alpha^* = 0.9553$ и при $\nu = \frac{1}{4}$ $\alpha = \frac{\pi}{3}$, а во втором случае $\alpha^* = \frac{\pi}{3}$ и $\alpha^* = 1.107$ (при $\nu = \frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$ соответственно).

§ 36. Действие сосредоточенной силы на клин с закрепленной гранью

В качестве приложения рассмотрим задачу о распределении напряжений в клине, закрепленном по грани $\theta = 0$ и нагруженном в произвольной точке $r = a$, $\theta = \alpha$ другой грани нормальной сосредоточенной силой (рис. 24).

* Этому значению z соответствует $p = \frac{iz}{2a} = -1 + i\lambda$, т. е. $\operatorname{Re} p = -1$ [ср. (31. 19)]. Такой расчет произведен в § 41.

Чтобы получить решение задачи в этом случае, нужно в общих формулах § 35 положить $u_0 = v_0 = \tau = 0$, а функцию $\sigma(r)$ определять в результате предельного перехода для случая нагрузки, распределенной по малому участку грани $\theta = \alpha$, заключающему точку $r = a$.

В результате решения основной системы (35.10) получаем

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{Pa^p}{pD(p)} [2p \sin \alpha \sin pa - \cos(p+1)\alpha - x \cos(p-1)\alpha], \\ B_1 &= \frac{Pa^p}{pD(p)} [-2p \sin \alpha \cos pa - \sin(p+1)\alpha + x \sin(p-1)\alpha], \end{aligned} \right\} (36.1)$$

причем определитель $D(p)$ дается формулой (35.14), а величины A_0 и B_0 выражаются через A_1 и B_1 следующим образом [см. (35.11)]:

$$A_0 = -\frac{x+p}{p-1} A_1, \quad B_0 = \frac{x-p}{p-1} B_1. \quad (36.2)$$

Не останавливаясь на преобразовании полученного общего решения, составим выражение для напряжений в заделанной грани.

Для нормального напряжения имеем из (35.3)

$$\sigma_0|_{\theta=0} \equiv \sigma_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} p(p-1)(A_1 + A_0)r^{-p-1} dp$$

или, после преобразований,

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= (x+1) \frac{P}{r} \cdot \frac{1}{2\pi i} \times \\ &\times \int_{(L)} \frac{\cos(p+1)\alpha + x \cos(p-1)\alpha - 2p \sin \alpha \sin pa}{4x \sin^2 pa + 4p^2 \sin^2 \alpha - (x+1)^2} \left(\frac{a}{r}\right)^p dp. \end{aligned} \quad (36.3)$$

Поскольку здесь за путь интегрирования может быть взята мнимая ось плоскости комплексной переменной p , то после подстановки $2pa = i\mu$ получаем искомое напряжение в виде следующего вещественного интеграла:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \frac{P(x+1)}{4\pi xar} \int_0^\infty \left\{ -\left[(x+1) \cos \alpha \operatorname{ch} \frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{a} \sin \alpha \operatorname{sh} \frac{\mu}{2} \right] \times \right. \\ &\times \left. \cos \frac{\mu \ln \frac{r}{a}}{2\alpha} + (x-1) \sin \alpha \operatorname{sh} \frac{\mu}{2} \sin \frac{\mu \ln \frac{r}{a}}{2\alpha} \right\} \frac{d\mu}{f(\mu)}, \end{aligned} \quad (36.4)$$

$$f(\mu) = \operatorname{ch} \mu + \frac{\mu^2}{2(3-4\nu)} \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{a^2} + \frac{4(1-\nu)^2 + (1-2\nu)^2}{3-4\nu}. \quad (36.5)$$

Таким же образом приходим к формуле для касательного напряжения в заделке

$$\begin{aligned} \tau_0 \equiv \tau_{r\theta} |_{\theta=0} = \frac{P}{4\pi\kappa ar} \int_0^{\infty} \left\{ \left[(x+1)^2 \sin \alpha \operatorname{ch} \frac{\mu}{2} + \right. \right. \\ \left. \left. + (1-x) \frac{\mu}{a} \cos \alpha \operatorname{sh} \frac{\mu}{2} \right] \cos \frac{\mu \ln \frac{r}{a}}{2a} + \left[(x^2-1) \cos \alpha \operatorname{sh} \frac{\mu}{2} + \right. \right. \\ \left. \left. + (x+1) \frac{\mu}{a} \sin \alpha \operatorname{ch} \frac{\mu}{2} \right] \sin \frac{\mu \ln \frac{r}{a}}{2a} \right\} \frac{d\mu}{f(\mu)}. \quad (36.6) \end{aligned}$$

Представляет интерес рассмотреть предельный случай $\alpha = \pi$, соответствующий задаче о равновесии упругой полуплоскости

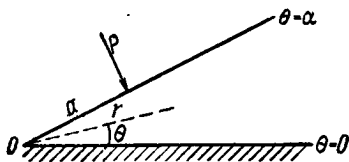


Рис. 24.

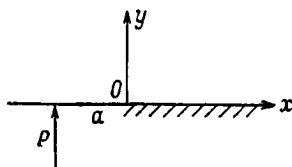


Рис. 25.

($y \geq 0$), заделанной по части границы $x > 0$ ($\theta = 0$) и нагруженной нормальной силой P в произвольной точке $x = a$ остальной части границы ($x < 0$ или $\theta = \pi$) (рис. 25). При этом основной определитель принимает вид двучлена $\operatorname{ch} \mu + \operatorname{const}$, что позволяет в ряде случаев выполнить квадратуры и выразить некоторые из искоемых величин через элементарные функции. В частности, формулы (36.4) и (36.6) для напряжений на заделанной грани принимают вид

$$\sigma_0 = \frac{P(x+1)^2}{4\pi^2\kappa r} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{\mu}{2} \cos \frac{\mu \ln \frac{r}{a}}{2\pi}}{\operatorname{ch} \mu + \operatorname{ch} \psi} d\mu \quad (36.7)$$

$$(x = 3 - 4\nu),$$

$$\begin{aligned} \tau_0 = \frac{P(x-1)}{4\pi^2\kappa r} \int_0^{\infty} \left[\frac{\mu}{\pi} \cos \frac{\mu \ln \frac{r}{a}}{2\pi} - (x+1) \sin \frac{\mu \ln \frac{r}{a}}{2\pi} \right] \times \\ \times \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu}{2}}{\operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \psi} d\mu, \quad \operatorname{ch} \psi = \frac{x^2 + 1}{2x}. \quad (36.8) \end{aligned}$$

Выполняя квадратуры в (36.7) и (36.8) с помощью формул (см. [94])

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{\mu}{2} \cos \mu \xi}{\operatorname{ch} \mu + \operatorname{ch} \psi} d\mu = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\cos \psi \xi}{\operatorname{ch} \frac{\psi}{2} \operatorname{ch} \pi \xi}, \quad (36.9)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu}{2} \sin \mu \xi}{\operatorname{ch} \mu + \operatorname{ch} \psi} d\mu = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin \psi \xi}{\operatorname{sh} \frac{\psi}{2} \operatorname{ch} \pi \xi}, \quad (36.10)$$

приходим к окончательному результату

$$\sigma_0 = \frac{2P(1-\nu)}{\pi\sqrt{3-4\nu}} \sqrt{\frac{a}{r}} \frac{\cos \frac{\psi}{\pi} \ln \sqrt{\frac{a}{r}}}{a+r}, \quad \psi = \ln(3-4\nu), \quad (36.11)$$

$$\tau_0 = \frac{P}{2\pi\sqrt{3-4\nu}} \sqrt{\frac{a}{r}} \frac{1}{a+r} \left\{ \frac{\psi}{\pi} \cos \frac{\psi}{\pi} \ln \sqrt{\frac{a}{r}} - \right. \\ \left. - \left[\frac{a-r}{a+r} + 4(1-\nu) \right] \sin \frac{\psi}{\pi} \ln \sqrt{\frac{a}{r}} \right\}. \quad (36.12)$$

Наконец, в предельном случае $a=2\pi$ мы имеем дело с неограниченным упругим телом, разрезанным вдоль плоскости

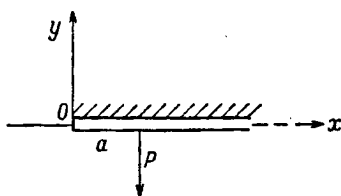


Рис. 26.

$\theta=0$, причем верхний берег разреза жестко закреплен, а к нижнему приложена нормальная сосредоточенная сила (рис. 26).

Вычисление нормальных напряжений в заделке по формуле (36.4) приводит к такой квадратуре:

$$\sigma_0 = -\frac{P(x+1)^2}{8\pi^2xr} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{\mu}{2} \cos \frac{\mu \ln \frac{r}{a}}{4\pi}}{\operatorname{ch} \mu + \operatorname{ch} \psi} d\mu, \quad (36.13)$$

которая после использования (36.9) дает следующий результат:

$$\sigma_0 = -\frac{P(1-\nu)}{\pi\sqrt{r}\sqrt{3-4\nu}} \sqrt[4]{\frac{a}{r}} \frac{\cos \frac{\psi}{\pi} \ln \sqrt[4]{\frac{a}{r}}}{\sqrt{a} + \sqrt{r}}. \quad (36.14)$$

Глава VI. ИЗГИБ КЛИНОВИДНЫХ ПЛИТ

§ 37. Применение преобразования Меллина к задаче изгиба клиновидной плиты

Рассмотрим упругую тонкую плиту, имеющую клиновидную форму, т. е. занимающую область неограниченного сектора.

Если ввести полярные координаты (r, θ) , то в рассматриваемой области переменные будут меняться в следующих пределах:

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \alpha.$$

Уравнение поперечного изгиба плиты $\Delta^2 w = \frac{q}{D}$ (w — прогиб, q — внешняя нагрузка, D — цилиндрическая жесткость) в полярных координатах может быть записано в следующей форме:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Delta w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial \theta^2} = \frac{q(r, \theta)}{D}. \quad (37.1)$$

Для решения задачи изгиба подвергнем дифференциальное уравнение (37.1) интегральному преобразованию Меллина, а именно умножим его на r^{p+2} , где $p = \sigma + i\tau$ — надлежащим образом выбранное комплексное число, и проинтегрируем по переменной r в пределах от 0 до ∞ . Интегрирование по частям приводит к следующему выражению:

$$\begin{aligned} & \left[r^{p+2} \frac{\partial \Delta w}{\partial r} - (p+1) r^{p+1} \Delta w + (p+1)^2 r^p \frac{\partial w}{\partial r} - \right. \\ & \left. - (p-1)(p+1)^2 r^{p-1} w \right]_0^\infty + (p^2 - 1)^2 \bar{w} + 2(p^2 + 1) \frac{d^2 \bar{w}}{d\theta^2} + \frac{d^4 \bar{w}}{d\theta^4} = \\ & = \frac{1}{D} \int_0^\infty q(\rho, \theta) \rho^{p+2} d\rho = \frac{q_p(\theta)}{D}, \end{aligned}$$

где через \bar{w} обозначено преобразование Меллина искомой функции

$$\bar{w} = \int_0^\infty w(r, \theta) r^{p-2} dr. \quad (37.2)$$

Если предположить, что величины $\frac{w}{r}$, $\frac{\partial w}{\partial r}$, $r\Delta w$ и $r^2 \frac{\partial \Delta w}{\partial r}$ при $r \rightarrow 0$ имеют порядок r^{σ_1} ($\sigma_1 > 0$), а при $r \rightarrow \infty$ — порядок $r^{-\sigma_2}$ ($\sigma_2 > 0$),* то члены, выделившиеся при интегрировании по частям, исчезают и мы приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению для преобразованной функции \bar{w} :

$$\frac{d^4 \bar{w}}{d\theta^4} + [(p-1)^2 + (p+1)^2] \frac{d^2 \bar{w}}{d\theta^2} + (p-1)^2 (p+1)^2 \bar{w} = \frac{q_p(\theta)}{D}, \quad (37.3)$$

общий интеграл которого может быть записан так:

$$\bar{w} = A_1 \cos(p-1)\theta + B_1 \sin(p-1)\theta + A_2 \cos(p+1)\theta + B_2 \sin(p+1)\theta + w^*(\theta). \quad (37.4)$$

В последней формуле w^* — какое-либо частное решение уравнения (37.3), которое может быть найдено методом Лагранжа вариаций произвольных постоянных, а также с помощью интегрального преобразования Лапласа (см. § 24). Приводим, опуская выкладки, окончательное выражение для w^* :

$$w^* = \frac{1}{4pD} \int_0^{\theta} K_p(\theta-t) q_p(t) dt, \quad (37.5)$$

$$K_p(x) = \frac{\sin(p-1)x}{p-1} - \frac{\sin(p+1)x}{p+1}. \quad (37.6)$$

Входящие в полученное решение четыре произвольные функции параметра p : A_i , B_i ($i=1, 2$) — должны быть определены из преобразованных по Меллину граничных условий задачи, после чего решение задачи дается формулой обращения

$$w(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \bar{w}(\theta, p) r^{1-p} dp, \quad (37.7)$$

где (L) — прямая, параллельная мнимой оси и проходящая в полосе $-\sigma_1 < \operatorname{Re} p < \sigma_2$. В частности, за путь интегрирования может быть принята мнимая ось комплексной плоскости p .

* Можно показать, что при этих условиях решение поставленной задачи единственно. Справедливость этих предположений может быть непосредственно проверена во всех рассматриваемых далее случаях. Заметим, что при этом \bar{w} будет регулярной функцией переменной p в полосе $-\sigma_1 < \operatorname{Re} p < \sigma_2$.

Если внешняя нагрузка представляет собой сосредоточенную силу P , приложенную в произвольной точке (r_0, θ_0) плиты (рис. 27), то, распределяя нагрузку по малой области, окружающей точку (r_0, θ_0) , и устремляя в интеграле (37.5) размеры этой области к нулю, получим следующее выражение для частного решения w^* :

$$w^* = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq \theta \leq \theta_0, \\ \frac{Pr_0^{p+1}}{4pD} K_p(\theta - \theta_0) & \text{при } \theta_0 \leq \theta \leq \alpha. \end{cases} \quad (37.8)$$

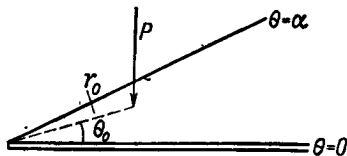


Рис. 27.

В последующих параграфах данной главы будут рассмотрены различные частные типы граничных условий: закрепленные, опертые и свободные края, а также некоторые смешанные случаи, когда один край плиты закреплен, а другой оперт или свободен от внешних усилий. Ради упрощения выкладок во всех случаях ставятся однородные краевые условия, хотя можно было бы с помощью того же аппарата вместо условий закрепления задать контурные значения прогибов и углов поворота, вместо условий опирания — значения прогибов и изгибающих моментов и т. д. (см. § 22).

§ 38. Изгиб клиновидной плиты с закрепленным контуром

Если края плиты $\theta=0$ и $\theta=\alpha$ жестко заделаны, то имеем граничные условия

$$w|_{\theta=0} = \frac{\partial w}{\partial \theta}|_{\theta=0} = w|_{\theta=\alpha} = \frac{\partial w}{\partial \theta}|_{\theta=\alpha} = 0 \quad (38.1)$$

или, после преобразования по Меллину:

$$\bar{w}|_{\theta=0} = \bar{w}'|_{\theta=0} = \bar{w}|_{\theta=\alpha} = \bar{w}'|_{\theta=\alpha} = 0. \quad (38.2)$$

Величины A_1, B_1, A_2, B_2 определяются из системы

$$\left. \begin{aligned} A_1 + A_2 &= -w^*(0) = 0, \\ (p-1)B_1 + (p+1)B_2 &= -w'^*(0) = 0, \\ A_1 \cos(p-1)\alpha + B_1 \sin(p-1)\alpha + A_2 \cos(p+1)\alpha + \\ &+ B_2 \sin(p+1)\alpha = -w^*(\alpha), \\ -(p-1)A_1 \sin(p-1)\alpha + (p-1)B_1 \cos(p-1)\alpha - \\ &-(p+1)A_2 \sin(p+1)\alpha + \\ &+(p+1)B_2 \cos(p+1)\alpha = -w'^*(\alpha), \end{aligned} \right\} (38.3)$$

определитель которой имеет вид

$$\Delta(p) = \sin^2 p\alpha - p^2 \sin^2 \alpha. \quad (38.4)$$

Не останавливаясь на вычислении прогибов, переходим к нахождению изгибающих моментов в заделке. Воспользовавшись формулой для изгибающего момента на закрепленном краю

$$-M \Big|_{\theta=0} = \frac{D}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta=0} \quad (38.5)$$

и учитывая, что $w'' \Big|_{\theta=0} = 4pA_1$, получаем, после нахождения величины A_1 и применения формулы обращения,

$$\begin{aligned} -M \Big|_{\theta=0} &= \frac{D}{\pi r i} \int_{(L)} [(p \sin \alpha \cos p\alpha - \cos \alpha \sin p\alpha) w^*(\alpha) + \\ &+ (p^2 - 1) \sin \alpha \sin p\alpha w^*(\alpha)] \frac{pr^{-p} dp}{\sin^2 p\alpha - p^2 \sin^2 \alpha}. \end{aligned} \quad (38.6)$$

Если обратиться теперь к случаю сосредоточенной внешней нагрузки и воспользоваться выражением (37.8) для w^* , то после некоторых выкладок находим *

$$\begin{aligned} -\frac{M \Big|_{\theta=0}}{P} &= \frac{r_0}{r} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} [\sin \theta_0 \sin p\alpha \sin p(\alpha - \theta_0) - \\ &- p \sin \alpha \sin(\alpha - \theta_0) \sin p\theta_0] \left(\frac{r_0}{r}\right)^p \frac{dp}{\sin^2 p\alpha - p^2 \sin^2 \alpha}. \end{aligned} \quad (38.7)$$

Выбирая за путь интегрирования мнимую ось ($p = i\tau$), приходим к окончательному выражению для изгибающего момента на закрепленном краю в виде вещественного интеграла

$$\begin{aligned} -\frac{M \Big|_{\theta=0}}{P} &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{r_0}{r} \int_0^\infty [\sin \theta_0 \operatorname{sh} \alpha\tau \operatorname{sh}(\alpha - \theta_0)\tau - \\ &- \tau \sin \alpha \sin(\alpha - \theta_0) \operatorname{sh} \theta_0\tau] \frac{\cos \tau \ln \frac{r_0}{r}}{\operatorname{sh}^2 \alpha\tau - \tau^2 \sin^2 \alpha} d\tau. \end{aligned} \quad (38.8)$$

Выражение для изгибающего момента на краю $\theta = \alpha$ получается, как легко видеть, из (38.8) заменой величины θ_0 на $\alpha - \theta_0$.

* Получаемое при этом подынтегральное выражение будет мероморфной функцией переменной p с полюсами в точках, являющихся корнями уравнения $\Delta(p) = 0$, причем числа σ_1 и σ_2 совпадают с наименьшей вещественной частью этих корней.

Рассмотрение полученных формул показывает, что для проведения численных расчетов по теореме о вычетах можно воспользоваться корнями уравнений ($a\tau = z$)

$$\operatorname{sh} z \pm \frac{\sin \alpha}{\alpha} z = 0, \quad (38.9)$$

приведенными в табл. 10 (§ 13) для соответствующей плоской задачи теории упругости.

Из рассуждений, сделанных в § 31, вытекает, что в углу плиты, т. е. при $r \rightarrow 0$, изгибающий момент стремится к нулю при $\alpha < \pi$ и неограниченно возрастает при $\alpha > \pi$. При $\alpha = \pi$ получается известное решение задачи об изгибе полуплоскости с закрепленным краем.

Особым случаем является задача об изгибе, антисимметричном относительно средней линии клина, когда граничное значение угла увеличивается от π до α^* , где $\operatorname{tg} \alpha^* = \alpha^*$ [см. (31.22)].

Из полученного решения задачи об изгибе клиновидной плиты с закрепленным краем под действием произвольно расположенной сосредоточенной силы легко получить решение задачи изгиба для того случая, когда один край плиты закреплен, а другой свободно оперт. В самом деле, если рассмотреть плиту с центральным углом 2α , закрепленную по краям $\theta = 0$ и $\theta = 2\alpha$, и приложить в точке $r = r_0$, $\theta = \theta_0$ сосредоточенную силу P , а в точке $r = r_0$, $\theta = 2\alpha - \theta_0$ — противоположно направленную силу той же величины, то прямая $\theta = \alpha$ будет находиться в условиях свободного опирания. В частности, для изгибающего момента на краю $\theta = 0$ из (38.8) сразу находим

$$\begin{aligned} -\frac{M|_{\theta=0}}{P} = & \frac{r_0}{\pi r} \int_0^{\infty} \{ [\sin \theta_0 \operatorname{sh} 2\alpha\tau \operatorname{sh} (2\alpha - \theta_0)\tau - \\ & - \tau \sin 2\alpha \sin (2\alpha - \theta_0) \operatorname{sh} \theta_0\tau] - [\sin (2\alpha - \theta_0) \operatorname{sh} 2\alpha\tau \operatorname{sh} \theta_0\tau - \\ & - \tau \sin 2\alpha \sin \theta_0 \operatorname{sh} (2\alpha - \theta_0)\tau] \} \frac{\cos \tau \ln \frac{r_0}{r} dr}{\operatorname{sh}^2 2\alpha\tau - \tau^2 \sin^2 2\alpha} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} -\frac{M|_{\theta=0}}{P} = & \frac{r_0}{\pi r} \int_0^{\infty} [\sin \theta_0 \operatorname{sh} (2\alpha - \theta_0)\tau - \sin (2\alpha - \theta_0) \operatorname{sh} \theta_0\tau] \times \\ & \times \frac{\cos \tau \ln \frac{r_0}{r} dr}{\operatorname{sh} 2\alpha\tau - \tau \sin 2\alpha}. \quad (38.10) \end{aligned}$$

При $\alpha = \frac{\pi}{2}$, когда плита представляет собой квадрант с закрепленным краем $\theta = 0$ и свободно опертым краем $\theta = \frac{\pi}{2}$, на-

груженный в точке (r_0, θ_0) сосредоточенной силой P , квадратуры выполняются; и окончательное выражение для изгибающего момента на закрепленном краю имеет вид

$$-\frac{M|_{\theta=0}}{P} = \frac{2r_0}{\pi r} \cdot \frac{\sin \theta_0 \sin 2\theta_0}{\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 2 \cos 2\theta_0}. \quad (38.11)$$

Замкнутое решение получается также и в случае $\alpha = \pi$, т. е. для полуплоскости, часть края $\theta = 0$ которой закреплена, а остальная часть ($\theta = \pi$) свободно оперта [внешней нагрузкой по-прежнему является сила P , приложенная в произвольной точке (r_0, θ_0)]. Приведем формулу для изгибающего момента на прямой $\theta = 0$

$$-\frac{M|_{\theta=0}}{P} = \frac{r_0}{\pi r} \cdot \frac{\sin \theta_0 \sin \frac{\theta_0}{2} \left(\sqrt{\frac{r_0}{r}} + \sqrt{\frac{r}{r_0}} \right)}{\frac{r_0}{r} + \frac{r}{r_0} - 2 \cos \theta_0}. \quad (38.12)$$

§ 39. Клиновидная плита, опертая по краям

Если края плиты $\theta = 0$ и $\theta = \alpha$ свободно оперты, то граничные условия имеют вид

$$w|_{\theta=0} = \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta=0} = w|_{\theta=\alpha} = \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta=\alpha} = 0. \quad (39.1)$$

Преобразуя их по Меллину, приходим к следующей системе уравнений для величин A_1, B_1, A_2, B_2 :

$$\left. \begin{aligned} A_1 + A_2 &= 0, \\ (p-1)^2 A_1 + (p+1)^2 A_2 &= 0, \\ A_1 \cos(p-1)\alpha + B_1 \sin(p-1)\alpha + A_2 \cos(p+1)\alpha + \\ &+ B_2 \sin(p+1)\alpha = -w^*(\alpha), \\ (p-1)^2 [A_1 \cos(p-1)\alpha + B_1 \sin(p-1)\alpha] + \\ + (p+1)^2 [A_2 \cos(p+1)\alpha + B_2 \sin(p+1)\alpha] &= w^{**}(\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (39.2)$$

с определителем

$$\Delta(p) = \cos^2 p\alpha - \cos^2 \alpha. \quad (39.3)$$

Нетрудно показать, что разложение преобразованного прогиба \bar{w} на два слагаемых со знаменателями $\cos p\alpha + \cos \alpha$ и $\cos p\alpha - \cos \alpha$ соответствует разложению решения на четную и нечетную части относительно биссектрисы угла клина. Оставаясь на первом из этих случаев и считая теперь угол θ меняющимся в пределах от $-\frac{\alpha}{2}$ до $\frac{\alpha}{2}$, а сосредоточенную силу P

приложенной в точке $r=r_0$, $\theta=0$ плиты, после выкладок получаем следующее выражение для прогиба плиты при $\theta \geq 0$:

$$w(r, \theta) = \frac{Pr_0}{8\pi} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \left[\frac{\sin(p+1)\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right)}{(p+1) \cos(p+1)\frac{\alpha}{2}} - \frac{\sin(p-1)\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right)}{(p-1) \cos(p-1)\frac{\alpha}{2}} \right] \left(\frac{r_0}{r}\right)^p \frac{dp}{p}. \quad (39.4)$$

Интегрирование по мнимой оси приводит к представлению решения в виде вещественного интеграла

$$w(r, \theta) = \frac{Pr_0 r}{4\pi D} \int_0^\infty [\cos \theta \operatorname{sh}(\alpha - \theta)\tau - \cos(\alpha - \theta) \operatorname{sh} \theta \tau + \tau \sin \theta \operatorname{ch}(\alpha - \theta)\tau - \tau \sin(\alpha - \theta) \operatorname{ch} \theta \tau] \times \\ \times \frac{\cos \tau \ln \frac{r_0}{r}}{\operatorname{ch} \alpha \tau + \cos \alpha} \cdot \frac{dr}{\tau(\tau^2 + 1)}. \quad (39.5)$$

В частности, для квадрата ($\alpha = \frac{\pi}{2}$) получаем после взятия интегралов следующее значение прогиба точек биссектрисы:

$$w(r, 0) = \frac{Pr_0 r}{4\pi D} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{r}{r_0} + \frac{r_0}{r} \right) \ln \frac{\left| 1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \right|}{1 + \left(\frac{r_0}{r} \right)^2} + \ln \frac{1 + \frac{r_0}{r}}{\left| 1 - \frac{r_0}{r} \right|} \right]. \quad (39.6)$$

Разумеется, применение интегрального преобразования Меллива не является единственным возможным методом решения такой задачи. В частности, можно было бы, следуя Б. Г. Галеркину [19], разложить прогиб $w(r, \theta)$ в ряд Фурье по тригонометрическим функциям $\sin \frac{2\pi\theta}{\alpha} n$. Однако коэффициенты такого разложения различным образом зависели бы от переменной r в области $r < r_0$ и $r > r_0$, а именно: в первом случае они содержали бы положительные степени r , а во втором — отрицательные, и получившие таким образом решения пришлось бы сопрягать вдоль линии $r=r_0$, учитывая приложенную в точке $r=r_0$, $\theta=\theta_0$ сосредоточенную силу.

Заметим, что если пытаться решать указанной задачей задачу об изгибе клиновидной плиты с закрепленными краями, то сами тригонометрические функции угла θ , по которым ве-

дется разложение, будут иметь довольно громоздкий вид,* что поведет к значительному усложнению выкладок. В связи со сказанным преимущества метода интегральных разложений, как нам кажется, становятся особенно очевидными. Заметим, что разложения в ряды, о которых шла речь, сразу получаются из решений в виде интегралов [типа (39.4)] после применения теоремы о вычетах.

§ 40. Клиновидная плита со свободным контуром

В этом случае на гранях клина должны обращаться в нуль значения изгибающих моментов (M) и перерезывающих сил (N), выражающиеся через прогиб w в полярных координатах следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} \frac{M}{D} &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}, \\ \frac{N}{D} &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta w) + (1 - \nu) \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \right\} \quad (40.1)$$

Таким образом, граничные условия задачи после преобразования Меллина имеют вид (предполагается, что $-\alpha \leq \theta \leq +\alpha$)

$$\left. \begin{aligned} |w'' + (p-1)(\nu-1)w|_{\theta=\pm\alpha} &= 0, \\ (w''' + [(p-1)^2 + p(p+1)(1-\nu)]w')|_{\theta=\pm\alpha} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (40.2)$$

Для упрощения выкладок разобьем прогиб $w(r, \theta)$ на симметричную и антисимметричную составляющие.

В первом случае из (37.4) будем иметь

$$w = A_1 \cos(p-1)\theta + A_2 \cos(p+1)\theta + w^*(\theta). \quad (40.3)$$

Подстановка выражения (40.3) в граничные условия (40.2) приводит к следующей системе уравнений для величин $A_1(p)$ и $A_2(p)$:

$$\begin{aligned} & p(p-1)(\nu-1)A_1 \cos(p-1)\alpha + \\ & + [(p-1)(p\nu-1) - (p+1)^2]A_2 \cos(p+1)\alpha = \\ & = -[w''(\alpha) + (p-1)(\nu-1)w'(\alpha)], \quad (40.4) \\ & -p(p^2-1)(1-\nu)A_1 \sin(p-1)\alpha + \\ & + p(p+1)[4-p(p+1)(1-\nu)]A_2 \sin(p+1)\alpha = \\ & = -[w'''(\alpha) + [(p-1)^2 + p(p+1)(1-\nu)]w'(\alpha)]. \quad (40.5) \end{aligned}$$

* Они аналогичны функциям П. Ф. Папковича [85] для случая прямоугольной области.

Не останавливаясь на более детальных выкладках, заметим, что определитель этой системы пропорционален выражению

$$(3 + \nu) \sin 2\rho\alpha - (1 - \nu) \rho \sin 2\alpha,$$

так что для применения теоремы о вычетах необходимо предполагать корнями уравнения ($2\rho\alpha = iz$)

$$(3 + \nu) \operatorname{sh} z - (1 - \nu) z \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} = 0. \quad (40.6)$$

Таблица 20

		$\operatorname{sh} z - \frac{1-\nu}{3+\nu} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} z = 0$					
		$\alpha = \frac{\pi}{8}$		$\alpha = \frac{\pi}{4}$		$\alpha = \frac{3\pi}{8}$	
		σ	τ	σ	τ	σ	τ
$\nu = \frac{1}{3}$	}	0	2.645	0	2.780	0	2.963
		0.8701	2.694	0	7.598	0	6.697
		1.585	14.02	0	7.854	0	8.864
		1.976	20.32	1.191	14.04	0	13.51
		2.253	26.62	1.609	20.33	0	14.64
		—	—	1.894	26.63	0.6581	20.36
$\nu = \frac{1}{4}$	}	—	—	—	—	1.049	26.65
		0	2.547	0	2.729	0	2.937
		1.063	7.680	0.5310	7.713	0	6.771
		1.740	14.01	1.358	14.03	0	8.772
		2.124	20.31	1.763	20.33	0	13.85
		2.399	26.61	2.044	26.62	0	14.28
$\nu = \frac{1}{3}$	}	—	—	—	—	0.8801	20.36
		—	—	—	—	1.225	26.65
		0	3.927	0	3.621	0	3.344
		0	5.114	0	5.506	0	5.920
		1.302	10.86	0.8610	10.88	0	10.07
		1.801	17.17	1.424	17.19	0	11.78
$\nu = \frac{1}{4}$	}	2.125	23.47	1.763	23.48	0.2630	17.22
		2.367	29.76	2.010	29.78	0.8801	23.51
		—	—	—	—	1.186	29.80
		0	4.204	0	3.720	0	3.378
		0	4.796	0	5.374	0	5.865
		1.465	10.85	1.054	10.87	0	10.21
$\nu = \frac{1}{4}$	}	1.951	17.16	1.583	17.18	0	11.63
		2.272	23.46	1.915	23.48	0	17.21
		2.512	29.76	2.158	29.77	0.6140	23.50
		—	—	—	—	1.071	23.50
		—	—	—	—	1.354	29.79
		—	—	—	—	—	—

Не останавливаясь на аналогичных выкладках для антисимметричной задачи, приведем только соответствующее трансцендентное уравнение

$$(3 + \nu) \operatorname{sh} z + (1 - \nu) z \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} = 0. \quad (40.7)$$

Корни $z = \pm \sigma \pm i\tau$ уравнений (40.6) и (40.7) для значений $\alpha = \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}$ и $\nu = \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ даны в табл. 20.

Исследование поведения изгибающих моментов в угловой точке клина показывает, что так как величина $\frac{1-\nu}{3+\nu}$ для всех $0 < \nu < \frac{1}{2}$ остается меньше единицы, то угол раствора клина в 180° является предельным в том смысле, что при $2\alpha < \pi$ $M \rightarrow 0$ и при $2\alpha > \pi$ $M \rightarrow \infty$ (см. § 33).

§ 41. Смешанная задача изгиба клиновидной плиты

Будем считать край $\theta = 0$ закрепленным, $\theta = \alpha$ — свободным от сил и моментов, а в качестве внешней нагрузки примем, как и выше, сосредоточенную силу P , приложенную в произвольной точке $r = r_0$, $\theta = \theta_0$ плиты.

Граничные условия рассматриваемой задачи таковы:

$$\left. \begin{aligned} w|_{\theta=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \theta}|_{\theta=0} = 0, \\ \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right]_{\theta=\alpha} = 0, \\ \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta w) + (1 - \nu) \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right]_{\theta=\alpha} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (41.1)$$

где ν — коэффициент Пуассона.

Подвергая соотношения (41.1) интегральному преобразованию Меллина, приходим к следующим преобразованным граничным условиям:

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}|_{\theta=0} = 0, \quad \bar{w}'|_{\theta=0} = 0, \\ \{ \bar{w}'' + (p-1)(\nu p - 1)\bar{w}|_{\theta=\alpha} = 0, \\ \bar{w}''' + [(p-1)^2 + (1-\nu)p(p+1)]\bar{w}'|_{\theta=\alpha} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (41.2)$$

причем здесь, как и прежде, через \bar{w} обозначен преобразованный по Меллину прогиб плиты [см. (37.2)], в общем случае даваемый формулой (37.4). Для рассматриваемой точечной нагрузки входящее в \bar{w} частное решение w^* определяется из (37.8).

С учетом первых двух условий (41.2) выражение для w может быть записано в такой форме:

$$w = A [\cos (p-1) \theta - \cos (p+1) \theta] + \\ + B [p+1 \sin (p-1) \theta - (p-1) \sin (p+1) \theta] + \\ + \begin{cases} \frac{Pr_0^{p+1}}{4pD} K_p (\theta - \theta_0) & \text{при } \theta_0 \leq \theta \leq \alpha, \\ 0 & \text{при } 0 \leq \theta \leq \theta_0 \end{cases} \quad (41.3)$$

где функция $K_p(x)$ по-прежнему дается формулой (37.6). Применение оставшихся условий (41.2) приводит к следующей системе уравнений для неизвестных величин A и B :

$$A \left\{ [(3+\nu) + p(1-\nu)] \frac{\cos (p+1) \alpha}{p-1} - (1-\nu) \cos (p-1) \alpha \right\} + \\ + B \{ [(3+\nu) + p(1-\nu)] \sin (p+1) \alpha - (1-\nu)(p+1) \sin (p-1) \alpha \} = \\ = \frac{Pr_0^{p+1}}{4Dp^2(p-1)} [(p-1)(1-\nu p) K_p (\alpha - \theta_0) - K_p'' (\alpha - \theta_0)], \quad (41.4)$$

$$-A \{ [(3+\nu) - p(1-\nu)] \sin (p+1) \alpha + (1-\nu)(p-1) \sin (p-1) \alpha \} + \\ + B \{ (p-1)[(3+\nu) - p(1-\nu)] \cos (p+1) \alpha + \\ + (1-\nu)(p^2-1) \cos (p-1) \alpha \} = -\frac{Pr_0^{p+1}}{4Dp^2(p-1)} \times \\ \times \{ K_p''' (\alpha - \theta_0) + [(1-\nu)p(p+1) + (p-1)^2] K_p' (\alpha - \theta_0) \}, \quad (41.5)$$

определитель которой равен

$$\Delta(p) = 2(1-\nu)(3+\nu) \left[\cos 2p\alpha - \frac{2(1-\nu)}{3+\nu} p^2 \sin^2 \alpha \right] + \\ + 2(5+2\nu+\nu^2). \quad (41.6)$$

Не останавливаясь ввиду громоздкости выкладок на вычислении прогибов, переходим к определению изгибающего момента на заделке, вычисляемого по известной формуле:

$$-M = \frac{D}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta=0}. \quad (41.7)$$

Из (41.3) видно, что $-\overline{Mr^2} = 4pAD$, так что по формуле обращения

$$-M = \frac{2}{\pi i} \int_{(L)} pA \frac{dp}{r^{p+1}}. \quad (41.8)$$

Находя из (41. 4) и (41. 5) величину A , подставляя ее в (41. 8) и производя интегрирование по мнимой оси, получаем после преобразований следующее выражение для изгибающего момента на закрепленном краю:

$$\frac{M}{P} = \frac{r_0}{r} \cdot \frac{1-\nu}{\pi i} \int_{(L)} \frac{F(p)}{\Delta(p)} \left(\frac{r_0}{r}\right)^p dp, \quad (41. 9)$$

где положено

$$F(p) = \sin \theta_0 [(1-\nu) \cos p\theta_0 + (3+\nu) \cos (2\alpha - \theta_0)] - \\ - 2(1-\nu) p \sin \alpha \sin (\alpha - \theta_0) \sin p\theta_0 + 4 \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \frac{\sin (p+1)\theta_0}{p+1}. \quad (41. 10)$$

Переходя в (41. 9) к интегрированию по мнимой оси, можно получить представление изгибающего момента M в виде вещественной квадратуры. Наряду с этим расчеты можно производить, замыкая контур (L) дугой круга радиуса $R \rightarrow \infty$ (вправо при $r > r_0$ и влево при $r < r_0$) и суммируя по вычетам в полюсах, являющихся корнями уравнения $\Delta(p) = 0$

$$\cos 2p\alpha = ap^2 - b, \quad (41. 11)$$

где

$$a = \frac{2(1-\nu)}{3+\nu} \sin^2 \alpha, \quad b = \frac{4+(1+\nu)^2}{4-(1+\nu)^2}.$$

Делая, как обычно, замену переменных $2p\alpha = iz$, получаем уравнение

$$\operatorname{ch} z + \frac{1-\nu}{2(3+\nu)} \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} z^2 + \frac{4+(1+\nu)^2}{4-(1+\nu)^2} = 0, \quad (41. 12)$$

корни $z = \pm \sigma \pm i\tau$ которого даются в табл. 21.

Таблица 21

		$\operatorname{ch} z + \frac{1-\nu}{2(3+\nu)} \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} z^2 + \frac{4+(1+\nu)^2}{4-(1+\nu)^2} = 0$					
		$\alpha = \frac{\pi}{4}$		$\alpha = \frac{\pi}{2}$		$\alpha = \frac{3\pi}{4}$	
		σ	τ	σ	τ	σ	τ
$\nu = \frac{1}{3}$	{	1.242	3.617	1.465	3.335	1.581	3.181
		0	6.614	0	7.915	1.196	9.564
		3.004	11.95	1.971	11.99	0	14.81
		3.965	18.38	3.160	18.44	0	17.41
		4.576	24.75	3.828	24.79	0	19.47
		—	—	—	—	1.794	24.86
$\nu = \frac{1}{4}$	{	0.676	3.872	1.241	3.392	1.425	3.190
		0	5.834	0	7.500	0.818	9.605
		3.210	11.95	2.286	12.01	0	14.30
		4.132	18.37	3.354	18.44	0.816	18.50
		4.732	24.74	3.998	24.79	2.134	24.86

Исследование уравнения (41.12), проведенное способом, изложенным в § 35, позволяет установить значение α^* предельного угла раствора клина, обладающего тем свойством, что при $\alpha < \alpha^*$ изгибающий момент в угловой точке клина равен нулю (при $\alpha > \alpha^*$ он неограниченно возрастает). Численные расчеты приводят к следующим результатам: $\alpha^* \Big|_{\nu = \frac{1}{4}} = 1.677$,

$$\alpha^* \Big|_{\nu = \frac{1}{3}} = 1.656.$$

Приведем в заключение асимптотические формулы для больших по модулю корней уравнения $\text{ch } z + az^2 + b = 0$:

$$\sigma \approx \ln 2(4ak^2\pi^2 - b), \quad \tau \approx 2k\pi - \frac{4k\pi a\sigma}{\text{sh } \sigma} \quad (k \geq 5).$$

Часть III

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ХАНКЕЛЯ

Преобразованием Ханкеля функции $f(r)$, заданной при $0 < r < \infty$, называется интеграл

$$f(\lambda) = \int_0^{\infty} f(r) J_{\nu}(\lambda r) r dr \quad (0 \leq \lambda < \infty, \nu > -\frac{1}{2}) \quad (1)$$

$[J_{\nu}(x)$ — функция Бесселя].

Если $f(r)$ кусочно непрерывна в любом конечном промежутке, принадлежащем интервалу $(0, \infty)$, и интеграл

$$\int_0^{\infty} |f(r)| \sqrt{r} dr \quad (2)$$

сходится, то преобразование Ханкеля существует.

Для функций $f(r)$, удовлетворяющих, кроме того, условиям Дирихле в любом открытом промежутке $0 < r < R$, справедлива формула обращения Ханкеля

$$f(r) = \int_0^{\infty} f(\lambda) J_{\nu}(\lambda r) \lambda d\lambda \quad (0 < r < \infty), \quad (3)$$

представляющая функцию $f(r)$ через ее преобразование Ханкеля $f(\lambda)$.

Формулы (1) и (3) могут быть записаны в виде одного расположения*

$$f(r) = \int_0^{\infty} J_{\nu}(\lambda r) \lambda d\lambda \int_0^{\infty} f(\rho) J_{\nu}(\lambda \rho) \rho d\rho \quad (0 < r < \infty). \quad (4)$$

Формулы (3) и (4) имеют место в точках непрерывности функции $f(r)$; в точках разрыва вместо $f(r)$ следует брать полусумму $\frac{1}{2}[f(r-0) + f(r+0)]$.

* Строгий вывод формулы (4) дан в [16].

С помощью интегрального преобразования Ханкеля можно получить точные решения различных краевых задач теории упругости для полупространства и неограниченной толстой плиты (упругого слоя).

В третьей части настоящей книги рассмотрена первая и вторая основные задачи для упругого слоя, а также соответствующая смешанная задача.

Наряду с этим преобразование Ханкеля успешно использовано и в более сложных смешанных задачах, когда на одной из границ слоя имеется круговая линия раздела краевых условий. В задачах этого класса применение разложения Ханкеля хотя и не дает возможности получить точных решений, однако позволяет свести задачу к так называемым парным интегральным уравнениям. Последние с помощью специального приема сводятся к интегральному уравнению Фредгольма, допускающему эффективное численное решение. С помощью описанной методики рассмотрены, в частности, следующие задачи: кручение упругого слоя, контактная задача для упругого слоя, а также концентрация напряжений около плоских круглых щелей.

Глава VII. ДЕФОРМАЦИЯ УПРУГОГО СЛОЯ

§ 42. Сведение первой основной задачи для упругого слоя к краевым задачам математической физики

При применении интегрального преобразования Ханкеля к пространственным задачам теории упругости мы будем широко пользоваться функциями напряжений.

Известно, что в плоских и осесимметричных задачах решение уравнений теории упругости можно выразить через одну бигармоническую функцию. Однако даже и в этих случаях иногда удобнее пользоваться не одной бигармонической функцией, а несколькими гармоническими функциями напряжений.

В настоящей главе будут рассмотрены различные случаи деформации бесконечного упругого слоя, причем во всех задачах будет применяться известное представление Папковича—Нейбера перемещений и напряжений через четыре гармонические функции: $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$. Приводим соответствующие общие зависимости для перемещений ($F = \Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2 + z\Phi_3$):

$$\left. \begin{aligned} 2Gu &= -\frac{\partial F}{\partial x} + 4(1-\nu)\Phi_1, \\ 2Gv &= -\frac{\partial F}{\partial y} + 4(1-\nu)\Phi_2, \\ 2Gw &= -\frac{\partial F}{\partial z} + 4(1-\nu)\Phi_3 \end{aligned} \right\} \quad (42.1)$$

и напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2(1-\nu) \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} + 2\nu \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right) - \\ &\quad - \left(x \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} + z \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x^2} \right), \\ \sigma_y &= 2(1-\nu) \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2} + 2\nu \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right) - \\ &\quad - \left(x \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} + y \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2} + z \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial y^2} \right), \\ \tau_{xy} &= (1-2\nu) \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial y} + x \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial y} + \right. \\ &\quad \left. + y \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x \partial y} + z \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x \partial y} \right), \end{aligned} \right\} (42.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= 2(1-\nu) \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} - \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z^2} + 2\nu \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right) - \\ &\quad - \left(x \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} + y \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} + z \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial z^2} \right), \\ \tau_{yz} &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} + 2(1-\nu) \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}, \quad \tau_{zx} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + 2(1-\nu) \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}, \\ \Phi &= (1-2\nu) \Phi_3 - \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} - \left(x \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + y \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + z \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} (42.3)$$

(G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона).

Выражения для касательных напряжений τ_{yz} и τ_{zx} записаны в виде, специально приспособленном к решению краевых задач для упругого слоя, в которых ось z направлена перпендикулярно граничным плоскостям.

В дальнейшем будет показано, что, пользуясь произвольностью одной из функций Палковича—Нейбера, можно свести к линейным краевым задачам математической физики как первую и вторую основные задачи для упругого слоя, так и смешанную задачу.

В настоящем параграфе мы рассмотрим первую основную задачу, т. е. случай деформации упругого слоя под действием приложенных к его граничным плоскостям ($z = \pm h$) внешних усилий.

Граничные условия имеют, следовательно, вид

$$\sigma_x|_{z=\pm h} = \sigma_{\pm h}(r, \varphi), \quad \tau_{xz}|_{z=\pm h} = \tau_x^{\pm h}(r, \varphi), \quad \tau_{yz}|_{z=\pm h} = \tau_y^{\pm h}(r, \varphi) \quad (42.4)$$

(r, φ, z — цилиндрические координаты).

Заметим, что во всех задачах, рассматриваемых в этой главе, предполагается, что на бесконечности ($r \rightarrow \infty$) все функции напряжений имеют порядок $\frac{1}{r}$, а их производные — порядок

$\frac{1}{r^2}$, что обеспечивает должное поведение перемещений и напряжений на бесконечности.

Поскольку одна из четырех гармонических функций $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ является произвольной, можно дополнить (42.4) еще двумя какими-либо условиями. В данной задаче удобно принять

$$\Phi|_{r=\pm h} = 0. \quad (42.5)$$

Тогда из (42.3) сразу находим раздельные краевые условия для функций Φ_1 и Φ_2

$$\left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right|_{r=\pm h} = \frac{1}{2(1-\nu)} \tau_x^{\pm h}, \quad \left. \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \right|_{r=\pm h} = \frac{1}{2(1-\nu)} \tau_y^{\pm h}, \quad (42.6)$$

так что гармонические функции Φ_1 и Φ_2 могут считаться найденными в результате решения задачи Неймана для слоя (соображения относительно разрешимости этих задач см. в § 43).

Вводя вместо Φ_0 еще одну гармоническую функцию

$$\Phi_4 = (1-2\nu)\Phi_3 - \frac{\partial \Phi_0}{\partial z}, \quad (42.7)$$

находим из оставшихся краевых условий, что гармонические функции Φ_3 и Φ_4 должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\left. \begin{aligned} (\Phi_4 - z \frac{\partial \Phi_3}{\partial z})_{r=\pm h} &= \frac{1}{2(1-\nu)} (x\tau_{xx} + y\tau_{yy})_{r=\pm h} = f_1^{\pm h}(r, \varphi), \\ (\frac{\partial \Phi_4}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} - z \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial z^2})_{r=\pm h} &= \sigma_{\pm h} - 2\nu (\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y})_{r=\pm h} + \\ &+ (x \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} + y \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2})_{r=\pm h} = f_2^{\pm h}(r, \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (42.8)$$

Точное решение последней краевой задачи можно получить, если представить искомые функции в виде разложения в ряд Фурье по угловой координате φ и в интеграл Ханкеля по переменной r . В самом деле, полагая

$$\Phi_{3,4} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} \int_0^{\infty} [A_{3,4}^n e^{\lambda z} + B_{3,4}^n e^{-\lambda z}] J_n(\lambda r) \lambda d\lambda \quad (42.9)$$

и разлагая известные функции $f_{1,2}^{\pm h}(r, \varphi)$ в ряды Фурье по углу φ и интегралы Ханкеля по координате r , из (42.8) сразу получим систему четырех уравнений для неизвестных величин $A_{3,4}^n$ и $B_{3,4}^n$, после чего функции $\Phi_{3,4}$, а также Φ_0 могут считаться найденными.

Более детальные выкладки будут проведены в следующем параграфе. Здесь же мы ограничимся простым примером,

а именно дадим решение классической задачи Буссинеска о действии нормальной сосредоточенной силы на упругое полупространство ($z \geq 0$). В этом случае граничные условия (42.6) и (42.8) ставятся при $z=0$, и так как касательных усилий на границе не прикладывается, то

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_4 \equiv 0. \quad (42.10)$$

Для гармонической функции Φ_3 имеем граничное условие

$$\left. \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right|_{z=0} = \sigma_0(r), \quad (42.11)$$

где напряжение σ_0 соответствует заданной сосредоточенной силе P , приложенной в начале координат.

Полагая в силу осевой симметрии

$$\Phi_3 = \int_0^{\infty} A_3(\lambda) e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) d\lambda, \quad (42.12)$$

имеем из (42.11)

$$\sigma_0(r) = - \int_0^{\infty} A_3 J_0(\lambda r) \lambda d\lambda, \quad (42.13)$$

откуда по формуле обращения Ханкеля

$$A_3 = - \int_0^{\infty} \sigma_0(r) J_0(\lambda r) r dr. \quad (42.14)$$

Распределяя силу P по окружности малого радиуса ϵ и осуществляя предельный переход $\epsilon \rightarrow 0$, находим

$$A_3 = \frac{P}{2\pi}. \quad (42.15)$$

Подстановка (42.15) в (42.12) приводит к выражению для функции Φ_3 в явном виде

$$\Phi_3 = \frac{P}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}}. \quad (42.16)$$

Теперь легко получить нормальные напряжения

$$\sigma_z = \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} = z \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial z^2} = - \frac{3Pz^3}{2\pi (\sqrt{r^2 + z^2})^5}. \quad (42.17)$$

Наконец, составляя функцию

$$\Phi = -z \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} = \frac{Pz^2}{2\pi (\sqrt{r^2 + z^2})^3}, \quad (42.18)$$

находим касательные напряжения

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{3P_x z^2}{2\pi(\sqrt{r^2 + z^2})^5}, \quad \tau_{yz} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{3P_y z^2}{2\pi(\sqrt{r^2 + z^2})^5}. \quad (42.19)$$

§ 43. Равновесие упругого слоя при заданных нагрузках

В предыдущем параграфе была разработана схема решения первой основной задачи теории упругости для слоя.

При фактическом проведении выкладок удобно разбить общую задачу на две: симметричную и антисимметричную относительно срединной плоскости ($z=0$) упругого слоя.

В первом случае [рис. 28, (А)] имеем зависимости

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r|_{z=\pm h} &= \sigma(r, \varphi), \\ \tau_{xz}|_{z=\pm h} &= \pm \tau_x(r, \varphi), \\ \tau_{yz}|_{z=\pm h} &= \pm \tau_y(r, \varphi), \end{aligned} \right\} \quad (43.1)$$

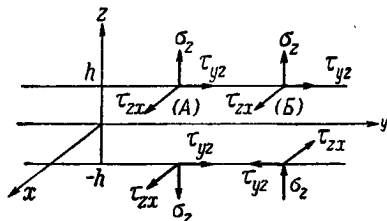


Рис. 28.

так что достаточно использовать краевые условия только на одной из плоскостей слоя ($z=h$) и одновременно учитывать условия симметрии. Например, гармонические функции Φ_1 и Φ_2 , определяемые из условий (42.6), будут, очевидно, четными, а Φ_3 и Φ_4 — нечетными функциями координаты z [см. (42.8)].

Нетрудно видеть, что условия статики

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \tau_x r dr d\varphi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \tau_y r dr d\varphi = 0 \quad (43.2)$$

обеспечивают разрешимость задач Неймана, сформулированных для функций Φ_1 и Φ_2 . Не приводя решения этих задач, обратимся к нахождению гармонических функций Φ_3 и Φ_4 из условий (42.8). Положим

$$\Phi_{3,4} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} \int_0^{\infty} A_{3,4}^n(\lambda) \operatorname{sh} \lambda z J_n(\lambda r) \lambda d\lambda. \quad (43.3)$$

Тогда из (42.8) получаем систему ($\lambda h = \mu$)

$$\left. \begin{aligned} A_4^n \operatorname{sh} \mu - A_3^n \operatorname{ch} \mu &= f_1^n, \\ A_4^n \operatorname{ch} \mu + A_3^n (\operatorname{ch} \mu - \mu \operatorname{sh} \mu) &= \frac{h}{\mu} f_2^n, \end{aligned} \right\} \quad (43.4)$$

где

$$f^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} f(r, \varphi) e^{-in\varphi} J_n(\lambda r) r dr d\varphi. \quad (43.5)$$

Здесь и в дальнейшем предполагается, что двойные преобразования последнего типа существуют как для заданных граничных функций, так и для всех искомого величин.

Находя из (43. 4) значения A_3^n и A_4^n

$$\left. \begin{aligned} A_3^n &= \frac{(\operatorname{ch} \mu - \mu \operatorname{sh} \mu) j_1^n + h \operatorname{ch} \mu j_2^n}{\operatorname{ch} \mu \operatorname{sh} \mu + \mu}, \\ A_4^n &= \frac{\frac{h}{\mu} \operatorname{sh} \mu j_2^n - \operatorname{ch} \mu j_1^n}{\operatorname{ch} \mu \operatorname{sh} \mu + \mu} \end{aligned} \right\} \quad (43. 6)$$

и подставляя их в (43. 3), получим решение поставленной задачи.

В тех случаях, когда вычисления несобственных интегралов можно производить по теореме о вычетах, необходимо располагать корнями уравнения $\operatorname{ch} \mu \operatorname{sh} \mu + \mu = 0$ (см. табл. 1 главы I, составленную для аналогичной плоской задачи).

В качестве примера рассмотрим сжатие слоя двумя сосредоточенными силами P , приложенными по оси z . Так как в этом случае $\tau_x = \tau_y = 0$, то $\Phi_1 = \Phi_2 \equiv 0$. Правые части граничных условий (42. 8) имеют значения

$$f_1(r, \varphi) = 0, \quad f_2(r, \varphi) \equiv \sigma(r), \quad (43. 7)$$

где напряжение $\sigma(\tau)$ соответствует сосредоточенной силе, т. е.

$$\sigma = -\frac{P}{2\pi}. \quad (43. 8)$$

Таким образом, $A_3^n = A_4^n = 0$, $n \geq 1$,

$$A_3^0 = -\frac{Ph}{2\pi} \cdot \frac{\operatorname{ch} \mu}{\operatorname{ch} \mu \operatorname{sh} \mu + \mu}, \quad A_4^0 = -\frac{Ph}{2\pi\mu} \cdot \frac{\operatorname{sh} \mu}{\operatorname{ch} \mu \operatorname{sh} \mu + \mu}. \quad (43. 9)$$

Не выписывая общего решения этой задачи, приведем выражение для сжимающих напряжений в средней плоскости слоя

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= -\sigma_z|_{z=0} = -\frac{\partial}{\partial z} (\Phi_3 + \Phi_4)|_{z=0} = \\ &= \frac{P}{\pi h^2} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \mu + \mu \operatorname{ch} \mu}{\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu} J_0\left(\mu \frac{r}{h}\right) \mu d\mu. \end{aligned} \quad (43. 10)$$

Аналогичным образом можно дать решение соответствующей антисимметричной задачи [рис. 28, (Б)]. Граничные условия будут

$$\sigma_z|_{z=\pm h} = \pm \sigma(r, \varphi), \quad \tau_{zx}|_{z=\pm h} = \tau_x(r, \varphi), \quad \tau_{yz}|_{z=\pm h} = \tau_y(r, \varphi). \quad (43. 11)$$

Так как функции Φ_1 и Φ_2 нечетны по координате z , то для них можно поставить краевые условия

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \Big|_{z=h} = \frac{1}{2(1-\nu)} \tau_x, \\ \Phi_2|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \Big|_{z=h} = \frac{1}{2(1-\nu)} \tau_y, \end{aligned} \right\} \quad (43.12)$$

после чего решение легко получается с помощью преобразования Ханкеля, если положить

$$\Phi_{1,2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} \int_0^{\infty} A_{1,2}^n(\lambda) \operatorname{sh} \lambda z J_n(\lambda r) \lambda d\lambda. \quad (43.13)$$

В силу четности по z функций Φ_3 и Φ_4 будем иметь

$$\Phi_{3,4} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} \int_0^{\infty} A_{3,4}^n(\lambda) \operatorname{ch} \lambda z J_n(\lambda r) \lambda d\lambda, \quad (43.14)$$

причем A_3^* и A_4^* находятся из системы [см. (42.8)]

$$\left. \begin{aligned} A_4^* \operatorname{ch} \mu - A_3^* \mu \operatorname{sh} \mu = f_1^n, \\ A_4^* \operatorname{sh} \mu + A_3^* (\operatorname{sh} \mu - \mu \operatorname{ch} \mu) = \frac{h}{\mu} f_2^n \end{aligned} \right\} \quad (\mu = \lambda h) \quad (43.15)$$

с определителем $\operatorname{ch} \mu \operatorname{sh} \mu - \mu$, корни которого даны в табл. 1 (глава I).

Можно показать, что условия статики

$$\int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \sigma_x|_{z=h} r dr d\varphi = 0,$$

$$\int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} (\sigma_x y - \tau_{yx} h)|_{z=h} r dr d\varphi = 0, \quad \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} (\sigma_x x - \tau_{xx} h)|_{z=h} r dr d\varphi = 0 \quad (43.16)$$

обеспечивают сходимость несобственных интегралов, получающихся для напряжений, а также для перемещений u и v . Что касается перемещения w , то его вообще нельзя представить интегралом Ханкеля.*

* См. [67, стр. 187, 188], а также § 22 данной книги.

§ 44. Вторая основная задача теории упругости
для слоя

Переходим к решению такой задачи, когда на граничных плоскостях $z=0$ и $z=h$ упругого слоя заданы перемещения

$$\left. \begin{aligned} u|_{z=0} &= u_0(r, \varphi), \quad v|_{z=0} = v_0(r, \varphi), \quad w|_{z=0} = w_0(r, \varphi), \\ u|_{z=h} &= u_h(r, \varphi), \quad v|_{z=h} = v_h(r, \varphi), \quad w|_{z=h} = w_h(r, \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (44.1)$$

Пользуясь произвольностью одной из четырех входящих в формулы (42.1) гармонических функций Папковича—Нейбера, поставим еще следующие два дополнительных условия:

$$F|_{z=0} = 0, \quad F|_{z=h} = 0, \quad F = \Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2 + z\Phi_3. \quad (44.2)$$

Тогда из (42.1) и (44.1) сразу получаем граничные условия первого рода для функций Φ_1 и Φ_2

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1|_{z=0} &= \frac{Gu_0}{2(1-\nu)}, \quad \Phi_1|_{z=h} = \frac{Gu_h}{2(1-\nu)}, \\ \Phi_2|_{z=0} &= \frac{Gv_0}{2(1-\nu)}, \quad \Phi_2|_{z=h} = \frac{Gv_h}{2(1-\nu)}, \end{aligned} \right\} \quad (44.3)$$

так что эти функции в дальнейшем считаются найденными путем решения задачи Дирихле для слоя.

Оставшиеся краевые условия приводят нас к следующим условиям для функций Φ_0 и Φ_3 :

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0|_{z=0} &= -(x\Phi_1 + y\Phi_2)|_{z=0} = f_1(r, \varphi), \\ \left[(3-4\nu)\Phi_3 - \frac{\partial\Phi_0}{\partial z} \right]_{z=0} &= 2Gw_0 + \frac{\partial}{\partial z}(x\Phi_1 + y\Phi_2)|_{z=0} = \\ &= f_2(r, \varphi), \\ (\Phi_0 + h\Phi_3)|_{z=h} &= -(x\Phi_1 + y\Phi_2)|_{z=h} = f_3(r, \varphi), \\ \left[(3-4\nu)\Phi_3 - \frac{\partial\Phi_0}{\partial z} - h\frac{\partial\Phi_3}{\partial z} \right]_{z=h} &= 2Gw_h + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z}(x\Phi_1 + y\Phi_2)|_{z=h} = f_4(r, \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (44.4)$$

Очевидно, что при таких граничных условиях гармонические функции Φ_0 и Φ_3 могут быть найдены с помощью преобразования Ханкеля. В самом деле, если положить

$$\Phi_{0,3} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} \int_0^{\infty} [A_{0,3}^n(\lambda) \operatorname{ch} \lambda z + B_{0,3}^n(\lambda) \operatorname{sh} \lambda z] J_n(\lambda r) \lambda d\lambda, \quad (44.5)$$

то из (44.4) для величин $A_{0,3}^n(\lambda)$ и $B_{0,3}^n(\lambda)$ получаются следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} A_0^n &= f_1^n, & (3 - 4\nu) A_3^n - \lambda B_0^n &= f_2^n, \\ A_0^n \operatorname{ch} \lambda h + B_0^n \operatorname{sh} \lambda h + A_3^n h \operatorname{ch} \lambda h + B_3^n h \operatorname{sh} \lambda h &= f_3^n, \\ (3 - 4\nu)(A_3^n \operatorname{ch} \lambda h + B_3^n \operatorname{sh} \lambda h) - \lambda (A_0^n \operatorname{sh} \lambda h + B_0^n \operatorname{ch} \lambda h) - \\ &- \lambda h (A_3^n \operatorname{sh} \lambda h + B_3^n \operatorname{ch} \lambda h) &= f_4^n, \end{aligned} \right\} \quad (44.6)$$

где

$$f^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) e^{-i n \varphi} J_n(\lambda r) r dr d\varphi. \quad (44.7)$$

Исключая из (44.6) величины $A_0^n(\lambda)$ и $B_0^n(\lambda)$, получаем для $A_3^n(\lambda)$ и $B_3^n(\lambda)$ систему уравнений ($\lambda h = \mu$)

$$\left. \begin{aligned} [\mu \operatorname{ch} \mu + (3 - 4\nu) \operatorname{sh} \mu] A_3^n + \mu \operatorname{sh} \mu B_3^n &= \psi_1^n(\mu), \\ -\mu \operatorname{sh} \mu A_3^n + [(3 - 4\nu) \operatorname{sh} \mu - \mu \operatorname{ch} \mu] B_3^n &= \psi_2^n(\mu), \end{aligned} \right\} \quad (44.8)$$

где введены обозначения

$$\left. \begin{aligned} h\psi_1^n(\mu) &= \mu \operatorname{sh} \mu f_2^n + \mu f_3^n - \mu \operatorname{ch} \mu f_1^n, \\ h\psi_2^n(\mu) &= h \operatorname{ch} \mu f_2^n + h f_4^n + \mu \operatorname{sh} \mu f_1^n. \end{aligned} \right\} \quad (44.9)$$

Находя из (44.8) A_3^n и B_3^n , а из (44.6) — A_0^n и B_0^n и подставляя их в (44.5), получим решение поставленной задачи. Заметим, что определитель основной системы (44.8) равен

$$(3 - 4\nu)^2 \operatorname{sh}^2 \mu - \mu^2,$$

причем можно показать, что множители

$$(3 - 4\nu) \operatorname{sh} \mu - \mu \quad \text{и} \quad (3 - 4\nu) \operatorname{sh} \mu + \mu$$

соответствуют симметричной и антисимметричной задачам.

В тех случаях, когда вычисления полученных несобственных интегралов можно производить с помощью теоремы о вычетах, необходимо воспользоваться корнями уравнений

$$\operatorname{sh} z \mp \frac{z}{3 - 4\nu} = 0, \quad (44.10)$$

приведенными в табл. 2 (глава I), где аналогичная задача ставилась для случая плоской деформации.

Обратимся теперь к частному случаю деформации, обладающей осью симметрии (Oz), и заметим прежде всего, что решение при этом может быть упрощено, а именно можно обойтись

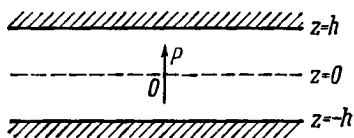
только двумя гармоническими функциями f и ω Папковича—Нейбера, положив *

$$u_r = -\frac{\partial f}{\partial r} - z \frac{\partial \omega}{\partial r}, \quad u_z = -\frac{\partial f}{\partial z} + (3 - 4\nu)\omega - z \frac{\partial \omega}{\partial z} \quad (44.11)$$

(u_r , u_z — перемещения в направлении осей цилиндрических координат).

Проведем выкладки для конкретного случая, когда слой с закрепленными гранями деформируется осевой силой (рис. 29).

Разбивая каждое из перемещений u_r и u_z на два слагаемых:



$$\left. \begin{aligned} u_r &= u_{r0} - u_{r1}, \\ u_z &= u_{z0} - u_{z1}, \end{aligned} \right\} \quad (44.12)$$

где u_{r0} и u_{z0} — перемещения, создаваемые такой силой в неограниченном пространстве,

Рис. 29.

$$\left. \begin{aligned} u_{r0} &= \frac{Qrz}{R^3}, \quad u_{z0} = Q \left(\frac{z^2}{R^3} + \frac{3-4\nu}{R} \right), \\ Q &= \frac{P}{16\pi G(1-\nu)}, \quad R = \sqrt{r^2 + z^2}, \end{aligned} \right\} \quad (44.13)$$

получим для u_{r1} и u_{z1} граничные условия

$$\left. \begin{aligned} u_{r1}|_{z=\pm h} &= \pm \frac{Qrh}{R_h^3} = \pm f_1(r), \quad u_{z1}|_{z=\pm h} = Q \left(\frac{h^2}{R_h^3} + \frac{3-4\nu}{R_h} \right) = f_2(r), \\ R_h &= \sqrt{r^2 + h^2}. \end{aligned} \right\} \quad (44.14)$$

Будем представлять перемещения u_{r1} и u_{z1} через функции f и ω с помощью формул (44.11). Из соображений симметрии имеем

$$f = \int_0^{\infty} M(\lambda) \operatorname{sh} \lambda z J_0(\lambda r) d\lambda, \quad \omega = \int_0^{\infty} N(\lambda) \operatorname{ch} \lambda z J_0(\lambda r) \lambda d\lambda, \quad (44.15)$$

после чего граничные условия дают для M и N следующую систему уравнений ($\lambda h = \mu$):

$$\left. \begin{aligned} M \operatorname{sh} \mu + N \mu \operatorname{ch} \mu &= f_1, \\ -M \operatorname{ch} \mu + N [(3-4\nu) \operatorname{ch} \mu - \mu \operatorname{sh} \mu] &= f_2, \end{aligned} \right\} \quad (44.16)$$

* Сказанное относится также и к первой основной задаче, разобранной в предыдущих параграфах.

где

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \int_0^{\infty} f_1(r) J_1(\lambda r) r dr = Q h e^{-\mu}, \\ f_2 &= \int_0^{\infty} f_2(r) J_0(\lambda r) r dr = \frac{Q h}{\mu} e^{-\mu} (3 - 4\nu + \mu). \end{aligned} \right\} \quad (44.17)$$

Определитель системы (44.16) равен

$$(3 - 4\nu) \operatorname{ch} \mu \operatorname{sh} \mu + \mu,$$

как и должно быть, так как рассматриваемая задача антисимметрична по координате z .

После некоторых выкладок окончательное решение задачи дается следующими квадратурами:

$$\left. \begin{aligned} f &= -Q \int_0^{\infty} \frac{\mu \operatorname{sh} \mu \frac{z}{h} J_0\left(\mu \frac{r}{h}\right)}{(3 - 4\nu) \operatorname{ch} \mu \operatorname{sh} \mu + \mu} d\mu, \\ w &= \frac{Q}{h} \int_0^{\infty} \frac{\mu + (3 - 4\nu) e^{-\mu} \operatorname{sh} \mu}{(3 - 4\nu) \operatorname{ch} \mu \operatorname{sh} \mu + \mu} \operatorname{ch} \mu \frac{z}{h} J_0\left(\mu \frac{r}{h}\right) d\mu. \end{aligned} \right\} \quad (44.18)$$

§ 45. Деформация упругого слоя при смешанных краевых условиях

Переходим к рассмотрению упругого равновесия слоя, на одной из граничных плоскостей ($z=0$) которого заданы перемещения

$$u|_{z=0} = u_0(r, \varphi), \quad v|_{z=0} = v_0(r, \varphi), \quad w|_{z=0} = w_0(r, \varphi), \quad (45.1)$$

а на другой ($z=h$) — напряжения

$$\sigma_x|_{z=h} = \sigma(r, \varphi), \quad \tau_{zx}|_{z=h} = \tau_x(r, \varphi), \quad \tau_{yz}|_{z=h} = \tau_y(r, \varphi). \quad (45.2)$$

Как и в более простых задачах, мы будем пользоваться формулами (42.1)–(42.3), выражающими упругие смещения и напряжения через четыре гармонические функции: $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$.

В качестве дополнительных условий выберем следующие два соотношения:

$$F|_{z=0} = 0, \quad \Phi|_{z=h} = 0, \quad (45.3)$$

где

$$\left. \begin{aligned} F &= \Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2 + z\Phi_3, \\ \Phi &= (1 - 2\nu)\Phi_3 - \frac{\partial\Phi_0}{\partial z} - \left(x \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} + y \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} + z \frac{\partial\Phi_3}{\partial z}\right). \end{aligned} \right\} \quad (45.4)$$

Использование условий (45. 1)—(45. 3) приводит прежде всего к смешанным граничным условиям для Φ_1 и Φ_2 :

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1|_{z=0} &= \frac{Gu_0}{2(1-\nu)}, & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \Big|_{z=h} &= \frac{\tau_x}{2(1-\nu)}, \\ \Phi_2|_{z=0} &= \frac{Gv_0}{2(1-\nu)}, & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \Big|_{z=h} &= \frac{\tau_y}{2(1-\nu)}. \end{aligned} \right\} \quad (45. 5)$$

Гармонические функции Φ_1 и Φ_2 легко могут быть найдены с помощью преобразования Ханкеля, если положить

$$\begin{aligned} \Phi_{1,2} &= \frac{1}{2(1-\nu)} \sum_{n=0}^{\infty} e^{i n \varphi} \int_0^{\infty} \left[A_1^n \cdot \operatorname{ch} \lambda(z-h) + B_1^n \cdot \frac{\operatorname{sh} \lambda z}{\lambda} \right] \times \\ &\quad \times J_n(\lambda r) \frac{d\lambda}{\operatorname{ch} \lambda h}. \end{aligned} \quad (45. 6)$$

В самом деле, подстановка (45. 6) в (45. 5) и применение формул Фурье и Ханкеля немедленно дает следующие значения величин A_1^n и B_1^n :*

$$\left. \begin{aligned} A_1^n(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-i n \varphi} u_0(r, \varphi) J_n(\lambda r) r dr d\varphi, \\ A_2^n(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-i n \varphi} v_0(r, \varphi) J_n(\lambda r) r dr d\varphi, \\ B_1^n(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-i n \varphi} \tau_x(r, \varphi) J_n(\lambda r) r dr d\varphi, \\ B_2^n(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-i n \varphi} \tau_y(r, \varphi) J_n(\lambda r) r dr d\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (45. 7)$$

Если считать функции Φ_1 и Φ_2 найденными, то для двух других гармонических функций Φ_0 и Φ_3 находим следующие неразделенные краевые условия:

* Предполагается, что заданные функции u_0 , v_0 , τ_x , τ_y удовлетворяют некоторым общим условиям, обеспечивающим сходимость интегралов (45. 7).

$$\left. \begin{aligned}
\Phi_0|_{z=0} &= -\frac{G}{2(1-\nu)}(xu + yv)_{z=0} = F_1(r, \varphi), \\
\left[(3-4\nu)\Phi_3 - \frac{\partial\Phi_0}{\partial z} \right]_{z=0} &= 2Gw_0 + \\
+ \left(x\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} + y\frac{\partial\Phi_2}{\partial z} \right)_{z=0} &= F_2(r, \varphi), \\
\left[2(1-\nu)\frac{\partial\Phi_3}{\partial z} - z\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial z^2} \right]_{z=h} &= \sigma + \\
+ \left(x\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z^2} + y\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial z^2} \right)_{z=h} &= \\
- 2\nu \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} \right)_{z=h} &= F_3(r, \varphi), \\
\left[(1-2\nu)\Phi_3 + z\frac{\partial\Phi_3}{\partial z} - \frac{\partial\Phi_0}{\partial z} \right]_{z=h} &= \\
= \frac{1}{2(1-\nu)}(x\tau_{zx} + y\tau_{yz})_{z=h} &= F_4(r, \varphi).
\end{aligned} \right\} (45.8)$$

Точное решение полученной смешанной задачи также получается с помощью преобразования Ханкеля. Полагая

$$\left. \begin{aligned}
\Phi_0 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} \int_0^{\infty} (A_0^n \operatorname{sh} \lambda z + B_0^n \operatorname{ch} \lambda z) J_n(\lambda r) d\lambda, \\
\Phi_3 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} \int_0^{\infty} (A_3^n \operatorname{ch} \lambda z + B_3^n \operatorname{sh} \lambda z) J_n(\lambda r) \lambda d\lambda
\end{aligned} \right\} (45.9)$$

и подставляя (45.9) в (45.8), находим

$$\lambda B_0^n = f_1^n(\lambda), \quad (3-4\nu)A_3^n - A_0^n = f_2^n(\lambda), \quad (45.10)$$

после чего для величин A_3^n и B_3^n получается следующая система уравнений ($\mu = \lambda h$):

$$\left. \begin{aligned}
-[(1-2\nu)\operatorname{sh} \mu + \mu \operatorname{ch} \mu] A_3^n + [2(1-\nu)\operatorname{ch} \mu - \mu \operatorname{sh} \mu] B_3^n &= \\
= \psi_1^n(\mu), \\
-[2(1-\nu)\operatorname{ch} \mu + \mu \operatorname{sh} \mu] A_3^n + [(1-2\nu)\operatorname{sh} \mu - \mu \operatorname{ch} \mu] B_3^n &= \\
= \psi_2^n(\mu),
\end{aligned} \right\} (45.11)$$

где положено

$$\left. \begin{aligned}
\psi_1^n &= \lambda f_1^n \operatorname{ch} \mu - f_2^n \operatorname{sh} \mu + \frac{1}{\lambda} f_3^n, \\
\psi_2^n &= \lambda f_1^n \operatorname{sh} \mu - f_2^n \operatorname{ch} \mu + f_4^n
\end{aligned} \right\} (45.12)$$

и через f_k^n ($k=1, 2, 3, 4$) обозначено преобразование Фурье—Ханкеля от функции $F_k(r, \varphi)$

$$f_k^n(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} F_k(r, \varphi) e^{-in\varphi} J_n(\lambda r) r dr d\varphi. \quad (45.13)$$

Так как определитель основной системы

$$(3 - 4\nu) \operatorname{sh}^2 \mu + \mu^2 + 4(1 - \nu)^2$$

пропорционален выражению

$$f(\mu) = \operatorname{ch} 2\mu + \frac{(2\mu)^2}{2(3 - 4\nu)} + \frac{4(1 - \nu)^2 + (1 - 2\nu)^2}{3 - 4\nu}, \quad (45.14)$$

то для вычисления получающихся несобственных интегралов с помощью вычетов (если это возможно) надо пользоваться той же табл. 4 (§ 5) корней уравнения $f(\mu) = 0$, что и в случае плоской деформации полосы.

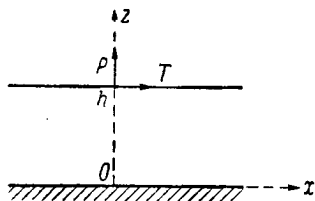
На этом мы заканчиваем общее решение смешанной задачи для упругого слоя.

§ 46. Функция Грина для слоя с закрепленным основанием

Пусть нижнее основание $z = 0$ упругого слоя жестко скреплено с неподвижным телом, а в точке $(0, 0, h)$ верхнего основания приложена сосредоточенная сила (рис. 30).

Разобьем решение такой задачи на два слагаемых, одно из которых пропорционально величине T , а второе — величине P .

Решение первой задачи получается как частный случай общего случая, рассмотренного в предыдущем параграфе, если положить



$$u_0 = v_0 = w_0 = \sigma = \tau_y = 0. \quad (46.1)$$

Рис. 30.

При этом из (45.5) сразу следует, что $\Phi_2 \equiv 0$, $A_1^n = 0$ [см. (45.7)].

Распределяя силу T по кругу радиуса ϵ и осуществляя предельный переход $\epsilon \rightarrow 0$, находим

$$B_1^n = \begin{cases} 0, & n \neq 0, \\ \frac{T}{2\pi}, & n = 0. \end{cases} \quad (46.2)$$

Таким образом, функция Φ_1 дается выражением

$$\Phi_1 = \frac{T}{4\pi(1 - \nu)} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \lambda z}{\operatorname{ch} \lambda h} J_0(\lambda r) d\lambda. \quad (46.3)$$

Переходим к определению функций Φ_3 и Φ_4 . Так как правые части условий (48. 8) в данном случае имеют вид

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= 0, & F_2 &= r \cos \varphi \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \Big|_{z=0}, \\ F_3 &= - \left[r \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} + (1 + 2\nu) \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right]_{z=h} \cos \varphi, \\ F_4 &= \frac{r \cos \varphi}{2(1-\nu)} \tau_{rz} \Big|_{z=h}, \end{aligned} \right\} \quad (46. 4)$$

то вместо (45. 9) удобнее положить

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \cos \varphi \int_0^{\infty} A_0 \operatorname{sh} \lambda z J_1(\lambda r) d\lambda, \\ \Phi_3 &= \cos \varphi \int_0^{\infty} (A_3 \operatorname{ch} \lambda z + B_3 \operatorname{sh} \lambda z) J_1(\lambda r) \lambda d\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (46. 5)$$

Опуская довольно громоздкие выкладки, приведем сразу выражения для правых частей основной системы (45. 11)

$$\psi_1(\mu) = - \frac{Th}{4\pi(1-\nu)} \left[1 + (1-2\nu) \frac{\operatorname{th} \mu}{\mu} \right], \quad \psi_2(\mu) = - \frac{Th \operatorname{th} \mu}{4\pi(1-\nu)}, \quad (46. 6)$$

а также заметим, что

$$A_0 = (3 - 4\nu) A_3 - \frac{Th \operatorname{sh} \mu}{4\pi(1-\nu) \operatorname{ch}^2 \mu}. \quad (46. 7)$$

Полное решение задачи получится теперь, если подставить (42. 6) в (45. 11) и найти величины A_3 и B_3 путем решения системы (45. 11).

Приведем без выкладок выражение для нормальных напряжений в заделке

$$\begin{aligned} \sigma_r \Big|_{z=0} &= - \frac{T(1-\nu)}{\pi h^2} \cos \varphi \int_0^{\infty} \frac{\mu \operatorname{ch} \mu + (1-2\nu) \operatorname{sh} \mu}{(3-4\nu) \operatorname{sh}^2 \mu + \mu^2 + 4(1-\nu)^2} \times \\ &\quad \times J_1\left(\mu \frac{r}{h}\right) \mu d\mu. \end{aligned} \quad (46. 8)$$

Переходим теперь к определению той части решения, которая связана с осевой силой P .

Так как при этом деформация осесимметрична, то удобнее воспользоваться не общими формулами § 42, а следующими

выражениями, представляющими перемещения и напряжения через гармонические функции f и Φ :

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_r &= -\frac{\partial f}{\partial r} - z \frac{\partial \Phi}{\partial r}, & 2Gu_z &= -\frac{\partial f}{\partial z} + (3 - 4\nu)\Phi - z \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \\ \sigma_z &= 2(1 - \nu) \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - z \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \\ \tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 - 2\nu)\Phi - \frac{\partial f}{\partial z} - z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right]. \end{aligned} \right\} (46.9)$$

Граничные условия

$$u_r|_{z=0} = 0, \quad u_z|_{z=0} = 0, \quad \tau_{rz}|_{z=h} = 0, \quad \sigma_z|_{z=h} = \sigma(r), \quad (46.10)$$

где запряжение $\sigma(r)$ соответствует сосредоточенной силе P , могут быть записаны в такой форме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r} \Big|_{z=0} &= 0, & \left[(3 - 4\nu)\Phi - \frac{\partial f}{\partial z} \right]_{z=0} &= 0, \\ \left[2(1 - \nu) \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - h \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right]_{z=h} &= \sigma(r), \\ \left[(1 - 2\nu)\Phi - \frac{\partial f}{\partial z} - h \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right]_{z=h} &= 0. \end{aligned} \right\} (46.11)$$

Полагая

$$\left. \begin{aligned} f &= \int_0^{\infty} A \operatorname{sh} \lambda z J_0(\lambda r) d\lambda, \\ \Phi &= \int_0^{\infty} (B \operatorname{ch} \lambda z + C \operatorname{sh} \lambda z) J_0(\lambda r) \lambda d\lambda, \end{aligned} \right\} (46.12)$$

получаем ($\mu = \lambda h$)

$$\left. \begin{aligned} (3 - 4\nu)B - A &= 0, \\ 2(1 - \nu)(B \operatorname{sh} \mu + C \operatorname{ch} \mu) - A \operatorname{sh} \mu - \mu(B \operatorname{ch} \mu + C \operatorname{sh} \mu) &= \\ &= \int_0^{\infty} \sigma(r) J_0(\lambda r) r dr, \\ (1 - 2\nu)(B \operatorname{ch} \mu + C \operatorname{sh} \mu) - A \operatorname{ch} \mu - \mu(B \operatorname{sh} \mu + C \operatorname{ch} \mu) &= 0. \end{aligned} \right\} (46.13)$$

Распределяя силу P по кругу радиуса ϵ , совершая предельный переход $\epsilon \rightarrow 0$ и исключая величину A , получаем для величин B и C систему

$$\left. \begin{aligned} [(1 - 2\nu) \operatorname{sh} \mu + \mu \operatorname{ch} \mu] B + [-2(1 - \nu) \operatorname{ch} \mu + \mu \operatorname{sh} \mu] C &= \frac{P}{2\pi}, \\ [2(1 - \nu) \operatorname{ch} \mu + \mu \operatorname{sh} \mu] B + [-(1 - 2\nu) \operatorname{sh} \mu + \mu \operatorname{ch} \mu] C &= 0, \end{aligned} \right\} (46.14)$$

на чем общее решение задачи можно закончить.

Выражение для нормальных напряжений в заделке имеет вид

$$\sigma_r|_{z=0} = -\frac{P(1-\nu)}{\pi h^2} \int_0^{\infty} \frac{\mu \operatorname{sh} \mu + 2(1-\nu) \operatorname{ch} \mu}{(3-4\nu) \operatorname{sh}^2 \mu + \mu^2 + 4(1-\nu)^2} J_0\left(\mu \frac{r}{h}\right) \mu d\mu.$$

Так как, по существу, и точка приложения силы, и ее величина выбирались произвольными, то решение данной задачи дает функцию Грина для случая упругой деформации слоя с закрепленным основанием.

Глава VIII. МЕТОД ПАРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§ 47. Кручение упругого слоя

В предыдущей главе с помощью интегрального преобразования Ханкеля было дано точное решение некоторых задач теории упругости для бесконечного слоя. Во всех рассмотренных случаях считалось, что краевые условия одного и того же типа заданы на всей граничной плоскости слоя.

Представляет интерес исследовать и более сложные смешанные задачи, когда на данной границе слоя имеется некоторая линия, разделяющая краевые условия разного типа.

В том случае, когда такой разделяющей линией является окружность, представляется удобным применять к решению подобных задач интегральное преобразование Ханкеля; однако этот метод уже не приводит к точному решению в квадратурах, как это было в более простых случаях, а лишь дает возможность свести задачу к так называемым парным интегральным уравнениям; последние в свою очередь с помощью специального приема сводятся к одномерному уравнению Фредгольма с непрерывным ядром, допускающему эффективное численное решение.

Простейшей задачей такого сорта является рассматриваемый в настоящем параграфе случай упругого равновесия неограниченного слоя, скручиваемого посредством поворота сцепленного с ним жесткого цилиндрического штампа с плоским основанием (рис. 31).

Введем цилиндрические координаты (r, φ, z) и предположим, что одна граничная плоскость $(z=h)$ слоя закреплена, а другая $(z=0)$ подвергается скручиванию по площадке $0 \leq r < a$.

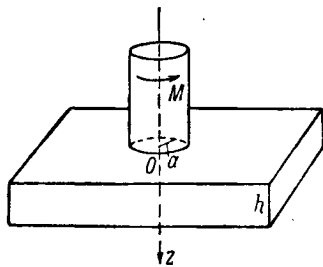


Рис. 31.

Поставленная задача сводится, очевидно, к определению единственной отличной от нуля компоненты смещения $u_\varphi = u(r, z)$, которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (47.1)$$

и граничным условиям

$$u|_{z=h} = 0, \quad u|_{\substack{z=0 \\ r < a}} = \varepsilon r, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{\substack{z=0 \\ r > a}} = 0, \quad (47.2)$$

где ε — угол поворота штампа.

Последнее из условий (47.2) получено приравниванием нулю касательного напряжения

$$\tau_{\varphi z} = G \frac{\partial u}{\partial z} \quad (47.3)$$

на плоскости $z=0$ вне штампа (G — модуль сдвига).

Таким образом, окружность $z=0, r=a$ является линией, разделяющей область заданного перемещения от области заданного напряжения.

Заметим еще, что на бесконечности ($r \rightarrow \infty$) величина смещения u должна оставаться ограниченной.

Представив функцию $u(r, z)$ в виде интегрального разложения Ханкеля по функциям $J_1(\lambda r)$

$$u(r, z) = \int_0^\infty A(\lambda) \frac{\text{sh } \lambda (h-z)}{\text{sh } \lambda h} J_1(\lambda r) d\lambda, \quad (47.4)$$

мы удовлетворяем дифференциальному уравнению (47.1) и граничному условию (47.2) на плоскости $z=h$.

Подставляя выражение (47.4) в смешанные краевые условия (47.2) на плоскости $z=0$, мы приходим к двум интегральным уравнениям относительно одной неизвестной функции $A(\lambda)$. Эти уравнения, обычно называемые парными (дуальными) интегральными уравнениями, в рассматриваемом случае имеют следующий вид:

$$\int_0^\infty A(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda = \varepsilon r, \quad 0 \leq r < a, \quad (47.5)$$

$$\int_0^\infty \lambda \text{cth } \lambda h A(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda = 0, \quad a < r < \infty. \quad (47.6)$$

Пользуясь методикой, развитой в работах [52, 157], покажем, что эти парные уравнения можно свести к интегральному уравнению Фредгольма.

Представим искомую величину $A(\lambda)$ в виде интеграла от новой неизвестной функции $\varphi(t)$

$$A(\lambda) = th\lambda h \int_0^a \varphi(t) \sin \lambda t dt. \quad (47.7)$$

Для законности дальнейших операций как в этой, так и в последующих задачах настоящей главы достаточно предположить, что функции $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны в замкнутом промежутке $0 \leq t \leq a$.

Подставим (47.7) во второе парное уравнение (47.6) и запишем его в следующем виде:

$$\frac{d}{dr} \int_0^a \varphi(t) dt \int_0^\infty J_0(\lambda r) \sin \lambda t d\lambda = 0, \quad a < r < \infty. \quad (47.8)$$

Так как [16]

$$\int_0^\infty J_0(\lambda r) \sin \lambda t d\lambda = \begin{cases} 0, & r > t, \\ \frac{1}{\sqrt{t^2 - r^2}}, & r < t, \end{cases} \quad (47.9)$$

то уравнение (47.6) удовлетворено тождественно для любой функции $\varphi(t)$ рассматриваемого класса.

Обратимся теперь к первому из парных уравнений (47.5). Подставляя в него выражение (47.7), разбивая $th\lambda h$ на два слагаемых $1 - \frac{e^{-\lambda h}}{\text{ch } \lambda h}$ и пользуясь формулой [16]

$$\int_0^\infty J_1(\lambda r) \sin \lambda t d\lambda = \frac{t}{r\sqrt{r^2 - t^2}}, \quad r > t, \quad (47.10)$$

получаем

$$\frac{1}{r} \int_0^r \frac{t\varphi(t)}{\sqrt{r^2 - t^2}} dt - \int_0^a \varphi(t) dt \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda h}}{\text{ch } \lambda h} J_1(\lambda r) \sin \lambda t d\lambda = \varepsilon r. \quad (47.11)$$

Делая в первом из полученных интегралов замену переменных $t = r \sin \theta$, используя во втором интеграле известное представление

$$J_1(\lambda r) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\lambda r \sin \theta) \sin \theta d\theta, \quad (47.12)$$

можно преобразовать равенство (47.11) к виду

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} r \sin \theta \left\{ \varphi(r \sin \theta) - \frac{1}{\pi} \int_0^a \varphi(t) [G(t - \sin \theta) - G(t + r \sin \theta)] dt \right\} d\theta = \varepsilon r^2, \quad 0 \leq r < a, \quad (47.13)$$

где введено обозначение

$$G(y) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda h}}{\operatorname{ch} \lambda h} \cos \lambda y d\lambda. \quad (47.14)$$

Полагая

$$F(x) = x \left\{ \varphi(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^a \varphi(t) [G(t-x) - G(t+x)] dt \right\}, \quad (47.15)$$

мы можем записать (47.13) в виде уравнения

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(r \sin \theta) d\theta = f(r) = \varepsilon r^2, \quad (47.16)$$

являющегося частным случаем интегрального уравнения Шлемильха.

Так как непрерывное решение уравнения Шлемильха дается формулой [52]

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \left[f(0) + x \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x \sin \theta) d\theta \right], \quad (47.17)$$

то мы приходим к следующему равенству:

$$\varphi(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^a \varphi(t) [G(t-x) - G(t+x)] dt = \frac{4}{\pi} \varepsilon x \quad (47.18)$$

$$(0 \leq x \leq a),$$

являющемуся интегральным уравнением Фредгольма относительно искомой функции $\varphi(x)$.

Таким образом, решение поставленной задачи дается формулами (47.4) и (47.7), причем функция $\varphi(t)$ должна быть найдена из интегрального уравнения (47.18). Заметим, что непрерывное симметричное ядро (47.14) этого уравнения может

быть выражено через логарифмическую производную гамма-функции

$$\left. \begin{aligned} G(y) &= \frac{1}{2h} \operatorname{Re} \left[\psi \left(1 + \frac{iy}{4h} \right) - \psi \left(\frac{1}{2} + \frac{iy}{4h} \right) \right], \\ \psi(z) &= \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}. \end{aligned} \right\} \quad (47.19)$$

Остается теперь выразить входящий в решение неизвестный угол поворота штампа ε через заданное значение крутящего момента M , где

$$M = - \int_0^a \int_0^{2\pi} \tau_{\varphi r} \Big|_{z=0} \Big|_{r < a} r^2 dr d\varphi. \quad (47.20)$$

Оказывается, что напряжение под штампом может быть непосредственно выражено через функцию $\varphi(t)$. В самом деле [см. (47.9)]

$$\begin{aligned} \tau_{\varphi r} \Big|_{z=0} \Big|_{r < a} &= G \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} \Big|_{r < a} = \\ &= G \frac{d}{dr} \int_0^a \varphi(t) dt \int_0^\infty J_0(\lambda r) \sin \lambda t d\lambda = G \frac{d}{dr} \int_r^a \frac{\varphi(t) dt}{\sqrt{t^2 - r^2}}. \end{aligned} \quad (47.21)$$

Подставляя (47.21) в (47.20), приходим к простому соотношению

$$M = 4\pi G \int_0^a t \varphi(t) dt. \quad (47.22)$$

Вводя вместо $\varphi(t)$ безразмерную функцию

$$\omega(\xi) = \frac{\pi}{4a\varepsilon} \varphi(x), \quad \xi = \frac{x}{a}, \quad (47.23)$$

получаем из (47.22) требуемую связь между углом ε и моментом M

$$M = 16Ga^3\varepsilon \int_0^1 \omega(\xi) \xi d\xi. \quad (47.24)$$

Для получения численных результатов необходимо прежде всего дать приближенное решение основного интегрального

уравнения (47.18), которое может быть переписано в безразмерной форме

$$\left. \begin{aligned} \omega(\xi) &= \xi + \frac{p}{\pi} \int_0^1 \omega(\tau) [K(\tau - \xi) - K(\tau + \xi)] d\tau, \quad 0 \leq \xi \leq 1. \\ K(u) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\psi \left(1 + \frac{iup}{4} \right) - \psi \left(\frac{1}{2} + \frac{iup}{4} \right) \right], \quad p = \frac{a}{h}. \end{aligned} \right\} (47.25)$$

Заменив значение интеграла в (47.25) его приближенным значением по какой-либо квадратурной формуле, приводим задачу определения основной функции $\omega(\tau)$ к решению системы линейных алгебраических уравнений, что дает возможность составить таблицу значений этой функции с необходимой степенью точности.

Т а б л и ц а 22

ξ	$\omega(\xi)$	
	$p=1$	$p=2$
0	0	0
0.1	0.1076	0.1383
0.2	0.2150	0.2752
0.3	0.3221	0.4091
0.4	0.4288	0.5388
0.5	0.5348	0.6632
0.6	0.6401	0.7813
0.7	0.7447	0.8928
0.8	0.8485	0.9976
0.9	0.9514	1.096
1.0	1.054	1.189
α	0.3556	0.4212

Результаты расчета для случая, когда промежуток делится на 10 частей и применялась формула трапеций, приведены в табл. 22, причем рассматривалось два значения: $p=1$ и $p=2$ отношения $p = \frac{a}{h}$. В той же таблице даны также значения коэффициента $\alpha = \frac{M}{16Ga^3\epsilon}$ [см. (47.24)], характеризующего связь угла поворота ϵ с приложенным моментом.

В заключение отметим, что для случая полупространства ($h = \infty$) имеем

$$K(u) \equiv 0, \quad \omega(\xi) = \xi, \quad \alpha = \frac{1}{3},$$

что совпадает с известным результатом (см., например, [92]).

§ 48. Осесимметричная деформация упругого слоя с круговой линией раздела крайних условий на одной из граней

Переходим теперь к более сложной осесимметричной задаче для упругого слоя, на граничной плоскости $z=0$ которого имеется круговая линия раздела крайних условий. Предположим, что на всей границе $z=0$ слоя задано касательное напряжение τ_{rz} , в то время как внутри круга $z=0, r=a$ известно нормальное перемещение w , а вне его — нормальное напряжение σ_z .

Если на второй границе слоя ($z=h$) считать заданными осевое смещение и касательное напряжение, то граничные условия поставленной задачи имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \tau_{rz}|_{z=0} &= \tau_0(r), & \tau_{rz}|_{z=h} &= \tau_h(r), & u_s|_{z=h} &= w_h(r), \\ u_s|_{z=0} &= w_0(r), & \sigma_s|_{z=0} &= \sigma_0(r). \end{aligned} \right\} \quad (48.1)$$

Для решения задачи воспользуемся представлением перемещений и напряжений осесимметричной задачи через две гармонические функции [ср. (46.9)]

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_r &= -\frac{df}{dr} - z\frac{\partial\Phi}{\partial r}, & 2Gu_s &= -F + (3-4\nu)\Phi - z\frac{\partial\Phi}{\partial z}, \\ \sigma_s &= 2(1-\nu)\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z} - z\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}, & F &= \frac{df}{dz}, \\ \tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[1-2\nu \right] \Phi - F - z\frac{\partial\Phi}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (48.2)$$

Граничные условия при $z=h$ могут быть приведены к такому виду:

$$\left. \begin{aligned} \Phi|_{z=h} &= \frac{2Gw_h + \int_0^r \tau_h(r) dr}{2(1-\nu)} = f_1(r), \\ (F + z\frac{\partial\Phi}{\partial z})_{z=h} &= \frac{2G(1-2\nu)w_h - (3-4\nu) \int_0^r \tau_h(r) dr}{2(1-\nu)} = f_2(r). \end{aligned} \right\} \quad (48.3)$$

Если искать функции $\Phi(r, z)$ и $F(r, z)$ в виде интегральных разложений Ханкеля

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \int_0^\infty [A \operatorname{sh} \lambda(h-z) + C \operatorname{ch} \lambda(h-z)] J_0(\lambda r) \frac{d\lambda}{\operatorname{sh} \lambda h}, \\ F &= \int_0^\infty [(\lambda h A + D) \operatorname{ch} \lambda(h-z) + B \operatorname{sh} \lambda(h-z)] J_0(\lambda r) \frac{d\lambda}{\operatorname{sh} \lambda h}, \end{aligned} \right\} \quad (48.4)$$

то из (48.3) находим значения C и D

$$C(\lambda) = \lambda \operatorname{sh} \lambda h f_1, \quad D(\lambda) = \lambda \operatorname{sh} \lambda h f_2, \quad (48.5)$$

где через $f(\lambda)$ обозначено преобразование Ханкеля от функции $f(r)$

$$f(\lambda) = \int_0^\infty f(r) J_0(\lambda r) r dr. \quad (48.6)$$

Существенно отметить, что при этом величины $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ остаются неопределенными.

Подстановка функций Φ и F из (48.4) в граничное условие $\tau_{rz}|_{z=0} = \tau_0(r)$ позволяет установить связь величин B и A

$$B(\lambda) = f_3 + (1 - 2\nu - \lambda h \operatorname{cth} \lambda h) A(\lambda), \quad (48.7)$$

где

$$f_3(r) = \int_0^{\infty} (C - D) \operatorname{cth} \lambda h J_0(\lambda r) d\lambda - \int_r^{\infty} \tau_0(r) dr. \quad (48.8)$$

Наконец, подставляя (48.3) в оставшиеся граничные условия (48.1) при $z=0$ и учитывая связь (48.7), после некоторых выкладок приходим к парным интегральным уравнениям следующего вида:

$$\int_0^{\infty} A(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = \omega(r), \quad 0 \leq r < a, \quad (48.9)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\lambda A(\lambda)}{1 - g(\lambda)} J_0(\lambda r) d\lambda = \psi(r), \quad a < r < \infty, \quad (48.10)$$

где введены обозначения

$$g(\lambda) = \frac{\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h e^{-\lambda h}}{\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h}. \quad (48.11)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega(r) &= \frac{Gw_0}{1-\nu} + \int_0^{\infty} f_3 J_0(\lambda r) d\lambda + \\ &+ \int_0^{\infty} [D - (3 - 4\nu)C] \operatorname{cth} \lambda h J_0(\lambda r) d\lambda, \\ \psi(r) &= -\sigma_0 + \int_0^{\infty} \lambda [f_3 \operatorname{cth} \lambda h + D + 2(1 - \nu)C] J_0(\lambda r) d\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (48.12)$$

Парные уравнения (48.9) и (48.10) можно упростить, если разложить функцию $\psi(r)$ в интеграл Ханкеля* и ввести обозначение

$$\chi(r) = \omega(r) - \int_0^{\infty} \bar{\psi} [1 - g(\lambda)] J_0(\lambda r) d\lambda. \quad (48.13)$$

* Доопределив ее каким-либо образом на промежутке $0 \leq r < a$.

Тогда вместо (48. 9) и (48. 10) получим

$$\int_0^{\infty} E(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = \chi(r), \quad 0 \leq r < a, \quad (48. 14)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\lambda E(\lambda)}{1-g(\lambda)} J_0(\lambda r) d\lambda = 0, \quad a < r < \infty, \quad (48. 15)$$

где введена новая неизвестная величина $E(\lambda)$:

$$E(\lambda) = A(\lambda) - \bar{\varphi}[1 - g(\lambda)]. \quad (48. 16)$$

Полученная система уравнений является частным случаем более общей системы, когда функция Бесселя нулевого порядка заменяется на функцию $J_n(\lambda r)$. Такой общий случай рассматривается в § 50 настоящей главы. В § 47 мы имели дело со случаем $n=1$ и другой функцией $g(\lambda)$, причем парные уравнения были сведены к уравнению Фредгольма. Аналогичное сведение может быть сходным приемом осуществлено и применительно к парным интегральным уравнениям (48. 14), (48. 15).

Положим

$$E(\lambda) = [1 - g(\lambda)] \int_0^a \varphi(t) \cos \lambda t dt \quad (48. 17)$$

и подставим (48. 17) в (48. 15). Имеем при $r > a$, используя формулу (47. 9),

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \lambda J_0(\lambda r) d\lambda \int_0^{\infty} \varphi(t) \cos \lambda t dt &= \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) \left[\varphi(a) \sin \lambda a - \right. \\ &\left. - \int_0^a \varphi'(t) \sin \lambda t dt \right] d\lambda = \varphi(a) \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) \sin \lambda a d\lambda - \\ &- \int_0^a \varphi'(t) dt \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) \sin \lambda t dt = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, второе парное уравнение (48. 15) удовлетворено тождественно относительно функции $\varphi(t)$.

Подстановка (48. 17) в первое из парных уравнений (48. 14) после перемены порядка интегрирования и использования формул [16]

$$\int_0^{\infty} J_0(\lambda r) \cos \lambda t d\lambda = \begin{cases} 0, & r < t, \\ \frac{1}{\sqrt{r^2 - t^2}}, & r > t, \end{cases} \quad (48. 18)$$

$$J_0(\lambda r) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\lambda r \sin \theta) d\theta \quad (48.19)$$

приводит к соотношению

$$\int_0^r \frac{\varphi(t) dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \varphi(t) dt \int_0^\infty g(\lambda) \cos \lambda t \times \\ \times \cos(\lambda r \sin \theta) d\lambda = \chi(r). \quad (48.20)$$

Если ввести в первом из полученных интегралов новую переменную интегрирования $t = r \sin \theta$ и обозначить через $G(y)$ косинус-преобразование Фурье от функции $\sqrt{\frac{\pi}{2}} g(\lambda)$

$$G(y) = \int_0^\infty g(\lambda) \cos \lambda y dy, \quad (48.21)$$

то (48.20) может быть записано в виде

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \varphi(r \sin \theta) - \frac{1}{\pi} \int_0^a \varphi(t) [G(t + r \sin \theta) + \right. \\ \left. + G(t - r \sin \theta)] dt \right\} d\theta = \chi(r). \quad (48.22)$$

Полагая

$$\varphi(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^a \varphi(t) [G(t + x) + G(t - x)] dt = F(x) \quad (48.23)$$

$$(0 \leq x \leq a),$$

приходим к интегральному уравнению Шлемильха типа (47.16), решение которого дается формулой (47.17).

После определения $F(x)$ равенство (48.23) можно рассматривать как интегральное уравнение Фредгольма с непрерывным симметричным ядром относительно неизвестной функции $\varphi(t)$.

Для решения конкретных задач необходимо прежде всего располагать значениями ядра полученного интегрального уравнения. Если ввести безразмерные величины

$$u = \frac{y}{a}, \quad p = \frac{a}{h}, \quad G(y) = \frac{1}{a} K(u), \quad (48.24)$$

то ядро уравнения (48.23) выражается через безразмерную функцию

$$K(u) = p \int_0^{\infty} \frac{\mu + e^{-p} \operatorname{sh} \mu}{\mu + \operatorname{sh} \mu \operatorname{ch} \mu} \cos \mu p u d \mu, \quad (48.25)$$

которую и надлежит табулировать во всем промежутке $0 \leq u \leq 2$ изменения ее аргумента.

Таблица 23

$u \backslash p$	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
0	0.5837	1.167	1.751	2.335	2.919	3.502
0.1	0.5828	1.159	1.725	2.273	2.799	3.297
0.2	0.5798	1.136	1.649	2.099	2.474	2.767
0.3	0.5750	1.099	1.531	1.845	2.033	2.103
0.4	0.5682	1.049	1.384	1.551	1.571	1.481
0.5	0.5598	0.9897	1.220	1.256	1.158	0.9922
0.6	0.5496	0.9224	1.051	0.9875	0.8269	0.6504
0.7	0.5378	0.8502	0.8894	0.7591	0.5816	0.4296
0.8	0.5248	0.7757	0.7406	0.5753	0.4098	0.2944
0.9	0.5104	0.7010	0.6090	0.4336	0.2946	0.2130
1.0	0.4948	0.6282	0.4962	0.3279	0.2186	0.1632
1.1	0.4784	0.5587	0.4021	0.2512	0.1690	0.1320
1.2	0.4612	0.4937	0.3252	0.1962	0.1360	0.1106
1.3	0.4434	0.4339	0.2635	0.1571	0.1137	0.09489
1.4	0.4251	0.3795	0.2148	0.1291	0.09751	0.08251
1.5	0.4065	0.3308	0.1767	0.1088	0.08504	0.07268
1.6	0.3878	0.2877	0.1472	0.09393	0.07524	0.06422
1.7	0.3691	0.2498	0.1243	0.08269	0.06722	0.05702
1.8	0.3505	0.2168	0.1065	0.07371	0.06053	0.05113
1.9	0.3322	0.1883	0.09253	0.06636	0.05454	0.04597
2.0	0.3141	0.1640	0.08162	0.06026	0.04958	0.04145

В табл. 23 даны значения ядра $K(u)$ для $p = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots, 3$.

В следующем параграфе эти данные используются в контактной задаче для упругого слоя.

Заметим, что при малых значениях параметра p решение рассматриваемого уравнения может быть построено в виде разложения по степеням этого параметра.

§ 49. Осесимметричная контактная задача для упругого слоя

Рассмотрим упругое равновесие неограниченного слоя, лежащего на жестком неподвижном основании и деформирующегося под действием кругового в плане жесткого штампа. Предпола-

гается, что штамп ограничен поверхностью вращения и вдавливание осуществляется осевой силой. Будем считать, что трение между штампом и слоем, а также между слоем и основанием отсутствует, хотя предлагаемый метод допускает распространение и на более сложные случаи (см., например, § 52, где слой и основание считаются жестко сцепленными).

При сделанных предположениях граничные условия поставленной контактной задачи имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \tau_{rz}|_{z=0} = 0, \quad \tau_{rz}|_{z=h} = 0, \quad u_z|_{z=h} = 0, \\ u_z|_{z=0} = \delta - \chi(r), \quad \sigma_z|_{z=0} = 0, \\ r < a \qquad \qquad \qquad r > a \end{aligned} \right\} \quad (49.1)$$

где δ — осевое смещение штампа, $\chi(r)$ — кривая, определяющая форму поверхности штампа. Радиус a штампа считается заданным, что при неплоском основании соответствует случаю полного погружения под действием достаточно большой силы P . При неполном погружении задача осложняется тем обстоятельством, что радиус площадки контакта заранее неизвестен и его требуется определить из условия непрерывности нормальных напряжений в точках окружности $r = a$.

Сравнивая (49.1) с (48.1), видим, что рассматриваемая контактная задача для слоя является частным случаем более общей смешанной задачи (см. § 48), когда в граничных условиях (48.1) положено

$$\tau_0 = \tau_h = w_h = \sigma_0 = 0, \quad w_0(r) = \delta - \chi(r). \quad (49.2)$$

Используя полученные в § 48 результаты, имеем выражения (48.4) для функций напряжений Φ и F , в которых следует положить $C = D = 0$. При этом величина $B(\lambda)$ выражается формулой (48.7):

$$B(\lambda) = (1 - 2\nu - \lambda h \operatorname{cth} \lambda h) A(\lambda), \quad (49.3)$$

величина $A(\lambda)$ — формулой (48.17):

$$\left. \begin{aligned} A(\lambda) = [1 - g(\lambda)] \int_0^a \varphi(t) \cos \lambda t dt, \\ g(\lambda) = \frac{\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h e^{-\lambda h}}{\lambda h + \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{sh} \lambda h}, \end{aligned} \right\} \quad (49.4)$$

где функция $\varphi(t)$ должна быть найдена в результате решения интегрального уравнения Фредгольма (48.23)

$$\varphi(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^a \varphi(t) [G(t+x) + G(t-x)] dt = F(x) \quad (49.5)$$

$$(0 \leq x \leq a).$$

Правая часть последнего уравнения находится из формулы (47. 17) при

$$f(r) = \frac{G}{1-\nu} [\delta - \chi(r)],$$

а ядро $G(y)$ дается формулой (48. 21).

Обратимся к случаю штампа с плоским основанием (см. рис. 32 при $x_0=0$), когда

$$\chi(r) \equiv 0, \quad f(r) = \frac{G\delta}{1-\nu}, \quad F(x) = \frac{2G\delta}{\pi(1-\nu)}, \quad (49. 6)$$

и введем безразмерные переменные

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \tau = \frac{t}{a}, \quad \omega_s(\xi) = \frac{\pi(1-\nu)}{2G\delta} \varphi(x), \quad (49. 7)$$

после чего основное интегральное уравнение (49. 5) принимает вид

$$\omega_s(\xi) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_0^1 [K(\tau + \xi) + K(\tau - \xi)] \omega_s(\tau) d\tau \quad (0 \leq \xi \leq 1), \quad (49. 8)$$

где табулированное в § 48 ядро $K(u)$ выражается формулой (48. 25).

В табл. 24 приведены соответствующие данные для $\omega_s(\tau)$ при значениях отношения $p = \frac{a}{h}$ радиуса штампа к толщине слоя от $p=0$ до $p=3$ с шагом 0.5, причем интервал $0 \leq \tau \leq 1$ делился на 10 частей.

Таблица 24

$\tau \backslash p$	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
0	1.530	2.353	3.320	4.321	5.325	6.324
0.1	1.529	2.348	3.308	4.303	5.301	6.295
0.2	1.527	2.333	3.272	4.246	5.228	6.207
0.3	1.523	2.307	3.212	4.153	5.105	6.057
0.4	1.518	2.272	3.129	4.022	4.930	5.842
0.5	1.511	2.228	3.025	3.854	4.701	5.556
0.6	1.503	2.176	2.902	3.650	4.417	5.195
0.7	1.494	2.118	2.763	3.416	4.081	4.756
0.8	1.484	2.054	2.611	3.157	3.702	4.250
0.9	1.472	1.986	2.454	2.884	3.297	3.699
1.0	1.460	1.915	2.290	2.608	2.889	3.142

Интересно отметить, что многие существенные для приложений величины могут быть выражены непосредственно через

функцию $\varphi(t)$, минуя промежуточные формулы, что особенно удобно при применении численных методов. Так, например, воспользовавшись формулой

$$\begin{aligned} \sigma_z|_{z=0} &= \left[2(1-\nu) \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z} \right]_{z=0} = \\ &= \int_0^{\infty} \lambda J_0(\lambda r) d\lambda \int_0^a \varphi(t) \cos \lambda t dt \end{aligned} \quad (49.9)$$

и учитывая (47.9), легко получаем следующее простое выражение для распределения нормальных напряжений под штампом:

$$\sigma_z|_{\substack{z=0 \\ r < a}} = \int_r^a \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dt - \frac{\varphi(a)}{\sqrt{a^2 - r^2}}, \quad (49.10)$$

справедливое для общего случая неплоского штампа.

Заметим, что в случае неполного погружения штампа с неплоским дном из формулы (49.10) получается дополнительное уравнение

$$\varphi(a) = 0, \quad (49.11)$$

вытекающее из условия непрерывности нормальных напряжений на плоскости $z=0$ и необходимое для нахождения неизвестного радиуса a площадки контакта.

Интегрируя выражение (49.10) по площади круга радиуса a и приравняв результат величине приложенной силы, получаем соотношение

$$P = 2\pi \int_0^a \varphi(t) dt, \quad (49.12)$$

из которого необходимо найти величину δ осевого перемещения штампа.

Для рассмотренного выше случая плоского штампа (49.12) принимает вид

$$P = \frac{4aG\delta}{1-\nu} \int_0^1 \omega_3(\tau) d\tau. \quad (49.13)$$

С помощью последней формулы, располагая табл. 24 значений функции $\omega_3(\tau)$, легко получить численную связь перемещения δ и силы P для различных значений отношения $p = \frac{a}{h}$ ра-

диуса штампа к высоте слоя. В табл. 29 приведены значения коэффициента x_δ

$$x_\delta = \frac{P(1-\nu)}{4aG\delta} = \int_0^1 \omega_\delta(\tau) d\tau. \quad (49.14)$$

Остановимся несколько подробнее на предельном случае $p=0$ ($h=\infty$), соответствующем хорошо изученной задаче об осевом вдавливании штампа в упругое полупространство. В этом случае

$$K(u) \equiv 0, \quad \omega_\delta(\tau) \equiv 1, \quad x_\delta = 1 \quad (49.15)$$

и формула (49.5) дает явное выражение основной искомой функции

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) = F(x) &= \frac{2}{\pi} \left[f(0) + x \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x \sin \theta) d\theta \right], \\ f(r) &= \frac{G}{1-\nu} [\delta - \chi(r)]. \end{aligned} \right\} \quad (49.16)$$

Из (49.16) и (49.12) непосредственно определяется связь между перемещением штампа δ и силой P

$$P = \frac{4aG}{1-\nu} \left[\delta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \chi(a \sin \theta) \sin \theta d\theta \right]. \quad (49.17)$$

В случае неполного погружения штампа с неплоским основанием к этому соотношению добавляется еще уравнение (49.11), принимающее в данном случае вид

$$\frac{\delta}{a} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \chi'(a \sin \theta) d\theta. \quad (49.18)$$

Из равенств (49.17) и (49.18) должны быть найдены величины перемещения штампа δ и радиуса a площадки контакта.

Формулы (49.17) и (49.18) позволяют для заданного радиуса штампа a_0 находить предельное значение силы P_0 , начиная с которого происходит полное погружение штампа,

$$P_0 = \frac{4a_0G}{1-\nu} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [a_0 \chi'(a_0 \sin \theta) - \sin \theta \chi(a_0 \sin \theta)] d\theta. \quad (49.19)$$

В заключение приведем еще формулу нормальных напряжений в зоне контакта для общего случая неплоского штампа, погруженного в упругое полупространство:

$$\sigma_s \Big|_{\substack{s=0 \\ r < a}} = -\frac{2G}{\pi(1-\nu)} \left\{ \left[\delta - a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \chi'(a \sin \theta) d\theta \right] \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}} + \right. \\ \left. + \int_r^a \frac{d^2}{dt^2} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin \theta \chi(t \sin \theta) d\theta \right] \frac{dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} \right\}. \quad (49.20)$$

§ 50. Общая смешанная задача для упругого слоя

Рассмотрим упругое равновесие неограниченного слоя $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq h$ (r, φ, z — цилиндрические координаты) при следующих условиях: на грани $z=h$ задано нормальное перемещение w ; на плоскости $z=0$ внутри некоторой окружности радиуса $r=a$ также задано смещение w , вне ее — нормальное напряжение σ_z ; наконец, на обеих граничных плоскостях слоя задаются касательные напряжения τ_{xz} и τ_{yz} . Таким образом, задача состоит в нахождении решений уравнений теории упругости при следующих краевых условиях:

$$w|_{z=h} = w_h(r, \varphi), \quad \tau_{xz}|_{z=h} = \tau_{xh}(r, \varphi), \quad \tau_{yz}|_{z=h} = \tau_{yh}(r, \varphi), \quad (50.1)$$

$$w|_{\substack{s=0 \\ r < 0}} = w_0(r, \varphi), \quad \sigma_z|_{\substack{s=0 \\ r > a}} = \sigma_0(r, \varphi), \quad (50.2)$$

$$\tau_{xz}|_{s=0} = \tau_{x0}(r, \varphi), \quad \tau_{yz}|_{s=0} = \tau_{y0}(r, \varphi). \quad (50.3)$$

При решении задачи мы будем пользоваться формулами Папковича—Нейбера

$$\left. \begin{aligned} 2Gu &= -\frac{\partial F}{\partial x} + 4(1-\nu)\Phi_1, & 2Gv &= -\frac{\partial F}{\partial y} + 4(1-\nu)\Phi_2, \\ 2Gw &= -\frac{\partial F}{\partial z} + 4(1-\nu)\Phi_3, & F &= \Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2 + z\Phi_3, \end{aligned} \right\} \quad (50.4)$$

представляющими решение уравнений Ляме через четыре гармонические функции: $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ (G — модуль сдвига).

Приведем также формулы для напряжений, входящих в граничные условия:

$$\left. \begin{aligned}
 \tau_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left(2(1-\nu) \Phi_3 - \Phi_4 \right) + 2\nu \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right) - \\
 &\quad - \left(x \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2} + z \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial z^2} \right), \\
 \tau_{xz} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} + 2(1-\nu) \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}, \quad \tau_{yz} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + 2(1-\nu) \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}, \\
 \Phi &= (1-2\nu) \Phi_3 - \Phi_4 - \left(x \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + y \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + z \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right), \\
 \Phi_4 &= \frac{\partial \Phi_0}{\partial z},
 \end{aligned} \right\} (50.5)$$

где ν — коэффициент Пуассона.

Сохраняя в принятом решении все четыре функции напряжений и присоединяя к условиям (50.1)—(50.3) два дополнительных соотношения:

$$\Phi|_{z=0} = 0, \quad \Phi|_{z=h} = 0, \quad (50.6)$$

мы сразу получаем из краевых условий, связанных с касательными напряжениями, две отдельные задачи Неймана для функций Φ_1 и Φ_2 , в силу чего эти две функции в дальнейшем считаются известными. Заметим, что условия разрешимости этих задач эквивалентны условиям статики, которым должны быть подчинены заданные на границах слоя касательные напряжения.

Остальным граничным условиям задачи можно удовлетворить, если подчинить гармонические функции Φ_3 и Φ_4 следующим условиям:*

$$\begin{aligned}
 \Phi_3|_{z=h} &= \frac{Gw_h}{1-\nu}, \quad \left(\Phi_4 + h \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right)_{z=h} = \frac{1-2\nu}{1-\nu} Gw_h + \\
 &\quad + \frac{x\tau_{xh} + y\tau_{yh}}{2(1-\nu)}, \quad (50.7)
 \end{aligned}$$

$$((1-2\nu)\Phi_3 - \Phi_4)|_{z=0} = \frac{x\tau_{x0} + y\tau_{y0}}{2(1-\nu)}, \quad (50.8)$$

$$((3-4\nu)\Phi_3 - \Phi_4)|_{z=0} = 2Gw_0 + \frac{x\tau_{x0} + y\tau_{y0}}{2(1-\nu)}, \quad (50.9)$$

$$\begin{aligned}
 \left[2(1-\nu) \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_4}{\partial z} \right]_{z=0} = \sigma_0 - 2\nu \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right)_{z=0} + \\
 + \left(x \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2} \right)_{z=0}. \quad (50.10)
 \end{aligned}$$

* Предполагается, что все искомые функции имеют на бесконечности порядок $\frac{1}{r}$. Наряду с этим во всех задачах главы VIII считается, что выполнены некоторые условия на линии $z=0, r=a$ раздела граничных условий (см. § 57).

Представляя гармонические функции Φ_3 и Φ_4 в виде

$$\left. \begin{aligned} \Phi_3 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} \int_0^{\infty} [A_n \operatorname{sh} \lambda (h-z) + C_n \operatorname{ch} \lambda (h-z)] \times \\ &\quad \times J_n(\lambda r) \frac{d\lambda}{\operatorname{sh} \lambda h}, \\ \Phi_4 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} \int_0^{\infty} [(\lambda h A_n + D_n) \operatorname{ch} \lambda (h-z) + \\ &\quad + B_n \operatorname{sh} \lambda (h-z)] J_n(\lambda r) \frac{d\lambda}{\operatorname{sh} \lambda h}, \end{aligned} \right\} (50.11)$$

можно с помощью формул Фурье и Хавкеля* из условий (50.7) найти величины $C_n(\lambda)$ и $D_n(\lambda)$:

$$\left. \begin{aligned} C_n(\lambda) &= \frac{G}{1-\nu} \lambda \operatorname{sh} \lambda h \int_0^{\infty} w_h^{(n)}(r) J_n(\lambda r) r dr, \\ D_n(\lambda) &= \frac{\lambda \operatorname{sh} \lambda h}{1-\nu} \int_0^{\infty} [(1-2\nu) G w_h^{(n)}(r) + \\ &\quad + \frac{1}{2} (x\tau_{zh} + y\tau_{yh})^{(n)}] J_n(\lambda r) r dr. \end{aligned} \right\} (50.12)$$

Здесь и в дальнейшем величины с индексом (n) являются коэффициентами разложения соответствующих функций в ряды Фурье по угловой координате φ .

Условие (50.8) позволяет выразить величину $B_n(\lambda)$ через остальные искомые величины, после чего (50.9) и (50.10) приводят нас к следующим парным интегральным уравнениям относительно основной неизвестной $A_n(\lambda)$:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} A_n(\lambda) J_n(\lambda r) d\lambda &= \chi_n(r), \quad r < a, \\ \int_0^{\infty} \frac{\lambda A_n(\lambda)}{1-g(\lambda)} J_n(\lambda r) d\lambda &= \psi_n(r), \quad r > a, \\ g(\lambda) &= \frac{\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h e^{-\lambda h}}{\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h}. \end{aligned} \right\} (50.13)$$

* Предполагается, что все функции разлагаются в соответствующие ряды и интегралы.

Здесь величины $\chi_n(r)$ и $\psi_n(r)$ даются следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} 2(1-\nu)\chi_n(r) &= 2Gw_0^{(n)} + \frac{(x\tau_{x0} + y\tau_{y0})^{(n)}}{2(1-\nu)} - \\ &- \int_0^\infty [2(1-\nu)C_n \operatorname{cth} \lambda h + E_n] J_n(\lambda r) d\lambda, \\ \psi_n(r) &= -\sigma_n^{(n)} - 2\nu \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y^2} \right)^{(n)} + \left(x \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} + y \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} \right)^{(n)} + \\ &+ \int_0^\infty \lambda \left[C_n + E_n \operatorname{cth} \lambda h - \frac{(1-2\nu)C_n - D_n}{\operatorname{sh}^2 \lambda h} \right] J_n(\lambda r) d\lambda, \\ E_n &= \frac{\lambda}{2(1-\nu)} \int_0^\infty (x\tau_{x0} + y\tau_{y0})^{(n)} J_n(\lambda r) r dr. \end{aligned} \right\} (50.14)$$

Заметим, что, разлагая функцию $\psi_n(r)$ в интеграл Ханкеля (при $r < a$ ее следует доопределить), можно систему (50.13) привести к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty \Phi_n(\lambda) J_n(\lambda r) d\lambda &= \omega_n(r), \quad r < a, \\ \int_0^\infty \frac{\lambda \Phi_n(\lambda)}{1-g(\lambda)} J_n(\lambda r) d\lambda &= 0, \quad r > a, \end{aligned} \right\} (50.15)$$

где $\omega_n(r)$ — известная функция, а $\Phi_n(\lambda)$ — новая неизвестная величина, связанная с $A_n(\lambda)$ простым соотношением

$$\Phi_n(\lambda) = A_n(\lambda) - [1-g(\lambda)] \int_a^\infty \psi_n(r) J_n(\lambda r) r dr. \quad (50.16)$$

Таким образом, рассматриваемая задача сведена к парным интегральным уравнениям (50.15).

При решении этих уравнений мы будем исходить из системы парных уравнений более простого вида

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty f_n(\lambda) J_n(\lambda r) d\lambda &= F_n(r), \quad r < a; \\ \int_0^\infty \lambda f_n(\lambda) J_n(\lambda r) d\lambda &= 0, \quad r > a, \end{aligned} \right\} (50.17)$$

точное решение которых дается формулой [162, т. 2, стр. 76, 77]

$$f_n(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi\lambda}{2}} \int_0^a t^{1/2} \varphi_n(t) J_{n-1/2}(\lambda t) dt, \quad (50.18)$$

где

$$\frac{\pi}{2} t^n \varphi_n(t) = \lim_{x \rightarrow 0} [x^n F_n(x)] + t \int_0^t (t^2 - x^2)^{-1/2} [x^n F_n(x)] dx. \quad (50.19)$$

Обозначая $\frac{\Phi_n(\lambda)}{1-g(\lambda)}$ через $f_n(\lambda)$, мы можем привести нашу систему (50.15) к виду (50.17), причем правая часть будет содержать неизвестную функцию $\Phi_n(\lambda)$

$$F_n(r) = \omega_n(r) + \int_0^\infty g(\lambda) \Phi_n(\lambda) J_n(\lambda r) d\lambda. \quad (50.20)$$

Подстановка (50.20) в (50.19) дает выражение

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} t^n \varphi_n(t) = \lim_{x \rightarrow 0} [x^n \omega_n(x)] + t \int_0^t x^{n-1} (t^2 - x^2)^{-1/2} [n \omega_n(x) + x \omega_n'(x)] dx + \\ + t \int_0^t x^n (t^2 - x^2)^{-1/2} dx \int_0^\infty g(\lambda) f_n(\lambda) J_{n-1}(\lambda x) d\lambda, \end{aligned} \quad (50.21)$$

которое с учетом (50.18) представляет собой интегральное уравнение относительно функции $\varphi_n(t)$. После замены переменных $x = t \sin \theta$ и использования интеграла Соина [16]

$$J_{n-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2z}{\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_{n-1}(z \sin \theta) \sin^n \theta d\theta, \quad n \geq 1 \quad (50.22)$$

уравнение (50.21) можно привести к следующему окончательному виду:

$$\varphi_n(t) = \frac{2}{\pi} \left[F_n(t) + \frac{1}{2} \int_0^a M_n(x, t) \varphi_n(x) dx \right], \quad (50.23)$$

ядро и свободный член которого имеют вид*

* Заметим, что формулы (50.23) и (50.24) справедливы и для случая $n=0$ [ср. (48.23)].

$$\begin{aligned}
 M_n(x, t) &= \pi \sqrt{x t} \int_0^{\infty} g(\lambda) J_{n-1/2}(\lambda x) J_{n-1/2}(\lambda t) \lambda d\lambda, \\
 t^n F_n(t) &= \lim_{x \rightarrow 0} [x^n \omega_n(x)] + n t^n \int_0^{\pi/2} \omega_n(t \sin \theta) \sin^{n-1} \theta d\theta + \\
 &\quad + t^{n+1} \int_0^{\pi/2} \omega'_n(t \sin \theta) \sin^n \theta d\theta.
 \end{aligned}
 \tag{50.24}$$

Итак, поставленная задача сводится к интегральному уравнению Фредгольма (50.23) с симметричным ядром, причем искомая функция $f_n(\lambda)$ выражается через его решение формулой (50.18).

§ 51. Контактная задача для упругого слоя при отсутствии трения

Применим полученные результаты к решению задачи о вдавливании плоского кругового в плане жесткого штампа в упругий слой, лежащий на жестком основании, причем линия действующей на штамп силы не совпадает с его осью (рис. 32). Если пренебречь трением как между штампом и слоем, так и между слоем и основанием, то касательные напряжения на границе слоя равны нулю. Кроме того, отсутствуют нормальные смещения в плоскости $z=h$ и нормальные напряжения в области $z=0, r>a$.

Таким образом, рассматриваемая задача представляет собой частный случай задачи, рассмотренной в § 50, когда

$$\left. \begin{aligned}
 \tau_{xh} = \tau_{yh} = w_h = \tau_{x0} = \tau_{y0} = \sigma_0 = 0, \\
 w_0 = \delta + \gamma x,
 \end{aligned} \right\} \tag{51.1}$$

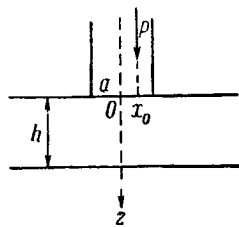


Рис. 32.

где δ — поступательное перемещение штампа вдоль оси oz , а γ — угол поворота вокруг оси oy .

Нетрудно показать, что в рассматриваемом случае функции $\Phi_1 = \Phi_2 \equiv 0$, а в выражениях (50.11) для функций Φ_3 и Φ_4 следует положить $C_n = D_n = 0, B_n = (1 - 2\nu - \lambda h \operatorname{cth} \lambda h) A_n$. Далее, из вида функции w_0 следует, что в разложениях в ряды Фурье следует удержать лишь члены с номерами $n=0$ и $n=1$. В связи с этим задачу формально можно разбить на две: осесимметричную, в которой все искомые функции пропорцио-

нальны величине δ , и задачу, связанную с поворотом штампа, причем здесь все величины содержат множитель $\gamma \cos \varphi$. Так как первая задача уже рассмотрена в § 49, то мы обратимся ко второй задаче, в которой парные уравнения (50.13) для $A_1 \equiv A$ имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} A(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda &= \frac{G\gamma}{1-\nu} r, \quad r < a, \\ \int_0^{\infty} \frac{\lambda A(\lambda)}{1-g(\lambda)} J_1(\lambda r) d\lambda &= 0, \quad r > a. \end{aligned} \right\} \quad (51.2)$$

Согласно (50.23) и (50.24), эта система может быть сведена к интегральному уравнению Фредгольма. Полагая в (50.18), (50.23), (50.24) $n=1$, $\omega_1(x) = \frac{\gamma G}{1-\nu} x$, получаем после некоторых выкладок, что искомая величина $A(\lambda)$ выражается формулой

$$A(\lambda) = [1 - g(\lambda)] \int_0^a \varphi(t) \sin \lambda t dt, \quad (51.3)$$

причем функция $\varphi(x)$ должна быть найдена из уравнения

$$\varphi(x) = \frac{4G\gamma x}{\pi(1-\nu)} + \frac{1}{\pi} \int_0^a [G(t-x) - G(t+x)] \varphi(t) dt, \quad (51.4)$$

где положено

$$G(u) = \int_0^{\infty} g(\lambda) \cos \lambda u d\lambda. \quad (51.5)$$

Заметим, что ряд величин i , в частности, напряжения по подошве штампа выражаются непосредственно через функцию $\varphi(t)$, а именно:

$$\sigma_z \Big|_{z=0}^{r < a} = \cos \varphi \frac{d}{dr} \int_0^a \frac{\varphi(t) dt}{\sqrt{t^2 - r^2}}. \quad (51.6)$$

Отсюда приравнованием момента этих усилий величине Px_0 получаем следующую простую связь между моментом Px_0 и углом поворота γ :

$$Px_0 = 2\pi \int_0^a t \varphi(t) dt. \quad (51.7)$$

Для проведения численных расчетов основное интегральное уравнение приводилось к безразмерному виду

$$\omega_\gamma(\xi) = \xi + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \omega_\gamma(\tau) |K(\tau - \xi) - K(\tau + \xi)| d\tau \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad (51.8)$$

с помощью подстановок

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \tau = \frac{t}{a}, \quad \omega_\gamma(\xi) = \frac{\pi(1-\nu)}{4G\gamma a} \varphi(x), \quad (51.9)$$

причем ядро $K(u)$ имеет тот же вид, что и в осесимметричной задаче [ср. (48.25)]:

$$K(u) = p \int_0^\infty \frac{\mu + \operatorname{sh} \mu e^{-p}}{\mu + \operatorname{sh} \mu \operatorname{ch} \mu} \cos \mu p u d\mu, \quad p = \frac{a}{h}. \quad (51.10)$$

Так как функция $K(u)$ табулирована для широкого интервала значений основного параметра — отношения радиуса штампа к толщине слоя (см. табл. 23), то уравнение (51.8) может быть приближенно решено путем сведения его к алгебраической системе. Результаты соответствующего расчета для случая, когда интервал делился на 10 частей, приведены в табл. 25.

Таблица 25

$\tau \backslash p$	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.1
0.1	0.1038	0.1249	0.1638	0.2118	0.2628	0.3130
0.2	0.2076	0.2490	0.3249	0.4185	0.5175	0.6173
0.3	0.3113	0.3716	0.4805	0.6148	0.7580	0.9073
0.4	0.4149	0.4920	0.6283	0.7961	0.9765	1.161
0.5	0.5183	0.6096	0.7688	0.9581	1.166	1.383
0.6	0.6215	0.7241	0.8933	1.097	1.319	1.552
0.7	0.7245	0.8351	1.009	1.212	1.433	1.664
0.8	0.8272	0.9426	1.112	1.303	1.505	1.716
0.9	0.9297	1.047	1.205	1.373	1.542	1.713
1.0	1.032	1.148	1.289	1.426	1.553	1.672

В табл. 29 даны значения коэффициента κ_γ , характеризующего отношение момента внешней силы к углу поворота штампа и вычисленного по вытекающей из (51.7) формуле

$$\kappa_\gamma = \frac{1-\nu}{8Ga^3} \cdot \frac{Px_0}{\gamma} = \int_0^1 \tau \omega_\gamma(\tau) d\tau. \quad (51.11)$$

Заметим теперь, что полное решение поставленной контактной задачи, получаемое суммированием полученного выше решения с результатами соответствующей осесимметричной задачи (см. § 49), фактически реализуется только в том слу-

чае, если давление по подошве штампа неотрицательно, что станет, очевидно, некоторое ограничение для величины плеча x_0 приложенной силы P .

Для исследования этого вопроса составим вытекающее из (49. 10) и (51. 6) выражение для полного давления под штампом:

$$p(r, \varphi) = -\sigma_z \Big|_{z=0}^{r < a} = \frac{\varphi_\delta(a)}{\sqrt{a^2 - r^2}} - \int_r^a \frac{\varphi_\delta'(t) dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} - \cos \varphi \frac{d}{dr} \int_r^a \frac{\varphi_\gamma(t) dt}{\sqrt{t^2 - r^2}}, \quad (51. 12)$$

где через $\varphi_\delta(t)$ и $\varphi_\gamma(t)$ обозначены основные неизвестные функции для задач, рассматриваемых в §§ 49 и 51 соответственно.

Из (51. 12) видно, что давление p обращается в нуль в точках некоторой кривой, пересекающей окружность $r = a$ в двух точках: $\varphi = \pm \varphi^*$ ($\frac{\pi}{2} < \varphi^* < \pi$). Потребуем, чтобы эта кривая проходила вне области контакта, касаясь в предельном случае границы $r = a$ в точке $\varphi = \pi$. Так как

$$\frac{d}{dr} \int_r^a \frac{\varphi_\gamma(t) dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} = - \frac{r\varphi_\gamma(a)}{(a + \sqrt{a^2 - r^2})\sqrt{a^2 - r^2}} - \frac{\varphi_\gamma(r)}{r} + \int_r^a \frac{\varphi_\gamma(t) dt}{(t + \sqrt{t^2 - r^2})\sqrt{t^2 - r^2}},$$

то

$$p(r, \pi) \approx_{r \rightarrow a} \frac{\varphi_\delta(a) - \varphi_\gamma(a)}{\sqrt{a^2 - r^2}}, \quad (51. 13)$$

откуда получаем требуемое условие, при котором штамп будет прижат к слою во всей области контакта,

$$\varphi_\delta(a) = \varphi_\gamma(a). \quad (51. 14)$$

Подставляя вместо $\varphi_\delta(a)$ и $\varphi_\gamma(a)$ их значения из (49. 7) и (51. 9)

$$\varphi_\delta(a) = \frac{2G\delta}{\pi(1-\nu)} \omega_\delta(1), \quad \varphi_\gamma(a) = \frac{4G\gamma a}{\pi(1-\nu)} \omega_\gamma(1) \quad (51. 15)$$

и пользуясь формулами (49. 14) и (51. 11), мы можем условие (51. 14) представить в виде формулы для предельного значения d плеча x_0 действующей на штамп силы

$$\frac{d}{a} = \frac{x_\gamma \omega_\delta(1)}{x_\delta \omega_\gamma(1)}. \quad (51. 16)$$

В табл. 29 приведены величины этого предельного плеча d для принятых значений параметра $p = \frac{a}{h}$.

В заключение настоящего параграфа отметим, что случай $\rho = 0$ соответствует хорошо изученной контактной задаче для полупространства. При этом $K(u) \equiv 0$, $\omega_r(\xi) \equiv \xi$, $\alpha_r = \frac{1}{3}$, $d = \frac{a}{3}$.

§ 52. Контактная задача для слоя, сцепленного с основанием

Во всем предыдущем изложении, касающемся контактных задач для упругого слоя, предполагалось, что трение между слоем и основанием отсутствует.

Рассмотрим теперь другой предельный случай, когда упругий слой и жесткое неподвижное основание находятся в условиях сцепления.

Поначалу мы дадим решение более общей задачи, когда на плоскости $z = h$ слоя заданы значения упругих перемещений

$$u|_{z=h} = u_h(r, \varphi), \quad v|_{z=h} = v_h(r, \varphi), \quad w|_{z=h} = w_h(r, \varphi). \quad (52.1)$$

Что касается другой границы слоя ($z = 0$), то будем по-прежнему предполагать, что на ней имеется окружность $r = a$, разделяющая граничные условия различных типов, а именно [см. (50.2)]:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xx}|_{z=0} &= \tau_{x0}(r, \varphi), & \tau_{y\theta}|_{z=0} &= \tau_{y0}(r, \varphi), \\ w|_{z=0} &= w_0(r, \varphi), & \sigma_z|_{z=0} &= \sigma_0(r, \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (52.2)$$

В качестве дополнительных условий вместо (50.6) выберем такие соотношения:

$$F|_{z=h} = 0, \quad \Phi|_{z=0} = 0. \quad (52.3)$$

Используя общие формулы (50.4) и (50.5), представляющие перемещения и напряжения через четыре гармонические функции, получаем прежде всего отдельные краевые условия для функций Φ_1 и Φ_2 :

$$\Phi_1|_{z=h} = \frac{G}{2(1-\nu)} u_h, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}|_{z=0} = \frac{\tau_{x0}}{2(1-\nu)}, \quad (52.4)$$

$$\Phi_2|_{z=h} = \frac{G}{2(1-\nu)} v_h, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}|_{z=0} = \frac{\tau_{y0}}{2(1-\nu)}, \quad (52.5)$$

так что в дальнейшем эти функции считаются найденными (например, с помощью интегрального преобразования Ханкеля и разложения в ряд Фурье по угловой координате φ).

Остальные граничные условия приводят нас к прежним формулам (50.8)—(50.10), однако вместо (50.7) будем в данном случае иметь

$$\left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial z} + h \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial z^2}\right)_{z=h} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(x\Phi_1 + y\Phi_2)|_{z=h}, \quad (52.6)$$

$$\left[(3 - 4\nu)\Phi_3 - \Phi_4 - h \frac{\partial \Phi_3}{\partial z}\right]_{z=h} = 2Gw_h(r, \varphi). \quad (52.7)$$

Условие (52.6) получено применением оператора $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ к первому из соотношений (52.3), которое удовлетворяется, следовательно, с точностью до плоского гармонического слагаемого. Однако такое слагаемое, будучи ограниченным на всей плоскости (x, y) , может быть только постоянной, причем функция F по существу задачи также определена с точностью до аддитивной постоянной.

Представляя, как и в § 50, искомые гармонические функции Φ_3 и Φ_4 в виде разложений (50.10), мы можем провести все решение задачи точно таким же методом, что и в § 50. При этом хотя формулы (50.11) для величин C_n и D_n изменятся, однако парные интегральные уравнения (50.13) и эквивалентное им интегральное уравнение (50.23) сохраняют свой вид, а входящая в них основная величина $g(\lambda)$ в данном случае дается следующим выражением:

$$g(\lambda) = \frac{\mu(1 + \mu) + 4(1 - \nu)^2 - (3 - 4\nu)e^{-\mu} \operatorname{sh} \mu}{(3 - 4\nu) \operatorname{sh}^2 \mu + \mu^2 + 4(1 - \nu)^2}, \quad \mu = \lambda h. \quad (52.8)$$

Не проводя детальных выкладок в общем случае, вернемся теперь к контактной задаче при условии, что слой жестко скреплен с неподвижным основанием, а трением между штампом и слоем по-прежнему пренебрегаем. Очевидно, что такая задача является частным случаем рассмотренной общей смешанной задачи, когда

$$u_h = v_h = w_h = \tau_{x0} = \tau_{y0} = \sigma_0 = 0, \quad w_0 = \delta + \gamma x, \quad (52.9)$$

где δ и γ — осевое смещение и угол поворота штампа.

Разобьем, как всегда, общую задачу на две: одну осесимметричную, связанную с величиной δ , и другую, связанную с параметром γ , причем в последнем случае все неизвестные функции пропорциональны $\cos \varphi$.

Решение осесимметричной задачи проводится способом, изложенным в § 49, и сводится к интегральному уравнению типа (49.8)*

$$\bar{w}_s(\xi) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_0^1 |L(\tau + \xi) + L(\tau - \xi)| \bar{w}_s(\tau) d\tau \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad (52.10)$$

* Знак черты означает, что рассматривается случай сцепления штампа и основания.

с ядром

$$L(u) = p \int_0^{\infty} \frac{\mu(1+\mu) + 4(1-\nu)^2 - (3-4\nu)e^{-\mu} \operatorname{sh} \mu}{(3-4\nu)\operatorname{sh}^2 \mu + \mu^2 + 4(1-\nu)^2} \cos \mu p u d\mu, \quad (52.11)$$

$$p = \frac{a}{h}.$$

Функции напряжений F и Φ даются формулами (48.4), в которых следует положить

$$\left. \begin{aligned} C &= \frac{B}{\lambda h}, \quad D = (3-4\nu) \frac{B}{\lambda h}, \\ B &= \frac{(1-2\nu) \operatorname{sh} \lambda h - \lambda h \operatorname{ch} \lambda h}{2(1-\nu) \frac{\operatorname{ch} \lambda h}{\lambda h} + \operatorname{sh} \lambda h} A, \end{aligned} \right\} \quad (52.12)$$

причем величина $A(\lambda)$ определяется из (49.4).

Основная неизвестная функция $\bar{\omega}_3(\xi)$ может быть найдена численными методами. Прежде всего были составлены таблицы ядра $L(u)$ для различных величин p при $\nu=0.3$ (табл. 26).

Таблица 26

$u \backslash r$	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
0.0	0.6882	1.376	2.065	2.753	3.441	4.129
0.1	0.6867	1.364	2.023	2.655	3.253	3.809
0.2	0.6820	1.328	1.904	2.386	2.758	3.012
0.3	0.6744	1.269	1.724	2.008	2.122	2.093
0.4	0.6638	1.193	1.506	1.595	1.511	1.329
0.5	0.6506	1.103	1.273	1.209	1.020	0.8052
0.6	0.6348	1.004	1.047	0.8858	0.6710	0.4890
0.7	0.6167	0.9008	0.8412	0.6358	0.4418	0.3132
0.8	0.5966	0.7975	0.6644	0.4532	0.3000	0.2188
0.9	0.5748	0.6978	0.5187	0.3260	0.2158	0.1646
1.0	0.5516	0.6045	0.4026	0.2400	0.1647	0.1310
1.1	0.5272	0.5192	0.3126	0.1836	0.1315	0.1091
1.2	0.5020	0.4429	0.2445	0.1459	0.1092	0.09246
1.3	0.4764	0.3759	0.1938	0.1198	0.09352	0.07848
1.4	0.4504	0.3179	0.1566	0.1011	0.08140	0.06804
1.5	0.4244	0.2684	0.1295	0.08732	0.07090	0.05979
1.6	0.3988	0.2266	0.1094	0.07704	0.06220	0.05214
1.7	0.3735	0.1918	0.09414	0.06884	0.05556	0.04581
1.8	0.3489	0.1630	0.08228	0.06164	0.04982	0.04137
1.9	0.3252	0.1393	0.07292	0.05518	0.04450	0.03720
2.0	0.3022	0.1200	0.06549	0.04976	0.03982	0.03315

Затем с помощью квадратурных формул находились значения функции $\bar{\omega}_3(\tau)$, причем промежуток делился на 10 частей (табл. 27). Наконец, связь перемещения штампа δ с величиной

Таблица 27

τ \ P	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
0.0	1.662	2.712	3.909	5.129	6.350	7.573
0.1	1.661	2.704	3.893	5.105	6.320	7.537
0.2	1.657	2.681	3.845	5.035	6.230	7.428
0.3	1.651	2.643	3.764	4.917	6.078	7.244
0.4	1.643	2.592	3.652	4.748	5.860	6.977
0.5	1.632	2.527	3.510	4.530	5.570	6.621
0.6	1.619	2.451	3.340	4.261	5.204	6.163
0.7	1.605	2.365	3.147	3.946	4.764	5.597
0.8	1.588	2.272	2.936	3.594	4.257	4.929
0.9	1.570	2.173	2.714	3.220	3.709	4.188
1.0	1.551	2.071	2.490	2.845	3.157	3.439

силы P дается прежней формулой (49.14). В табл. 29 приведены значения соответствующего коэффициента α_r .

Решение задачи, относящейся к случаю поворота штампа, может быть дано по схеме § 51.

Функции напряжений Φ_3 и Φ_4 при этом определяются формулами (50.11), в которых величины B_n , C_n и D_n ($n=1$) даются теми же формулами (52.12), величина $A(\lambda)$ находится из (51.3), и задача в конечном счете сводится к интегральному уравнению (51.8)

$$\bar{\omega}_r(\xi) = \xi + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \bar{\omega}_r(\tau) [L(\tau - \xi) - L(\tau + \xi)] d\tau \quad (0 \leq \xi \leq 1). \quad (52.13)$$

Таблица 28

τ \ P	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
0.1	0.1060	0.1371	0.1897	0.2500	0.3114	0.3726
0.2	0.2118	0.2728	0.3753	0.4931	0.6135	0.7342
0.3	0.3175	0.4058	0.5527	0.7200	0.8979	1.074
0.4	0.4230	0.5350	0.7184	0.9311	1.154	1.378
0.5	0.5281	0.6595	0.8691	1.113	1.371	1.634
0.6	0.6328	0.7786	1.003	1.262	1.540	1.826
0.7	0.7372	0.8919	1.118	1.376	1.652	1.938
0.8	0.8410	0.9994	1.216	1.454	1.705	1.964
0.9	0.9438	1.100	1.298	1.501	1.705	1.909
1.0	1.047	1.198	1.367	1.524	1.669	1.802

В табл. 28 даны значения функции $\bar{\omega}_r(\tau)$ при $\nu=0.3$, а в табл. 29 — значения коэффициента α_r , характеризующего связь угла поворота штампа и приложенного к нему момента [см. формулу (51.11)]. Наконец, в той же табл. 29 приведены

	p						
	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
α_8	1	1.51	2.20	2.95	3.72	4.49	5.26
α_8	1	1.62	2.48	3.40	4.34	5.28	6.20
α_γ	$\frac{1}{3}$	0.347	0.397	0.472	0.559	-0.650	0.743
α_γ	$\frac{1}{3}$	0.352	0.422	0.519	0.626	0.738	0.852
$\frac{d}{a}$	$\frac{1}{3}$	0.325	0.301	0.285	0.275	0.270	0.266
$\frac{d}{a}$	$\frac{1}{3}$	0.322	0.294	0.278	0.270	0.265	0.262

данные, относящиеся к величине того предельного плеча d приложенной к штампу силы, при котором поставленная задача фактически реализуется [см. (51. 16)].

Полученные результаты позволяют, в частности, сделать выводы о влиянии толщины слоя на величину просадки штампа в двух предельных случаях, когда трение между слоем и основанием отсутствует или когда оно настолько велико, что их можно считать находящимися в условиях сцепления.

§ 53. Концентрация напряжений в упругом слое, ослабленном плоской круглой щелью

Наряду с рассмотренными выше контактными задачами для упругого слоя метод парных интегральных уравнений, связанных с преобразованием Ханкеля, находит эффективные применения в сходных смешанных задачах, в частности в задачах о концентрации напряжений в упругом слое, ослабленном плоскими круглыми щелями.

В настоящем параграфе будет рассмотрена простейшая задача такого типа, когда одна круглая щель расположена в средней плоскости слоя, подверженного действию равномерного сжатия (рис. 33). Заметим, что наложением на рассматриваемое напряженное состояние однородного растяжения мы получим решение задачи о равномерном растяжении слоя, ос-

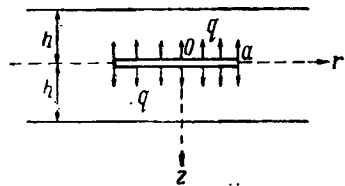


Рис. 33.

лабленного круглой щелью. В дальнейшем поначалу дается решение более общей задачи, когда нормальные напряжения на берегах щели заданы в виде произвольной функции полярного радиуса.

Рассматривая по симметрии только половину слоя, мы приходим к краевой задаче теории упругости для области $0 \leq r < \infty$, $0 < z < h$ при следующих граничных условиях:

$$\sigma_z|_{z=h} = 0, \quad \tau_{rz}|_{z=h} = 0, \quad \tau_{rz}|_{z=0} = 0, \quad (53.1)$$

$$u_z|_{z=0} = 0, \quad \sigma_z|_{z=h} = f(r). \quad (53.2)$$

В дальнейшем мы будем пользоваться решением осесимметричных уравнений теории упругости в форме Папковича—Нейбера и представим напряжения и перемещения по формулам (48.2) через две гармонические функции Φ и F , которые выберем в виде следующих интегральных разложений Ханкеля:

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \int_0^{\infty} [A_1 \operatorname{ch} \lambda (h-z) + B_1 \operatorname{sh} \lambda (h-z)] J_0(\lambda r) \frac{d\lambda}{\operatorname{sh} \lambda h}, \\ F &= \int_0^{\infty} [A_2 \operatorname{ch} \lambda (h-z) + B_2 \operatorname{sh} \lambda (h-z)] J_0(\lambda r) \frac{d\lambda}{\operatorname{sh} \lambda h}. \end{aligned} \right\} \quad (53.3)$$

Из граничных условий при $z=h$ находим две связи:

$$\left. \begin{aligned} A_2(\lambda) &= (1-2\nu) A_1(\lambda) + \lambda h B_1(\lambda), \\ B_2(\lambda) &= 2(1-\nu) B_1(\lambda) + \lambda h A_1(\lambda) \end{aligned} \right\} \quad (53.4)$$

между четырьмя неизвестными величинами $A_k(\lambda)$, $B_k(\lambda)$ ($k=1, 2$). Условие отсутствия касательных напряжений в средней плоскости слоя с учетом равенств (53.4) дает следующее соотношение:

$$\lambda h A_1(\lambda) + (1 + \lambda h \operatorname{cth} \lambda h) B_1(\lambda) = 0. \quad (53.5)$$

Остается, следовательно, найти единственную неизвестную функцию $B_1(\lambda)$ из двух оставшихся краевых условий. Подстановка выражений (53.3) в условия (53.2) с учетом равенств (53.4) и (53.5) приводит нас к парным интегральным уравнениям следующего вида:

$$\int_0^{\infty} B_1(\lambda) \frac{\lambda h + \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{sh} \lambda h}{\lambda h \operatorname{sh}^2 \lambda h} J_0(\lambda r) d\lambda = 0, \quad r > a, \quad (53.6)$$

$$\int_0^{\infty} \lambda B_1(\lambda) \frac{\operatorname{sh}^2 \lambda h - \lambda^2 h^2}{\lambda h \operatorname{sh}^2 \lambda h} J_0(\lambda r) d\lambda = f(r), \quad r < a. \quad (53.7)$$

Для сведения этих уравнений к интегральному уравнению Фредгольма введем вместо $B_1(\lambda)$ новую неизвестную функцию $\varphi(t)$ соотношением

$$B_1(\lambda) \frac{\lambda h + \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{sh} \lambda h}{\lambda h \operatorname{sh}^2 \lambda h} = \frac{1}{\lambda} \int_0^a \varphi(t) (\cos \lambda t - \cos \lambda a) dt. \quad (53.8)$$

Подстановкой (53.8) в (53.6) с использованием формулы (47.9) можно убедиться в том, что первое из парных интегральных уравнений удовлетворено тождественно для любых функций $\varphi(t)$, непрерывных вместе с первой производной в замкнутом промежутке $(0, a)$.

Далее, подставляя величину $B_1(\lambda)$ из (53.8) во второе из парных уравнений (53.7) и учитывая формулы (48.18) и (48.19), приходим к равенству

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(r \sin \theta) d\theta - \frac{2}{\pi} d\theta \int_0^a \varphi(t) dt \int_0^{\infty} g(\lambda) (\cos \lambda t - \cos \lambda a) \times \\ \times \cos(\lambda r \sin \theta) d\lambda = f(r), \quad (53.9)$$

где положено

$$g(\lambda) = \frac{\lambda h (1 + \lambda h) + e^{-\lambda h} \operatorname{sh} \lambda h}{\operatorname{ch} \lambda h \operatorname{sh} \lambda h + \lambda h}. \quad (53.10)$$

Обозначая, как всегда, через $G(x)$ косинус-преобразование Фурье от функции $\sqrt{\frac{\pi}{2}} g(\lambda)$ и полагая

$$F(x) = \varphi(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^a \varphi(t) [G(t+x) + G(t-x) - \\ - G(a+x) - G(a-x)] dt \quad (0 \leq x \leq a), \quad (53.11)$$

мы сведем равенство (53.9) к интегральному уравнению Шлемильха (47.18). Поскольку его точное решение дается формулой (47.19)

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \left[f(0) + x \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x \sin \theta) d\theta \right], \quad (53.12)$$

то задача сведена к интегральному уравнению Фредгольма (53.11) с непрерывным ядром.

Возвращаясь к случаю равномерной внешней нагрузки, когда $f(r) \equiv -q$, запишем уравнение (53.11) в безразмерном виде

$$\omega(\xi) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \Phi(\xi, \tau) \omega(\tau) d\tau, \quad (53.13)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{x}{a}, \quad \tau = \frac{t}{a}, \quad \omega(\xi) = -\frac{\pi q(x)}{2q}, \\ \Phi(\xi, \tau) &= M(\tau + \xi) + M(\tau - \xi) - M(1 + \xi) - M(1 - \xi), \end{aligned} \right\} (53.14)$$

$$M(u) = p \int_0^{\infty} \frac{\mu(1+\mu) + e^{-\mu} \operatorname{sh} \mu}{\operatorname{ch} \mu \operatorname{sh} \mu + \mu} \cos \mu p u d\mu, \quad p = \frac{a}{h}. \quad (53.15)$$

В табл. 30 даны значения ядра $M(u)$ для $p = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$.

Имея эти данные, можно решать интегральное уравнение (53.13) численными методами. Результаты расчета по формуле трапеций даны в табл. 31, причем промежуток интегрирования разбивался на 10 частей.

Таблица 30

$u \backslash p$	0.5	1	1.5	2
0	0.9676	1.935	2.903	3.871
0.1	0.9650	1.914	2.832	3.705
0.2	0.9571	1.852	2.632	3.253
0.3	0.9442	1.754	2.330	2.623
0.4	0.9262	1.626	1.967	1.945
0.5	0.9039	1.476	1.585	1.324
0.6	0.8773	1.312	1.217	0.8197
0.7	0.8468	1.141	0.8892	0.4488
0.8	0.8133	0.9727	0.6147	0.1993
0.9	0.7768	0.8113	0.3970	0.04642
1.0	0.7380	0.6620	0.2326	-0.03702
1.1	0.6975	0.5276	0.1149	-0.07403
1.2	0.6558	0.4098	0.03482	-0.08411
1.3	0.6134	0.3089	-0.01591	-0.07970
1.4	0.5707	0.2243	-0.04491	-0.06893
1.5	0.5282	0.1551	-0.05892	-0.05613
1.6	0.4863	0.09971	-0.06300	-0.04352
1.7	0.4453	0.05632	-0.06124	-0.03281
1.8	0.4056	0.02321	-0.05621	-0.02440
1.9	0.3675	-0.001315	-0.04942	-0.01861
2.0	0.3310	-0.01842	-0.04211	-0.01394

Таблица 31

τ \ p	0.5	1	1.5	2
0	1.103	1.731	3.145	5.448
0.1	1.102	1.717	3.089	5.320
0.2	1.100	1.674	2.923	4.943
0.3	1.096	1.606	2.657	4.330
0.4	1.091	1.517	2.305	3.508
0.5	1.085	1.412	1.889	2.521
0.6	1.077	1.294	1.440	1.438
0.7	1.069	1.175	0.9921	0.3581
0.8	1.060	1.058	0.5824	-0.6004
0.9	1.051	0.9499	0.2443	-1.317
1	1.041	0.8555	-0.03241	-1.707

Приведем формулу для распределения нормальных напряжений в средней плоскости слоя

$$\sigma_0 = \sigma_x \Big|_{\substack{r=0 \\ r>a}} = \frac{2qa}{\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 - a^2}} \int_0^1 \omega(\tau) d\tau - \int_0^1 \frac{\omega(\tau) d\tau}{\sqrt{r^2 - a^2\tau^2}} + \int_0^1 \omega(\tau) d\tau \int_0^\infty g(\lambda) J_0(\lambda r) (\cos \lambda a \tau - \cos \lambda a) d\lambda \right]. \quad (53.16)$$

В предельном случае неограниченного тела ($h \rightarrow \infty$) имеем

$$p = 0, \quad \omega(\xi) \equiv 1, \quad g(\lambda) \equiv 0,$$

и соотношение (53.16) переходит в известную формулу [100]

$$\sigma_0^\infty = \frac{2qa}{\pi\sqrt{r^2 - a^2}} - \frac{2q}{\pi} \arcsin \frac{a}{r}. \quad (53.17)$$

Таблица 32

При приближении к краям щели ($r \rightarrow a$) асимптотическое выражение растягивающих напряжений (53.16) имеет, очевидно, вид

$$\sigma_0 = \frac{2qa}{\pi\sqrt{r^2 - a^2}} \int_0^1 \omega(\tau) d\tau + O(1). \quad (53.18)$$

p	ψ
0.5	1.080
1.0	1.369
1.5	1.768
2.0	2.237

Характеристикой степени увеличения концентрации напряжений в слое, ослабленном щелью, по сравнению с соответствующей деформацией неограниченного тела, можно считать отношение

$$\frac{\sigma_0}{\sigma_0^\infty} = \psi + O\left(\sqrt{\frac{r^2}{a^2} - 1}\right). \quad (53.19)$$

где

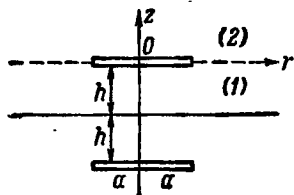
$$\psi = \int_0^1 \omega(\tau) d\tau. \quad (53.20)$$

Значения коэффициента ψ приведены в табл. 32.

§ 54. Деформация неограниченного тела, ослабленного двумя круглыми щелями

Рассмотрим осесимметричную задачу теории упругости для неограниченного пространства, содержащего две плоские круглые щели радиуса a (рис. 34), и предположим, что напряженное состояние симметрично относительно средней плоскости $z = -h$.

При этих условиях достаточно рассмотреть упругое равновесие полупространства ($z > -h$) с одной щелью, поставив на плоской границе очевидные условия симметрии



$$u_z|_{z=-h} = 0, \quad \tau_{rz}|_{z=-h} = 0. \quad (54.1)$$

Предположим далее, что на поверхности щели ($z = 0, r < a$) заданы как нормальные, так и касательные напряжения *

Рис. 34.

$$\sigma_z|_{\substack{z=0 \\ r < a}} = \sigma(r), \quad \tau_{rz}|_{\substack{z=0 \\ r < a}} = \tau(r). \quad (54.2)$$

Таким образом, задача сводится к интегрированию уравнений теории упругости при граничных условиях (54.1) и (54.2).

При решении поставленной задачи мы будем пользоваться формулами Папковича—Нейбера, выражающими упругие перемещения u_r и u_z в осесимметричном случае через две гармонические функции (φ и F),

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_r &= -\frac{\partial \varphi}{\partial r} - z \frac{\partial F}{\partial r}, \\ 2Gu_z &= (3 - 4\nu)F - \Phi - z \frac{\partial F}{\partial z}, \quad \Phi = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (54.3)$$

Разбивая рассматриваемое полупространство на две области: 1) $-h < z < 0$ и 2) $0 < z < \infty$, снабжая гармонические

* Это означает, что в точках $(r, +0)$ и $(r, -0)$, принадлежащих различным берегам щели, напряжения одинаковы по величине и противоположны по направлению.

функции F и Φ в соответствующих областях индексами 1 и 2 и пользуясь формулами

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= 2(1-\nu) \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} - z \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}, \\ \tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[(1-2\nu) F - \Phi - z \frac{\partial F}{\partial z} \right], \end{aligned} \right\} \quad (54.4)$$

мы приходим к следующим граничным условиям:*

$$F_1 \Big|_{z=-h} = 0, \quad \left(\Phi_1 + z \frac{\partial F_1}{\partial z} \right) \Big|_{z=-h} = 0, \quad (54.5)$$

$$\left[2(1-\nu) \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right]_{\substack{z=0 \\ r < a}} = \sigma(r), \quad [(1-2\nu) F_1 - \Phi_1]_{\substack{z=0 \\ r < a}} = \\ = s(r) + ch, \quad (54.6)$$

где $s(r) = \int_0^r \tau(r) dr$, а c — пока не определенная постоянная.

К поставленным условиям необходимо, очевидно, добавить требование непрерывности напряжений на всей плоскости $z=0$, разделяющей две рассматриваемые области,

$$\left. \begin{aligned} \left[2(1-\nu) \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right]_{z=0} &= \left[2(1-\nu) \frac{\partial F_2}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \right]_{z=0}, \\ [(1-2\nu) F_1 - \Phi_1]_{z=0} &= [(1-2\nu) F_2 - \Phi_2]_{z=0}. \end{aligned} \right\} \quad (54.7)$$

Наконец, на части плоскости $z=0$, занимающей область $r > a$, должны быть непрерывны перемещения u_r и u_z . Потребуем непрерывности в указанной области функций F и $\frac{\partial F}{\partial z}$:

$$F_1 \Big|_{\substack{z=0 \\ r > a}} = F_2 \Big|_{\substack{z=0 \\ r > a}}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} \Big|_{\substack{z=0 \\ r > a}} = \frac{\partial F_2}{\partial z} \Big|_{\substack{z=0 \\ r > a}}. \quad (54.8)$$

При этом в силу (54.7) в этой же области будут непрерывны также функции Φ и $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$. Непрерывность перемещения u_z при этом очевидна.

Далее из равенства

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \Big|_{z=0} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \Big|_{z=0} = \frac{2G}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \Big|_{z=0}$$

* Предполагается также, что на бесконечности функции F и Φ имеют порядок $O(R^{-1})$, $R = \sqrt{r^2 + z^2}$, а их производные — порядок $O(R^{-2})$. При этом перемещения и напряжения имеют требуемый порядок убывания на бесконечности.

вытекает непрерывность производных $\frac{\partial}{\partial r}(ru_{r1})$ и $\frac{\partial}{\partial r}(ru_{r2})$ при $z=0$, $r > a$, т. е. сами перемещения u_{r1} и u_{r2} в области $z=0$, $r > a$ могут отличаться на величину $\frac{A}{r}$ ($A = \text{const}$).

Заметим теперь, что на плоскости $z=0$ перемещение u_r можно представить в следующей форме:

$$2Gu_r \Big|_{z=0} = \frac{1}{r} \int_0^r \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0} r dr,$$

ибо при $r \rightarrow 0$ величина u_r должна оставаться ограниченной. Из (54.8) следует, что требуемая непрерывность перемещения u_r в области $z=0$, $r > a$ будет обеспечена, если поставить следующее дополнительное условие:

$$\int_0^a \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \Big|_{z=0} r dr = \int_0^a \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \Big|_{z=0} r dr. \quad (54.9)$$

Как будет видно из дальнейшего изложения, из соотношения (54.9) можно определить входящую в решение неизвестную постоянную c .

Таким образом, поставленная задача сводится к нахождению двух пар функций: F_1 , Φ_1 и F_2 , Φ_2 , гармонических в областях $-h < z < 0$ и $0 < z < \infty$ соответственно и удовлетворяющих условиям (54.5)—(54.9).

Представим функции F_1 и Φ_1 в виде интегральных разложений Ханкеля

$$\left. \begin{aligned} F_1(r, z) &= \int_0^\infty A_1(\lambda) \operatorname{sh} \lambda(h+z) J_0(\lambda r) \frac{d\lambda}{\operatorname{sh} \lambda h}, \\ \Phi_1(r, z) &= \int_0^\infty [\lambda h A_1(\lambda) \operatorname{ch} \lambda(h+z) + B_1(\lambda) \operatorname{sh} \lambda(h+z)] \times \\ &\quad \times J_0(\lambda r) \frac{d\lambda}{\operatorname{sh} \lambda h}. \end{aligned} \right\} (54.10)$$

Легко проверить, что граничные условия (54.5) при этом тождественно удовлетворены.

Исходя из требований на бесконечности, выбираем функции F_2 и Φ_2 в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} F_2(r, z) &= \int_0^{\infty} A_2(\lambda) e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) d\lambda, \\ \Phi_2(r, z) &= \int_0^{\infty} B_2(\lambda) e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) d\lambda, \end{aligned} \right\} (54.11)$$

где функции $A_2(\lambda)$ и $B_2(\lambda)$ также подлежат определению.

Подставляя (54.10) и (54.11) в условия (54.7) непрерывности напряжений на плоскости $z=0$, приходим к следующим двум соотношениям, связывающим 4 неизвестные величины: A_1, B_1, A_2, B_2 ,

$$\left. \begin{aligned} [\mu - 2(1-\nu) \operatorname{cth} \mu] A_1 + \operatorname{cth} \mu B_1 &= 2(1-\nu) A_2 - B_2, \\ [(1-2\nu) - \mu \operatorname{cth} \mu] A_1 - B_1 &= (1-2\nu) A_2 - B_2, \end{aligned} \right\} (54.12)$$

где положено $\mu = \lambda h$.

Условия (54.8) представляют собой два интегральных уравнения

$$\int_0^{\infty} (A_1 - A_2) J_0(\lambda r) d\lambda = 0, \quad \int_0^{\infty} \lambda (A_1 \operatorname{cth} \mu + A_2) J_0(\lambda r) d\lambda = 0, \quad (54.13)$$

которые имеют место при значениях $r > a$.

Условия (54.6) также приводят к интегральным уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} \lambda \{ [2(1-\nu) \operatorname{cth} \mu - \mu] A_1 - \operatorname{cth} \mu B_1 \} \times \\ \times J_0(\lambda r) d\lambda = o(r), \quad r < a, \\ \int_0^{\infty} \{ [(1-2\nu) - \mu \operatorname{cth} \mu] A_1 - B_1 \} J_0(\lambda r) d\lambda = \\ = s(r) + ch, \quad r < a. \end{aligned} \right\} (54.14)$$

Интегральные уравнения (54.13) после подстановки в них значения A_2 , выраженного через A_1 и B_1 с помощью (54.12), принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} \{ [2(1-\nu) - \mu] A_1 - B_1 \} (\operatorname{cth} \mu + 1) J_0(\lambda r) d\lambda = 0, \quad r > a, \\ \int_0^{\infty} \lambda \{ [(1-2\nu) - \mu] A_1 - B_1 \} (\operatorname{cth} \mu + 1) J_0(\lambda r) d\lambda = 0, \quad r > a. \end{aligned} \right\} (54.15)$$

Таким образом, рассматриваемая задача свелась к системе, состоящей из двух пар интегральных уравнений (54.14) и (54.15), содержащих две неизвестные функции A_1 , B_1 параметра λ .

Что касается дополнительного соотношения (54.9), то после некоторых преобразований оно приводится к такому виду:

$$\int_0^{\infty} (A_1 \operatorname{cth} \mu + A_2) J_1(\lambda a) d\lambda = 0. \quad (54.16)$$

Так как величины A_1 и A_2 зависят от постоянной c линейным образом, то ясно, что из условия (54.16) можно найти неизвестную величину c .

Будем искать решение уравнений (54.14) и (54.15) в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} \{[2(1-\nu) - \mu] A_1 - B_1\} (\operatorname{cth} \mu + 1) &= \frac{1}{\lambda} \int_0^a \varphi(t) \times \\ &\times (\cos \lambda t - \cos \lambda a) dt, \\ \{[(1-2\nu) - \mu] A_1 - B_1\} (\operatorname{cth} \mu + 1) &= h \int_0^a \psi(t) \cos \lambda t dt, \end{aligned} \right\} (54.17)$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — неизвестные функции, непрерывные вместе со своими производными в замкнутом промежутке $(0, a)$.

Подставляя (54.17) в (54.15), проводя интегрирование по частям, а также используя формулу

$$\int_0^{\infty} J_0(\lambda r) \sin \lambda t d\lambda = 0, \text{ если } 0 \leq t < r, \quad (54.18)$$

убеждаемся в том, что уравнения (54.15) удовлетворены тождественно, при любых значениях функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$.

Находя из (54.17) значения A_1 и B_1 и подставляя их в систему интегральных уравнений (54.14), получаем после перемены порядка интегрирования

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_0^a \varphi(t) dt \int_0^{\infty} (\cos \lambda t - \cos \lambda a) J_0(\lambda r) d\lambda + \\ &+ \int_0^a \psi(t) dt \int_0^{\infty} g_1(\lambda) J_0(\lambda r) \cos \lambda t d\lambda + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^a \varphi(t) dt \int_0^\infty f_1(\lambda) (\cos \lambda t - \cos \lambda a) J_0(\lambda r) d\lambda = \sigma(r), \quad (54.19)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^a \psi(t) dt \int_0^\infty J_0(\lambda r) \cos \lambda t d\lambda - \\ & - \frac{1}{2} \int_0^a \psi(t) dt \int_0^\infty g_2(\lambda) J_0(\lambda r) \cos \lambda t d\lambda - \\ & - \int_0^a \varphi(t) dt \int_0^\infty f_2(\lambda) (\cos \lambda t - \cos \lambda a) J_0(\lambda r) d\lambda = \frac{s(r)}{h} + c. \quad (54.20) \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\left. \begin{aligned} f_1(\lambda) &= (2\lambda h + 1) e^{-2\lambda h}, & g_1(\lambda) &= (\lambda h)^2 e^{-2\lambda h}, \\ f_2(\lambda) &= e^{-2\lambda h}, & g_2(\lambda) &= (2\lambda h - 1) e^{-2\lambda h}. \end{aligned} \right\} \quad (54.21)$$

Используя формулы

$$\int_0^\infty J_0(\lambda r) \cos \lambda t d\lambda = \begin{cases} 0, & r < t, \\ \frac{1}{\sqrt{r^2 - t^2}}, & 0 \leq t < r, \end{cases} \quad (54.22)$$

$$J_0(\lambda r) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\lambda r \sin \theta) d\theta, \quad (54.23)$$

можно преобразовать уравнения (54.19) и (54.20) к следующему виду:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{1}{2} \varphi(r \sin \theta) + \frac{1}{2\pi} \int_0^a \varphi(t) [F_1(t + r \sin \theta) + \right. \\ & \left. + F_1(t - r \sin \theta) - F_1(a + r \sin \theta) - F_1(a - r \sin \theta)] dt - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\pi} \int_0^a \psi(t) [G_1(t + r \sin \theta) + G_1(t - r \sin \theta)] dt \right\} d\theta = \sigma(r), \quad (54.24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{1}{2} \psi(r \sin \theta) - \frac{1}{\pi} \int_0^a \varphi(t) [F_2(t + r \sin \theta) + \right. \\ & \left. + F_2(t - r \sin \theta) - F_2(a + r \sin \theta) - F_2(a - r \sin \theta)] dt + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\pi} \int_0^a \psi(t) [G_2(t + r \sin \theta) + G_2(t - r \sin \theta)] dt \right\} d\theta = \frac{s(r)}{h} + c, \quad (54.25) \end{aligned}$$

где через $F_{1,2}(x)$ и $G_{1,2}(x)$ обозначены косинус-преобразования Фурье от функций $\sqrt{\frac{\pi}{2}} f_{1,2}(\lambda)$ и $\sqrt{\frac{\pi}{2}} g_{1,2}(\lambda)$

$$\left. \begin{aligned} F_1(x) &= \frac{16h^3}{(x^2 + 4h^2)^2}, & G_1(x) &= 4h^3 \frac{4h^2 - 3x^2}{(x^2 + 4h^2)^3}, \\ F_2(x) &= \frac{2h}{x^2 + 4h^2}, & G_2(x) &= -\frac{4hx^2}{(x^2 + 4h^2)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (54.26)$$

С помощью решения интегрального уравнения Шлемильха

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(r \sin \theta) d\theta = f(r), \quad 0 \leq r \leq a, \quad (54.27)$$

имеющего вид

$$F(x) = \frac{2}{x} \left[f(0) + x \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x \sin \theta) d\theta \right], \quad (54.28)$$

уравнения (54.24) и (54.25) приводятся к системе интегральных уравнений Фредгольма

$$\begin{aligned} \varphi(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^a K_1(x, t) \varphi(t) dt - \frac{2}{\pi} \int_0^a L_1(x, t) \psi(t) dt = \\ = \frac{4}{\pi} \left[\sigma(0) + x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma'(x \sin \theta) d\theta \right], \end{aligned} \quad (54.29)$$

$$\begin{aligned} \psi(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^a K_2(x, t) \psi(t) dt - \frac{2}{\pi} \int_0^a L_2(x, t) \varphi(t) dt = \\ = \frac{4x}{\pi h} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tau(x \sin \theta) d\theta + \frac{4c}{\pi}, \end{aligned} \quad (54.30)$$

причем переменная x изменяется в промежутке $(0, a)$, а ядра этих уравнений даются следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} K_1(x, t) &= F_1(t+x) + F_1(t-x) - F_1(a+x) - F_1(a-x), \\ L_1(x, t) &= G_1(t+x) + G_1(t-x), \\ K_2(x, t) &= G_2(t+x) + G_2(t-x), \\ L_2(x, t) &= F_2(t+x) + F_2(t-x) - F_2(a+x) - F_2(a-x). \end{aligned} \right\} \quad (54.31)$$

Дополнительное соотношение (54.16), после подстановки в него выражения

$$A_1 \operatorname{cth} \mu + A_2 = -h \int_0^a \psi(t) \cos \lambda t dt$$

и использования формулы

$$\int_0^{\infty} J_1(\lambda a) \cos \lambda t d\lambda = \frac{1}{a} \quad (t < a), \quad (54.32)$$

приводит к следующему условию:

$$\int_0^a \psi(t) dt = 0. \quad (54.33)$$

Если решение системы (54.29), (54.30) разбить на две части:

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) + c\varphi_2(t), \quad \psi(t) = \psi_1(t) + c\psi_2(t). \quad (54.34)$$

где функции с индексом 1 соответствуют случаю $c=0$, то величина c определится явным образом из формулы

$$c = \frac{\int_0^a \psi_1(t) dt}{\int_0^a \psi_2(t) dt}. \quad (54.35)$$

Таким образом, если найдено решение системы (54.29), (54.30), принадлежащее к классу функций, имеющих непрерывную производную, то полное решение поставленной задачи теории упругости дается формулами (54.10), (54.11) и (54.17), причем постоянная c определяется соотношениями (54.34), (54.35).

Заметим, что ряд величин, существенных для приложений, может быть непосредственно выражен через функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, что представляет большие удобства, в частности в том случае, если решение системы (54.29), (54.30) получается численными методами.

Приводим формулу для нормального напряжения в плоскости $z=0$ при $r > a$

$$\sigma_0 = \sigma_z \Big|_{z=0} = \int_0^a \varphi(t) \Phi(r, t) dt + \int_0^a \psi(t) \Psi(r, t) dt, \quad (54.36)$$

где величины Φ и Ψ даются в замкнутой форме

$$\begin{aligned} \Phi(r, t) = & \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 - t^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 - a^2}} \right] + \\ & + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + (2h + it)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (2h + ia)^2}} \right] + \\ & + h \operatorname{Re} \left\{ \frac{2h + it}{[\sqrt{r^2 + (2h + it)^2}]^3} - \frac{2h + ia}{[\sqrt{r^2 + (2h + ia)^2}]^3} \right\}, \end{aligned} \quad (54.37)$$

$$\Psi(r, t) = h^2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{3(2h + t)^2}{[\sqrt{r^2 + (2h + it)^2}]^3} - \frac{1}{[\sqrt{r^2 + (2h + ia)^2}]^3} \right\}. \quad (54.38)$$

§ 55. Расчеты для случая равномерного осевого растяжения

Если неограниченное упругое тело, ослабленное двумя круговыми щелями, подвергается на бесконечности равномерному растяжению интенсивности q в направлении оси симметрии, то решение такой задачи можно получить, накладывая на равномерное растяжение неограниченного тела некоторое вторичное напряженное состояние, создаваемое равномерно распределенными сжимающими нагрузками той же интенсивности q , приложенными к поверхностям щелей. Расчет этого вторичного напряженного состояния может быть произведен методами, развитыми в предыдущем параграфе, а именно: в полученных общих формулах следует положить

$$\sigma(r) = -q, \quad \tau(r) \equiv 0. \quad (55.1)$$

Для решения системы (54.29), (54.30) удобно произвести разбиение функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ на два слагаемых [см. (54.34)] и перейти к безразмерным величинам, положив

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{a} = \xi, \quad \frac{t}{a} = \tau, \\ \varphi_1(x) = -\frac{4q}{\pi} \chi_1(\xi), \quad \varphi_2(x) = \frac{4}{\pi} \chi_2(\xi), \\ \psi_1(x) = -\frac{4q}{\pi} \omega_1(\xi), \quad \psi_2(x) = \frac{4}{\pi} \omega_2(\xi). \end{aligned} \right\} \quad (55.2)$$

Для функций $\chi_1(\xi)$ и $\omega_1(\xi)$ из (54.29), (54.30) получаем следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \chi_1(\xi) = 1 - \int_0^1 M_1(\xi, \tau) \chi_1(\tau) d\tau - \int_0^1 N_1(\xi, \tau) \omega_1(\tau) d\tau, \\ \omega_1(\xi) = \int_0^1 M_2(\xi, \tau) \omega_1(\tau) d\tau + \int_0^1 N_2(\xi, \tau) \chi_1(\tau) d\tau, \end{aligned} \right\} \quad (55.3)$$

ядра которой даются формулами

$$\left. \begin{aligned}
 M_1(\xi, \tau) &= \frac{16\beta^3}{\pi} \left\{ \frac{1}{[(\tau + \xi)^2 + 4\beta^2]^2} - \frac{1}{[(1 + \xi)^2 + 4\beta^2]^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{[(\tau - \xi)^2 + 4\beta^2]^2} - \frac{1}{[(1 - \xi)^2 + 4\beta^2]^2} \right\}, \\
 N_1(\xi, \tau) &= \frac{16\beta^3}{\pi} \left\{ \frac{3}{2} (\tau + \xi)^2 - 2\beta^2 - \frac{3}{2} (\tau - \xi)^2 - 2\beta^2 \right\} \cdot \\
 M_2(\xi, \tau) &= \frac{4\beta}{\pi} \left\{ \frac{(\tau + \xi)^2}{[(\tau + \xi)^2 + 4\beta^2]^2} + \frac{(\tau - \xi)^2}{[(\tau - \xi)^2 + 4\beta^2]^2} \right\}, \\
 N_2(\xi, \tau) &= \frac{4\beta}{\pi} \left[\frac{1}{(\tau + \xi)^2 + 4\beta^2} - \frac{1}{(1 + \xi)^2 + 4\beta^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{(\tau - \xi)^2 + 4\beta^2} - \frac{1}{(1 - \xi)^2 + 4\beta^2} \right],
 \end{aligned} \right\} \quad (55.4)$$

где введено обозначение

$$\beta = \frac{h}{a}. \quad (55.5)$$

Система (55.3) решалась численными методами, путем замены интегралов суммами по формуле трапеций и сведения к системе линейных алгебраических уравнений.

Расчеты производились для трех значений параметра $\beta \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1 \right)$, причем промежуток интегрирования разбивался на 10 частей. Результаты расчета представлены в табл. 33 ($\chi_1(\tau)$) и 34 ($\omega_1(\tau)$).

Таблица 33

$\tau \backslash \beta$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
0	0.5729	0.6750	0.8836
0.1	0.5742	0.6808	0.8853
0.2	0.5786	0.6978	0.8902
0.3	0.5883	0.7260	0.8980
0.4	0.6086	0.7664	0.9085
0.5	0.6496	0.8184	0.9210
0.6	0.7284	0.8802	0.9350
0.7	0.8648	0.9480	0.9507
0.8	1.064	1.016	0.9651
0.9	1.287	1.078	0.9799
1	1.451	1.127	0.9937

Таблица 34

$\tau \backslash \beta$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
0	0.7498	0.3015	0.07533
0.1	0.7432	0.2974	0.07469
0.2	0.7226	0.2850	0.07263
0.3	0.6865	0.2645	0.06931
0.4	0.6319	0.2367	0.06488
0.5	0.5542	0.2022	0.05946
0.6	0.4482	0.1629	0.05330
0.7	0.3114	0.1206	0.04661
0.8	0.1508	0.07851	0.03964
0.9	-0.01023	0.03907	0.03260
1	-0.1359	0.005024	0.02575

Аналогичным образом для функций $\chi_2(\xi)$ и $\omega_2(\xi)$ получаем систему

$$\left. \begin{aligned} \chi_2(\xi) &= - \int_0^1 M_1(\xi, \tau) \chi_2(\tau) d\tau - \int_0^1 N_1(\xi, \tau) \omega_2(\tau) d\tau, \\ \omega_2(\xi) &= 1 + \int_0^1 M_2(\xi, \tau) \omega_2(\tau) d\tau + \int_0^1 N_2(\xi, \tau) \chi_2(\tau) d\tau. \end{aligned} \right\} (55.6)$$

Таблица 35

$\tau \backslash \beta$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
0	0.05637	0.1340	0.1928
0.1	0.05745	0.5352	0.1916
0.2	0.06083	0.1385	0.1880
0.3	0.06755	0.1430	0.1822
0.4	0.07906	0.1473	0.1737
0.5	0.09656	0.1492	0.1631
0.6	0.1197	0.1464	0.1504
0.7	0.1426	0.1366	0.1360
0.8	0.1499	0.1181	0.1196
0.9	0.1222	0.09108	0.1022
1	0.05468	0.05755	0.08403

Таблица 36

$\tau \backslash \beta$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
0	1.823	1.281	1.058
0.1	1.824	1.280	1.058
0.2	1.812	1.278	1.060
0.3	1.791	1.274	1.062
0.4	1.762	1.270	1.066
0.5	1.725	1.267	1.070
0.6	1.682	1.265	1.075
0.7	1.638	1.264	1.081
0.8	1.599	1.267	1.087
0.9	1.573	1.272	1.094
1	1.562	1.278	1.101

Результаты соответствующего расчета представлены в табл. 35 ($\chi_2(\tau)$) и 36 ($\omega_2(\tau)$).

В табл. 37 даны значения постоянной c , полученные по формуле

$$c = \frac{c}{q} = \frac{\int_0^1 \omega_1(\xi) d\xi}{\int_0^1 \omega_2(\xi) d\xi}. \quad (55.7)$$

Для изучения концентрации напряжений в окрестности края щели рассмотрим вытекающее из (54.36) асимптотическое выражение нормального напряжения в плоскости $z=0$ при $r \rightarrow +a$

$$\sigma_0 = - \frac{1}{2\sqrt{r^2 - a^2}} \int_0^a \varphi(t) dt + O(1),$$

принимающее в безразмерных переменных вид

$$\frac{\sigma_0}{q} = \frac{2}{\pi \sqrt{\rho^2 - 1}} \left[\int_0^1 \chi_1(\xi) d\xi - x \int_0^1 \chi_2(\xi) d\xi \right] + O(1), \quad \rho = \frac{r}{a}. \quad (55.8)$$

Сравним полученное выражение с предельным случаем $h = \infty$, соответствующим наличию только одной щели. При этом $\beta = \infty$, $\omega_1(\xi) \equiv 0$, $\omega_2(\xi) \equiv 1$, $\chi_1(\xi) \equiv 1$, $\chi_2(\xi) \equiv 0$, $x = 0$, а выражение (55.8) заменяется следующим:

$$\frac{\sigma_0^\infty}{q} = \frac{2}{\pi \sqrt{\rho^2 - 1}} + O(1). \quad (55.9)$$

Таблица 37

	β		
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
$x \dots \dots$	0.2658	0.1447	0.05252
$\gamma \dots \dots$	0.7703	0.8324	0.9191

За характеристику степени уменьшения концентрации напряжений, связанного с наличием второй щели, естественно принять отношение

$$\frac{\sigma_0}{\sigma_0^\infty} = \gamma + O(\sqrt{\rho^2 - 1}),$$

где

$$\gamma = \int_0^1 \chi_1(\xi) d\xi - x \int_0^1 \chi_2(\xi) d\xi. \quad (55.10)$$

Значения коэффициента γ приведены в табл. 37.

Заметим в заключение, что изложенная методика без существенных изменений может быть применена и ко многим другим задачам, например к исследованию напряженного состояния в неограниченном упругом теле, ослабленном несколькими внутренними или внешними круговыми щелями.

Часть IV

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МЕЛЕРА—ФОКА

Пусть функция $f(\alpha)$ задана в промежутке $(0, \infty)$ и удовлетворяет следующим условиям: $f(\alpha)$ непрерывна и имеет ограниченную вариацию в интервале $0 \leq \alpha \leq A < \infty$, и интеграл

$$\int_0^{\infty} \alpha e^{\frac{\alpha}{2}} |f(\alpha)| d\alpha \quad (1)$$

сходится. Тогда имеет место формула

$$f(\alpha) = \int_0^{\infty} \tau \operatorname{th} \pi \tau P_{-\nu/\tau+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau \times \\ \times \int_0^{\infty} f(\gamma) P_{-\nu/\tau+i\tau}(\operatorname{ch} \gamma) \operatorname{sh} \gamma d\gamma \quad (0 \leq \alpha < \infty), \quad (2)$$

где $P_{-\nu/\tau+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha)$ — функция Лежандра первого рода.

Если ввести преобразование Мелера—Фока соотношением

$$f(\tau) = \int_0^{\infty} f(\alpha) P_{-\nu/\tau+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) \operatorname{sh} \alpha d\alpha \quad (\tau \geq 0), \quad (3)$$

то на основании (2) получаем формулу обращения, выражающую функцию $f(\alpha)$ через ее преобразование $f(\tau)$,

$$f(\alpha) = \int_0^{\infty} \tau \operatorname{th} \pi \tau f(\tau) P_{-\nu/\tau+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau \quad (0 \leq \alpha < \infty). \quad (4)$$

Формула (2) была впервые получена Мелером [197], однако им не был до конца решен вопрос о тех условиях, которые следует при этом наложить на функцию $f(\alpha)$. Строгое обоснование

эта формула получила в работе В. А. Фока [125] и диссертации Н. Н. Лебедева [50].

Интегральное преобразование Мелера—Фока нашло большое применение при решении ряда осесимметричных задач теории потенциала для областей, образованных двумя пересекающимися сферами, а также для гиперboloида вращения. В более общих задачах для подобных областей, когда осевая симметрия уже не имеет места, можно использовать так называемое обобщенное разложение Мелера—Фока

$$f(\alpha) = (-1)^m \int_0^\infty \tau \operatorname{th} \pi \tau P_{\frac{1}{2} + i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha) d\tau \times \\ \times \int_0^\infty f(\gamma) P_{\frac{1}{2} + i\tau}^{-m}(\operatorname{ch} \gamma) \operatorname{sh} \gamma d\gamma \quad (0 \leq \alpha < \infty), \quad (5)$$

где $P_{\frac{1}{2} + i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha)$ — присоединенная функция Лежандра,

$$P_{\frac{1}{2} + i\tau}^{-m}(\operatorname{ch} \alpha) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + i\tau - m)}{\Gamma(\frac{1}{2} + i\tau + m)} P_{\frac{1}{2} + i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha), \quad (6)$$

$\Gamma(z)$ — гамма-функция.

Если ввести обобщенное преобразование Мелера—Фока

$$f(\tau) = \int_0^\infty f(\alpha) P_{\frac{1}{2} + i\tau}^{-m}(\operatorname{ch} \alpha) \operatorname{sh} \alpha d\alpha \quad (\tau \geq 0), \quad (7)$$

то из соотношения (5) получим следующую формулу обращения:

$$f(\alpha) = (-1)^m \int_0^\infty \tau \operatorname{th} \pi \tau f(\tau) P_{\frac{1}{2} + i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha) d\tau \quad (0 \leq \alpha < \infty). \quad (8)$$

Насколько нам известно, класс функций, для которых эта формула справедлива, в настоящее время не установлен с достаточной определенностью, так как в посвященных этому преобразованию работах М. Н. Олевского [81, 82] и Н. Я. Виленкина [17] условия наложены не на функцию $f(\alpha)$, а на ее преобразование $f(\tau)$. Однако это обстоятельство не представляет существенным в тех конкретных случаях применения этого преобразования, когда справедливость соответствующих разложений может быть непосредственно проверена.

С помощью интегрального преобразования Мелера—Фока можно получить эффективные точные решения некоторых классов смешанных задач теории упругости для полупространства

с круговой линией раздела граничных условий. В части IV настоящей книги даны общие решения указанных задач в тех случаях, когда на всей граничной плоскости полупространства заданы касательные или нормальные напряжения, а также основной смешанной задачи. Полученные результаты применены к целому ряду важных конкретных задач, главными из которых являются контактная задача для круглого штампа при наличии сцепления, а также равновесие неограниченного упругого тела, ослабленного внешней или внутренней круговой щелью.

Глава IX. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА, РАЗРЕШИМЫЕ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МЕЛЛЕРА—ФОКА

§ 56. Уравнение Лапласа в тороидальных координатах

При решении смешанных краевых задач теории потенциала для полупространства в том случае, когда линией раздела граничных условий является окружность, оказывается весьма удобным использовать специальную систему криволинейных координат, называемых обычно тороидальными.

Введем тороидальные координаты (α, β, φ) с помощью соотношения

$$r + iz = a \operatorname{th} \frac{\alpha + i\beta}{2} \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2}), \quad (56.1)$$

из которого вытекают следующие зависимости:

$$x = \frac{a \operatorname{sh} \alpha \cos \varphi}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}, \quad y = \frac{a \operatorname{sh} \alpha \sin \varphi}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}, \quad z = \frac{a \sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}. \quad (56.2)$$

Здесь x, y, z — прямоугольные координаты, a — параметр, имеющий размерность длины; координаты α и β изменяются в пределах: $0 \leq \alpha < \infty$, $0 \leq \beta \leq 2\pi$ (или $|\beta| \leq \pi$); координату φ , являющуюся обычным полярным углом, будем считать меняющейся от 0 до 2π .

Ортогональность введенных таким способом координат вытекает из выражения для квадрата линейного элемента

$$ds^2 = h^2 (d\alpha^2 + d\beta^2 + \operatorname{sh}^2 \alpha d\varphi^2), \quad h = \frac{a}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}. \quad (56.3)$$

Координатные поверхности $\alpha = \operatorname{const}$, суть торы

$$(r - a \operatorname{cth} \alpha)^2 + z^2 = \left(\frac{a}{\operatorname{sh} \alpha} \right)^2. \quad (56.4)$$

Предельными случаями этой системы поверхностей являются ось Oz ($\alpha = 0$) и окружность $r = a, z = 0$ ($\alpha = \infty$).

Координатными поверхностями $\beta = \text{const}$ являются части сферических поверхностей

$$(z + a \operatorname{ctg} \beta)^2 + r^2 = \left(\frac{a}{\sin \beta}\right)^2, \quad (56.5)$$

пересекающиеся по окружности $r = a$, $z = 0$.

Таким образом, тороидальные координаты специально приспособлены к решению краевых задач как для областей, ограниченных поверхностью тора ($\alpha = \text{const}$), так и для областей, ограниченных двумя пересекающимися сферами ($\beta = \beta_1$ и $\beta = \beta_2$).

Нас в дальнейшем будет интересовать предельный случай поверхностей второго вида, когда рассматривается полуиро-

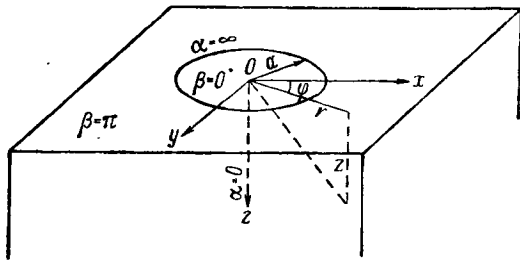


Рис. 35.

странство $z > 0$ (рис. 35), граница $z = 0$ которого состоит из координатных поверхностей $\beta = 0$ (внутренность круга $r = a$) и $\beta = \pi$ (внешность того же круга).

Рассмотрим уравнение Лапласа в тороидальных координатах

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \cdot \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha (\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (56.6)$$

Если положить $u = \sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} v$, то после подстановки в уравнение (56.6) и разделения переменных получается следующая совокупность периодических по координате φ частных решений гармонического уравнения

$$v_{\nu, m} = [A_{\nu, m} \cos \nu \beta + B_{\nu, m} \sin \nu \beta] [C_{\nu, m} P_{\nu-1/2}^m(\operatorname{ch} \alpha) + D_{\nu, m} Q_{\nu-1/2}^m(\operatorname{ch} \alpha)] e^{im\varphi}, \quad (56.7)$$

где $P_{\nu-1/2}^m(\operatorname{ch} \alpha)$ и $Q_{\nu-1/2}^m(\operatorname{ch} \alpha)$ — функции Лежандра первого и второго рода ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; ν — произвольный параметр).

Из условия ограниченности решения на оси Oz (т. е. при $\alpha = 0$) следует, что $D_{\nu, m} = 0$. Если поставить еще требование ограниченности частных решений на линии $\alpha = \infty$, то из асимптотического выражения функции Лежандра [21]

$$P_{\nu-1/2}^m(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\approx} \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \left[\frac{\Gamma(\nu)(2x)^\nu}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu - m\right)} + \frac{\Gamma(-\nu)(2x)^{-\nu}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu - m\right)} \right] \left[1 + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \right] \quad (56.8)$$

вытекает условие: $|\operatorname{Re} \nu| \leq \frac{1}{2}$, которое нужно наложить на значения параметра ν . Удобно положить $\nu = i\tau$, так как при этом рассматриваемые функции Лежандра становятся вещественными.

Таким образом, частные решения гармонического уравнения, ограниченные при $\alpha \rightarrow 0$ и $\alpha \rightarrow \infty$, имеют вид

$$\sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} [A_m(\tau) \operatorname{ch} \beta\tau + B_m(\tau) \operatorname{sh} \beta\tau] \times \\ \times P_{\nu-1/2+i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha) e^{im\varphi} \quad (\tau \geq 0). \quad (56.9)$$

Поэтому общее решение уравнения Лапласа в тороидальных координатах может быть представлено в виде следующего разложения:

$$u(\alpha, \beta, \varphi) = \sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \int_0^{\infty} [A_m(\tau) \operatorname{ch} \beta\tau + \\ + B_m(\tau) \operatorname{sh} \beta\tau] P_{\nu-1/2+i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha) d\tau. \quad (56.10)$$

§ 57. Применение преобразования Мелера—Фока к решению смешанных краевых задач для полупространства

При решении смешанных задач теории упругости для полупространства с круговой линией раздела краевых условий в ряде случаев гармонические функции напряжений будут удовлетворять граничным условиям смешанного типа, которые в тороидальных координатах имеют вид *

$$u|_{\beta=0} = \chi_0(\alpha, \varphi), \quad \frac{\partial u}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\pi} = \chi_\pi(\alpha, \varphi). \quad (57.1)$$

Если представить искомую функцию в виде разложения (56.10), то нахождение неизвестных величин $A_m(\tau)$ и $B_m(\tau)$ сводится,

* К частному случаю такой краевой задачи ($\chi_\pi = 0$) сводится задача о давлении кругового в плане жесткого штампа на упругое полупространство при отсутствии трения (см., например, [67]).

очевидно, к задаче о разложении некоторой заданной функции в бесконечный ряд Фурье по полярному углу φ и в интеграл по функциям Лежандра $P_{\frac{1}{2}+i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha)$

$$\psi(\alpha, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \int_0^{\infty} F_m(\tau) P_{\frac{1}{2}+i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha) d\tau, \quad (57.2)$$

где величина $F_m(\tau)$ подлежит определению.

Так как из формулы Фурье следует, что

$$\int_0^{\infty} F_m(\tau) P_{\frac{1}{2}+i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\alpha, \varphi) e^{-im\varphi} d\varphi = f_m(\alpha), \quad (57.3)$$

то задача нахождения функции $F_m(\tau)$ равносильна задаче о разложении функции $f_m(\alpha)$ в интеграл следующего вида:

$$f_m(\alpha) = \int_0^{\infty} F_m(\tau) P_{\frac{1}{2}+i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha) d\tau, \quad 0 \leq \alpha < \infty. \quad (57.4)$$

Сравнивая выражение (57.4) с приведенными во введении к части IV формулами, относящимися к обобщенному преобразованию Мелера—Фока, мы немедленно получаем для неизвестной величины $F_m(\tau)$ следующее выражение:

$$F_m(\tau) = (-1)^m \tau \operatorname{th} \pi\tau \int_0^{\infty} f_m(\alpha) P_{\frac{1}{2}+i\tau}^{-m}(\operatorname{ch} \alpha) \operatorname{sh} \alpha d\alpha, \quad (57.5)$$

где

$$P_{\frac{1}{2}+i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\tau - m\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\tau + m\right)} P_{\frac{1}{2}+i\tau}^{-m}(\operatorname{ch} \alpha). \quad (57.6)$$

Учитывая сказанное, можно теперь довести до конца решение поставленной краевой задачи. В самом деле, граничные условия (57.1) приводят нас к следующим значениям входящих в разложение (57.10) величин $A_m(\tau)$ и $B_m(\tau)$:

$$\left. \begin{aligned} A_m(\tau) &= \frac{(-1)^m}{2\pi} \tau \operatorname{th} \pi\tau \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\chi_0(\alpha, \varphi)}{\sqrt{\operatorname{ch} \alpha + 1}} e^{-im\varphi} P_{\frac{1}{2}+i\tau}^{-m}(\operatorname{ch} \alpha) \operatorname{sh} \alpha d\alpha d\varphi, \\ B_m(\tau) &= \operatorname{th} \pi\tau \left[\frac{(-1)^m}{2\pi \operatorname{ch} \pi\tau} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\chi_{\pi}(\alpha, \varphi)}{\sqrt{\operatorname{ch} \alpha - 1}} e^{-im\varphi} P_{\frac{1}{2}+i\tau}^{-m}(\operatorname{ch} \alpha) \times \right. \\ &\quad \left. \times \operatorname{sh} \alpha d\alpha d\varphi - A_m(\tau) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (57.7)$$

Аналогичным образом могут быть даны точные решения сходных смешанных задач, когда при $\beta=0$ (внутренность круга) даны значения нормальной производной, а при $\beta=\pi$ (внешность круга) — значения самой искомой функции.

Наиболее простым является тот случай, когда входящие в краевые условия (57. 1) функции χ_0 и χ_π вообще не зависят от координаты φ , т. е. задача обладает осевой симметрией. При этом разложение (56. 10) заменяется следующим:

$$u(\alpha, \beta) = \sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \int_0^{\infty} [A(\tau) \operatorname{ch} \beta \tau + B(\tau) \operatorname{sh} \beta \tau] P_{-\frac{1}{2} + i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau, \quad (57. 8)$$

и граничные условия приводят к разложению вида

$$f(\alpha) = \int_0^{\infty} F(\tau) P_{-\frac{1}{2} + i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau, \quad 0 \leq \alpha < \infty, \quad (57. 9)$$

представляющему собой, по существу, формулу обращения Мелера—Фока (см. введение к части IV). Таким образом,

$$F(\tau) = \tau \operatorname{th} \pi \tau \int_0^{\infty} f(\alpha) P_{-\frac{1}{2} + i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) \operatorname{sh} \alpha d\alpha. \quad (57. 10)$$

В соответствии с этим величины $A(\tau)$ и $B(\tau)$, найденные из граничных условий вида (57. 1), даются формулами

$$\left. \begin{aligned} A(\tau) &= \tau \operatorname{th} \pi \tau \int_0^{\infty} \frac{\chi_0(\alpha)}{\sqrt{\operatorname{ch} \alpha + 1}} P_{-\frac{1}{2} + i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) \operatorname{sh} \alpha d\alpha, \\ B(\tau) &= \operatorname{th} \pi \tau \left[\frac{1}{\operatorname{ch} \pi \tau} \int_0^{\infty} \frac{\chi_\pi(\alpha)}{\sqrt{\operatorname{ch} \alpha - 1}} P_{-\frac{1}{2} + i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) \operatorname{sh} \alpha d\alpha - A(\tau) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (57. 11)$$

В связи с тем, что в формуле (57. 10) предполагалось достаточно быстрое стремление к нулю функции $f(\alpha) e^{\frac{\alpha}{2}}$ при $\alpha \rightarrow \infty$, возникает необходимость видоизменения этой формулы на тот часто встречающийся при решении задач случай, когда $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} f(\alpha) \times$

$\times e^{\frac{\alpha}{2}} = M = \text{const}$. Такая формула получена в работе [50] с помощью легко проверяемого разложения

$$\frac{1}{\sqrt{2(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)}} = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \beta \tau}{\operatorname{ch} \pi \tau} P_{-\frac{1}{2} + i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau, \quad |\beta| \leq \pi, \quad (57. 12)$$

и имеет следующий вид:

$$F(\tau) = M \frac{\operatorname{ch} \beta \tau}{\operatorname{ch} \pi \tau} + \\ + \tau \operatorname{th} \pi \tau \int_0^{\infty} \left[f(\alpha) - \frac{M}{\sqrt{2}(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)} \right] P_{-\nu/\tau+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) \operatorname{sh} \alpha d\alpha, \quad (57.13)$$

причем функция

$$f(\alpha) = \frac{M}{\sqrt{2}(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)}$$

предполагается удовлетворяющей приведенным выше достаточным условиям разложимости.

В дальнейшем при решении некоторых задач теории упругости мы столкнемся и с такими случаями, когда стоящие в правых частях граничных условий типа (57.1) функции вообще не будут разлагаться в интеграл Мелера—Фока. В таких случаях для решения задачи приходится принять различные искусственные приемы, связанные с особыми решениями уравнения Лапласа (см. § 58).

Следует заметить, что хотя решения краевых задач, полученные указанным способом, содержат под знаком интегралов функции Лежандра $P_{-\nu/\tau+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha)$, для которых имеются таблицы [32], однако путем использования различных интегральных представлений этих функций [51]

$$P_{-\nu/\tau+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha} \frac{\cos \tau s ds}{\sqrt{2}(\operatorname{ch} \alpha - \operatorname{ch} s)}, \quad (57.14)$$

$$P_{-\nu/\tau+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) = \frac{2}{\pi} \operatorname{ch} \pi \tau \int_0^{\infty} \frac{\cos \tau s ds}{\sqrt{2}(\operatorname{ch} \alpha + \operatorname{ch} s)}, \quad (57.15)$$

$$P_{-\nu/\tau+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) = \frac{2}{\pi} \operatorname{cth} \pi \tau \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\sin \tau s ds}{\sqrt{2}(\operatorname{ch} s - \operatorname{ch} \alpha)} \quad (57.16)$$

часто удается преобразовать решение к виду, содержащему квадратуры от элементарных функций.

Существенно отметить, что при решении с помощью интеграла Мелера—Фока конкретных задач зачастую бывает удобнее пользоваться не формулами (57.10), (57.13) или, в общем случае, (57.5), а известными представлениями некоторых функций в виде разложений типа Мелера—Фока, простейшим из

которых является разложение (57.12). В частности, в тех конкретных задачах, где разложение ведется по функциям

$$P_{\nu/\nu+i\tau}^1(\operatorname{ch} \alpha) = \frac{d}{d\alpha} P_{\nu/\nu+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha), \quad (57.17)$$

используется получаемое из (57.12) разложение

$$\frac{\operatorname{sh} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{ch}^2 \frac{\alpha}{2}} = -4 \int_0^{\infty} P_{\nu/\nu+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) \frac{d\tau}{\operatorname{ch} \pi\tau}. \quad (57.18)$$

Приведем еще полезное интегральное представление для произведения функций Лежандра [49]

$$\begin{aligned} & (-1)^m P_{\nu/\nu+i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha) P_{\nu/\nu+i\tau}^{-m}(\operatorname{ch} \alpha') \sqrt{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \alpha'} = \\ & = \frac{2}{\pi^2} \operatorname{ch} \pi\tau \int_0^{\infty} Q_{m-\nu/2} \left(\frac{\operatorname{ch} s + \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \alpha'}{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \alpha'} \right) \cos \tau s ds, \end{aligned} \quad (57.19)$$

применяемое нами в главах X—XII.

Сделаем теперь некоторые замечания, касающиеся поведения искомой гармонической функции u на бесконечности, т. е. при $\alpha \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow \pi$.

В дальнейшем при постановке краевых задач, кроме граничных условий типа (57.1), мы будем еще требовать, чтобы на бесконечности функция u имела порядок $\frac{1}{R}$ ($R = \sqrt{r^2 + z^2}$), а $|\operatorname{grad} u|$ — порядок $\frac{1}{R^2}$. Так как имеет место равенство

$$\frac{R^2}{a^2} = \frac{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}.$$

при $R \rightarrow \infty$ переходящее в асимптотическое соотношение

$$\sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \approx \sqrt{2} \frac{a}{R},$$

то для выполнения условий на бесконечности достаточно предположить, что ряд, входящий в решение (56.10), а также его производные по x , y и z остаются ограниченными при $\alpha \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow \pi$. В пространственных задачах теории упругости предполагают, что перемещения на бесконечности имеют порядок $\frac{1}{R}$, а напряжения — $\frac{1}{R^2}$.

Полезно иметь в виду, что обычно выполнение условий на бесконечности можно проверить с помощью асимптотического представления

$$P_{\frac{1}{2}+i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha) \underset{\alpha \rightarrow 0}{\approx} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\tau + m\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\tau - m\right)} \cdot \frac{\operatorname{sh}^m \alpha}{2^m \Gamma(m+1)}. \quad (57.20)$$

Особенность рассматриваемых краевых задач состоит в том, что, кроме граничных условий и условий на бесконечности, необходимо поставить еще некоторые требования, связанные с поведением искомой функции на особой линии $\alpha = \infty$ ($z = 0$, $r = a$) раздела граничных условий. Обычно в смешанных задачах подобного рода предполагают, что интеграл, взятый по некоторой поверхности, окружающей особую линию, от произведения $u \frac{du}{dn}$ (n — нормаль к поверхности), стремится к нулю, если эта поверхность стягивается в линию $r = a$, $z = 0$. Можно показать, что в такой постановке решение краевой задачи будет единственно.

Мы здесь не будем ближе рассматривать этот вопрос, ибо в изучаемых далее задачах теории упругости условия на особой линии, обеспечивающие единственность решения, будут носить несколько иной характер, а именно: перемещения при $\alpha \rightarrow \infty$ предполагаются конечными, а главный вектор усилий, приложенных к поверхности, охватывающей окружность $\alpha = \infty$, должен стремиться к нулю при стягивании этой поверхности к особой линии. Видоизменяя обычное доказательство теоремы единственности решения задач теории упругости (см., например, [78]) путем интегрирования по замкнутой области, состоящей из сферы радиуса $R \rightarrow \infty$, тороидальной поверхности $\alpha = A \rightarrow \infty$ и плоскостей $\beta = 0$ ($0 \leq \alpha \leq A$) и $\beta = \pi$ ($\alpha \leq A$), можно легко показать, что условия рассматриваемых в части IV задач теории упругости, дополненные обычными требованиями на бесконечности, а также сформулированными выше условиями на особой линии $\alpha = \infty$, обеспечивают единственность решения этих классов задач.

В заключение настоящего параграфа приведем две формулы, являющиеся примером обобщенного интегрального разложения Мелера—Фока, которое используется в главе XII:

$$\frac{\operatorname{th}^m \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sh}^2 \frac{\alpha}{2}} = 2\Gamma(m) \int_0^{\infty} \tau \operatorname{th} \pi \tau \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\tau - m\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\tau + m\right)} P_{\frac{1}{2}+i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha) d\tau, \quad (57.21)$$

$$2\Gamma(m) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\tau - m\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\tau + m\right)} = (-1)^m \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{th}^m \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sh}^2 \frac{\alpha}{2}} \operatorname{sh} \alpha P_{-1/2+i\tau}^{-m}(\operatorname{ch} \alpha) d\alpha. \quad (57.22)$$

Укажем, что значение интеграла, входящего в соотношение (57.22), проще всего получается подстановкой вместо функции Лежандра ее интегрального представления (см. [51, стр. 268])

$$P_{-1/2+i\tau}^{-m}(\operatorname{ch} \alpha) = (-1)^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\operatorname{ch} \pi\tau}{\pi} \operatorname{sh}^m \alpha \int_0^{\infty} t^m e^{-t \operatorname{ch} \alpha} K_{i\tau}(t) \frac{dt}{\sqrt{t}}, \quad (57.23)$$

переменной порядка интегрирования и использованием формулы

$$\int_0^{\infty} t^{m-1} \frac{\alpha}{2} \operatorname{sh}^m \alpha e^{-t \operatorname{ch} \alpha} d\alpha = e^{-t} t^{-m} \Gamma(m). \quad (57.24)$$

§ 58. О некоторых типах особых гармонических функций

Как уже указывалось в предыдущем параграфе, при решении ряда смешанных задач теории упругости для полупространства мы встретимся с такими случаями, когда искомые гармонические функции не будут оставаться ограниченными на линии $z=0$, $r=a$ ($\alpha=\infty$) раздела краевых условий. Это обстоятельство, по существу, связано с тем, что на указанной особой линии могут неограниченно возрастать упругие напряжения, что при определенных условиях (см. § 57) не нарушает единственности решения.

В связи с тем, что функции, имеющие бесконечный разрыв при $\alpha \rightarrow \infty$, не допускают разложения в интеграл Мелера—Фока, мы в настоящем параграфе рассмотрим некоторые классы таких функций, которые в дальнейшем позволят устранить трудности, возникающие при использовании преобразования Мелера—Фока в задачах теории упругости. Следует помнить, что во всех таких случаях необходимо проверять выполнение условия ограниченности перемещений при $\alpha \rightarrow \infty$.

Легко проверить простым дифференцированием, что функции

$$u(\alpha, \beta, \varphi) = e^{\pm \frac{i\beta}{2}} \sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} f(\zeta), \quad \zeta = \operatorname{th} \frac{\alpha}{2} e^{\pm i\varphi}, \quad (58.1)$$

где α, β, φ — тороидальные координаты, а $f(\zeta)$ — произвольная аналитическая функция, удовлетворяют уравнению Лапласа.

Из полученных комплексных решений можно сконструировать гармонические функции следующих двух типов:

$$\left. \begin{aligned} u_c &= \cos \frac{\beta}{2} \sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} f(\zeta), \\ u_s &= \sin \frac{\beta}{2} \sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} f(\zeta). \end{aligned} \right\} \quad (58.2)$$

Нетрудно видеть, что оба эти решения удовлетворяют смешанным однородным краевым условиям на границе $z=0$ полупространства

$$\left. \begin{aligned} u_c|_{\beta=\pi} &= 0, & \frac{\partial u_c}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0} &= 0, \\ u_s|_{\beta=0} &= 0, & \frac{\partial u_s}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\pi} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (58.3)$$

Однако, несмотря на то что полученные особые решения удовлетворяют однородным уравнению и граничным условиям, а также стремятся к нулю на бесконечности ($\alpha \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow \pi$), они не равны нулю тождественно. Причиной этого является то обстоятельство, что особые решения типа (58.1) неограниченно возрастают на линии $\alpha = \infty$ раздела краевых условий, так что сформулированные в предыдущем параграфе условия теоремы единственности решения в данном случае нарушаются (во всяком случае для функций f , неравных нулю при $\alpha = \infty$).

Найденные классы особых гармонических функций будут использованы в главах XI—XII при решении некоторых смешанных задач теории упругости.

С помощью решений типа (58.2) можно составить еще некоторые решения уравнения Лапласа, также применяемые нами в последующем изложении.

Так, принимая

$$f(\zeta) = \zeta^m \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (58.4)$$

и интегрируя функцию $u_c(\alpha, \beta, \varphi)$ по переменной z , получаем новую гармоническую функцию

$$w_c^{(m)} = J_c^{(m)}(\alpha, \beta) e^{\pm i m \varphi}, \quad (58.5)$$

где введено обозначение

$$J_c^{(m)} = \int_{\infty}^z \cos \frac{\beta}{2} \sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \operatorname{th}^m \frac{\alpha}{2} dz. \quad (58.6)$$

Полученная функция $J_c^{(m)}$ может быть выражена в явном виде, если произвести интегрирование при $r = \operatorname{const}$ и, прини-

мая за переменную интегрирования тороидальную координату α , воспользоваться соотношениями

$$\left. \begin{aligned} dz|_{r=\text{const}} &= -\frac{ada}{\text{sh } \alpha \sin \beta}, \\ \text{ch } \alpha + \cos \beta &= \frac{a}{r} \text{sh } \alpha, \\ \cos \frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{\text{sh } \alpha}{2} \left(\frac{a}{r} - \text{th } \frac{\alpha}{2} \right)}. \end{aligned} \right\} \quad (58.7)$$

Так как при $r = \text{const}$, $z \rightarrow \infty$ переменная α стремится к нулю, то

$$J_c^{(m)} = -a \sqrt{2} \left(\frac{r}{a} \right)^m \int_{\sqrt{\frac{r}{a} \text{ch } \frac{\alpha}{2} - 1}}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^{m+1}}, \quad (58.8)$$

причем полученная квадратура может быть вычислена в элементарных функциях.

Для наших дальнейших целей в первую очередь представляет интерес тот факт, что гармоническая функция $w_c^{(m)}(\alpha, \beta, \varphi)$ является решением краевой задачи для полупространства при следующих граничных условиях:

$$w_c^{(m)}|_{\beta=0} = -\frac{a\pi\sqrt{2}}{2^{2m+1}m!^2} \left(\frac{r}{a} \right)^m e^{\pm i m \varphi}, \quad \frac{\partial w_c^{(m)}}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\infty} = 0. \quad (58.9)$$

Второе из этих условий очевидно, а первое получено взятием квадратуры (58.8), которая при $\beta = 0$ имеет своим нижним пределом нуль, так как $\left(\frac{r}{a} \right)_{\beta=0} = \text{th } \frac{\alpha}{2}$.

Проводя аналогичные выкладки, легко убедиться в том, что гармоническая функция

$$\left. \begin{aligned} w_s^{(m)} &= J_s^{(m)}(\alpha, \beta) e^{\pm i m \varphi}, \\ J_s^{(m)} &= \int_{\infty}^z \sin \frac{\beta}{2} \sqrt{\text{ch } \alpha + \cos \beta} \text{th }^m \frac{\alpha}{2} dz \end{aligned} \right\} \quad (58.10)$$

удовлетворяет краевым условиям

$$w_s^{(m)}|_{\beta=\pi} = -\frac{a\sqrt{2}}{(2m-1)!} \frac{2^{2(m-1)}(m-1)!^2}{(2m-1)!} \left(\frac{a}{r} \right)^m e^{\pm i m \varphi}, \quad \frac{\partial w_s^{(m)}}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0} = 0. \quad (58.11)$$

В заключение приведем еще две формулы, также используемые в главах XI—XII при решении некоторых смешанных за-

дач для полупространства с круговой линией раздела граничных условий:

$$\int_{\infty}^s J_c^{(m)} dz \Big|_{\beta=-\infty} = a^2 \sqrt{2} \left(\frac{a}{r}\right)^m \frac{2^{2m} (m-1)! (m+1)!}{(2m+2)!}, \quad (58.12)$$

$$\int_{\infty}^s J_s^{(m)} dz \Big|_{\beta=0} = a^2 \pi \sqrt{2} \left(\frac{r}{a}\right)^m \frac{(2m-2)!}{m 2^{2m} (m-1)!^2}. \quad (58.13)$$

Глава X. СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА С КРУГОВОЙ ЛИНИЕЙ РАЗДЕЛА КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ ПРИ ЗАДАНИИ НА ВСЕЙ ГРАНИЦЕ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

**§ 59. Осесимметричная задача для случая,
когда внутри круга задано нормальное перемещение,
а вне его — нормальное напряжение**

В данной главе будут рассмотрены такие деформации упругого полупространства ($z > 0$), когда на всей его границе значения касательных напряжений τ_{zx} и τ_{yz} считаются заданными. Наряду с этим еще одно краевое условие будет различным для внутренности и внешности некоторой окружности, расположенной на граничной плоскости.

В настоящем параграфе исследуется случай задания внутри круга радиуса a нормальных перемещений u_s , а вне его — нормальных напряжений σ_s , причем рассматривается осесимметричная задача.

К задачам такого типа сводятся, в частности, некоторые контактные задачи, а также вопросы концентрации напряжений в упругом теле, ослабленном внешней круговой щелью.

Граничные условия поставленной задачи, очевидно, имеют вид

$$\tau_{rs} \Big|_{s=0} = \tau(r), \quad (59.1)$$

$$u_s \Big|_{\substack{s=0 \\ |r| < a}} = w(r), \quad \sigma_s \Big|_{\substack{s=0 \\ |r| > a}} = \sigma(r) \quad (59.2)$$

(r, φ, z — цилиндрические координаты).

Для сведения рассматриваемой задачи к краевым задачам теории потенциала используем представление упругих смеще-

ний и напряжений в осесимметричном случае через две гармонические функции Папковича—Нейбера

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_r &= -\frac{\partial f}{\partial z} - z \frac{\partial \Phi}{\partial r}, & 2Gu_z &= (3 - 4\nu) \Phi - \frac{\partial f}{\partial z} - z \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \\ \sigma_r &= 2(1 - \nu) \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - z \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \\ \tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 - 2\nu) \Phi - \frac{\partial f}{\partial z} - z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right], \\ \sigma_r &= 2\nu \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - z \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, & \sigma_\theta &= 2\nu \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{z}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \end{aligned} \right\} \quad (59.3)$$

(G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона).

Прежде всего для гармонической функции

$$\psi = (1 - 2\nu) \Phi - \frac{\partial f}{\partial z} \quad (59.4)$$

из граничного условия (59.1) сразу находим*

$$\psi|_{z=0} = \int_{\infty}^r \tau(\rho) d\rho, \quad (59.5)$$

так что функция ψ может считаться найденной в результате решения задачи Дирихле для полупространства.

Исключая теперь с помощью (59.4) одну из двух функций Папковича—Нейбера (например, f), находим из (59.2), что гармоническая функция Φ должна удовлетворять следующим смешанным краевым условиям на границе полупространства:

$$\left. \begin{aligned} \Phi \Big|_{\substack{z=0 \\ r < a}} &= \frac{G}{1 - \nu} w(r) - \frac{1}{2(1 - \nu)} \psi \Big|_{\substack{z=0 \\ r < a}}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{\substack{z=0 \\ r > a}} &= \sigma(r) - \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{\substack{z=0 \\ r < a}}. \end{aligned} \right\} \quad (59.6)$$

Как указывалось в § 57, краевые задачи такого типа могут быть просто решены с помощью тороидальных координат и интегрального преобразования Мелера—Фока.

После определения функций ψ и Φ можно разыскать и f , находя $\frac{\partial f}{\partial z}$ из (59.4) и интегрируя по z от ∞ до z . Если же функция f не стремится к нулю при $z \rightarrow \infty$, то достаточно найти ее производную $\frac{\partial f}{\partial r} = \int_{\infty}^z \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial z} dz$, так как f вообще определена

* Предполагается, что при $\rho \rightarrow \infty$ этот интеграл сходится.

с точностью до постоянного слагаемого. Последний же интеграл сходится, так как перемещение u_r , а следовательно, и величина $\frac{\partial f}{\partial r}$ стремится к нулю при $z \rightarrow \infty$.

В качестве простого примера применения этой методики дадим решение задачи о вдавливании осевой силой цилиндрического жесткого штампа с плоским дном в упругое пространство для случая, когда трением пренебрегается.

Легко видеть, что эта задача является частным случаем рассмотренной общей задачи: именно, при таких условиях отсутствуют касательные напряжения на всей границе тела, а также нормальные напряжения вне штампа, т. е. при $z = 0$ и $r > a$. Очевидно, что в полученных формулах следует положить $\tau(r) = \sigma(r) \equiv 0$, откуда вытекает, что $\psi \equiv 0$, и остается найти гармоническую в полупространстве $z > 0$ функцию Φ , удовлетворяющую смешанным граничным условиям при $z = 0$

$$\Phi|_{r < a} = \frac{G\delta}{1-\nu}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{r > a} = 0, \quad (59.7)$$

где δ — перемещение штампа.

Вводя тороидальные координаты (α, β) соотношением (56.1), можно переписать условия (59.7) в виде

$$\Phi|_{\beta=0} = \frac{G\delta}{1-\nu}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\pi} = 0. \quad (59.8)$$

Полагая в соответствии с (56.10)

$$\Phi = \frac{G\delta}{1-\nu} \sqrt{\text{ch } \alpha + \cos \beta} \int_0^{\infty} A(\tau) \frac{\text{ch}(\pi - \beta)\tau}{\text{ch } \pi\tau} P_{-\nu/\pi + i\tau}(\text{ch } \alpha) d\tau, \quad (59.9)$$

мы удовлетворим краевому условию при $\beta = \pi$, причем условие при $\beta = 0$ дает соотношение

$$\sqrt{\text{ch } \alpha + 1} \int_0^{\infty} A(\tau) P_{-\nu/\pi + i\tau}(\text{ch } \alpha) d\tau = 1, \quad (59.10)$$

из которого следует найти значение $A(\tau)$.

Так как на основании (57.12)

$$\frac{1}{\sqrt{\text{ch } \alpha + 1}} = \sqrt{2} \int_0^{\infty} P_{-\nu/\pi + i\tau}(\text{ch } \alpha) \frac{d\tau}{\text{ch } \pi\tau}, \quad (59.11)$$

то

$$A(\tau) = \frac{\sqrt{2}}{\text{ch } \pi\tau}. \quad (59.12)$$

Таким образом, решение поставленной контактной задачи выражено через функцию Φ , определяющуюся следующей формулой:

$$\Phi(\alpha, \beta) = \frac{\sqrt{2} G \delta}{1-\nu} \sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(\pi - \beta) \tau}{\operatorname{ch}^2 \pi \tau} P_{-\frac{1}{2} + i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau. \quad (59.13)$$

Входящая сюда квадратура может быть вычислена. В самом деле, пользуясь интегральным представлением (57.15), меняя порядок интегрирования и учитывая значение интеграла

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(\pi - \beta) \tau}{\operatorname{ch} \pi \tau} \cos \tau s d\tau = \frac{\sin \frac{\beta}{2} \operatorname{ch} \frac{s}{2}}{\operatorname{ch} s - \cos \beta}, \quad (59.14)$$

находим

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{2G\delta}{\pi(1-\nu)} \sin \frac{\beta}{2} \sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \times \\ &\times \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{s}{2} ds}{\sqrt{\operatorname{ch} s + \operatorname{ch} \alpha} (\operatorname{ch} s - \cos \beta)}. \end{aligned} \quad (59.15)$$

Подстановка $\operatorname{sh} \frac{s}{2} = \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} \operatorname{sh} \frac{u}{2}$ дает окончательно

$$\Phi = \frac{2G\delta}{\pi(1-\nu)} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}{1 - \cos \beta}}, \quad (59.16)$$

так что решение задачи выражается через элементарные функции.

Остается связать неизвестное перемещение штампа δ с заданной величиной P осевой силы при помощи условия статики

$$\int_0^a \sigma_s|_{\beta=0} r dr = -\frac{P}{2\pi}. \quad (59.17)$$

Так как, согласно (56.1), $r|_{\beta=0} = a \operatorname{th} \frac{\alpha}{2}$, а

$$\sigma_s|_{\beta=0} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{\beta=0} = \frac{\operatorname{ch} \alpha + 1}{a} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0} = -\frac{2G\delta}{\pi a(1-\nu)} \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2}, \quad (59.18)$$

то после выполнения квадратуры искомая связь принимает вид

$$\delta = \frac{1-\nu}{4Ga} P. \quad (59.19)$$

В следующем параграфе будет дано решение более сложной контактной задачи для штампа с неплоским дном.

§ 60. Контактная задача для кругового в плане штампа при отсутствии трения

Постановка осесимметричной контактной задачи для штампа с неплоским дном отличается от рассмотренного в предыдущем параграфе случая плоского штампа прежде всего тем, что крайние условия (59.8) принимают вид

$$\Phi|_{\beta=0} = \frac{G}{1-\nu} [\delta - \chi(r)], \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\pi} = 0, \quad (60.1)$$

где $\chi(r)$ — заданное уравнение поверхности штампа.

Кроме того, при таких условиях радиус a окружности, ограничивающей область контакта, является неизвестным и должен быть найден из условия непрерывности нормальных напряжений при переходе от области контакта к свободной поверхности тела.

Вводя для удобства обозначения*

$$b = \delta - \chi(a), \quad \psi(\alpha) = \chi(a) - \chi(r) \quad (60.2)$$

и представляя гармоническую функцию Φ в виде

$$\Phi = \frac{G}{1-\nu} \sqrt{\text{ch } \alpha + \cos \beta} \int_0^{\infty} A(\tau) \frac{\text{ch}(\pi - \beta)\tau}{\text{ch } \pi\tau} P_{-\nu/2 + i\tau}(\text{ch } \alpha) d\tau, \quad (60.3)$$

находим с помощью (60.1) и формулы (57.13)

$$A(\tau) = \sqrt{2} \left[\frac{b}{\text{ch } \pi\tau} + \tau \text{th } \pi\tau \int_0^{\infty} \psi(\sigma) \text{sh } \frac{\sigma}{2} P_{-\nu/2 + i\tau}(\text{ch } \sigma) d\sigma \right], \quad (60.4)$$

после чего общее решение задачи можно считать законченным.

Не останавливаясь на вычислении входящей в (60.4) квадратуры, которое можно выполнить для некоторых форм основания штампа (например, для параболического основания), перейдем к установлению тех двух зависимостей, из которых должны быть найдены неизвестные величины осевого перемещения штампа δ и радиуса a площадки соприкосновения. Первая из этих зависимостей есть условие статики, а вторая — требование непрерывности нормальных напряжений в окрестности точек окружности $z=0$, $r=a$, где тороидальная координата α неограниченно возрастает ($\alpha \rightarrow \infty$).

* Предполагается, что в окрестности точки $r=a$ функция $\chi(r)$ разлагается в ряд Тейлора, что обеспечивает в дальнейшем сходимости интегралов, содержащих функцию $\psi(\alpha)$.

Для применения условия статики составим прежде всего выражение для нормальных напряжений по подошве штампа

$$\sigma_x \Big|_{\beta=0} = \frac{\operatorname{ch} \alpha + 1}{a} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0} = -\frac{G \sqrt{2}}{a(1-\nu)} (\operatorname{ch} \alpha + 1)^{3/2} \times \\ \times \int_0^{\infty} \left[\frac{b}{\operatorname{ch} \pi \tau} + \tau \operatorname{th} \pi \tau \int_0^{\infty} \psi(\sigma) \operatorname{sh} \frac{\sigma}{2} P_{-\nu, \tau + i\tau}(\operatorname{ch} \sigma) d\sigma \right] \times \\ \times \tau \operatorname{th} \pi \tau P_{-\nu, \tau + i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau. \quad (60.5)$$

Учитывая формулу (59.19), соответствующую случаю плоского штампа ($\psi \equiv 0$), а также вытекающее из (57.16) соотношение

$$\tau^2 \operatorname{th} \pi \tau P_{-\nu, \tau + i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_a^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{\operatorname{ch} s - \operatorname{ch} \alpha}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial s^2} (\sin \tau s), \quad (60.6)$$

запишем условие статики (59.17) в следующем виде:

$$\frac{(1-\nu)P}{4aG} = b - \sqrt{2} \int_0^{\infty} \psi(\sigma) \operatorname{sh} \frac{\sigma}{2} d\sigma \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 \omega}{\partial s^2} ds \int_0^s \frac{\operatorname{sh} \frac{a}{2} da}{\sqrt{\operatorname{ch} s - \operatorname{ch} a}}, \quad (60.7)$$

где введено обозначение

$$\omega(s, \sigma) = \int_0^{\infty} \operatorname{th} \pi \tau P_{-\nu, \tau + i\tau}(\operatorname{ch} \sigma) \sin \tau s d\tau. \quad (60.8)$$

Вычисляя внутреннюю квадратуру по переменной α и производя интегрирование по частям, получаем

$$\frac{(1-\nu)P}{4aG} = b + \int_0^{\infty} \psi(\sigma) \operatorname{sh} \frac{\sigma}{2} d\sigma \int_0^{\infty} \frac{\partial \omega}{\partial s} \cdot \frac{ds}{\operatorname{ch} \frac{s}{2}}. \quad (60.9)$$

Подстановка сюда значения ω из (60.8) и выполнение интегрирования по переменной s дает

$$\frac{(1-\nu)P}{4aG} = b + \pi \int_0^{\infty} \psi(\sigma) \operatorname{sh} \frac{\sigma}{2} d\sigma \int_0^{\infty} \frac{\tau \operatorname{sh} \pi \tau}{\operatorname{ch}^2 \pi \tau} P_{-\nu, \tau + i\tau}(\operatorname{ch} \sigma) d\tau. \quad (60.10)$$

Наконец, вычисляя квадратуру по τ с помощью (59.13) и (59.16), получаем окончательно условие статики в таком виде:

$$\frac{P(1-\nu)}{4Ga} = b + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \psi(\alpha) \frac{\operatorname{sh} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{ch}^2 \frac{\alpha}{2}} d\alpha. \quad (60.11)$$

Для получения второй связи между δ и a обратимся к исследованию выражения (60. 5) нормальных напряжений в области контакта при $a \rightarrow \infty$, т. е. при приближении к граничной окружности $r = a$.

Пользуясь асимптотическим представлением (56. 8) функций $P_{-\nu, \nu+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha)$ при $a \rightarrow \infty$, получаем

$$\sigma_x \Big|_{\beta=0} \approx - \frac{2Ge^c}{\sqrt{\pi}(1-\nu)} \int_{-\infty}^{\infty} \left[b + \tau \operatorname{th} \pi\tau \int_0^{\infty} \psi(\sigma) \operatorname{sh} \frac{\sigma}{2} P_{-\nu, \nu+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\sigma \right] \times \\ \times \frac{\tau \Gamma(i\tau) \operatorname{sh} \pi\tau}{\operatorname{ch}^2 \pi\tau \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\tau\right)} e^{i\alpha\tau} d\tau. \quad (60. 12)$$

Можно показать, что особыми точками подынтегральной функции в верхней полуплоскости комплексной переменной $z = \tau + i\kappa$ являются только простые полюса $z_n = \frac{2n+1}{2}i$. Поэтому входящий в (60. 12) интеграл по переменной τ может быть подсчитан с помощью теоремы о вычетах и представлен в виде бесконечного ряда такого типа:

$$\sigma_x \Big|_{\beta=0} \approx - \frac{2G}{\sqrt{\pi}(1-\nu)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\frac{2n-1}{2}\alpha}. \quad (60. 13)$$

Из последнего выражения видно, что все члены ряда, кроме первого, стремятся к нулю при $\alpha \rightarrow \infty$, в то время как первый член неограниченно возрастает. Однако мы должны потребовать, чтобы при $\alpha \rightarrow \infty$ подошвенное напряжение $\sigma_x \Big|_{\beta=0}$ стремилось к нулю, так как оно отсутствует вне штампа и должно оставаться непрерывным. Таким образом, коэффициент a_0 , пропорциональный вычету в точке $z = \frac{i}{2}$, должен обращаться в нуль. Простое вычисление приводит нас к искомой зависимости

$$2b = \int_0^{\infty} \psi(\alpha) \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} d\alpha. \quad (60. 14)$$

Таким образом, решение поставленной контактной задачи выражено через одну гармоническую функцию Φ , определяемую формулами (60. 3) и (60. 4), причем входящие в решение величины δ и a должны быть найдены из соотношений (60. 11) и (60. 14).

В качестве примера найдем величины δ и a для известной задачи о плотном прилегании штампа, когда форма поверхности штампа определяется зависимостью

$$\chi(r) = cr^n, \quad n \geq 2, \quad (60. 15)$$

откуда

$$\psi(\alpha) = ca^n \left(1 - \operatorname{th}^n \frac{\alpha}{2}\right). \quad (60.16)$$

Условие статики в форме (60.14) принимает вид

$$\frac{P(1-\nu)}{4Ga} = b + \frac{c}{2} a^n \int_0^{\infty} \left(1 - \operatorname{th}^n \frac{\alpha}{2}\right) \frac{\operatorname{sh} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{ch}^2 \frac{\alpha}{2}} d\alpha. \quad (60.17)$$

После элементарных выкладок и подстановки $b = \delta - ca^n$ находим

$$\frac{P(1-\nu)}{4Ga} = \delta - 2ca^n \frac{\Gamma^2\left(1 + \frac{n}{2}\right)}{\Gamma(n+2)}. \quad (60.18)$$

Аналогичные вычисления по формуле (60.14) дают

$$\delta = cna^n 2^{n-2} \frac{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(n)}. \quad (60.19)$$

С помощью равенств (60.18) и (60.19) нетрудно получить следующее значение для величины a :

$$a = \sqrt[n+1]{\frac{P(1-\nu)(n+1)!}{cG2^n n^2 \Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}}. \quad (60.20)$$

после чего δ дается формулой (60.19).

В частном случае параболического штампа $n=2$, $c = \frac{1}{2} R$ (R — радиус кривизны в вершине параболы) легко получаем

$$a = \sqrt[3]{\frac{3(1-\nu)PR}{8G}}, \quad \delta = \frac{a^2}{R}. \quad (60.21)$$

Полученные общие формулы дают также следующие зависимости для случая конического штампа с углом раствора 2γ , когда $n=1$, $c = \operatorname{ctg} \gamma$:

$$a = \sqrt[3]{\frac{P(1-\nu)}{\pi G \operatorname{ctg} \gamma}}, \quad \delta = \frac{\pi a}{2} \operatorname{ctg} \gamma. \quad (60.22)$$

§ 61. Осесимметричная деформация неограниченного тела, ослабленного внешней круговой щелью

Рассмотрим неограниченное упругое пространство, содержащее плоскую щель, занимающую внешность некоторого круга заданного радиуса a . В тороидальных координатах уравнение поверхности такой щели будет $\beta = \pm \pi$ (рис. 36).

Предположим, что к поверхности щели приложена внешняя нагрузка, симметричная относительно плоскости щели $z=0$, а именно:

$$\sigma_x|_{\beta=\pi} = \sigma_x|_{\beta=-\pi} = \sigma(r), \quad \tau_{rx}|_{\beta=\pi} = -\tau_{rx}|_{\beta=-\pi} = \tau(r). \quad (61.1)$$

Из соображений симметрии ясно, что в среднем сечении $\beta=0$ отсутствуют как нормальные смещения, так и касательные напряжения, т. е.

$$u_x|_{\beta=0} = 0, \quad \tau_{rx}|_{\beta=0} = 0. \quad (61.2)$$

Очевидно, что поставленная задача о деформации неограниченного тела равносильна некоторой задаче о равновесии упругого полупространства $z > 0$, являющейся частным случаем рассмотренной в § 59 более общей задачи. В самом деле, краевые условия (61.1) и (61.2) равносильны условиям (59.1) и (59.2), если в последних положить $w(r) \equiv 0$ и считать, что $\tau(r) \equiv 0$ при $r < a$.

Таким образом, к рассматриваемой задаче полностью применима изложенная в § 59 методика.

В качестве конкретного приложения исследуем симметричное напряженное состояние для того случая, когда внешней нагрузкой являются две противоположно направленные сосредоточенные в точках $r=0, z = \pm b$ силы (рис. 36).

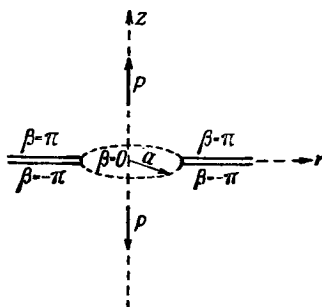


Рис. 36.

Напряженное состояние будем представлять себе состоящим из двух частей: известного первичного напряженного состояния, создаваемого данными сосредоточенными силами в неограниченном упругом теле, и дополнительного вторичного напряженного состояния, которое должно снять с разреза как нормальные, так и касательные напряжения. В дальнейшем разыскиваются функции напряжений, соответствующие вторичному напряженному состоянию.

Легко видеть, что в данном случае касательная нагрузка на поверхности щели вообще отсутствует, т. е. $\tau(r) \equiv 0$, откуда немедленно следует [см. (59.5)], что $\psi \equiv 0$. Таким образом, задача сводится к следующей смешанной краевой задаче [см. (59.6)] относительно одной неизвестной функции Φ :

$$\Delta\Phi = 0, \quad \Phi|_{\beta=0} = 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial z}|_{\beta=\pi} = \sigma(r). \quad (61.3)$$

Что касается функции $\sigma(r)$, то она без труда получается из известного решения задачи о сосредоточенной силе, приложенной к произвольной точке неограниченного упругого тела:*

$$\sigma(r) = -\frac{Pb}{4\pi(1-\nu)\rho^3} \left(1 - 2\nu + 3\frac{b^2}{\rho^2}\right), \quad \rho = \sqrt{b^2 + r^2}. \quad (61.4)$$

В соответствии с методикой, изложенной в §§ 56 и 57, положим

$$\Phi = \sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \int_0^{\infty} A(\tau) \frac{\operatorname{sh} \beta \tau}{\tau \operatorname{ch} \pi \tau} P_{-\nu/\tau + i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau. \quad (61.5)$$

При этом будут удовлетворены все условия задачи, кроме граничного условия при $\beta = \pi$; последнее после замены операции $\left. \frac{\partial}{\partial z} \right|_{\beta=\pi}$ на $-\frac{1}{h} \cdot \left. \frac{\partial}{\partial \beta} \right|_{\beta=\pi}$ ($h = \frac{a}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \rho}$) приводит к следующему разложению:

$$\sigma(r) = -\frac{1}{a} (\operatorname{ch} \alpha - 1)^{3/2} \int_0^{\infty} A(\tau) P_{-\nu/\tau + i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau, \quad (61.6)$$

из которого требуется найти неизвестную функцию $A(\tau)$.

Воспользовавшись формулой (57.10), сразу получаем

$$A(\tau) = -a\tau \operatorname{th} \pi \tau \int_0^{\infty} \frac{\sigma(r)}{(\operatorname{ch} \alpha - 1)^{3/2}} P_{-\nu/\tau + i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) \operatorname{sh} \alpha d\alpha. \quad (61.7)$$

Выражая теперь $\sigma(r)$ через переменную интегрирования α с помощью соотношения $\rho = \sqrt{b^2 + a^2 \operatorname{cth}^2 \alpha}$, получаем

$$A(\tau) = \tau \operatorname{th} \pi \tau \frac{Pc}{4\sqrt{2}\pi a(1-\nu)} [(1-2\nu)I_3(\tau) + 3c^2 I_5(\tau)], \quad (61.8)$$

где введено обозначение

$$I_n(\tau) = \int_0^{\infty} \frac{P_{-\nu/\tau + i\tau}(\operatorname{ch} \alpha)}{\left(\sqrt{c^2 + \operatorname{cth}^2 \frac{\alpha}{2}}\right)^n} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} d\alpha}{\operatorname{sh}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad c = \frac{b}{a}. \quad (61.9)$$

Для вычисления квадратур типа (61.9) воспользуемся интегральным представлением (57.14) для функции Лежандра, под-

* См., например, [67, стр. 135].

становка которого в (61.9) после перемены порядка интегрирования приводит к выражению

$$I_n(\tau) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \tau s ds \int_s^{\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{c^2 + \operatorname{ch}^2 \frac{a}{2}}\right)^n} \times \\ \times \frac{\operatorname{ch} \frac{a}{2} da}{\operatorname{sh}^2 \frac{a}{2} \sqrt{\operatorname{ch} a - \operatorname{ch} s}}. \quad (61.10)$$

Подстановкой $\operatorname{sh} \frac{a}{2} = \operatorname{sh} \frac{s}{2} \operatorname{ch} u$ (61.10) приводится к такому виду:

$$I_n(\tau) = \frac{2}{\pi(\sqrt{1+c^2})^n} \int_0^{\infty} \frac{\cos \tau s ds}{\operatorname{sh}^2 \frac{s}{2}} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch}^{n-2} u du}{(\sqrt{\operatorname{sh}^2 u + k^2})^n}, \quad (61.11)$$

где

$$k^2 = 1 + \frac{1}{(1+c^2)\operatorname{sh}^2 \frac{s}{2}}.$$

При $n=3$ внутренняя квадратура в (61.11) введением $\operatorname{sh} u$ в качестве новой переменной легко вычисляется, после чего имеем

$$I_3(\tau) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{(\sqrt{1+c^2})^3} \int_0^{\infty} \frac{\cos \tau s ds}{\operatorname{sh}^2 \frac{s}{2} + \frac{1}{1+c^2}}. \quad (61.12)$$

Вычисляя последний интеграл с помощью формулы

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \tau s ds}{\operatorname{ch} s - \cos \xi} = \frac{\pi \operatorname{sh}(\pi - \xi) \tau}{\sin \xi \operatorname{sh} \pi \tau}, \quad (61.13)$$

приходим к окончательному значению $I_3(\tau)$:

$$I_3(\tau) = 2 \sin \frac{\xi}{2} \operatorname{tg} \frac{\xi}{2} \cdot \frac{\operatorname{sh}(\pi - \xi) \tau}{\operatorname{sh} \pi \tau}. \quad (61.14)$$

причем введено обозначение

$$\sin^2 \frac{\xi}{2} = \frac{1}{1+c^2} \quad \left(c = \frac{b}{a}\right). \quad (61.15)$$

Необходимо еще найти интеграл •

$$I_5(\tau) = \frac{2}{\pi(\sqrt{1+c^2})^5} \int_0^\infty \frac{\cos \tau s ds}{\text{sh}^2 \frac{s}{2}} \int_0^\infty \frac{\text{ch}^3 u du}{(\sqrt{\text{sh}^2 u + k^2})^5}. \quad (61.16)$$

Если вычислить, как выше, внутренний интеграл, то после некоторых преобразований можно получить следующее представление $I_5(\tau)$ через $I_3(\tau)$:

$$I_5(\tau) = \frac{I_3(\tau)}{3(1+c^2)} + \frac{4}{3\pi} \frac{1}{(\sqrt{1+c^2})^5} \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 \frac{s}{2} \cos \tau s ds}{\left(\text{sh}^2 \frac{s}{2} + \frac{1}{1+c^2}\right)^3}. \quad (61.17)$$

Входящая в последнее выражение квадратура может быть выражена через интеграл (61.13), а также через интеграл, получаемый из последнего дифференцированием по параметру ξ . После выкладок находим

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 \frac{s}{2} \cos \tau s ds}{\left(\text{sh}^2 \frac{s}{2} + \frac{1}{1+c^2}\right)^2} = \\ & = \frac{\pi}{\text{sh} \pi \tau \cos^2 \frac{\xi}{2}} \left[\frac{\text{sh}(\pi - \xi) \tau}{\sin \xi} - \tau \text{ch}(\pi - \xi) \tau \right]. \end{aligned} \quad (61.18)$$

Теперь, подставляя полученные выражения $I_3(\tau)$ и $I_5(\tau)$ в формулу (61.8), получаем значение $A(\tau)$:

$$\begin{aligned} A(\tau) = & \frac{Pb\tau \sin^2 \frac{\xi}{2}}{2\sqrt{2} \pi a^2 (1-\nu) \text{ch} \pi \tau} \left[\frac{2(1-\nu) + \cos^2 \frac{\xi}{2}}{\cos \frac{\xi}{2}} \text{sh}(\pi - \xi) \tau - \right. \\ & \left. - 2\tau \sin \frac{\xi}{2} \text{ch}(\pi - \xi) \tau \right], \quad \sin^2 \frac{\xi}{2} = \frac{a^2}{a^2 + b^2}. \end{aligned} \quad (61.19)$$

подстановка которого в выражение (61.5) и дает полное решение поставленной задачи в виде некоторой квадратуры.

Путем использования интегральных представлений для функций Лежандра $P_{-\nu/2+\nu}(\text{ch} \alpha)$ указанные квадратуры преобразуются в интегралы от элементарных функций. Не занимаясь этими преобразованиями в общем случае, обратимся к вычислению нормальных напряжений в круговом сечении тела $\beta = 0$ ($z = 0, r < a$) и покажем, что эти напряжения могут быть выражены в конечном виде.

Из формул (59.3) с учетом тождества

$$\frac{\partial f}{\partial z} \equiv (1 - 2\nu) \Phi$$

получаем следующее значение для нормального напряжения на плоскости $z=0$:

$$\sigma_z|_{z=0} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0}. \quad (61.20)$$

Таким образом, имеем на основании (61.5)

$$\sigma_z|_{z=0} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{1}{a} (\operatorname{ch} \alpha + 1)^{3/2} \int_0^{\infty} \frac{A(\tau)}{\operatorname{ch} \pi \tau} P_{-1/2 + i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau. \quad (61.21)$$

Использование интегрального представления (57.15), а также формулы (61.19) после перемены порядка интегрирования дает следующее:

$$\begin{aligned} \sigma_z|_{z=0} = & \frac{Pb \sin^2 \frac{\xi}{2} (\operatorname{ch} \alpha + 1)^{3/2}}{2\pi^2 a^3 (1 - \nu)} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \operatorname{ch} s}} \left\{ \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} \frac{\sin \tau s}{\operatorname{ch} \pi \tau} \times \right. \\ & \times \left. \left[\frac{2(1 - \nu) + \cos^2 \frac{\xi}{2}}{\cos \frac{\xi}{2}} \operatorname{sh}(\pi - \xi)\tau - 2\tau \sin \frac{\xi}{2} \operatorname{ch}(\pi - \xi)\tau \right] d\tau \right\} ds. \quad (61.22) \end{aligned}$$

Интегрируя по частям и используя формулу

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(\pi - \xi)\tau}{\operatorname{ch} \pi \tau} \sin \tau s d\tau = \frac{\cos \frac{\xi}{2} \operatorname{sh} \frac{s}{2}}{\operatorname{ch} s - \cos \xi}, \quad (61.23)$$

можно после некоторых преобразований прийти к следующему выражению для искомого нормальных напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_z|_{z=0} = & \frac{Pb \sin^2 \frac{\xi}{2}}{4\pi^2 (1 - \nu) a^3} (\operatorname{ch} \alpha + 1)^{3/2} \times \\ & \times \left\{ [2(1 - \nu) + \cos \xi] J + \sin \xi \frac{\partial J}{\partial \xi} \right\}, \quad (61.24) \end{aligned}$$

содержащему однократную квадратуру от элементарных функций

$$J = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} s \operatorname{sh} \frac{s}{2} ds}{(\operatorname{ch} s - \cos \xi) (\sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \operatorname{ch} s})^3}. \quad (61.25)$$

Наконец, вычисляя интеграл (61.25) с помощью подстановки $\text{sh } \frac{s}{2} = \text{ch } \frac{a}{2} \text{sh } u$, находим окончательное выражение для распределения вторичных нормальных напряжений в круговом сечении $z=0$, $r < a$ ($\beta=0$)

$$\begin{aligned} \sigma_r|_{\beta=0} = & \frac{Pb \sin^2 \frac{\xi}{2}}{2\sqrt{2}\pi^2(1-\nu)a^3} (\text{ch } \alpha + 1)^{3/2} \left\{ \frac{2(1-\nu) + \cos \xi}{\text{ch } \alpha + \cos \xi} + \right. \\ & + \frac{3}{2} \cdot \frac{\sin^2 \xi}{(\text{ch } \alpha + \cos \xi)^2} - \sin \frac{\xi}{2} \left[\frac{3 \sin^2 \xi}{(\sqrt{\text{ch } \alpha + \cos \xi})^5} + \right. \\ & \left. \left. + 2 \frac{2(1-\nu) + 3 \cos^2 \frac{\xi}{2} - 1}{(\sqrt{\text{ch } \alpha + \cos \xi})^3} \right] \times \right. \\ & \left. \times \text{arc tg } \frac{\sqrt{\text{ch } \alpha + \cos \xi}}{\sqrt{2} \sin \frac{\xi}{2}} \right\}, \quad (61.26) \end{aligned}$$

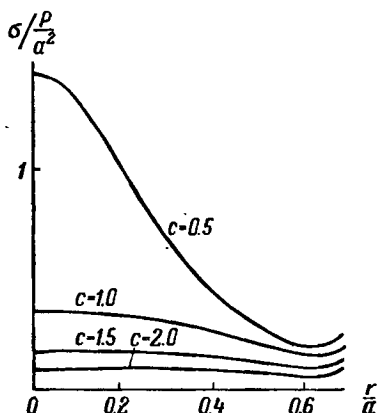


Рис. 37.

где величина ξ по-прежнему дается формулой

$$\sin \frac{\xi}{2} = \frac{a^2}{a^2 + b^2}.$$

На рис. 37 построены графики распределения полного нормального напряжения σ в сечении $\beta=0$, которое получается добавлением к правой части (61.26) первичных нормальных напряжений, создаваемых в том же сечении приложенными сосредоточенными силами и вычисляемых по формуле, аналогичной (61.4). При расчетах было принято $\nu = \frac{1}{4}$, $c = \frac{b}{a} = \frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2.

§ 62. Постановка и решение общей смешанной задачи

В § 59 настоящей главы рассматривалась осесимметричная задача для упругого полупространства, содержащего круговую линию раздела граничных условий. При этом предполагалось, что на всей граничной плоскости $z=0$ известны касательные напряжения, внутри круга заданы нормальные перемещения, а вне его — нормальные напряжения.

Перейдем теперь к решению этой же смешанной задачи общего вида, когда осевая симметрия уже не имеет места.

Граничные условия такой задачи имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \tau_{zx}|_{s=0} &= \tau_x(r, \varphi), & \tau_{yz}|_{s=0} &= \tau_y(r, \varphi), \\ u_x|_{\substack{s=0 \\ r < a}} &= w(r, \varphi), & \sigma_x|_{\substack{s=0 \\ r > a}} &= \sigma(r, \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (62.1)$$

(r, φ, z — цилиндрические координаты).

Для сведения поставленной задачи к известным краевым задачам математической физики мы применим гармонические функции Папковича—Нейбера. Общее представление смещений и напряжений через четыре таких функции ($\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$) было приведено в главе VII [см. формулы (42.1)—(42.3)]. Здесь мы выпишем только выражения перемещений и напряжений, входящих в краевые условия,

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_z &= 2(1-\nu)\Phi_3 + \Phi, \\ \sigma_x &= \frac{\partial}{\partial z} [2(1-\nu)\Phi_3 - \Phi_4] + 2\nu \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right) - \\ &\quad - \left(x \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} + y \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} + z \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial z^2} \right), \\ \tau_{zx} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} + 2(1-\nu) \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}, & \tau_{yz} &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} + 2(1-\nu) \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}, \\ \Phi &= (1-2\nu)\Phi_3 - \Phi_4 - \left(x \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + y \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + z \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (62.2)$$

Здесь введена еще одна гармоническая функция Φ_4 , связанная с функцией Φ_0 соотношением

$$\Phi_4 = \frac{\partial \Phi_0}{\partial z}.$$

Как и ранее в подобных случаях, воспользуемся наличием одной «лишней» функции и поставим дополнительное граничное условие

$$\Phi|_{s=0} = 0. \quad (62.3)$$

При этом для функций Φ_1 и Φ_2 сразу получаются отдельные краевые условия

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \Big|_{s=0} = \frac{\tau_x}{2(1-\nu)}, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \Big|_{s=0} = \frac{\tau_y}{2(1-\nu)}, \quad (62.4)$$

так что эти функции могут считаться найденными в результате решения задачи Неймана для полупространства.

Далее, для гармонической функции

$$\psi = (1-2\nu)\Phi_3 - \Phi_4 \quad (62.5)$$

имеем на основании (62.3) условие

$$\psi|_{s=0} = \frac{1}{2(1-\nu)} (x\tau_{zx} + y\tau_{yz})_{s=0}. \quad (62.6)$$

Таким образом, для определения ψ надо решить задачу Дирихле для полупространства.

Наконец, исключая Φ_4 с помощью (62.5), получаем для гармонической функции Φ_3 смешанные граничные условия

$$\left. \begin{aligned} \Phi_3 \Big|_{\substack{z=0 \\ r < a}} &= \frac{G}{1-\nu} w(r, \varphi), \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \Big|_{\substack{z=0 \\ r > a}} &= \sigma(r, \varphi) - \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{\substack{z=0 \\ r > a}} - 2\nu \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right)_{\substack{z=0 \\ r > a}} + \\ &+ \left(x \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} + y \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} \right)_{\substack{z=0 \\ r > a}}. \end{aligned} \right\} \quad (62.7)$$

Краевые задачи с граничными условиями такого типа могут быть решены с помощью обобщенного преобразования Мелера—Фока. Наконец, функция Φ_0 либо находится по формуле $\Phi_0 =$

$= \int_{\infty}^x \Phi_4 dz$, либо, если этот интеграл расходится, определяется

своими производными:

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial z} = \Phi_4, \quad \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} = \int_{\infty}^x \frac{\partial \Phi_4}{\partial x} dz,$$

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial y} = \int_{\infty}^x \frac{\partial \Phi_4}{\partial y} dz.$$

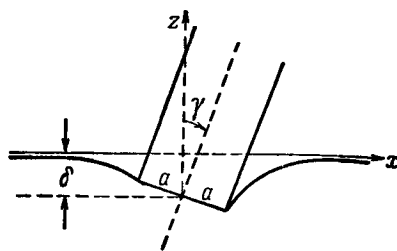


Рис. 38.

с плоским основанием (рис. 38). Так как трением пренебрегается, то на всей плоскости $z=0$ отсутствуют касательные напряжения; равны нулю также нормальные напряжения вне области контакта, а нормальное перемещение под штампом задано линейным законом $\delta + \gamma x$. Следовательно, такая задача есть частный случай рассмотренной выше общей смешанной задачи, когда

$$\tau_x = \tau_y = \sigma = 0, \quad w(r, \varphi) = \delta + \gamma r \cos \varphi.$$

Отсюда вытекает, что $\Phi_1 = \Phi_2 = \psi \equiv 0$, а краевые условия (62.7) для гармонической функции Φ_3 принимают в тороидальных координатах вид

$$\Phi_3 \Big|_{\beta=0} = \frac{G}{1-\nu} \left(\delta + \gamma a \operatorname{th} \frac{\alpha}{2} \cos \varphi \right), \quad \frac{\partial \Phi_3}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\pi} = 0. \quad (62.8)$$

Согласно (56. 10), полагаем

$$\Phi_3 = \frac{G}{1-\nu} \sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(\pi - \beta) \tau}{\operatorname{ch} \pi \tau} [\delta P_{-\nu/\tau+\tau}(\operatorname{ch} \alpha) A_0(\tau) + \gamma a P_{-\nu/\tau+\tau}(\operatorname{ch} \alpha) \cos \varphi A_1(\tau)] d\tau. \quad (62. 9)$$

Часть искомой функции Φ_3 , пропорциональная осевому перемещению штампа δ , была найдена выше (см. § 59). Поэтому займемся слагаемым, связанным с углом поворота γ и приводим при использовании граничного условия (62. 8) к равенству

$$\frac{\operatorname{th} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\operatorname{ch} \alpha + 1}} = \int_0^{\infty} A_1(\tau) P_{-\nu/\tau+\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau. \quad (62. 10)$$

Используя соотношение (57. 18), сразу находим

$$A_1(\tau) = -\frac{2\sqrt{2}}{\operatorname{ch} \pi \tau}. \quad (62. 11)$$

Для нахождения функции Φ_3 необходимо вычислить интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(\pi - \beta) \tau}{\operatorname{ch}^2 \pi \tau} P_{-\nu/\tau+\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau,$$

который с учетом (59. 13), (59. 16) и соотношения

$$P_{-\nu/\tau+\tau}(\operatorname{ch} \alpha) = \frac{d}{d\alpha} P_{-\nu/\tau+\tau}(\operatorname{ch} \alpha)$$

равен

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{d}{d\alpha} \cdot \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}{1 - \cos \beta}}}{\sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}}.$$

Таким образом, решение задачи принимает вид

$$\Phi_3 = \frac{2G\delta}{\pi(1-\nu)} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}{1 - \cos \beta}} - \frac{4\gamma a \cos \varphi}{\pi(1-\nu)} \sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \frac{d}{d\alpha} \cdot \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}{1 - \cos \beta}}}{\sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}}. \quad (62. 12)$$

Для определения связей перемещений δ и γ с приложенными силой P и моментом M составим выражение для напряжения σ_x в основании штампа

$$\begin{aligned} \sigma_x|_{\beta=0} &= \frac{\operatorname{ch} \alpha + 1}{a} \cdot \frac{\partial \Phi_3}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0} = \\ &= -\frac{2G}{\pi(1-\nu)} \left[\frac{\delta}{a} \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} + 2\gamma a \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} \cos \varphi \right]. \end{aligned} \quad (62.13)$$

Применяя условия статики

$$\int_0^{a/2\pi} \int_0^0 \sigma_x|_{\beta=0} r dr d\varphi = -P, \quad \int_0^{a/2\pi} \int_0^0 \sigma_x|_{\beta=0} x r dr d\varphi = -M, \quad (62.14)$$

легко получим известные соотношения

$$P = \frac{4G\alpha\delta}{1-\nu}, \quad M = \frac{8G\gamma a^3}{3(1-\nu)}. \quad (62.15)$$

§ 63. Общий случай равновесия упругого пространства, содержащего внешнюю круговую щель

В § 61 исследовалось напряженное состояние неограниченного упругого тела, ослабленного внешней круговой щелью (рис. 39), причем рассматривалась осесимметричная задача и предполагалось, что приложенная к берегам щели внешняя нагрузка симметрична относительно средней плоскости $z=0$.

В настоящем параграфе рассматривается соответствующий общий случай, для которого граничные условия имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x|_{\beta=\pi} &= \sigma_x|_{\beta=-\pi} = \sigma(r, \varphi), \\ \tau_{xx}|_{\beta=\pi} &= -\tau_{xx}|_{\beta=-\pi} = \tau_x(r, \varphi), \\ \tau_{yx}|_{\beta=\pi} &= -\tau_{yx}|_{\beta=-\pi} = \tau_y(r, \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (63.1)$$

Так как по соображениям симметрии в сечении $\beta=0$ имеем равенства

$$u_x|_{\beta=0} = 0, \quad \tau_{xx}|_{\beta=0} = 0, \quad \tau_{yx}|_{\beta=0} = 0, \quad (63.2)$$

то данная задача может быть сведена к частному случаю смешанной задачи для полупространства, рассмотренной в предыдущем параграфе, если принять в краевых условиях (62.1) $w \equiv 0$, а также считать функции $\tau_x(r, \varphi)$ и $\tau_y(r, \varphi)$ равными нулю в области $\beta=0$.

В качестве примера на применение изложенной в § 62 общей методики исследуем напряженное состояние в неограниченном теле, ослабленном плоской круговой щелью и подверженном

действию двух противоположно направленных сил величины P , приложенных в точках $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \pm\pi$, $\varphi = 0$ щели (рис. 39). При этом значение α_0 связано с заданным расстоянием b соотношением $b = a \operatorname{cth} \frac{\alpha_0}{2}$, вытекающим из (56. 2).

Так как внешние касательные усилия на берегах разреза $\beta = \pm\pi$ отсутствуют, то в общем решении, изложенном в предыдущем параграфе, следует положить $\Phi_1 = \Phi_2 = \psi \equiv 0$, $\Phi_4 \equiv (1 - 2\nu)\Phi_3$ и задача сводится к нахождению гармонической в полупространстве $z > 0$ функции $\Phi_3 \equiv \Phi$ при следующих краевых условиях:

$$\Phi|_{\beta=0} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{\beta=\pm\pi} = \sigma(\alpha, \varphi), \quad (63. 3)$$

где $\sigma(\alpha, \varphi)$ — заданная функция, соответствующая приложенной сосредоточенной силе.

В соответствии с изложенной в §§ 56 и 57 методикой и четностью функции Φ по координате φ положим

$$\Phi = \sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \sum_{m=0}^{\infty} \cos m\varphi \int_0^{\infty} A_m(\tau) \frac{\operatorname{sh} \beta\tau}{\tau \operatorname{ch} \pi\tau} P_{-1/2+i\tau}^{m-1}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau. \quad (63. 4)$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial z} \Big|_{\beta=\pm\pi} = -\frac{1}{h} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\pm\pi} \quad \left(h = \frac{a}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \right),$$

и применяя оставшееся второе граничное условие (63. 3), получаем

$$\sigma(\alpha, \varphi) = -\frac{(\operatorname{ch} \alpha - 1)^{1/2}}{a} \sum_{m=0}^{\infty} \cos m\varphi \int_0^{\infty} A_m(\tau) P_{-1/2+i\tau}^{m-1}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau. \quad (63. 5)$$

Неизвестная функция $A_m(\tau)$ может быть найдена путем применения формул Фурье и Мелера—Фока [см. (57. 3) и (57. 5)]

$$A_m(\tau) = \frac{2a}{\pi} (-1)^{m+1} \tau \operatorname{th} \pi\tau \int_0^{\pi} \cos m\varphi d\varphi \times \\ \times \int_0^{\infty} \frac{\sigma(\alpha, \varphi)}{(\operatorname{ch} \alpha - 1)^{1/2}} P_{-1/2+i\tau}^{m-1}(\operatorname{ch} \alpha) \operatorname{sh} \alpha d\alpha \quad (m \geq 1). \quad (63. 6)$$

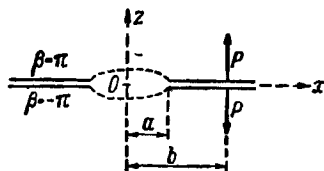


Рис. 39.

Распределяя сосредоточенную силу P по малой окрестности точки $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \pi$, $\varphi = 0$, полагая в соответствии с этим

$$\sigma(\alpha, \varphi) = \begin{cases} \frac{P(\operatorname{ch} \alpha_0 - 1)}{4\epsilon\delta ab} & \text{при } \alpha_0 - \epsilon < \alpha < \alpha_0 + \epsilon, \\ & -\delta < \varphi < +\delta, \\ 0 & \text{при остальных значениях } \alpha \text{ и } \varphi \end{cases} \quad (63.7)$$

и переходя к пределу при $\epsilon \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$, находим явное выражение для $A_m(\tau)$:

$$A_m(\tau) = (-1)^m \frac{P}{\pi b} \cdot \frac{\operatorname{sh} \alpha_0}{\sqrt{\operatorname{ch} \alpha_0 - 1}} \tau \operatorname{th} \pi \tau P_{-1/2 + i\tau}^{-m}(\operatorname{ch} \alpha_0). \quad (63.8)$$

Для случая $m = 0$ выражение (63.8) приобретает множитель $\frac{1}{2}$.

Таким образом, решение задачи дается следующим выражением:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{P}{\pi a} \sqrt{\operatorname{ch} \alpha_0 - 1} \sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \epsilon_m \cos m\varphi \times \\ &\times \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{th} \pi \tau}{\operatorname{ch} \pi \tau} \operatorname{sh} \beta \tau P_{-1/2 + i\tau}^{-m}(\operatorname{ch} \alpha_0) P_{-1/2 + i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha) d\tau, \end{aligned} \quad (63.9)$$

где

$$\epsilon_m = \begin{cases} \frac{1}{2}, & m = 0, \\ 1, & m \neq 0. \end{cases}$$

Оказывается, что функция Φ может быть выражена в конечном виде через элементарные функции. Для получения такого выражения воспользуемся прежде всего интегральным представлением (57.19) для произведения сферических функций. Подставляя (57.19) в (63.9) и переставляя порядок интегрирования и суммирования, получаем

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{2P}{\pi^2 a} \cdot \frac{\sqrt{\operatorname{ch} \alpha_0 - 1}}{\sqrt{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \alpha_0}} \sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \operatorname{th} \pi \tau \operatorname{sh} \beta \tau \cos \tau s \times \\ &\times \left[\sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m Q_{m-1/2}(\operatorname{ch} u) \cos m\varphi \right] ds d\tau, \end{aligned} \quad (63.10)$$

где введено обозначение

$$\operatorname{ch} u = \frac{\operatorname{ch} s + \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \alpha_0}{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \alpha_0}. \quad (63.11)$$

Ряд, входящий в выражение (63.10), суммируется на основании формулы (см. [51, стр. 251]):

$$\frac{1}{\sqrt{2}(\operatorname{ch} u - \cos \varphi)} = \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m Q_{m-1/2}(\operatorname{ch} u) \cos m\varphi. \quad (63.12)$$

Воспользовавшись далее соотношением*

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \tau s ds}{\sqrt{\operatorname{ch} u - \cos \varphi}} = \frac{\sqrt{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \alpha_0}}{\operatorname{sh} \pi \tau} \int_{\mu}^{\infty} \frac{\sin \tau s ds}{\sqrt{\operatorname{ch} s - \operatorname{ch} \mu}}, \quad (63.13)$$

где положено

$$\operatorname{ch} \mu = \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \alpha_0 - \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \alpha_0 \cos \varphi, \quad (63.14)$$

и значением интеграла

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \tau s \operatorname{sh} \beta \tau}{\operatorname{ch} \pi \tau} d\tau = \frac{\sin \frac{\beta}{2} \operatorname{sh} \frac{s}{2}}{\operatorname{ch} s + \cos \beta}, \quad |\beta| < \pi, \quad (63.15)$$

получаем функцию Φ в виде однократной квадратуры

$$\Phi = \frac{P \sqrt{\operatorname{ch} \alpha_0 - 1}}{\pi^2 \alpha \sqrt{2}} \sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \sin \frac{\beta}{2} \int_{\mu}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{s}{2} ds}{(\operatorname{ch} s + \cos \beta) \sqrt{\operatorname{ch} s - \operatorname{ch} \mu}}. \quad (63.16)$$

Подстановкой $\operatorname{ch} \frac{s}{2} = \operatorname{ch} \frac{\mu}{2} \operatorname{ch} u$ последний интеграл вычисляется и приводит к следующему замкнутому выражению для Φ :

$$\Phi = \frac{P \sqrt{\operatorname{ch} \alpha_0 - 1}}{\pi^2 \alpha \sqrt{2}} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}{\operatorname{ch} \mu + \cos \beta}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{2} \sin \frac{\beta}{2}}{\sqrt{\operatorname{ch} \mu + \cos \beta}}. \quad (63.17)$$

Замечая еще, что дробь $\frac{\operatorname{ch} \mu + \cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}$ может быть выражена через расстояние ρ (рис. 39) от точки приложения силы до произвольной точки тела

$$\frac{\operatorname{ch} \mu + \cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} = (\operatorname{ch} \alpha_0 - 1) \frac{\rho^2}{2a^2}, \quad (63.18)$$

* (63.13) вытекает из (63.11) и интегральных представлений (57.15) и (57.16).

мы можем после некоторых выкладок представить (63. 17) в следующем окончательном виде:

$$\Phi = \frac{P}{\pi^2 \rho} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{2} \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1} \sin \frac{\beta}{2}}{\frac{\rho}{a} \sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}}, \quad (63. 19)$$

чем и дается полное решение поставленной задачи в замкнутом виде.

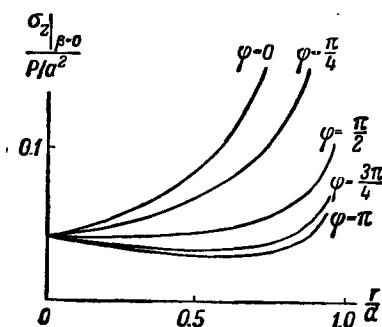


Рис. 40.

Подсчитаем еще нормальные напряжения в наиболее опасном сечении $\beta=0$. Из (62. 2) находим

$$\sigma_z|_{\beta=0} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}|_{\beta=0} = \frac{P}{\pi^2 a^2} \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 1} \frac{(\operatorname{ch} \alpha_0 - 1) \operatorname{ch}^3 \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \alpha_0 + 1 - \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \alpha_0 \cos \varphi}. \quad (63. 20)$$

На рис. 40 построены графики распределения напряжений для некоторых значений угла φ , причем принято $b=2a$.

§ 64. Смешанная задача для случая задания внутри круга нормального напряжения, а вне его — нормального перемещения

Во всем предыдущем изложении данной главы рассматривались смешанные задачи для упругого полупространства при задании на всей его граничной плоскости касательных напряжений, причем вне некоторого круга было известно нормальное напряжение, а внутри него — нормальное смещение.

Нетрудно видеть, что изложенная выше общая методика (см. §§ 59 и 62) с несущественными видоизменениями сохраняется и для того случая, когда нормальное напряжение задается внутри круга, а нормальное перемещение — вне его.

В самом деле, граничные условия рассматриваемой задачи в осесимметричном случае имеют вид

$$\tau_{rz}|_{z=0} = \tau(r), \quad (64.1)$$

$$\sigma_x|_{z=0} = \sigma(r), \quad u_x|_{z=\pi} = w(r). \quad (64.2)$$

Используя представление (59.3) упругих смещений и напряжений через две гармонические функции Папковича—Нейбера (f и Φ), сразу находим, как и в § 59, функцию

$$\psi = (1 - 2\nu)\Phi - \frac{\partial f}{\partial z}$$

решением задачи Дирихле с граничным условием (59.5); затем исключаем f и приходим к краевым условиям смешанного типа для функции Φ

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0} &= \sigma(r) - \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{z=0}, \\ \Phi \Big|_{z=\pi} &= \frac{G}{1-\nu} w(r) - \\ & - \frac{1}{2(1-\nu)} \psi \Big|_{z=\pi}. \end{aligned} \right\} \quad (64.3)$$

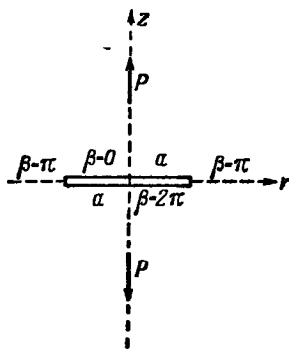


Рис. 41.

Таким образом, гармоническая функция Φ может быть найдена путем разложения в интеграл Мелера—Фока по функциям Лежандра $P_{-\nu/2+i\pi}(\text{ch } a)$.

Аналогичным образом может быть решена и соответствующая общая задача, определяемая такими граничными условиями:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{rz}|_{z=0} &= \tau_x(r, \varphi), \quad \tau_{\theta r}|_{z=0} = \tau_y(r, \varphi), \\ \sigma_x|_{z=0} &= \sigma(r, \varphi), \quad u_x|_{z=\pi} = w(r, \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (64.4)$$

Применяя формулы (62.9) и ставя дополнительное условие (62.3), находим, как и в § 62, для Φ_1 и Φ_2 краевые условия (62.4). Считая эти функции найденными, определяя гармоническую функцию

$$\psi = (1 - 2\nu)\Phi_3 - \Phi_4$$

в результате решения задачи Дирихле [см. (62.6)] и исключая Φ_4 , приходим к следующим смешанным краевым условиям для гармонической функции Φ_3 :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \Big|_{z=0} &= \sigma - \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{z=0} - 2\nu \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right) \Big|_{z=0} + \\ & + \left(x \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} + y \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} \right) \Big|_{z=0}, \\ \Phi_3 \Big|_{z=\pi} &= \frac{G}{1-\nu} w. \end{aligned} \right\} \quad (64.5)$$

Согласно изложенному в §§ 56 и 57; функция Φ_3 находится с помощью обобщенного интегрального преобразования Мелера—Фока.

Примером рассмотренных смешанных задач теории упругости является симметричная относительно плоскости $z=0$ деформация неограниченного тела, ослабленного внутренней круговой щелью, берега которой являются координатными поверхностями $\beta=0$ и $\beta=2\pi$ (рис. 41). В самом деле, при этих условиях из соображений симметрии в области $\beta=\pi$ отсутствуют касательные напряжения и нормальное перемещение, в то время как на берегах разреза $\beta=0$ и $\beta=2\pi$ заданы внешние усилия

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x|_{\beta=0} &= \sigma_x|_{\beta=2\pi} = \sigma(r, \varphi), \\ \tau_{xz}|_{\beta=0} &= -\tau_{xz}|_{\beta=2\pi} = \tau_x(r, \varphi), \quad \tau_{yz}|_{\beta=0} = -\tau_{yz}|_{\beta=2\pi} = \tau_y(r, \varphi). \end{aligned} \right\} (64.6)$$

Таким образом, рассматривая верхнее полупространство, мы приходим к граничным условиям, являющимся частным случаем условий (64.4).

§ 65. Растяжение упругого тела, ослабленного плоской круглой щелью

В этом параграфе дается решение осесимметричной задачи о растяжении сосредоточенными в точках $r=0$, $z=\pm b$ силами упругого тела, содержащего круговую щель (рис. 41).

Как и в § 61, напряженно-деформированное состояние разбивается на сумму первичного состояния, соответствующего действию данных сил в сплошном теле, и вторичного состояния, уничтожающего напряжения на поверхности щели. Будем разysкивать далее функции Папковича—Нейбера f и Φ , соответствующие вторичному состоянию.

Применяя формулы (64.1)—(64.5), в которых следует, очевидно, положить $\tau(r) \equiv 0$, $\psi \equiv 0$ и $w(r) \equiv 0$, получаем для гармонической функции Φ следующие краевые условия:

$$\Phi|_{\beta=\pi} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z}|_{\beta=0} = \sigma(r), \quad (65.1)$$

где функция $\sigma(r)$ дается формулой (61.4)

$$\sigma(r) = -\frac{Pb}{4\pi(1-\nu)} \cdot \frac{1-2\nu + \frac{3b^2}{b^2+r^2}}{(\sqrt{b^2+r^2})^3}. \quad (65.2)$$

Полагая

$$\Phi(\alpha, \beta) = \sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \int_0^{\infty} A(\tau) \frac{\operatorname{sh}(\pi - \beta)\tau}{\tau \operatorname{ch} \pi\tau} P_{-\frac{1}{2} + i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau, \quad (65.3)$$

мы сразу удовлетворяем уравнению Лапласа и граничному условию $\Phi|_{\beta=\pi} = 0$.

Величина $A(\tau)$ должна быть найдена из второго краевого условия, которое приводит к соотношению

$$\sigma(r) = -\frac{1}{a} (\operatorname{ch} \alpha + 1)^{1/2} \int_0^{\infty} A(\tau) P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau. \quad (65.4)$$

Согласно формуле Мелера—Фока (57.10) получаем

$$A(\tau) = \tau \operatorname{th} \pi \tau \frac{Pc}{4\pi a \sqrt{2} (1-\nu)} [(1-2\nu) I_3 + 3c^2 I_5], \quad c = \frac{b}{a}, \quad (65.5)$$

где введено обозначение

$$I_n(\tau) = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{ch}^2 \frac{\alpha}{2}} P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) \frac{d\alpha}{(c^2 + \operatorname{th}^2 \frac{\alpha}{2})^{n/2}}. \quad (65.6)$$

Использование интегрального представления (57.14) дает

$$I_n(\tau) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \tau s ds \int_0^{\infty} \frac{1}{(c^2 + \operatorname{th}^2 \frac{\alpha}{2})^{n/2}} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} d\alpha}{\operatorname{ch}^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{\operatorname{ch} \alpha - \operatorname{ch} s}}. \quad (65.7)$$

Сделав подстановку $\operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{ch} \frac{s}{2} \operatorname{ch} u$, получаем

$$I_n(\tau) = \frac{2}{\pi (c^2 + 1)^{n/2}} \int_0^{\infty} \frac{\cos \tau s ds}{\operatorname{ch}^2 \frac{s}{2}} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch}^{n-2} u du}{(\operatorname{sh}^2 u + k^2)^{n/2}}, \quad (65.8)$$

$$k^2 = 1 - \frac{1}{(1 + c^2) \operatorname{ch}^2 \frac{s}{2}}.$$

После некоторых выкладок находим

$$I_3(\tau) = 2 \cos \frac{\eta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\eta}{2} \frac{\operatorname{sh}(\pi - \eta)\tau}{\operatorname{sh} \pi \tau}, \quad \cos^2 \frac{\eta}{2} = \frac{1}{1 + c^2},$$

$$I_5(\tau) = \frac{I_3(\tau)}{3(1 + c^2)} + \frac{4}{3(1 + c^2)^{3/2} \operatorname{ch} \pi \tau \sin^2 \frac{\eta}{2}} \times$$

$$\times \left[\frac{\operatorname{sh}(\pi - \eta)\tau}{\operatorname{sh} \pi \tau} + \tau \operatorname{ch}(\pi - \eta)\tau \right], \quad (65.9)$$

после чего получается следующая формула для искомой величины $A(\tau)$:

$$A(\tau) = \frac{Pb\tau}{2\sqrt{2}\pi a^2(1-\nu)} \cdot \frac{\cos^2 \frac{\eta}{2}}{\operatorname{ch} \pi\tau} \times \\ \times \left[\frac{2(1-\nu) + \sin^2 \frac{\eta}{2}}{\sin \frac{\eta}{2}} \operatorname{sh}(\pi - \eta)\tau + 2\tau \cos \frac{\eta}{2} \operatorname{ch}(\pi - \eta)\tau \right]. \quad (65.10)$$

В заключение укажем, что нормальное напряжение в средней плоскости $\beta = \pi$, выражающееся формулой

$$\sigma_s|_{\beta=\pi} = \frac{(\operatorname{ch} \alpha - 1)^{3/2}}{a} \int_0^{\infty} \frac{A(\tau)}{\operatorname{ch} \pi\tau} P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau, \quad (65.11)$$

может быть представлено в таком виде:

$$\sigma_s|_{\beta=\pi} = \frac{Pb \cos^2 \frac{\eta}{2}}{4a^2\pi^2(1-\nu)} (\operatorname{ch} \alpha - 1)^{3/2} \times \\ \times \left[2 \operatorname{tg} \frac{\eta}{2} \left(1 - \nu + \sin^2 \frac{\eta}{2} \right) J - 2 \cos^2 \frac{\eta}{2} \cdot \frac{\partial J}{\partial \eta} \right], \quad (65.12)$$

где квадратура

$$J = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} s \operatorname{sh} \frac{s}{2}}{\operatorname{ch} s - \cos \eta} \cdot \frac{ds}{(\operatorname{ch} \alpha + \operatorname{ch} s)^{3/2}} \quad (65.13)$$

выражается через элементарные функции [см. (61.25)].

Глава XI. РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА С КРУГОВОЙ ЛИНИЕЙ РАЗДЕЛА КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ, КОГДА НА ВСЕЙ ГРАНИЦЕ ИЗВЕСТНО НОРМАЛЬНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ

§ 66. Случай задания внутри круга радиального смещения, а вне его — касательного напряжения

Настоящая глава посвящена исследованию таких смешанных задач теории упругости для полупространства $z > 0$, когда на всей граничной плоскости ($z = 0$) задаются значения нормального напряжения σ_z . Кроме этого, окружность $z = 0$, $r = a$ является линией раздела граничных условий, так как внутри или вне ее будут считаться известными касательные перемещения или касательные напряжения соответственно.

В данном параграфе будет рассмотрена осесимметричная задача подобного типа, когда в области $z=0, r < a$ ($\beta=0$) задано радиальное перемещение, а в области $z=0, r > a$ ($\beta=\pi$) — касательное напряжение.

Краевые условия в таком случае будут следующие:

$$\sigma_s|_{\beta=0} = \sigma_0(r), \quad \sigma_s|_{\beta=\pi} = \sigma_\pi(r), \quad (66.1)$$

$$u_r|_{\beta=0} = u(r), \quad \tau_{rs}|_{\beta=\pi} = \sigma_\pi = \tau(r). \quad (66.2)$$

Для решения задачи воспользуемся формулами (59.3), выражающими перемещения и напряжения через две гармонические функции: f и Φ .

Выпишем здесь необходимые нам выражения для u_r , τ_{rs} и σ_s :

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_r &= -\frac{\partial f}{\partial r} - z \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \\ \tau_{rs} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[(1-2\nu)\Phi - \frac{\partial f}{\partial z} - z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right], \\ \sigma_s &= 2(1-\nu) \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - z \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}. \end{aligned} \right\} \quad (66.3)$$

Применяя к граничному условию $-\frac{\partial f}{\partial r}|_{\beta=0} = 2Gu(r)$ дифференциальную операцию $\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} r$ и учитывая, что $\Delta f = 0$, находим

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \Big|_{\beta=0} = 2G \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (ru) = \chi(r). \quad (66.4)$$

Заметим, что равенство (66.4) эквивалентно исходному граничному условию, так как возникающая при обратном процессе гармоническая функция координаты r должна быть ограничена при $r \rightarrow 0$ и, следовательно, есть несущественная постоянная.

Теперь из (66.1) сразу имеем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{\beta=0} = \frac{1}{2(1-\nu)} [\sigma_0(r) + \chi(r)] = F(r). \quad (66.5)$$

Таким образом, для гармонической функции

$$\psi = (1-2\nu)\Phi - \frac{\partial f}{\partial z}$$

имеем из (66.2) смешанные граничные условия

$$\psi|_{\beta=\pi} = \int_0^r \tau(r) dr, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{\beta=0} = (1-2\nu)F(r) - \chi(r). \quad (66.6)$$

Считая, что величина ψ найдена с помощью преобразования Мелера—Фока, определим теперь функцию Φ в результате решения задачи Неймана с краевыми условиями

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{\beta=0} = F.(r), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{\beta=\pi} = \sigma_z(r) - \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{\beta=\pi}. \quad (66. 7)$$

Для полного решения поставленной задачи остается только по известной величине $\frac{\partial f}{\partial z}$ найти значение входящей в основные зависимости производной $\frac{\partial f}{\partial r}$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \int_{\infty}^r \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial r} dz. \quad (66. 8)$$

Одним из конкретных приложений полученных результатов является расчет осесимметричной деформации неограниченного упругого тела, ослабленного внешней круговой щелью и нагруженного усилиями, антисимметричными относительно плоскости щели, когда

$$\sigma_z \Big|_{\beta=\pi} = -\sigma_z \Big|_{\beta=-\pi} = \sigma_z(r), \quad \tau_{rz} \Big|_{\beta=\pi} = \tau_{rz} \Big|_{\beta=-\pi} = \tau(r). \quad (66. 9)$$

Очевидно, что в срединном сечении $\beta=0$ равно нулю радиальное перемещение и нормальное напряжение:

$$u_r \Big|_{\beta=0} = 0, \quad \sigma_z \Big|_{\beta=0} = 0. \quad (66. 10)$$

Легко видеть, что рассматриваемая задача может быть поставлена как краевая задача теории упругости для верхнего полупространства, причем граничные условия являются частным случаем условий (66. 1), (66. 2), когда $\sigma_0(r) = u(r) \equiv 0$.

Фактические выкладки проводятся в следующем параграфе на конкретном примере.

Отметим еще следующее любопытное обстоятельство: если к берегам щели приложены только нормальные напряжения, т. е. $\tau(r) \equiv 0$, то рассматриваемая задача просто эквивалентна элементарной задаче о равновесии полупространства $z > 0$ при задании на его границе нормальных напряжений $\sigma_z(r)$. В самом деле, из (66. 6) находим, что $\psi \equiv 0$, а тогда из (66. 3) следует, что касательные напряжения отсутствуют на всей плоскости $z=0$.

Высказанное утверждение, доказанное также и для соответствующей плоской задачи (§§ 15 и 32), перестает, однако, быть справедливым в общем случае пространственного равновесия (по этому поводу см. статью [75], а также §§ 69, 71 и 85).

§ 67. Приложение к задаче о равновесии упругого тела, содержащего внешнюю круговую щель

Применим изложенную в предыдущем параграфе методику к решению осесимметричной задачи для безграничного тела, ослабленного внешней круговой щелью и нагруженного в точках $r=0$, $z=\pm b$ одинаково направленными силами (рис. 42).

Как всегда, разложим напряженное состояние на две части: заданное первичное состояние, создаваемое приложенными сосредоточенными силами в неограниченном упругом теле, и вторичное напряженное состояние, которое снимает с берегов разреза нормальные и касательные усилия. Будем в дальнейшем находить функции напряжений для вторичного напряженного состояния.

Так как в рассматриваемой задаче первичное напряженное состояние вообще не дает в плоскости $z=0$ нормальных напряжений, то $\sigma_r(r) \equiv 0$. Поскольку, кроме того, в формулах (66. 5)—(66. 7) следует положить $\chi(r) = F(r) \equiv 0$, то имеем связь

$$\psi(r, z) \equiv -\Phi(r, z). \quad (67. 1)$$

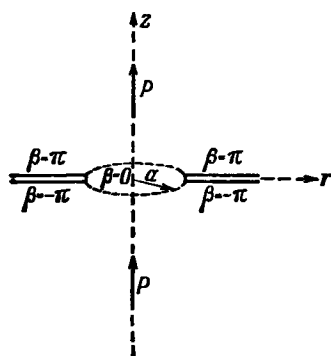


Рис. 42.

Находя касательные напряжения, создаваемые первичной нагрузкой в плоскости $z=0$ (см., например, [67]),

$$\tau_{rz}^{(1)}|_{z=0} = -\frac{1-2\nu}{1-\nu} \cdot \frac{P}{4\pi} \cdot \frac{r}{(r^2 + b^2)^{3/2}} \quad (67. 2)$$

и вычисляя входящий в (66. 6) интеграл, получаем следующие граничные условия для гармонической функции ψ :

$$\psi|_{\beta=\pi} = \frac{D}{\sqrt{r^2 + b^2}}|_{\beta=\pi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \beta}|_{\beta=0} = 0, \quad D = \frac{2\nu-1}{1-\nu} \cdot \frac{P}{4\pi}. \quad (67. 3)$$

Будем искать функцию ψ в виде интегрального разложения Мелера—Фока

$$\psi = D \sqrt{\text{ch } \alpha + \cos \beta} \int_0^{\infty} A(\tau) \frac{\text{ch } \beta \tau}{\text{ch } \pi \tau} P_{-\frac{1}{2} + i\tau}(\text{ch } \alpha) d\tau, \quad (67. 4)$$

удовлетворяющего второму краевому условию (67.3). Первое из этих условий дает соотношение $(r|_{\beta=\alpha} = a \operatorname{cth} \frac{\alpha}{2})$

$$\frac{1}{\sqrt{b^2 + a^2 \operatorname{cth}^2 \frac{\alpha}{2}}} = \sqrt{\operatorname{ch} \alpha - 1} \int_0^{\infty} A(\tau) P_{-\frac{1}{2} + i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau, \quad (67.5)$$

из которого следует найти неизвестную величину $A(\tau)$.

Поскольку функция $\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} \alpha - 1} \sqrt{b^2 + a^2 \operatorname{cth}^2 \frac{\alpha}{2}}}$ не удовлетворяет

условиям применимости формулы Мелера—Фока (57.10), представим ее в виде суммы двух слагаемых:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} \alpha - 1} \sqrt{b^2 + a^2 \operatorname{cth}^2 \frac{\alpha}{2}}} = \\ & = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} \alpha - 1}} \left(\frac{1}{\sqrt{b^2 + a^2 \operatorname{cth}^2 \frac{\alpha}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{b^2 + a^2}} \right) + \\ & + \frac{1}{\sqrt{b^2 + a^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} \alpha - 1}}, \end{aligned} \quad (67.6)$$

к первому из которых можно применить формулу (57.10). Что касается второго слагаемого, то, согласно (57.12), оно представимо в виде следующего разложения по функциям Лежандра $P_{-\frac{1}{2} + i\tau}(\operatorname{ch} \alpha)$:

$$\frac{1}{\sqrt{b^2 + a^2} \sqrt{\operatorname{ch} \alpha - 1}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{b^2 + a^2}} \int_0^{\infty} P_{-\frac{1}{2} + i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau. \quad (67.7)$$

Таким образом, для нахождения $A(\tau)$ необходимо вычислить интеграл

$$J = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{b^2 + a^2 \operatorname{cth}^2 \frac{\alpha}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{b^2 + a^2}} \right) \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} P_{-\frac{1}{2} + i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\alpha. \quad (67.8)$$

Воспользовавшись интегральным представлением (57.14) и меняя порядок интегрирования, получаем

$$J = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \tau s ds \times \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{b^2 + a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{a}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{b^2 + a^2}} \right) \frac{\operatorname{ch} \frac{a}{2} da}{\sqrt{\operatorname{ch} a - \operatorname{ch} s}}. \quad (67.9)$$

Подстановка $\operatorname{sh} \frac{a}{2} = \operatorname{sh} \frac{s}{2} \operatorname{ch} u$ позволяет вычислить внутреннюю квадратуру и дает

$$J = -\frac{2}{\pi \sqrt{b^2 + a^2}} \int_0^{\infty} \ln \sqrt{1 + \frac{a^2}{(b^2 + a^2) \operatorname{sh}^2 \frac{s}{2}}} \cos \tau s ds. \quad (67.10)$$

Интегрирование по частям и использование формулы

$$\left. \int_0^{\infty} \frac{\sin \tau s}{\operatorname{ch} s + \cos \mu} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{s}{2}}{\operatorname{sh} \frac{s}{2}} ds = \frac{\pi}{2 \cos^2 \frac{\mu}{2}} \cdot \frac{\operatorname{ch} \pi \tau - \operatorname{ch} \mu \tau}{\operatorname{sh} \pi \tau}, \right\} \quad (67.11)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\mu}{2} = \frac{b}{a}$$

позволяет представить искомый интеграл J в явном виде:

$$J = \frac{\operatorname{ch} \mu \tau - \operatorname{ch} \pi \tau}{\sqrt{b^2 + a^2} \operatorname{sh} \pi \tau}. \quad (67.12)$$

Так как по формуле (57.10)

$$A(\tau) - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{b^2 + a^2}} = \sqrt{2} \tau \operatorname{th} \pi \tau J,$$

то окончательно имеем

$$A(\tau) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{b^2 + a^2}} \cdot \frac{\operatorname{ch} \mu \tau}{\operatorname{ch} \pi \tau}. \quad (67.13)$$

Таким образом, решение поставленной задачи выражается через функцию ψ , определяемую квадратурой

$$\psi = D \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{b^2 + a^2}} \sqrt{\operatorname{ch} a + \cos \beta} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \mu \tau \operatorname{ch} \beta \tau}{\operatorname{ch}^2 \pi \tau} P_{-\frac{1}{2} + i\tau}(\operatorname{ch} a) d\tau. \quad (67.14)$$

Представляя произведение $2 \operatorname{ch} \mu \tau \operatorname{ch} \beta \tau$ в виде суммы $\operatorname{ch}(\mu + \beta)\tau + \operatorname{ch}(\mu - \beta)\tau$ и пользуясь значением интеграла [см. (59.13)—(59.16)]

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \beta \tau}{\operatorname{ch}^2 \pi \tau} P_{-\frac{1}{2} + i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}{1 + \cos \beta}}}{\sqrt{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} f(\beta), \quad (67.15)$$

можно представить ψ через элементарные функции

$$\psi = \frac{D}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}}{\sqrt{b^2 + a^2}} \left[\frac{\pi}{\sqrt{\operatorname{ch} \alpha - \cos(\mu + \beta)}} + f(\beta - \mu) - f(\beta + \mu) \right]. \quad (67.16)$$

В заключение данного параграфа найдем распределение напряжений в сечении $\beta = 0$, пользуясь формулой

$$\tau_{rz}|_{\beta=0} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \Big|_{\beta=0}. \quad (67.17)$$

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial r} \Big|_{\beta=0} = \frac{\operatorname{ch} \alpha + 1}{a} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \Big|_{\beta=0},$$

то после некоторых выкладок получаем

$$\tau_{rz}|_{\beta=0} = -\frac{P}{4\pi a^2} \cdot \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{\alpha}{2}}{\left(\sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{b^2}{a^2} \operatorname{ch}^2 \frac{\alpha}{2}} \right)^3} \quad (67.18)$$

или, так как при $\beta = 0$ $r = a \operatorname{th} \frac{\alpha}{2}$,

$$\tau_{rz}|_{\beta=0} = -\frac{P}{4\pi} \cdot \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \cdot \frac{r \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)}{\left(\sqrt{r^2 + b^2} \right)^3}. \quad (67.19)$$

Интересно отметить, что в исследованном случае касательные напряжения на ребре щели ($r \rightarrow a - 0$) обращаются в нуль, а не возрастают неограниченно, как во многих сходных задачах.

§ 68. Общая задача при задании внутри круга касательных перемещений, а вне его — касательных напряжений

Рассмотрим упругое равновесие полупространства, граница которого $z = 0$ содержит круговую линию раздела ($r = a$) крайевых условий: при $r < a$ заданы перемещения u и v (в направлении осей x и y), а при $r > a$ известны касательные напряже-

ния τ_{xz} и τ_{yz} . При этом нормальное напряжение σ_z по-прежнему задается на всей плоскости $z=0$.

Краевые условия поставленной задачи таковы:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x|_{\beta=0} &= \sigma_0(\alpha, \varphi), & u|_{\beta=0} &= u_0(\alpha, \varphi), & v|_{\beta=0} &= v_0(\alpha, \varphi), \\ \sigma_x|_{\beta=\pi} &= \sigma_\pi(\alpha, \varphi), & \tau_{xz}|_{\beta=0} &= \tau_x(\alpha, \varphi), & \tau_{yz}|_{\beta=\pi} &= \tau_y(\alpha, \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (68.1)$$

Для сведения задачи к краевым задачам теории потенциала воспользуемся, как всегда, представлением (42.1)—(42.3) перемещений и напряжений через четыре гармонические функции: $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$. Приведем здесь формулы смещений и напряжений, входящих в граничные условия (68.1):

$$\left. \begin{aligned} 2Gu &= -\frac{\partial F}{\partial x} + 4(1-\nu)\Phi_1, & 2Gv &= -\frac{\partial F}{\partial y} + 4(1-\nu)\Phi_2, \\ \tau_{xz} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} + 2(1-\nu)\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}, & \tau_{yz} &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} + 2(1-\nu)\frac{\partial \Phi_2}{\partial z}, \\ \sigma_x &= \frac{\partial}{\partial z} [2(1-\nu)\Phi_3 - \Phi_4] + 2\nu \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right) - \\ & \quad - \left(x \frac{\partial \Phi_1}{\partial z^2} + y \frac{\partial \Phi_2}{\partial z^2} + z \frac{\partial \Phi_3}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (68.2)$$

где введены обозначения

$$\left. \begin{aligned} F &= \Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2 + z\Phi_3, & \Phi_4 &= \frac{\partial \Phi_0}{\partial z}, \\ \Phi &= (1-2\nu)\Phi_3 - \Phi_4 - \left(x \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + y \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + z \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (68.3)$$

Пользуясь произвольностью одной из входящих в это решение гармонических функций, поставим наряду с (68.1) следующие два дополнительных краевых условия:

$$F|_{\beta=0} = \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} F_m r^m e^{im\varphi}, \quad \Phi|_{\beta=\pi} = 0, \quad (68.4)$$

где в правой части первого равенства стоит плоская гармоническая функция. Как будет видно из дальнейшего, с помощью выбора не определенных пока коэффициентов F_m можно будет удовлетворить всем граничным условиям рассматриваемой задачи.

Исходя из условий (68.1)—(68.4), можно сразу получить раздельные краевые условия смешанного типа для гармонических функций Φ_1 и Φ_2 :

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1|_{\beta=0} &= \frac{1}{4(1-\nu)} \left[2Gu_0 + \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{\beta=0} \right], & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \Big|_{\beta=\pi} &= \frac{\tau_x}{2(1-\nu)}, \\ \Phi_2|_{\beta=0} &= \frac{1}{4(1-\nu)} \left[2Gv_0 + \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{\beta=0} \right], & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \Big|_{\beta=\pi} &= \frac{\tau_y}{2(1-\nu)}. \end{aligned} \right\} \quad (68.5)$$

Считая эти функции известными и вводя гармоническую функцию

$$\omega = 2(1 - \nu)\Phi_3 - \Phi_4, \quad (68.6)$$

будем иметь для нее граничные условия второго рода

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial z} \Big|_{\beta=0} &= \sigma_0 - \frac{\nu G}{1-\nu} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) - \\ &- \frac{G}{2(1-\nu)} \left[x \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + y \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right]_{\beta=0}, \\ \frac{\partial \omega}{\partial z} \Big|_{\beta=\pi} &= \sigma_\pi - 2\nu \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right)_{\beta=\pi} + \left(x \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} + y \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} \right)_{\beta=\pi}, \end{aligned} \right\} \quad (68.7)$$

так что ω находится решением задачи Неймана для полупространства.

Для гармонической функции Φ_4 имеем из второго дополнительного условия (68.4)

$$\Phi_4 \Big|_{\beta=\pi} = (1 - 2\nu)\omega \Big|_{\beta=\pi} - (x\tau_{xx} + y\tau_{yy})_{\beta=\pi}. \quad (68.8)$$

Второе краевое условие для этой функции может быть получено из первого дополнительного соотношения (68.4), записанного в таком виде:

$$\begin{aligned} \Phi_0 \Big|_{\beta=0} &= \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} F_m \left[1 - \frac{m}{4(1-\nu)} \right] r^m e^{im\varphi} - \\ &- \frac{G}{2(1-\nu)} (xu + yv) \Big|_{\beta=0}. \end{aligned} \quad (68.9)$$

В самом деле, после применения к (68.9) операции $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ получаем

$$\frac{\partial \Phi_4}{\partial z} \Big|_{\beta=0} = \frac{G}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (xu + yv) \Big|_{\beta=0}, \quad (68.10)$$

так что на основании (68.8) и (68.10) можно найти Φ_4 с помощью обобщенного интегрального преобразования Мелера—Фока.

Заметим теперь, что если определить функцию Φ_0 равенством*

$$\Phi_0 = \int_{\infty}^z \Phi_4 dz, \quad (68.11)$$

* Если интеграл (68.11) расходится, то находим производные

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial z} = \Phi_4, \quad \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} = \int_{\infty}^z \frac{\partial \Phi_4}{\partial x} dz, \quad \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} = \int_{\infty}^z \frac{\partial \Phi_4}{\partial y} dz,$$

причем сходимость последних интегралов следует из условий на бесконечности. Напомним, что функция Φ_0 вообще определена с точностью до постоянного слагаемого.

то ее значение при $\beta = 0$ будет, вообще говоря, отличаться от правой части условия (68. 9) на некоторую гармоническую функцию переменных x и y . Покажем, что удовлетворить условию (68. 9) можно путем соответствующего выбора входящих в решение коэффициентов F_m .

Обозначим через $\Phi_1^{(0)}$, $\Phi_2^{(0)}$, $\omega^{(0)}$, $\Phi_4^{(0)}$ те части искомым функций, которые содержат коэффициенты F_m .

Тогда для функций $\Phi_1^{(0)}$ и $\Phi_2^{(0)}$ получаем граничные условия

$$\left. \begin{aligned} 4(1-\nu)\Phi_1^{(0)}|_{\beta=0} &= \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} m F_m r^{m-1} e^{i(m-1)\varphi}, & \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial z} \Big|_{\beta=\pi} &= 0, \\ 4(1-\nu)\Phi_2^{(0)}|_{\beta=0} &= \operatorname{Re} i \sum_{m=1}^{\infty} m F_m r^{m-1} e^{i(m-1)\varphi}, & \frac{\partial \Phi_2^{(0)}}{\partial z} \Big|_{\beta=\pi} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (68. 12)$$

Вместо того чтобы разыскивать эти функции с помощью преобразования Мелера—Фока, воспользуемся формулами (58. 5) и (58. 9) главы IX, из которых сразу вытекает, что

$$\left. \begin{aligned} 4(1-\nu)\Phi_1^{(0)} &= \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} a_m F_m e^{i(m-1)\varphi} J_c^{(m-1)}(\alpha, \beta), \\ 4(1-\nu)\Phi_2^{(0)} &= \operatorname{Re} i \sum_{m=1}^{\infty} a_m F_m e^{i(m-1)\varphi} J_c^{(m-1)}(\alpha, \beta), \\ J_c^{(m)}(\alpha, \beta) &= \int_{\infty}^{\beta} \sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \cos \frac{\beta}{2} \operatorname{th}^m \frac{\alpha}{2} dz, \\ a_m &= -\frac{m a^{m-2} 2^{2m-1} (m-1)!^2}{\pi \sqrt{2} (2m-2)!}. \end{aligned} \right\} \quad (68. 13)$$

Для определения гармонической функции $\omega^{(0)}$ из граничных условий

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega^{(0)}}{\partial z} \Big|_{\beta=0} &= 0, & \frac{\partial \omega^{(0)}}{\partial z} \Big|_{\beta=\pi} &= \left(x \frac{\partial^2 \Phi_1^{(0)}}{\partial z^2} + y \frac{\partial^2 \Phi_2^{(0)}}{\partial z^2} \right) \Big|_{\beta=\pi} - \\ & & & - 2\nu \left(\frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2^{(0)}}{\partial y} \right) \Big|_{\beta=\pi} \end{aligned}$$

вычисляем выражения

$$\left. \begin{aligned} 4(1-\nu) \left(x \frac{\partial^2 \Phi_1^{(0)}}{\partial z^2} + y \frac{\partial^2 \Phi_2^{(0)}}{\partial z^2} \right) \Big|_{\beta=\pi} &= \\ = \sqrt{2} \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} a_m F_m \operatorname{th}^m \frac{\alpha}{2} e^{im\varphi}, \\ 4(1-\nu) \left(\frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2^{(0)}}{\partial y} \right) \Big|_{\beta=\pi} &= \sqrt{2} \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} a_m F_m \operatorname{th}^m \frac{\alpha}{2} e^{im\varphi}, \end{aligned} \right\} \quad (68. 14)$$

после чего

$$\frac{\partial \omega^{(0)}}{\partial z} \Big|_{\beta=\pi} = \frac{\operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} \left(\operatorname{sh}^2 \frac{\alpha}{2} + 1 - 2\nu \right)}{2\sqrt{2}(1-\nu)} \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m F_m \operatorname{th}^m \frac{\alpha}{2} e^{im\varphi}. \quad (68.15)$$

Положим

$$\omega^{(0)} = \omega^* + \bar{\omega}, \quad (68.16)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \omega^*}{\partial z} \Big|_{\beta=0} = 0, \quad \frac{\partial \omega^*}{\partial z} \Big|_{\beta=\pi} &= \frac{\operatorname{sh}^3 \frac{\alpha}{2}}{2\sqrt{2}(1-\nu)} \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m F_m \operatorname{th}^m \frac{\alpha}{2} e^{im\varphi}, \\ \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z} \Big|_{\beta=0} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z} \Big|_{\beta=\pi} &= \frac{(1-2\nu) \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2}}{2\sqrt{2}(1-\nu)} \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m F_m \operatorname{th}^m \frac{\alpha}{2} e^{im\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (68.17)$$

Очевидно, что в качестве функции ω^* можно взять особое решение типа (58.2) при $f(\zeta) = \zeta^m$, т. е. положить

$$\omega^* = \frac{1}{4(1-\nu)} \sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \cos \frac{\beta}{2} \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m F_m \operatorname{th}^m \frac{\alpha}{2} e^{im\varphi}. \quad (68.18)$$

Далее, на основании (58.10) имеем для $\bar{\omega}$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\omega} &= \frac{1-2\nu}{4(1-\nu)} \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m F_m J_s^{(m)} e^{im\varphi}, \\ J_s^{(m)}(\alpha, \beta) &= \int_{\infty}^s \sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \sin \frac{\beta}{2} \operatorname{th}^m \frac{\alpha}{2} dz. \end{aligned} \right\} \quad (68.19)$$

Переходим к определению функции $\Phi_4^{(0)}$, для которой, согласно (68.8) и (68.10), граничные условия таковы:

$$\Phi_4^{(0)} \Big|_{\beta=\pi} = (1-2\nu) \omega^{(0)} \Big|_{\beta=\pi}, \quad \frac{\partial \Phi_4^{(0)}}{\partial z} \Big|_{\beta=0} = 0. \quad (68.20)$$

Так как $\frac{\partial \omega^{(0)}}{\partial z} \Big|_{\beta=0} = 0$ и $\omega^* \Big|_{\beta=\pi} = 0$, то очевидно, что функция $\Phi_4^{(0)}$ может быть представлена в таком виде:

$$\Phi_4^{(0)} = (1-2\nu) \bar{\omega} + A^* \omega^*, \quad (68.21)$$

где A^* — пока не определенная постоянная.

Необходимость введения величины A^* диктуется требованием ограниченности перемещений при $\alpha \rightarrow \infty$, ибо входящая в решение функция ω^* неограниченно возрастает при $\alpha \rightarrow \infty$. Выкладки показывают, что перемещения u и v при $\alpha \rightarrow \infty$ огра-

ныены при любых значениях A^* , а асимптотическое выражение перемещения w при $\alpha \rightarrow \infty$ будет

$$w \approx (A^* + 1)\omega^* + O(1).$$

Поэтому следует принять $A^* = -1$. Таким образом,

$$\Phi_1^{(0)} = (1 - 2\nu)\bar{\omega} - \omega^*. \quad (68.22)$$

Положим

$$\Phi_4 = \Phi_4^{(0)} + \Phi_4', \quad (68.23)$$

где функция Φ_4' определяется вместе с Φ_1' , Φ_2' и ω' путем последовательного решения краевых задач с условиями (68.5), (68.7), (68.8) и (68.10), правые части которых связаны с заданными нагрузками τ_x , τ_y , σ_0 , σ_x и перемещениями u_0 , v_0 .

Составим теперь согласно (68.11) и (68.21) выражение интеграла

$$\int_{\infty}^z \Phi_4 dz \Big|_{\beta=0} = \left[(1 - 2\nu) \int_{\infty}^z \bar{\omega} dz - \int_{\infty}^z \omega^* dz + \int_{\infty}^z \Phi_4' dz \right]_{\beta=0} \quad (68.24)$$

и приравняем эту величину правой части условия (68.9). Так как на основании (58.13) и (58.9)

$$\int_{\infty}^z \bar{\omega} dz \Big|_{\beta=0} = -\frac{1 - 2\nu}{8(1 - \nu)} \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} F_m r^m e^{im\varphi}, \quad (68.25)$$

$$\int_{\infty}^z \omega^* dz \Big|_{\beta=0} = \frac{1}{4(1 - \nu)} \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \left(m - \frac{1}{2}\right) F_m r^m e^{im\varphi}, \quad (68.26)$$

$$\int_{\infty}^z \Phi_4' dz \Big|_{\beta=0} = -\frac{G}{2(1 - \nu)} (xu + yv)_{\beta=0} + \operatorname{Re} \sum_{m=0}^{\infty} G_m r^m e^{im\varphi}, \quad (68.27)$$

где G_m — известные числа,* то окончательно получаем следующую формулу для искоемых коэффициентов F_m :

$$F_m = \frac{2}{2 - \nu} G_m \quad (m \geq 1), \quad (68.28)$$

на чем и заканчивается общее решение поставленной задачи.

§ 69. Антисимметричная деформация тела, содержащего внешнюю круговую щель

Нетрудно видеть, что к категории задач, рассмотренных в предыдущем параграфе, относится, в частности, задача об антисимметричной деформации неограниченного упругого тела,

* Постоянная G_0 не влияет на значения перемещений и напряжений.

содержащего внешнюю круговую щель. Действительно, так как на поверхности щели $\beta = \pm\pi$ в этом случае имеем соотношения

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x|_{\beta=\pi} = -\sigma_x|_{\beta=-\pi} = \sigma_x(x, y), \\ \tau_{xx}|_{\beta=\pi} = \tau_{xx}|_{\beta=-\pi} = \tau_x(x, y), \quad \tau_{yy}|_{\beta=\pi} = \tau_{yy}|_{\beta=-\pi} = \tau_y(x, y), \end{aligned} \right\} (69.1)$$

то в средней плоскости $\beta = 0$ отсутствуют касательные смещения и нормальное напряжение

$$u|_{\beta=0} = v|_{\beta=0} = 0, \quad \sigma_x|_{\beta=0} = 0. \quad (69.2)$$

Таким образом, рассматриваемая задача равносильна смешанной краевой задаче теории упругости для полупространства с граничными условиями (68.1), в которых положено

$$\sigma_0 = u_0 = v_0 \equiv 0.$$

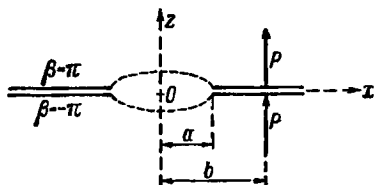


Рис. 43.

Проиллюстрируем предложенный в предыдущем параграфе метод решения этой общей задачи на конкретном примере, когда внешней нагрузкой являются две одинаково направленные сосредоточенные силы, приложенные нормально к поверхности щели в точках $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \pm\pi$. $\varphi = 0$ ($b = a \operatorname{cth} \frac{\alpha_0}{2}$;

см. рис. 43). При этом касательные усилия τ_x и τ_y отсутствуют, а нормальная нагрузка σ_x соответствует заданной сосредоточенной силе.

Для получения решения задачи необходимо найти функции Φ'_1 , Φ'_2 , ω' и Φ'_4 , а также коэффициенты G_m .

Из (68.5), (68.7), (68.8) и (68.10) вытекает, что в данной задаче $\Phi'_1 = \Phi'_2 \equiv 0$, а для функции ω' краевые условия имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \omega'}{\partial z} \Big|_{\beta=0} = 0, \quad \frac{\partial \omega'}{\partial z} \Big|_{\beta=\pi} = \sigma_x(x, y). \end{aligned} \right\} (69.3)$$

Легко видеть, что решением задачи Неймана для рассматриваемой точечной нагрузки является функция

$$\omega' = \frac{P}{2\pi\rho}, \quad \rho = \sqrt{(x-b)^2 + y^2 + z^2}. \quad (69.4)$$

Чтобы найти коэффициенты G_m , нужно функцию $\int \Phi'_4 dz|_{\beta=0}$ разложить в тригонометрический ряд по углу φ .

Пользуясь разложением

$$\int \frac{dz}{\rho} \Big|_{\beta=0} = \ln(z + \rho) \Big|_{\beta=0} = \frac{1}{2} \ln(r^2 - 2br \cos \varphi + b^2) = \\ = -\operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^m}{mb^m} e^{im\varphi} + \operatorname{const},$$

получаем

$$\int \Phi_4 dz \Big|_{\beta=0} = -\frac{P(1-2\nu)}{2\pi} \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^m}{mb^m} e^{im\varphi} + \operatorname{const}, \quad (69.5)$$

откуда на основании (68.27)

$$G_m = -\frac{(1-2\nu)P}{2\pi mb^m}. \quad (69.6)$$

Не выписывая общего решения задачи, подсчитаем напряжения в сечении $\beta=0$ по формулам

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xx} \Big|_{\beta=0} &= \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} + 2(1-\nu) \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial z} \right]_{\beta=0}, \\ \tau_{yy} \Big|_{\beta=0} &= \left[\frac{\partial \Phi}{\partial y} + 2(1+\nu) \frac{\partial \Phi_2^{(0)}}{\partial z} \right]_{\beta=0}. \end{aligned} \right\} \quad (69.7)$$

Так как

$$\Phi \Big|_{\beta=0} = \left[(1-2\nu)\Phi_3 - \Phi_4 - x \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial z} - y \frac{\partial \Phi_2^{(0)}}{\partial z} \right]_{\beta=0} = \\ = \left(\omega^* - x \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial z} - y \frac{\partial \Phi_2^{(0)}}{\partial z} \right)_{\beta=0} = 0,$$

то

$$\tau_{xx} \Big|_{\beta=0} = 2(1-\nu) \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial z} \Big|_{\beta=0}, \quad \tau_{yy} \Big|_{\beta=0} = 2(1-\nu) \frac{\partial \Phi_2^{(0)}}{\partial z} \Big|_{\beta=0}. \quad (69.8)$$

Составляя с помощью (68.13), (68.28) и (69.6) выражение

$$\tau_0 = (\tau_{xx} - i\tau_{yy})_{\beta=0} = 2(1-\nu) \left[\frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial z} - i \frac{\partial \Phi_2^{(0)}}{\partial z} \right]_{\beta=0} = \\ = \frac{P(1-2\nu) \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2}}{4\pi^2 a^2 (2-\nu)} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{a}{b} \right)^m \frac{2^{2m} (m-1)!}{(2m-2)!} \operatorname{th}^{m-1} \frac{\alpha}{2} e^{i(m-1)\varphi} = \\ = \frac{P(1-2\nu)}{\pi^2 a^2 (2-\nu)} \cdot \frac{a}{b} \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k} k!}{(2k)!} \zeta^k, \quad \zeta = \frac{x+iy}{b} \quad (69.9)$$

и пользуясь суммой ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k} k!}{(2k)!} \zeta^k = \frac{1}{1-\zeta} \left[1 + \sqrt{\frac{\zeta}{1-\zeta}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\zeta}{1-\zeta}} \right], \quad (69.10)$$

находим окончательно

$$\frac{\tau_0}{a^2} = \frac{1-2\nu}{\pi^2(2-\nu)} \cdot \frac{a}{b} \operatorname{ch} \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{1-\zeta} \left[1 + \sqrt{\frac{\zeta}{1-\zeta}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\zeta}{1-\zeta}} \right]. \quad (69.11)$$

§ 70. Осесимметричная задача в случае задания внутри круга касательного напряжения, а вне его — радиального перемещения

В § 66 было дано решение следующей смешанной задачи для упругого полупространства с круговой линией раздела граничных условий: внутри круга радиуса a задавалось радиальное перемещение u_r , а вне его — касательное напряжение τ_{rz} . При этом нормальное напряжение σ_z было известно на всей плоскости $z=0$, и в рассмотренном осесимметричном случае дело сводилось к задаче Неймана [см. (66.7)] и к смешанной задаче с условиями типа (66.6).

Оказывается, что в аналогичной задаче, когда в области $z=0$, $r < a$ задано касательное напряжение, а в области $z=0$, $r > a$ — радиальное перемещение, указанное выше сведение к краевым задачам теории потенциала претерпевает, как будет сейчас показано, некоторые изменения.

Граничные условия поставленной задачи имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z|_{\beta=0} &= \sigma_0(r), & \sigma_z|_{\beta=\pi} &= \sigma_\pi(r), \\ \tau_{rz}|_{\beta=0} &= \tau(r), & u_r|_{\beta=\pi} &= u(r). \end{aligned} \right\} \quad (70.1)$$

Как и в § 66, пользуемся формулами (66.3), выражающими смещения и напряжения через гармонические функции (f и Φ) Папковича—Нейбера, и применяем прежде всего к граничному условию

$$-\frac{\partial f}{\partial r} \Big|_{\beta=\pi} = 2Gu(r) \quad (70.2)$$

операцию $\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} r$. Однако в отличие от задачи, рассмотренной в § 66, получаемое при этом равенство

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \Big|_{\beta=\pi} = \chi(r) = \frac{2G}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (ru) \quad (70.3)$$

равносильно не исходному граничному условию (70.2), а соотношению

$$-\frac{\partial f}{\partial r} \Big|_{\beta=\pi} = 2Gu(r) + \frac{\text{const}}{r}. \quad (70.4)$$

Покажем, что для точного выполнения краевого условия (70.2) можно вместо условий (66.6) для функции $\psi = (1 - 2\nu)\Phi - \frac{\partial f}{\partial z}$ поставить следующие требования:

$$\left. \begin{aligned} \psi|_{\beta=0} &= \int_a^r \tau(r) dr + c, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{\beta=\pi} = (1 - 2\nu)F(r) - \chi(r), \\ F(r) &= \frac{1}{2(1-\nu)} [c_\pi(r) + \chi(r)]. \end{aligned} \right\} \quad (70.5)$$

сохранить условия задачи Неймана для функций Φ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{\beta=\pi} = F(r), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{\beta=0} = \sigma_0(r) - \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{\beta=0} \quad (70.6)$$

и найти неизвестную постоянную c из условия (70.2).

Непосредственная проверка с использованием зависимостей (66.3) показывает, что условия (70.5) и (70.6) равносильны всем исходным крайним условиям (70.1), кроме требования $u_r|_{\beta=\pi} = u(r)$, которое заменяется следующим:

$$2Gu_r|_{\beta=\pi} = - \frac{\partial f}{\partial r} \Big|_{\beta=\pi} = 2Gu(r) + \frac{K}{r}, \quad K = \text{const.} \quad (70.7)$$

Нетрудно видеть, что $K = M - Nc$, где M и N — известные числа. В самом деле, на основании (70.5) и (70.6) функции Φ и ψ , а следовательно, и f можно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$f = f_0 + cf_1, \quad (70.8)$$

где, согласно (70.3),

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial z^2} \Big|_{\beta=\pi} = \frac{2G}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(ru), \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} \Big|_{\beta=\pi} = 0. \quad (70.9)$$

Так как $\Delta f_0 = \Delta f_1 = 0$, то из (70.9) вытекают равенства

$$- \frac{\partial f_0}{\partial r} \Big|_{\beta=\pi} = 2Gu(r) + \frac{M}{r}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial r} \Big|_{\beta=\pi} = \frac{N}{r},$$

т. е. действительно

$$u_r|_{\beta=\pi} = u(r) + \frac{M - Nc}{2rG}. \quad (70.10)$$

Таким образом, искомая величина c должна иметь значение

$$c = \frac{M}{N}, \quad (70.11)$$

на чём и заканчивается общее решение поставленной задачи.

§ 71. Напряжения в упругом теле, ослабленном плоской круглой щелью

Важным частным случаем рассмотренной выше задачи является деформация неограниченного упругого тела, содержащего плоскую круглую щель, причем $\beta=0$ и $\beta=2\pi$ — уравнения ее берегов (рис. 44).

В самом деле, при антисимметричном нагружении имеем

$$\sigma_z|_{\beta=0} = -\sigma_z|_{\beta=2\pi} = \sigma(r), \quad \tau_{rz}|_{\beta=0} = \tau_{rz}|_{\beta=2\pi} = \tau(r). \quad (71.1)$$

Наряду с этим из соображений симметрии в части плоскости $\beta=\pi$ отсутствует нормальное напряжение и радиальное перемещение

$$\sigma_z|_{\beta=\pi} = 0, \quad u_r|_{\beta=\pi} = 0. \quad (71.2)$$

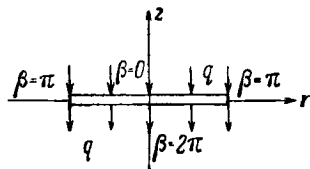


Рис. 44.

Таким образом, поставленная задача может рассматриваться лишь для верхнего полупространства с граничными условиями, получаемыми из условий (70.1) при $\sigma_z = u = 0$, что превращает (70.5) и (70.6) в следующие краевые условия:

$$\left. \begin{aligned} \psi|_{\beta=0} &= \int_a^r \tau(r) dr + c, & \frac{\partial \psi}{\partial z}|_{\beta=\pi} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z}|_{\beta=\pi} &= 0, & \frac{\partial \Phi}{\partial z}|_{\beta=0} &= \sigma(r) - \frac{\partial \psi}{\partial z}|_{\beta=0}. \end{aligned} \right\} \quad (71.3)$$

Займемся преобразованием для данного случая формулы (70.11), определяющей величину c .

Положим

$$\psi = \psi_0 + c\psi_1, \quad (74.4)$$

где

$$\psi_1|_{\beta=0} = 1, \quad \psi_0|_{\beta=0} = \int_a^r \tau(r) dr. \quad (71.5)$$

Так как $\frac{\partial \psi_1}{\partial z}|_{\beta=\pi} = 0$, то на основании (59.7) и (59.16)

$$\psi_1 = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}{1 - \cos \beta}}. \quad (71.6)$$

Далее, из (71.3) вытекает, что

$$\Phi = \Phi_0 - \psi, \quad (71.7)$$

где

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \Big|_{\beta=\pi} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \Big|_{\beta=0} = \sigma(r). \quad (71.8)$$

Так как

$$\frac{df}{dz} = (1 - 2\nu)\Phi - \psi = (1 - 2\nu)\Phi_0 - 2(1 - \nu)c\psi_1 - 2(1 - \nu)\psi_0,$$

то

$$\begin{aligned} \frac{df}{dr} \Big|_{\beta=\pi} &= \int_{\infty}^r \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial z} dz \Big|_{\beta=\pi} = \\ &= \int_{\infty}^r \left[(1 - 2\nu) \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} - 2(1 - \nu)c \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - 2(1 - \nu) \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \right] dz \Big|_{\beta=\pi}, \end{aligned}$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \frac{df_0}{dr} \Big|_{\beta=\pi} &= \int_{\infty}^r \left[(1 - 2\nu) \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} - 2(1 - \nu) \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \right] dz \Big|_{\beta=\pi} = -\frac{M}{r}, \\ \frac{df_1}{dr} \Big|_{\beta=\pi} &= -2(1 - \nu) \int_{\infty}^r \frac{\partial \psi_1}{\partial r} dz \Big|_{\beta=\pi} = \frac{N}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (71.9)$$

Таким образом, величины M и N можно определить с помощью квадратур, содержащих функции Φ_0 , ψ_0 и ψ_1 , которые считаются найденными в результате решения соответствующих краевых задач.

Дальнейшие преобразования формул (71.9) основаны на соотношении

$$\int_{\infty}^r \frac{\partial \omega}{\partial r} dz \Big|_{\beta=\pi} = -\frac{1}{r} \int_0^a r \frac{\partial \omega}{\partial z} \Big|_{\beta=0} dr, \quad (71.10)$$

верном для гармонических функций $\omega(r, z)$, удовлетворяющих условию $\frac{\partial \omega}{\partial z} \Big|_{\beta=\pi} = 0$, ограниченных при $r \rightarrow 0$ и стремящихся к нулю при $z \rightarrow \infty$ вместе со своими производными до второго порядка включительно.

Применяя формулу (71.10) к функциям Φ_0 , ψ_0 и ψ_1 , учитывая (71.8) и вычисляя квадратуру

$$\int_0^a r \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \Big|_{\beta=0} dr = a \int_0^{\infty} \operatorname{th} \frac{a}{2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0} da = -\frac{a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{a}{2} da}{\operatorname{ch}^2 \frac{a}{2}} = -\frac{2a}{\pi},$$

получаем

$$\left. \begin{aligned} M &= (1 - 2\nu) \int_0^a r \sigma(r) dr - 2(1 - \nu) \int_0^a r \frac{\partial \psi_0}{\partial z} dr \Big|_{\beta=0}, \\ N &= -\frac{4a(1 - \nu)}{\pi}. \end{aligned} \right\} (71.11)$$

Таким образом, из (70.11) получаем окончательную формулу

$$c = \frac{\pi}{4a(1 - \nu)} \left[2(1 - \nu) \int_0^a r \frac{\partial \psi_0}{\partial z} dr \Big|_{\beta=0} - (1 - 2\nu) \int_0^a r \sigma(r) dr \right]. (71.12)$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда к поверхности щели приложена нормальная равномерно распределенная нагрузка интенсивности q (рис. 44).

Так как при этом $\sigma(r) = q$, $\tau(r) \equiv 0$, то из условий $\psi_0|_{\beta=0} = 0$, $\frac{\partial \psi_0}{\partial z} \Big|_{\beta=\pi} = 0$ получаем, что $\psi_0 \equiv 0$, т. е.

$$c = -\frac{(1 - 2\nu)\pi qa}{8(1 - \nu)}. (71.13)$$

Для полного решения задачи остается только найти функцию Φ_0 из условий (71.8). Не производя этих вычислений, можно легко найти распределение касательных напряжений в сечении $\beta = \pi$

$$\tau_{rz} \Big|_{\beta=\pi} = c \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \Big|_{\beta=\pi} = -c \frac{\operatorname{ch} \alpha - 1}{a} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha} \Big|_{\beta=\pi} = -\frac{2c}{\pi r} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}}$$

или окончательно

$$\tau_{rz} \Big|_{\beta=\pi} = \frac{1 - 2\nu}{4(1 - \nu)} \cdot \frac{qa^2}{r\sqrt{a^2 - r^2}}. (71.14)$$

§ 72. Решение общей задачи для случая, когда внутри круга известны касательные напряжения, а вне его — касательные смещения

Дадим теперь решение рассмотренной выше смешанной задачи для полупространства в общем случае, когда осевая симметрия уже не имеет места.

Граничные условия имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z \Big|_{\beta=0} &= \sigma_0(r, \varphi), \quad \sigma_z \Big|_{\beta=\pi} = \sigma_\pi(r, \varphi), \\ \tau_{zx} \Big|_{\beta=0} &= \tau_x(r, \varphi), \quad \tau_{yz} \Big|_{\beta=0} = \tau_y(r, \varphi), \quad u \Big|_{\beta=\pi} = u_\pi(r, \varphi), \\ v \Big|_{\beta=\pi} &= v_\pi(r, \varphi). \end{aligned} \right\} (72.1)$$

Общий метод решения такой задачи в основном совпадает с методом, развитым в § 68.

Кратко изложим основные результаты.

В качестве дополнительных условий выбираем следующие:

$$\Phi|_{\beta=0} = 0, \quad F|_{\beta=\pi} = \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} F_m r^{-m} e^{-im\tau} \quad (72.2)$$

и пользуемся, как всегда, четырьмя функциями Папковича—Нейбера [см., например, (68. 2)].

Функции Φ_1 и Φ_2 находятся решением следующих смешанных краевых задач:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\Phi_1 = 0, \quad \Phi_1|_{\beta=\pi} &= \frac{1}{4(1-\nu)} \left[2Gu_\pi + \frac{\partial F}{\partial x} \right]_{\beta=\pi}, \\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} \Big|_{\beta=0} &= \frac{\tau_x}{2(1-\nu)}, \\ \Delta\Phi_2 = 0, \quad \Phi_2|_{\beta=0} &= \frac{1}{4(1-\nu)} \left[2Gv_\pi + \frac{\partial F}{\partial y} \right]_{\beta=\pi}, \\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} \Big|_{\beta=0} &= \frac{\tau_y}{2(1-\nu)}. \end{aligned} \right\} \quad (72.3)$$

Затем для гармонической функции

$$\omega = 2(1-\nu)\Phi_3 - \Phi_4$$

будем иметь граничные условия второго рода

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial\omega}{\partial z} \Big|_{\beta=0} &= \sigma_0 - 2\nu \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_1}{\partial y} \right)_{\beta=0} + \left(x \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z^2} + y \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial z^2} \right)_{\beta=0}, \\ \frac{\partial\omega}{\partial z} \Big|_{\beta=\pi} &= \sigma_\pi - \frac{\nu G}{1-\nu} \left(\frac{\partial u_\pi}{\partial x} + \frac{\partial v_\pi}{\partial y} \right) - \frac{G}{2(1-\nu)} \times \\ &\times \left[x \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + y \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right]_{\beta=\pi}. \end{aligned} \right\} \quad (72.4)$$

Наконец, для функции Φ_4 имеем смешанную краевую задачу $\Delta\Phi_4 = 0$,

$$\Phi_4|_{\beta=0} = (1-2\nu)\omega|_{\beta=0} - (x\tau_{xx} + y\tau_{yy})_{\beta=0}, \quad (72.5)$$

$$\frac{\partial\Phi_4}{\partial z} \Big|_{\beta=\pi} = \frac{G}{1-\nu} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (xu + yv)_{\beta=\pi}. \quad (72.6)$$

Однако правая часть последнего условия может отличаться от правой части истинного краевого условия [см. (72. 2)]

$$\begin{aligned} \Phi_0|_{\beta=\pi} &= \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} F_m \left[1 + \frac{m}{4(1-\nu)} \right] r^{-m} e^{-im\tau} - \\ &- \frac{G}{2(1-\nu)} (xu + yv) \Big|_{\beta=\pi} \end{aligned} \quad (72.7)$$

на гармоническую функцию переменных x и y , ибо (72.6) получено из (72.7) операциями $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Определим теперь коэффициенты F_m таким образом, чтобы выполнялось (72.7).

Обозначая через $\Phi_1^{(0)}$, $\Phi_2^{(0)}$, $\omega^{(0)}$, $\Phi_4^{(0)}$ те части искомым функций, которые связаны с величинами F_m , находим последовательно

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial z} \Big|_{\beta=0} &= 0, & \frac{\partial \Phi_2^{(0)}}{\partial z} \Big|_{\beta=0} &= 0, \\ 4(1-\nu)\Phi_1^{(0)} \Big|_{\beta=\pi} &= -\operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} m F_m r^{-(m+1)} e^{-i(m+1)\varphi}, \\ 4(1-\nu)\Phi_2^{(0)} \Big|_{\beta=\pi} &= -\operatorname{Re} i \sum_{m=1}^{\infty} m F_m r^{-(m+1)} e^{-i(m+1)\varphi}, \end{aligned} \right\} \quad (72.8)$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} 4(1-\nu)\Phi_1^{(0)} &= \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m F_m J_s^{(m+1)} e^{-i(m+1)\varphi}, \\ 4(1-\nu)\Phi_2^{(0)} &= \operatorname{Re} i \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m F_m J_s^{(m+1)} e^{-i(m+1)\varphi}, \end{aligned} \right\} \quad (72.9)$$

где положено [см. (58.10)]

$$\left. \begin{aligned} J_s^{(m)}(\alpha, \beta) &= \int_{\infty}^s \sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \sin \frac{\beta}{2} \operatorname{th}^m \frac{\alpha}{2} dz, \\ \beta_m &= \frac{m(2m+1)!}{\sqrt{2} a^{m+2} 2^m m!^2}. \end{aligned} \right\} \quad (72.10)$$

Составляя в соответствии с (72.4) выражение

$$\begin{aligned} & \left[x \frac{\partial^2 \Phi_1^{(0)}}{\partial z^2} + y \frac{\partial^2 \Phi_2^{(0)}}{\partial z^2} - 2\nu \left(\frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2^{(0)}}{\partial y} \right) \right]_{\beta=0} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4(1-\nu)} \left[(1-2\nu) \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{ch}^3 \frac{\alpha}{2} \right] \times \\ & \times \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m F_m \operatorname{th}^m \frac{\alpha}{2} e^{-im\varphi} \end{aligned} \quad (72.11)$$

и полагая

$$\omega^{(0)} = \bar{\omega}^{(0)} + \omega^{*(0)}, \quad (72.12)$$

будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{\omega}^{(0)}}{\partial z} \Big|_{\beta=\pi} &= 0, \quad \frac{\partial \bar{\omega}^{(0)}}{\partial z} \Big|_{\beta=0} = \frac{1-2\nu}{2\sqrt{2}(1-\nu)} \operatorname{ch} \frac{a}{2} \times \\ &\times \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m F_m \operatorname{th}^m \frac{a}{2} e^{-im\varphi}, \\ \frac{\partial \omega^{*(0)}}{\partial z} \Big|_{\beta=\pi} &= 0, \quad \frac{\partial \omega^{*(0)}}{\partial z} \Big|_{\beta=0} = -\frac{\operatorname{ch}^3 \frac{a}{2}}{2\sqrt{2}(1-\nu)} \times \\ &\times \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m F_m \operatorname{th}^m \frac{a}{2} e^{-im\varphi}. \end{aligned} \right\} (72.13)$$

Легко видеть [см. 58.6) и (58.2)], что

$$\left. \begin{aligned} \bar{\omega}^{(0)} &= \frac{1-2\nu}{4(1-\nu)} \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m F_m J_0^{(m)} e^{-im\varphi}, \\ \omega^{*(0)} &= -\frac{a}{4(1-\nu)} \sin \frac{\beta}{2} \sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \times \\ &\times \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m F_m \operatorname{th}^m \frac{a}{2} e^{-im\varphi}, \end{aligned} \right\} (72.14)$$

где

$$J_0^{(m)}(\alpha, \beta) = \int_0^{\beta} \sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \cos \frac{\beta}{2} \operatorname{th}^m \frac{a}{2} dz. \quad (72.15)$$

Наконец, из условий

$$\frac{\partial \Phi_4^{(0)}}{\partial z} \Big|_{\beta=\pi} = 0, \quad \Phi_4^{(0)} \Big|_{\beta=0} = (1-2\nu) \omega^{(0)} \Big|_{\beta=0} \quad (72.16)$$

получаем, что

$$\Phi_4^{(0)} = (1-2\nu) \bar{\omega}^{(0)} + A^* \omega^{*(0)}, \quad (72.17)$$

причем подобно тому, как это было установлено в § 68, $A^* = -1$ из условия ограниченности перемещений при $\alpha \rightarrow \infty$.

Полагая далее

$$\Phi_4 = \Phi_4^{(0)} + \Phi_4', \quad (72.18)$$

где функция Φ_4' (так же, как и функции Φ_1' , Φ_2' и ω') связана с теми частями краевых условий (72.5) и (72.6), которые не зависят от коэффициентов F_m , будем иметь

$$\int_{\infty}^z \Phi_4' dz |_{\beta=\pi} = -\frac{G}{2(1-\nu)} (xu + yv) |_{\beta=\pi} + \operatorname{Re} \sum_{m=0}^{\infty} G_m r^{-m} e^{-im\varphi}, \quad (72.19)$$

где G_m — известные числа.

Составляя теперь выражение для интеграла $\int_{\infty}^z \Phi_4^{(0)} dz |_{\beta=\pi}$ с помощью соотношений (см. § 58)

$$\left. \begin{aligned} \int_{\infty}^z \bar{\omega}^{(0)} dz |_{\beta=\pi} &= -\frac{1-2\nu}{8(1-\nu)} \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} F_m r^{-m} e^{-im\varphi}, \\ \int_{\infty}^z \omega^{*(0)} dz |_{\beta=\pi} &= -\frac{1}{8(1-\nu)} \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} (2m+1) F_m r^{-m} e^{-im\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (72.20)$$

и пользуясь условием (72.7), находим окончательно

$$F_m = \frac{2}{2-\nu} G_m. \quad (72.21)$$

§ 73. Приложение к расчету напряжений в неограниченном теле, содержащем внутреннюю круговую щель

Примером рассмотренной общей смешанной задачи может служить деформация антисимметрично нагруженного упругого тела, ослабленного плоской круглой щелью (рис. 45).

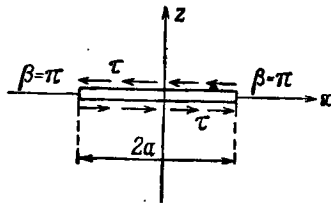


Рис. 45.

В самом деле, так как при антисимметричной нагрузке имеем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x |_{\beta=0} &= -\sigma_x |_{\beta=2\pi} = \sigma_0(r, \varphi), \\ \tau_{zx} |_{\beta=0} &= \tau_{zx} |_{\beta=2\pi} = \tau_x(r, \varphi), \\ \tau_{yz} |_{\beta=0} &= \tau_{yz} |_{\beta=2\pi} = \tau_y(r, \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (73.1)$$

причем в части плоскости $\beta = \pi$ по симметрии

$$\sigma_x |_{\beta=\pi} = u |_{\beta=\pi} = v |_{\beta=\pi} = 0, \quad (73.2)$$

то достаточно рассмотреть верхнее полупространство при смешанных граничных условиях, являющихся частным случаем (72.1), когда

$$\sigma_x = u_x = v_x = 0. \quad (73.3)$$

В качестве примера дадим решение этой задачи для одного конкретного случая, когда к поверхности щели приложено постоянное касательное напряжение τ_{zx} (рис. 45), т. е. имеем

$$\sigma_x |_{\beta=0} = 0, \quad \tau_{zx} |_{\beta=0} = \tau = \text{const}, \quad \tau_{yz} |_{\beta=0} = 0. \quad (73.4)$$

Поскольку при общем изложении (§ 72) функции $\Phi_1^{(0)}$, $\Phi_2^{(0)}$, $\omega^{(0)}$ и $\Phi_4^{(0)}$ были получены, то остается найти функции Φ_1' , Φ_2' , ω' и Φ_4' , а также входящие в формулу (72.21) коэффициенты G_m^m .

Из (72.3) вытекают следующие граничные условия для Φ_1' и Φ_2' :

$$\Phi_1' |_{\beta=\pi} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_1'}{\partial z} \Big|_{\beta=0} = \frac{\tau}{2(1-\nu)}, \quad \Phi_2' |_{\beta=\pi} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_2'}{\partial z} \Big|_{\beta=0} = 0, \quad (73.5)$$

откуда следует, что*

$$\Phi_2' \equiv 0,$$

$$\Phi_1' = \frac{2a\tau}{\pi(1-\nu)} \sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \cdot \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}{1 - \cos \beta}}}{\sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}}. \quad (73.6)$$

В связи с тем, что входящая в правую часть первого условия (72.4) величина преобразуется к виду

$$\left(x \frac{\partial^2 \Phi_1'}{\partial z^2} - 2\nu \frac{\partial \Phi_1'}{\partial x} \right)_{\beta=0} = -\frac{\tau \cos \varphi}{\pi(1-\nu)} \left[(1+2\nu) \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{\alpha}{2} \right],$$

положим

$$\omega' = \omega^{*'} + \bar{\omega}', \quad (73.7)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \omega^{*'}}{\partial z} \Big|_{\beta=\pi} = 0, \quad \frac{\partial \omega^{*'}}{\partial z} \Big|_{\beta=0} = -\frac{\tau}{\pi(1-\nu)} \operatorname{th} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ch}^3 \frac{\alpha}{2} \cos \varphi, \\ \frac{\partial \bar{\omega}'}{\partial z} \Big|_{\beta=\pi} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\omega}'}{\partial z} \Big|_{\beta=0} = -\frac{\tau(1+2\nu)}{\pi(1-\nu)} \operatorname{th} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (73.8)$$

Тогда на основании (58.2), (58.6) можем сразу заключить, что

$$\left. \begin{aligned} \omega^{*'} = -\frac{\tau a}{\pi \sqrt{2} (1-\nu)} \sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \sin \frac{\beta}{2} \operatorname{th} \frac{\alpha}{2} \cos \varphi, \\ \bar{\omega}' = -\frac{\tau(1+2\nu)}{\pi \sqrt{2} (1-\nu)} J_c^{(1)}(\alpha, \beta) \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (73.9)$$

Далее, для последней неизвестной функции Φ_4' имеем из (72.5) и (72.6)

$$\frac{\partial \Phi_4'}{\partial z} \Big|_{\beta=\pi} = 0, \quad \Phi_4' |_{\beta=0} = \frac{2\nu - 1 - 4\nu^2}{2\nu + 1} \bar{\omega}' |_{\beta=0} + (1-2\nu) \omega^{*'} |_{\beta=0}, \quad (73.10)$$

откуда вытекает, что

$$\Phi_4' = \frac{2\nu - 1 - 4\nu^2}{2\nu + 1} \bar{\omega}' + A^{*'} \omega^{*}'. \quad (73.11)$$

* Выкладки здесь аналогичны сделанным в § 59 [см. (59.8), (59.13) и (59.16)].

Что касается величины A^* , то путем исследования поведения перемещений при $\alpha \rightarrow \infty$ удается установить, что $A^* = -1$ (см. §§ 68 и 72).

Остается определить коэффициенты G_m из соотношения (72.19)

$$\int_{\infty}^z \Phi'_4 dz |_{\beta=\pi} = \operatorname{Re} \sum_{m=0}^{\infty} G_m r^{-m} e^{-im\varphi}, \quad (73.12)$$

причем из выражения для функции Φ'_4 сразу следует, что при $m \geq 2$ все $G_m = 0$, а единственный неизвестный коэффициент G_1 есть вещественное число, так что (73.12) имеет вид

$$\int_{\infty}^z \Phi'_4 dz |_{\beta=\pi} = G_1 \frac{\cos \varphi}{r} + \operatorname{const}. \quad (73.13)$$

Находя с помощью формул (58.11) и (58.12) значения интегралов

$$\left. \begin{aligned} \int_{\infty}^z \omega^* dz |_{\beta=\pi} &= -\frac{\tau \alpha \cos \varphi}{\pi \sqrt{2} (1-\nu)} J_s^{(1)} |_{\beta=\pi} = -\frac{\tau \alpha^3}{\pi (1-\nu)} \cdot \frac{\cos \varphi}{r}, \\ \int_{\infty}^z \bar{\omega}' dz |_{\beta=\pi} &= -\frac{\tau (1+2\nu)}{\pi \sqrt{2} (1-\nu)} \int_{\infty}^z J_c^{(1)} dz |_{\beta=\pi} \cos \varphi = \\ &= -\frac{\tau \alpha^3 (1+2\nu)}{3\pi (1-\nu)} \cdot \frac{\cos \varphi}{r} \end{aligned} \right\} (73.14)$$

и используя (73.11) и (73.13), получаем окончательно

$$G_1 = -\frac{2}{3\pi} (1+2\nu) \tau \alpha^3. \quad (73.15)$$

Таким образом, найдены все функции напряжений, через которые выражается решение поставленной задачи, а также входящий в решение коэффициент $F_1 = \frac{2}{2-\nu} G_1$.

В заключение приведем без вывода простую формулу, которая получается для перемещений

$$u |_{\alpha=\pi} = -\frac{4a\tau (1-\nu)}{\pi G (2-\nu)} \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}, \quad v |_{\beta=\pi} = 0. \quad (73.16)$$

Глава XII. ОСНОВНАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА С КРУГОВОЙ ЛИНИЕЙ РАЗДЕЛА ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

§ 74. Основная смешанная задача в случае осевой симметрии

В предыдущих главах части IV рассматривались такие смешанные задачи теории упругости для полупространства, в которых на всей граничной плоскости тела задавались либо касательные (глава X), либо нормальные (глава XI) напряжения, причем имелась круговая линия раздела остальных краевых условий.

В настоящей главе XII с помощью интегрального преобразования Мелера—Фока будут даны точные решения более сложной смешанной задачи, обычно называемой основной смешанной задачей. Граничные условия такой задачи для полупространства $z > 0$ с круговой линией раздела краевых условий заключаются в том, что внутри окружности $z=0$, $r=a$ задаются перемещения (или напряжения), а вне ее — напряжения (или перемещения).

В данном § 74 исследуется осесимметричная задача одного из указанных типов, когда в области $z=0$, $r < a$ (в тороидальных координатах $\beta=0$) заданы составляющие u_r и u_s перемещения, а в области $z=0$, $r > a$ ($\beta=\pi$) — напряжения τ_{rz} и σ_s .

Граничные условия имеют, следовательно, вид

$$u_r|_{\beta=0} = \varphi_1(r), \quad u_s|_{\beta=0} = \varphi_2(r), \quad \sigma_s|_{\beta=\pi} = \varphi_3(r), \quad \tau_{rz}|_{\beta=\pi} = \varphi_4(r). \quad (74.1)$$

Чтобы свести такую задачу к краевым задачам для гармонических функций, воспользуемся выражениями упругих перемещений и напряжений через две гармонические функции f и Φ Папковича—Нейбера:

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_r &= -\frac{\partial f}{\partial r} - z \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \\ 2Gu_s &= (3-4\nu)\Phi - F - z \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \\ \sigma_s &= \frac{\partial}{\partial z} [2(1-\nu)\Phi - F] - z \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \\ \tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[(1-2\nu)\Phi - F - z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right], \end{aligned} \right\} \quad (74.2)$$

где G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, и введена гармоническая функция F соотношением

$$F = \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (74.3)$$

Применим к первому из условий (74.1) оператор $\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r u_r)|_{\beta=0}$ и воспользуемся значением u_r , взятым из (74.2). Так как функция f — гармоническая, то указанные действия приводят нас к равенству

$$\frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{\beta=0} = \frac{2G}{r} \cdot \frac{d}{dr} (\varphi_1 r) = F_1(\alpha).$$

Интегрируя еще последнее условие (74.1) по r в пределах от r до ∞ , сводим поставленную задачу к нахождению двух гармонических в полупространстве $z > 0$ функций F и Φ при следующих граничных условиях: *

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{\beta=0} &= F_1(\alpha), \\ [(3 - 4\nu)\Phi - F]_{\beta=0} &= F_2(\alpha), \\ \frac{\partial}{\partial z} [2(1 - \nu)\Phi - F] \Big|_{\beta=\pi} &= F_3(\alpha), \\ [(1 - 2\nu)\Phi - F]_{\beta=\pi} &= F_4(\alpha). \end{aligned} \right\} \quad (74.4)$$

Заметим, что первое условие (74.4) равносильно первому из граничных условий (74.1). В самом деле, из (74.3) и (74.4) следует, что

$$-\frac{1}{2G} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) \Big|_{\beta=0} = \frac{d}{dr} (r \varphi_1),$$

т. е. значение $u_r|_{\beta=0}$, равное, согласно (74.2), величине $-\frac{1}{2G} \cdot \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{\beta=0}$, может отличаться от требуемого значения $\varphi_1(r)$ лишь на функцию $\frac{c}{r}$. Однако в силу ограниченности рассматриваемых функций на оси $r = 0$ постоянная c равна нулю, т. е. первое условие (74.4) совпадает с первым условием (74.1).

Для нахождения гармонических функций F и Φ представим их в виде интегральных разложений по функциям Лежандра $P_{-\frac{1}{2}+\nu}(\text{ch } \alpha)$:

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta) &= \sqrt{\text{ch } \alpha + \cos \beta} \times \\ &\times \int_0^{\infty} [A(\tau) \text{ch } \beta\tau + B(\tau) \text{sh } \beta\tau] P_{-\frac{1}{2}+\nu}(\text{ch } \alpha) d\tau, \end{aligned} \quad (74.5)$$

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha, \beta) &= \sqrt{\text{ch } \alpha + \cos \beta} \times \\ &\times \int_0^{\infty} [C(\tau) \text{ch } \beta\tau + D(\tau) \text{sh } \beta\tau] P_{-\frac{1}{2}+\nu}(\text{ch } \alpha) d\tau, \end{aligned} \quad (74.6)$$

* По поводу условий при $R = \sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow \infty$ и $\alpha \rightarrow \infty$ см. § 57.

где функции $A(\tau)$, $B(\tau)$, $C(\tau)$, $D(\tau)$ подлежат определению из граничных условий (74.4). Заменяя в них дифференцирование по z дифференцированием по β с помощью соотношений

$$\frac{\partial}{\partial z} \Big|_{\beta=0} = \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \Big|_{\beta=\pi} = -\frac{1}{h} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\pi}$$

($h = \frac{a}{\operatorname{ch} a + \cos \beta}$ — коэффициент Ляме), получаем

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} \tau B(\tau) P_{-\nu/\pi+\epsilon\tau}(\operatorname{ch} a) d\tau &= \frac{aF_1(a)}{(\sqrt{\operatorname{ch} a + 1})^3} = f_1(a), \\ \int_0^{\infty} [(3-4\nu)C(\tau) - A(\tau)] P_{-\nu/\pi+\epsilon\tau}(\operatorname{ch} a) d\tau &= \frac{F_2(a)}{\sqrt{\operatorname{ch} a + 1}} = f_2(a), \\ \int_0^{\infty} \tau \{2(1-\nu)[C(\tau) \operatorname{sh} \pi\tau + D(\tau) \operatorname{ch} \pi\tau] - [A(\tau) \operatorname{sh} \pi\tau + \\ + B(\tau) \operatorname{ch} \pi\tau]\} P_{-\nu/\pi+\epsilon\tau}(\operatorname{ch} a) d\tau &= -\frac{F_3(a)}{(\sqrt{\operatorname{ch} a - 1})^3} = f_3(a), \\ \int_0^{\infty} \{(1-2\nu)[C(\tau) \operatorname{ch} \pi\tau + D(\tau) \operatorname{sh} \pi\tau] - [A(\tau) \operatorname{ch} \pi\tau + \\ + B(\tau) \operatorname{sh} \pi\tau]\} P_{-\nu/\pi+\epsilon\tau}(\operatorname{ch} a) d\tau &= \frac{F_4(a)}{\sqrt{\operatorname{ch} a - 1}} = f_4(a). \end{aligned} \right\} (74.7)$$

Если предположить, что правые части этих равенств могут быть разложены в интегралы Мелера—Фока по функциям Лежандра

$$f_i(a) = \int_0^{\infty} f_i(\tau) P_{-\nu/\pi+\epsilon\tau}(\operatorname{ch} a) d\tau \quad (i=1, 2, 3, 4), \quad (74.8)$$

то условия (74.7) сразу приводят нас к линейной алгебраической системе уравнений для неизвестных величин $A(\tau)$, $B(\tau)$, $C(\tau)$, $D(\tau)$

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{f_1}{\tau}, \\ (3-4\nu)C - A &= f_2, \\ 2(1-\nu)(C \operatorname{sh} \pi\tau + D \operatorname{ch} \pi\tau) - (A \operatorname{sh} \pi\tau + B \operatorname{ch} \pi\tau) &= \frac{f_3}{\tau}, \\ (1-2\nu)(C \operatorname{ch} \pi\tau + D \operatorname{sh} \pi\tau) - (A \operatorname{ch} \pi\tau + B \operatorname{sh} \pi\tau) &= f_4, \end{aligned} \right\} (74.9)$$

на чем в принципе и заканчивается общее решение поставленной задачи.

Важным приложением полученных результатов является рассматриваемая в следующем параграфе контактная задача для штампа, сцепленного с полупространством.

§ 75. Осесимметричная контактная задача для круглого штампа при наличии сцепления

Рассмотрим контактную задачу о вдавливании жесткого кругового в плане штампа в упругое полупространство $z \geq 0$, причем трение между основанием штампа и упругим телом будем предполагать настолько большим, что оба тела можно считать как бы жестко скрепленными.

Если на штамп действует только осевая сила P и поверхность основания штампа обладает осевой симметрией, то распределение напряжений в полупространстве будет также осесимметричным.

Точки плоскости $z = 0$, расположенные в области $\beta = 0$, т. е. внутри круга $r = a$ (a — радиус основания штампа), после деформации получают, очевидно, осевое перемещение

$$u_s |_{\beta=0} = w_0 + \chi(r), \quad (75.1)$$

где $\chi(r)$ — уравнение поверхности штампа, а w_0 — пока неизвестное осевое перемещение.

В силу принятого условия сцепления радиальное перемещение в области $\beta = 0$ должно отсутствовать:

$$u_r |_{\beta=0} = 0. \quad (75.2)$$

Что касается области вне штампа ($\beta = \pi$), то там отсутствуют упругие напряжения:

$$\sigma_s |_{\beta=\pi} = 0, \quad \tau_{rs} |_{\beta=\pi} = 0. \quad (75.3)$$

Соотношения (75.1)—(75.3) представляют собой граничные условия рассматриваемой осесимметричной контактной задачи, которая, очевидно, является частным случаем рассмотренной в предыдущем параграфе общей задачи, когда

$$\varphi_1(r) = \varphi_3(r) = \varphi_4(r) \equiv 0. \quad (75.4)$$

Применим полученные в § 74 результаты к контактной задаче для случая штампа с плоским основанием, когда функция $\chi(r)$ в условии (75.1) равна нулю, т. е. $\varphi_2(r) = w_0$. При этом правые части условий (74.4), относящихся к основной краевой задаче, будут, очевидно, таковы:

$$F_1 = F_3 = F_4 = 0, \quad F_2 = 2Gw_0,$$

откуда вытекает, что в трех из соотношений (74. 7) правые части будут нулями, а во втором условии (74. 7) следует положить

$$f_2(\alpha) = \frac{2Gw_0}{\sqrt{\operatorname{ch} \alpha + 1}}.$$

Таким образом, в системе (74. 9) $f_1 = f_3 = f_4 = 0$, а для нахождения величины J_2 требуется разложить функцию $\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} \alpha + 1}}$ в интеграл Мелера—Фока

$$\frac{2Gw_0}{\sqrt{\operatorname{ch} \alpha + 1}} = \int_0^{\infty} J_2(\tau) P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau. \quad (75. 5)$$

Сравнивая полученное интегральное разложение (75. 5) с (57. 12), сразу находим

$$J_2(\tau) = \frac{2\sqrt{2}Gw_0}{\operatorname{ch} \pi\tau}, \quad (75. 6)$$

после чего можно решать систему (74. 9). Так как в данном случае $B = 0$, $A = (3 - 4\nu)C - J_2$, то дело фактически сводится к системе двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (1 - 2\nu)C \operatorname{sh} \pi\tau - 2(1 - \nu)D \operatorname{ch} \pi\tau &= f_2 \operatorname{sh} \pi\tau, \\ 2(1 - \nu)C \operatorname{ch} \pi\tau - (1 - 2\nu)D \operatorname{sh} \pi\tau &= f_2 \operatorname{ch} \pi\tau, \end{aligned} \right\} \quad (75. 7)$$

решая которую, находим

$$\left. \begin{aligned} C(\tau) &= \frac{\operatorname{sh}^2 \pi\tau + 2(1 - \nu)}{\operatorname{sh}^2 \pi\tau + k^2} \cdot \frac{f_2}{3 - 4\nu}, \\ D(\tau) &= -\frac{\operatorname{ch} \pi\tau \operatorname{sh} \pi\tau}{\operatorname{sh}^2 \pi\tau + k^2} \cdot \frac{f_2}{3 - 4\nu}. \end{aligned} \right\} \quad (75. 8)$$

где введено обозначение

$$k = \frac{2(1 - \nu)}{\sqrt{3 - 4\nu}} \quad (k > 1). \quad (75. 9)$$

Подставляя найденные значения величин $A(\tau)$, $C(\tau)$, $D(\tau)$ в формулы (74. 5) и (74. 6), получаем выражения для функций напряжений $F(\alpha, \beta)$ и $\Phi(\alpha, \beta)$ в виде однократных квадратур. Путем использования различных интегральных представлений функций $P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha)$ указанные квадратуры могут быть превращены в однократные интегралы от элементарных функций. Подобное преобразование будет проведено нами в дальнейшем для нормального напряжения в области контакта.

Полученное решение осесимметричной контактной задачи выражено через вертикальное перемещение w_0 штампа, которое, по существу, неизвестно и должно быть представлено через

заданную осевую силу P , действующую на штамп. Для выражения величины w_0 через P необходимо найти распределение нормальных напряжений по подошве штампа ($\beta=0$) и воспользоваться условием статики

$$2\pi \int_0^a \sigma_s|_{\beta=0} r dr = -P. \quad (75.10)$$

Из общей формулы (74.2) для нормального напряжения легко получаем

$$\begin{aligned} \sigma_s|_{\beta=0} &= 2(1-\nu) \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{\beta=0} = \\ &= \frac{2}{a} (1-\nu) (\sqrt{\operatorname{ch} \alpha + 1})^3 \int_0^{\infty} \tau D(\tau) P_{-\nu/\pi + i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau \end{aligned} \quad (75.11)$$

[последнее — на основании выражения (74.6) для функции Φ]. Подставляя в (75.11) значение $D(\tau)$ из (75.8), находим следующее выражение нормального напряжения в виде однократного интеграла:

$$\begin{aligned} \sigma_s|_{\beta=0} &= -4\sqrt{2} \frac{1-\nu}{3-4\nu} \cdot \frac{Gw_0}{a} (\sqrt{\operatorname{ch} \alpha + 1})^3 \times \\ &\times \int_0^{\infty} \frac{\tau \operatorname{sh} \pi\tau}{\operatorname{sh}^2 \pi\tau + k^2} P_{-\nu/\pi + i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau. \end{aligned} \quad (75.12)$$

Внося в (75.12) интегральное представление (57.16) для функции $P_{-\nu/\pi + i\tau}(\operatorname{ch} \alpha)$, изменяя порядок интегрирования и пользуясь формулой

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \pi\tau \cos \tau s}{\operatorname{sh}^2 \pi\tau + k^2} d\tau = \frac{\cos \theta s}{2k \operatorname{ch} \frac{s}{2}}, \quad (75.13)$$

где введено обозначение

$$\theta = \frac{1}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{ch} k = \frac{1}{2\pi} \ln (3 - 4\nu), \quad (75.14)$$

получаем рассматриваемое нормальное напряжение в виде хорошо сходящейся квадратуры, содержащей только элементарные функции

$$\sigma_s|_{\beta=0} = \frac{4(1-\nu)}{3-4\nu} \cdot \frac{Gw_0}{\pi k a} (\sqrt{\operatorname{ch} \alpha + 1})^3 \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} s - \operatorname{ch} \alpha}} d \left(\frac{\cos \theta s}{\operatorname{ch} \frac{s}{2}} \right). \quad (75.15)$$

Применяя к последнему выражению условие статики (75. 10), учитывая, что

$$rdr|_{\beta=0} = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{ch}^3 \frac{\alpha}{2}} d\alpha,$$

и изменяя порядок интегрирования, находим

$$\begin{aligned} \frac{P}{2\pi} &= - \int_0^a \sigma_s|_{\beta=0} r dr = -4\sqrt{2} \frac{1-\nu}{3-4\nu} \cdot \frac{G\bar{w}_0}{\pi k} \times \\ &\times \int_0^\infty \frac{d}{ds} \left(\frac{\cos \theta s}{\operatorname{ch} \frac{s}{2}} \right) \left[\int_0^s \frac{\operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} d\alpha}{\sqrt{\operatorname{ch} s - \operatorname{ch} \alpha}} \right] ds = \\ &= -8 \frac{1-\nu}{3-4\nu} \cdot \frac{Gw_0 a}{\pi k} \int_0^\infty \operatorname{arc} \cos \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{s}{2}} d \left(\frac{\cos \theta s}{\operatorname{ch} \frac{s}{2}} \right) = \\ &= 4 \frac{1-\nu}{3-4\nu} \cdot \frac{Gw_0 a}{\pi k} \int_0^\infty \frac{\cos \theta s}{\operatorname{ch}^2 \frac{s}{2}} ds = 8 \frac{1-\nu}{3-4\nu} \cdot \frac{Gw_0 a \theta}{k\sqrt{k^2-1}}. \quad (75. 16) \end{aligned}$$

Подставляя в (75. 16) значения k из (75. 9) и θ из (75. 14), получаем окончательную искомую связь

$$P = \frac{4Gw_0 a}{1-2\nu} \ln(3-4\nu). \quad (75. 17)$$

На рис. 46 представлен график распределения нормальных напряжений как функции координаты r , причем было принято $\nu = \frac{1}{4}$ и для численных расчетов в формуле (75. 15) предварительно делалась замена переменных: $\operatorname{ch} t = \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch}^2 u$.

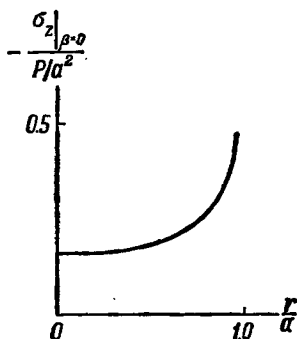


Рис. 46.

§ 76. Случай, когда вне круга заданы смещения, а внутри него — напряжения

В рассматривавшейся выше смешанной задаче для полупространства упругие смещения считались заданными внутри круга (при $\beta=0$), а напряжения — вне его (при $\beta=\pi$).

Преобразование Мелера—Фока позволяет также дать точное решение аналогичной осесимметричной задачи, когда при $\beta=0$ заданы напряжения, а при $\beta=\pi$ — перемещения, т. е. при граничных условиях

$$\sigma_z|_{\beta=0} = \sigma(r), \quad \tau_{rz}|_{\beta=\pi} = \tau(r), \quad u_r|_{\beta=\pi} = u(r), \quad u_z|_{\beta=\pi} = w(r). \quad (76.1)$$

Использование двух гармонических функций f и Φ позволяет свести такую задачу к некоторой смешанной краевой задаче с неразделенными граничными условиями (см. § 74). Однако условие

$$\frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{\beta=\pi} = \frac{2G}{r} \cdot \frac{d}{dr}(ru) = F_1(\alpha)$$

в данном случае не равносильно исходному условию $u_r|_{\beta=\pi} = u(r)$, а может отличаться от него на величину $\frac{K}{r}$, где $K = \text{const.}^*$

В связи с этим мы будем в условии

$$[(1 - 2\nu)\Phi - F]_{\beta=0} = F_4(\alpha)$$

дополнять правую часть некоторой постоянной

$$F_4(\alpha) = \int_a^r \tau(r) dr + c \quad (76.2)$$

и покажем впоследствии, что величина c может быть подобрана так, чтобы условие $u_r|_{\beta=\pi} = u(r)$ было выполнено.

Итак, согласно сказанному, для искомых функций F и Φ имеем следующие граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{\beta=\pi} &= \frac{2G}{r} \cdot \frac{d}{dr}(ru) = F_1(\alpha), \\ [(3 - 4\nu)\Phi - F]_{\beta=\pi} &= 2Gw(r) = F_2(\alpha), \\ \left[2(1 - \nu) \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z} \right]_{\beta=0} &= \sigma(r) = F_3(\alpha), \\ [1 - 2\nu)\Phi - F]_{\beta=0} &= F_4(\alpha). \end{aligned} \right\} \quad (76.3)$$

В § 74 было показано, что смешанные задачи подобного типа разрешимы с помощью интегрального преобразования Мелера—Фока.

Для полного решения поставленной задачи остается только найти неизвестную постоянную c из условия $K=0$. Поскольку полученное решение состоит из суммы двух слагаемых, одно из которых пропорционально c , а другое связано с заданными

* В § 74 речь шла об области $\beta=0$, где $K=0$ в силу ограниченности решения при $r \rightarrow 0$.

неоднородными граничными условиями, постольку и величина K является линейной функцией c . Таким образом, из общих соображений ясно, что $K = M - Nc$, откуда $c = \frac{M}{N}$.

Не производя выкладок в общем виде, обратимся к конкретной задаче: пусть по площади круга радиуса a приложено равномерное давление, а остальная часть границы полупространства жестко закреплена. Очевидно, в этом случае

$$u = w = \tau \equiv 0, \quad \sigma = -q = \text{const.} \quad (76.4)$$

Если положить

$$F = \sqrt{\text{ch } \alpha + \cos \beta} \int_0^{\infty} A \text{ch}(\pi - \beta) \tau P_{-\frac{1}{2} + i\tau}(\text{ch } \alpha) d\tau, \quad (76.5)$$

$$\begin{aligned} \Phi = \sqrt{\text{ch } \alpha + \cos \beta} \int_0^{\infty} [B \text{ch}(\pi - \beta) \tau + \\ + D \text{sh}(\pi - \beta) \tau] P_{-\frac{1}{2} + i\tau}(\text{ch } \alpha) d\tau, \end{aligned} \quad (76.6)$$

то граничное условие $\left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{\beta=\pi} = 0$ удовлетворяется, и из оставшихся трех условий (76.3) находим

$$\left. \begin{aligned} \frac{(\text{ch } \alpha + 1)^{3/2}}{a} \int_0^{\infty} \tau [A \text{sh } \pi\tau - 2(1 - \nu)(B \text{sh } \pi\tau + D \text{ch } \pi\tau)] \times \\ \times P_{-\frac{1}{2} + i\tau}(\text{ch } \alpha) d\tau = -q, \\ (\text{ch } \alpha + 1)^{1/2} \int_0^{\infty} [-A \text{ch } \pi\tau + (1 - 2\nu)(B \text{ch } \pi\tau + D \text{sh } \pi\tau)] \times \\ \times P_{-\frac{1}{2} + i\tau}(\text{ch } \alpha) d\tau = c, \end{aligned} \right\} \quad (76.7)$$

причем

$$A = (3 - 4\nu)B. \quad (76.8)$$

Исключая величину A и пользуясь разложениями [см. (57.12)]

$$\left. \begin{aligned} (\text{ch } \alpha + 1)^{-1/2} = \sqrt{2} \int_0^{\infty} P_{-\frac{1}{2} + i\tau}(\text{ch } \alpha) \frac{d\tau}{\text{ch } \pi\tau}, \\ (\text{ch } \alpha + 1)^{3/2} = 2\sqrt{2} \int_0^{\infty} P_{-\frac{1}{2} + i\tau}(\text{ch } \alpha) \frac{\tau^2 d\tau}{\text{ch } \pi\tau}, \end{aligned} \right\} \quad (76.9)$$

получаем для B и D систему

$$\left. \begin{aligned} -(1-2\nu)B \operatorname{sh} \pi\tau + 2(1-\nu)D \operatorname{ch} \pi\tau &= \frac{1\sqrt{2}aq\tau}{\operatorname{ch} \pi\tau}, \\ -2(1-\nu)B \operatorname{ch} \pi\tau + (1-2\nu)D \operatorname{sh} \pi\tau &= \frac{c\sqrt{2}}{\operatorname{ch} \pi\tau}, \end{aligned} \right\} \quad (76.10)$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{2}}{(3-4\nu)\operatorname{ch} \pi\tau} \cdot \frac{2aq\tau(1-2\nu)\operatorname{sh} \pi\tau - 2(1-\nu)c\operatorname{ch} \pi\tau}{\operatorname{sh}^2 \pi\tau + k^2}, \\ D &= \frac{\sqrt{2}}{(3-4\nu)\operatorname{ch} \pi\tau} \cdot \frac{4aq\tau(1-\nu)\operatorname{ch} \pi\tau - (1-2\nu)c\operatorname{sh} \pi\tau}{\operatorname{sh}^2 \pi\tau + k^2}, \end{aligned} \right\} \quad (76.11)$$

где

$$k = \frac{2(1-\nu)}{\sqrt{3-4\nu}}.$$

Перейдем теперь к определению величины c из условия

$$\int_{\infty}^{\alpha} \frac{\partial F}{\partial r} dz \Big|_{\beta=\pi} = 0, \quad (76.12)$$

которое на основании формулы (71.10) может быть записано еще так:

$$\int_0^{\alpha} \frac{r}{a} \cdot \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{\beta=0} dr = \int_0^{\infty} \operatorname{th} \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\partial F}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0} d\alpha. \quad (76.13)$$

Подставляя в выражение

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0} &= -\sqrt{\operatorname{ch} \alpha + 1} \int_0^{\infty} \tau A \operatorname{sh} \pi\tau P_{-\nu/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau = \\ &= -2\sqrt{2} \sqrt{\operatorname{ch} \alpha + 1} \int_0^{\infty} \frac{aq(1-2\nu)\tau \operatorname{sh} \pi\tau - (1-\nu)c \operatorname{ch} \pi\tau}{\operatorname{ch} \pi\tau (\operatorname{sh}^2 \pi\tau + k^2)} \times \\ &\quad \times \tau \operatorname{sh} \pi\tau P_{-\nu/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau \end{aligned}$$

интегральное представление (57.15) и пользуясь формулами

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \pi\tau \sin \tau s}{\operatorname{sh}^2 \pi\tau + k^2} d\tau &= \frac{\sin \theta s}{2 \operatorname{ch} \pi\theta \operatorname{ch} \frac{s}{2}}, \\ \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \pi\tau \cos \tau s}{\operatorname{sh}^2 \pi\tau + k^2} d\tau &= \frac{\cos \theta s}{2 \operatorname{ch} \pi\theta \operatorname{ch} \frac{s}{2}} \quad (k = \operatorname{ch} \pi\theta), \end{aligned} \right\} \quad (76.14)$$

получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0} &= 4 \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} [aq(1-2\nu) I_1(\alpha) - c(1-\nu) I_2(\alpha)], \\ I_1 &= \frac{1}{\pi \sqrt{2} \operatorname{sh} \pi \theta} \int_a^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} s - \operatorname{ch} \alpha}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\frac{\sin \theta s}{\operatorname{ch} \frac{s}{2}} \right) ds, \\ I_2 &= \frac{1}{\pi \sqrt{2} \operatorname{ch} \pi \theta} \int_a^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} s - \operatorname{ch} \alpha}} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\cos \theta s}{\operatorname{ch} \frac{s}{2}} \right) ds. \end{aligned} \right\} (76.15)$$

Теперь подстановка (76.15) в (76.13) и выполнение интегрирования по переменной α дает

$$c = aq \frac{L_1}{L_2}, \quad (76.16)$$

где

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= \int_0^{\infty} \arccos \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{r}{2}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\frac{\sin \theta s}{\operatorname{ch} \frac{s}{2}} \right) ds, \\ L_2 &= \int_0^{\infty} \arccos \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{s}{2}} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\cos \theta s}{\operatorname{ch} \frac{s}{2}} \right) ds. \end{aligned} \right\} (76.17)$$

Так как

$$L_1 = -\frac{\pi \theta^2}{2 \operatorname{sh} \pi \theta}, \quad L_2 = -\frac{\pi \theta}{\operatorname{sh} \pi \theta}, \quad (76.18)$$

то окончательно

$$c = \frac{1}{2} aq \theta. \quad (76.19)$$

В заключение выведем еще формулу для нормальных напряжений в заделке

$$\begin{aligned} \sigma_s \Big|_{\beta=\pi} &= 2(1-\nu) \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{\beta=\pi} = \frac{2(1-\nu)}{a} (\operatorname{ch} \alpha - 1)^{1/2} \int_0^{\infty} \tau DP_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau = \\ &= \frac{8q(1-\nu)}{3-4\nu} \operatorname{sh}^3 \frac{\alpha}{2} \left[4(1-\nu) \int_0^{\infty} \frac{\tau^2 P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha)}{\operatorname{sh}^2 \pi \tau + k^2} d\tau - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\theta(1-2\nu)}{2} \int_0^{\infty} \frac{\tau \operatorname{th} \pi \tau P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha)}{\operatorname{sh}^2 \pi \tau + k^2} d\tau \right]. \end{aligned} \quad (76.20)$$

Использование интегральных представлений функций Лежандра (см. § 57), а также формулы

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \tau s}{\operatorname{sh}^2 \pi \tau + k^2} d\tau = \frac{\sin \theta s}{\operatorname{sh} \frac{s}{2} \operatorname{sh} 2\pi\theta} \quad (76.21)$$

позволяет представить искомое напряжение в виде однократной квадратуры, содержащей только элементарные функции.

$$\begin{aligned} \sigma_s |_{\beta=\pi} = & \frac{8\sqrt{2}q(1-\nu)}{\pi(3-4\nu)} \left[\frac{\theta(1-2\nu)}{2\operatorname{sh} \pi\theta} \int_a^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{\operatorname{ch} s - \operatorname{ch} a}} \cdot \frac{d}{ds} \left(\frac{\sin \theta s}{\operatorname{sh} \frac{s}{2}} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{1-\nu}{k} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} s ds}{(\operatorname{ch} a + \operatorname{ch} s)^{3/2}} \cdot \frac{d}{ds} \left(\frac{\cos \theta s}{\operatorname{ch} \frac{s}{2}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (76.22)$$

Напомним, что связь величины θ с коэффициентом Пуассона ν дается формулой

$$k = \operatorname{ch} \pi\theta = \frac{2(1-\nu)}{\sqrt{3-4\nu}} \quad (76.23)$$

или

$$\theta = \frac{1}{2\pi} \ln(3-4\nu). \quad (76.24)$$

§ 77. Решение основной смешанной задачи в общем случае

Граничные условия основной смешанной задачи для полупространства с круговой линией раздела краевых условий в общем случае имеют вид

$$u|_{\beta=0} = u_0(\alpha, \varphi), \quad v|_{\beta=0} = v_0(\alpha, \varphi), \quad w|_{\beta=0} = w_0(\alpha, \varphi), \quad (77.1)$$

$$\sigma_s|_{\beta=\pi} = \sigma(\alpha, \varphi), \quad \tau_{sx}|_{\beta=\pi} = \tau_x(\alpha, \varphi), \quad \tau_{y\alpha}|_{\beta=\pi} = \tau_y(\alpha, \varphi), \quad (77.2)$$

где $u_0, v_0, w_0, \sigma, \tau_x, \tau_y$ — заданные функции.

Воспользуемся представлениями перемещений и напряжений через четыре гармонические функции Папковича—Нейбера:*

$$2Gu = -\frac{\partial F}{\partial x} + 4(1-\nu)\Phi_1, \quad (77.3)$$

* Напомним, что одна из четырех функций может быть набрана произвольно.

$$2Gv = -\frac{\partial F}{\partial y} + 4(1-\nu)\Phi_2, \quad (77.4)$$

$$2Gw = -\frac{\partial F}{\partial z} + 4(1-\nu)\Phi_3, \quad (77.5)$$

$$F = \Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2 + z\Phi_3, \quad (77.6)$$

$$\sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} [2(1-\nu)\Phi_3 - \Phi_4] + 2\nu \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right) - \left(x \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} + y \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} + z \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial z^2} \right), \quad (77.7)$$

$$\tau_{zx} = \frac{\partial}{\partial x} \left[(1-2\nu)\Phi_3 - \Phi_4 - x \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} - y \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} - z \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right] + 2(1-\nu) \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}, \quad (77.8)$$

$$\tau_{yz} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(1-2\nu)\Phi_3 - \Phi_4 - x \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} - y \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} - z \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right] + 2(1-\nu) \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}, \quad (77.9)$$

$$\Phi_4 = \frac{\partial \Phi_0}{\partial z}. \quad (77.10)$$

Так как на двух частях границы $z=0$ полупространства — $\beta=0$ ($r < a$) и $\beta=\pi$ ($r > a$) — мы имеем шесть граничных условий (77.1), (77.2), а в нашем распоряжении находятся четыре гармонические функции, то мы можем произвольно задавать еще два краевых условия. В качестве первого из таких дополнительных условий мы примем, что функция F , определяемая равенством (77.7), при $\beta=0$ обращается в некоторую плоскую гармоническую функцию

$$F|_{\beta=0} = \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} F_m r^m e^{im\varphi} \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2}), \quad (77.11)$$

где F_m — постоянные коэффициенты, подлежащие в дальнейшем определению.

Наряду с этим удобно положить

$$[(1-2\nu)\Phi_3 - \Phi_4]_{\beta=\pi} = \left(x \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + y \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \right)_{\beta=\pi}. \quad (77.12)$$

Из принятых дополнительных соотношений (77.11) и (77.12), а также первых двух краевых условий (77.1) и условий (77.2), связанных с касательными напряжениями, немедленно следуют

раздельные краевые условия для функций Φ_1 и Φ_2 :

$$\Phi_1|_{\beta=0} = \frac{1}{4(1-\nu)} \left(2Gu_0 + \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{\beta=0} \right), \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \Big|_{\beta=\pi} = \frac{\tau_x}{2(1-\nu)}, \quad (77.13)$$

$$\Phi_2|_{\beta=0} = \frac{1}{4(1-\nu)} \left(2Gv_0 + \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{\beta=0} \right), \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \Big|_{\beta=\pi} = \frac{\tau_y}{2(1-\nu)}. \quad (77.14)$$

Краевые задачи теории потенциала для полупространства $z > 0$ при граничных условиях типа (77.13) и (77.14) могут быть решены с помощью разложения искомой функции в ряд Фурье по координате φ и в интеграл Мелера—Фока по функциям $P_{\nu, \mu}^m(\operatorname{ch} \alpha)$, если предположить, что величины, стоящие в правых частях (77.13) и (77.14), допускают соответствующее разложение.

Граничное условие (77.11) с учетом (77.13) и (77.14) может быть записано в виде следующего условия для функции Φ_0 :

$$\begin{aligned} \Phi_0|_{\beta=0} = & -\frac{G}{2(1-\nu)}(xu + yv)|_{\beta=0} + \\ & + \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \left[1 - \frac{m}{4(1-\nu)} \right] F_m r^m e^{im\varphi}. \end{aligned} \quad (77.15)$$

Применяя к (77.15) двумерный оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

получаем, что

$$-\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z^2} \Big|_{\beta=0} = -\frac{\partial \Phi_4}{\partial z} \Big|_{\beta=0} = -\frac{G}{2(1-\nu)} [\Delta(xu + yv)]|_{\beta=0}.$$

Присоединяя к последнему равенству оставшиеся граничные условия — последнее условие (77.1), первое условие (77.2) и соотношение (77.12) — приходим к следующим смешанным краевым условиям для двух гармонических в полупространстве $z > 0$ функций Φ_3 и Φ_4 :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_4}{\partial z} \Big|_{\beta=0} &= \frac{G}{2(1-\nu)} [\Delta(xu + yv)]|_{\beta=0} = F^{(1)}(\alpha, \varphi), \\ (3 - 4\nu)\Phi_3 - \Phi_4|_{\beta=0} &= 2Gw_0 + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z}(x\Phi_1 + y\Phi_2)|_{\beta=0} = F^{(2)}(\alpha, \varphi), \\ \frac{\partial}{\partial z}[2(1-\nu)\Phi_3 - \Phi_4]|_{\beta=\pi} &= \sigma + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(x\Phi_1 + y\Phi_2)|_{\beta=\pi} - \\ &- 2\nu \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right) \Big|_{\beta=\pi} = F^{(3)}(\alpha, \varphi), \\ [(1-2\nu)\Phi_3 - \Phi_4]|_{\beta=\pi} &= \frac{1}{2(1-\nu)}(x\tau_{xx} + y\tau_{yy})|_{\beta=\pi} = F^{(4)}(\alpha, \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (77.16)$$

Напомним, что функции $|\text{grad } \Phi_0|$, Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 на бесконечности должны иметь порядок $\frac{1}{R}$, а их производные по x , y и z — порядок $\frac{1}{R^2}$ ($R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$). Кроме того, полученные после решения задачи перемещения и напряжения должны удовлетворять некоторым условиям при $\alpha \rightarrow \infty$ (см. § 57).

Заметим теперь, что (77.15) и первое краевое условие (77.16) неэквивалентны друг другу. В самом деле, из самого способа получения первого условия (77.16) следует, что если после решения основной краевой задачи попытаться определить функцию Φ_0 через Φ_4 с помощью формулы

$$\Phi_0 = \int_{\infty}^z \Phi_4 dz,$$

то значение найденной таким способом функции Φ_0 при $\beta = 0$ будет, вообще говоря, отличаться от правой части (77.15) на некоторую гармоническую функцию переменных x и y . В дальнейшем, после решения основной краевой задачи, будет показано, что надлежащим выбором коэффициентов F_m можно добиться точного выполнения условия (77.15).

Таким образом, задача заключается прежде всего в нахождении двух гармонических в полупространстве $z > 0$ функций Φ_3 и Φ_4 , удовлетворяющих на границе $z = 0$ краевым условиям (77.16).

Будем искать Φ_3 и Φ_4 в виде двойных разложений: в ряд Фурье по переменной φ и в обобщенный интеграл Мелера—Фока по функциям $P_{\mu/\nu}^m(\text{ch } \alpha)$:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_3 &= \sqrt{\text{ch } \alpha + \cos \beta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} [A_3^m \text{ch } \beta\tau + \\ &\quad + B_3^m \text{sh } \beta\tau] P_{\mu/\nu}^m(\text{ch } \alpha) d\tau, \\ \Phi_4 &= \sqrt{\text{ch } \alpha + \cos \beta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} [A_4^m \text{ch } \beta\tau + \\ &\quad + B_4^m \text{sh } \beta\tau] P_{\mu/\nu}^m(\text{ch } \alpha) d\tau, \end{aligned} \right\} \quad (77.17)$$

где $A_i^m(\tau)$ ($i = 3, 4$) — неизвестные функции, подлежащие определению из граничных условий задачи.

Подставляя (77.17) в краевые условия (77.16) и заменяя оператор $\frac{\partial}{\partial z} \Big|_{\beta=0}$ на $\frac{1}{h} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0}$ и $\frac{\partial}{\partial z} \Big|_{\beta=\pi}$ на $-\frac{1}{h} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\pi}$, где $h = \frac{a}{\text{ch } \alpha + \cos \beta}$, приходим к следующим разложениям:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \int_0^{\infty} \tau B_4^m(\tau) P_{\nu/2+i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha) d\tau &= \frac{aF^{(1)}(\alpha, \varphi)}{(\operatorname{ch} \alpha + 1)^{3/2}} = f_1(\alpha, \varphi), \\
\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \int_0^{\infty} [(3 - 4\nu) A_3^m(\tau) - A_4^m(\tau)] P_{\nu/2+i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha) d\tau &= \\
&= \frac{F^{(2)}(\alpha, \varphi)}{(\operatorname{ch} \alpha + 1)^{1/2}} = f_2(\alpha, \varphi), \\
\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \int_0^{\infty} \tau \{2(1 - \nu) [A_3^m(\tau) \operatorname{sh} \pi\tau + B_3^m(\tau) \operatorname{ch} \pi\tau] - \\
&- [A_4^m(\tau) \operatorname{sh} \pi\tau + B_4^m(\tau) \operatorname{ch} \pi\tau]\} P_{\nu/2+i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha) d\tau = \\
&= -\frac{aF^{(3)}(\alpha, \varphi)}{(\operatorname{ch} \alpha - 1)^{3/2}} = f_3(\alpha, \varphi), \\
\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \int_0^{\infty} \{ (1 - 2\nu) [A_3^m(\tau) \operatorname{ch} \pi\tau + B_3^m(\tau) \operatorname{sh} \pi\tau] - \\
&- [A_4^m(\tau) \operatorname{ch} \pi\tau + B_4^m(\tau) \operatorname{sh} \pi\tau] \} P_{\nu/2+i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha) d\tau = \\
&= \frac{F^{(4)}(\alpha, \varphi)}{(\operatorname{ch} \alpha - 1)^{1/2}} = f_4(\alpha, \varphi).
\end{aligned} \tag{77.18}$$

Если функции $f_k(\alpha, \varphi)$ могут быть представлены в виде двойных разложений

$$f_k(\alpha, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \int_0^{\infty} f_k^m(\tau) P_{\nu/2+i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha) d\tau \quad (k=1, 2, 3, 4), \tag{77.19}$$

то для искоемых функций получается система уравнений

$$\begin{aligned}
B_4^m &= \frac{1}{\tau} f_1^m, \quad (3 - 4\nu) A_3^m - A_4^m = f_2^m, \\
2(1 - \nu) (A_3^m \operatorname{sh} \pi\tau + B_3^m \operatorname{ch} \pi\tau) - \\
&- (A_4^m \operatorname{sh} \pi\tau + B_4^m \operatorname{ch} \pi\tau) = \frac{1}{\tau} f_3^m, \\
(1 - 2\nu) (A_3^m \operatorname{ch} \pi\tau + B_3^m \operatorname{sh} \pi\tau) - (A_4^m \operatorname{ch} \pi\tau + B_4^m \operatorname{sh} \pi\tau) &= f_4^m.
\end{aligned} \tag{77.20}$$

Величины f_k^m могут быть, вообще говоря, найдены по теореме Фурье и формуле разложения Мелера—Фока.

Решая систему (77.20) и подставляя найденные значения A_3^m , B_3^m , A_4^m , B_4^m в формулы (77.17), получим выражения для функций Φ_3 и Φ_4 , содержащие неопределенные коэффициенты F_m .

Согласно сказанному выше, граничное условие (77.15) остается, пока еще невыполненным. Покажем, каким образом нужно выбирать коэффициенты F_m , чтобы удовлетворить условию (77.15).

Положим, как и в § 68,

$$\Phi_n = \Phi_n^{(0)} + \Phi_n' \quad (n=0, 1, 2, 3, 4), \quad (77.21)$$

где функции $\Phi_n^{(0)}$ связаны с коэффициентами F_m , а функции Φ_n' происходят от заданных условиями (77.1) и (77.2) внешних усилий и перемещений.

Поскольку для функций $\Phi_1^{(0)}$ и $\Phi_2^{(0)}$ сохраняются краевые условия (68.12), постольку эти функции по-прежнему даются формулами (68.13).

Воспользовавшись далее соотношениями (68.14), а также вытекающим из (68.13) выражением

$$\left[x \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial z} + y \frac{\partial \Phi_2^{(0)}}{\partial z} \right]_{\beta=0} = -\frac{\operatorname{ch} \frac{\alpha}{2}}{4(1-\nu)} \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m F_m \operatorname{th}^m \frac{\alpha}{2} e^{im\varphi}, \quad (77.22)$$

где

$$\gamma_m = \frac{m a^{m-1} 2^{2m-1} (m-1)!^2}{\pi (2m-2)!},$$

получаем из (77.18) следующие неразделённые смешанные краевые условия для функций $\Phi_3^{(0)}$ и $\Phi_4^{(0)}$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_4^{(0)}}{\partial z} \Big|_{\beta=0} &= 0, \\ [(3-4\nu)\Phi_3^{(0)} - \Phi_4^{(0)}]_{\beta=0} &= -\frac{\operatorname{ch} \frac{\alpha}{2}}{4(1-\nu)} \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m F_m \operatorname{th}^m \frac{\alpha}{2} e^{im\varphi}, \\ \frac{\partial}{\partial z} [2(1-\nu)\Phi_3^{(0)} - \Phi_4^{(0)}]_{\beta=\pi} &= \\ &= -\frac{1-2\nu + \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha}{2}}{4a(1-\nu)} \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m F_m \operatorname{th}^m \frac{\alpha}{2} e^{im\varphi}, \\ [(1-2\nu)\Phi_3^{(0)} - \Phi_4^{(0)}]_{\beta=\pi} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (77.23)$$

В связи с наличием в правых частях условий (77.23) тех слагаемых, которые не разлагаются в интеграл Мелера—Фока, производим, как всегда, выделение особых решений (см. § 58). Если в данном случае положить

$$\Phi_4^{(0)} = \Phi_4^* + \bar{\Phi}_4, \quad \Phi_3^{(0)} = \bar{\Phi}_3, \quad (77.24)$$

где

$$4(1-\nu)\Phi_4^* = \frac{\cos \frac{\beta}{2}}{\sqrt{2}} \sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m F_m \operatorname{th}^m \frac{\alpha}{2} e^{im\varphi}, \quad (77.25)$$

и заметить, что

$$\left. \begin{aligned} 4(1-\nu)\Phi_4^*|_{\beta=0} &= \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m F_m \operatorname{th}^m \frac{\alpha}{2} e^{im\varphi}, \\ 4(1-\nu) \frac{\partial \Phi_4^*}{\partial z} \Big|_{\beta=\pi} &= \frac{\operatorname{sh}^3 \frac{\alpha}{2}}{a} \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m F_m \operatorname{th}^m \frac{\alpha}{2} e^{im\varphi}, \end{aligned} \right\} (77.26)$$

то на долю функций $\bar{\Phi}_3, \bar{\Phi}_4$ остаются краевые условия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{\Phi}_4}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0} &= 0, \quad [(3-4\nu)\bar{\Phi}_3 - \bar{\Phi}_4]_{\beta=0} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \beta} [2(1-\nu)\bar{\Phi}_3 - \bar{\Phi}_4] \Big|_{\beta=\pi} &= \\ &= \frac{1-2\nu}{8\sqrt{2}(1-\nu)\operatorname{sh}^2 \frac{\alpha}{2}} \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m F_m \operatorname{th}^m \frac{\alpha}{2} e^{im\varphi}, \\ [(1-2\nu)\bar{\Phi}_3 - \bar{\Phi}_4]_{\beta=\pi} &= 0, \end{aligned} \right\} (77.27)$$

правая часть которых уже может быть представлена в виде интегрального разложения по функциям $P_{\nu, \nu+i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha)$.

Полагая

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{3,4} &= \frac{(1-2\nu)\sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}}{8\sqrt{2}(1-\nu)} \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m F_m e^{im\varphi} \times \\ &\times \int_0^{\infty} [\bar{A}_{3,4}^m \operatorname{ch} \beta\tau + \bar{B}_{3,4}^m \operatorname{sh} \beta\tau] P_{\nu, \nu+i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha) d\tau, \end{aligned} \quad (77.28)$$

подставляя (77.28) в граничные условия (77.27) и пользуясь обобщенной формулой Мелера—Фока, получаем

$$\left. \begin{aligned} \bar{B}_4^m &= 0, \quad \bar{A}_4^m = (3-4\nu)\bar{A}_3^m, \\ (1-2\nu)(\bar{A}_3^m \operatorname{ch} \pi\tau + \bar{B}_3^m \operatorname{sh} \pi\tau) - \bar{A}_4^m \operatorname{ch} \pi\tau &= 0, \\ 2(1-\nu)\bar{A}_3^m \operatorname{sh} \pi\tau + \bar{B}_3^m \operatorname{ch} \pi\tau - \bar{A}_4^m \operatorname{sh} \pi\tau &= \\ &= 2(-1)^m \operatorname{th} \pi\tau \int_0^{\infty} \operatorname{th}^{m-1} \frac{\alpha}{2} P_{\nu, \nu+i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha) d\alpha. \end{aligned} \right\} (77.29)$$

Из формулы (57.22) находим для величин A_3^m и B_3^m систему уравнений

$$\begin{aligned} & -(1-2\nu)\bar{A}_3^m \operatorname{sh} \pi\tau + 2(1-\nu)B_3^m \operatorname{ch} \pi\tau = \\ & = 2\Gamma(m) \operatorname{th} \pi\tau \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\tau - m\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\tau + m\right)}, \quad (77.30) \\ & -2(1-\nu)\bar{A}_3^m \operatorname{ch} \pi\tau + (1-2\nu)B_3^m \operatorname{sh} \pi\tau = 0. \end{aligned}$$

Интересующая нас в первую очередь функция $\bar{\Phi}_4$ находится подстановкой значения \bar{A}_4^m

$$\bar{A}_4^m = \frac{2(1-2\nu) \operatorname{sh} \pi\tau}{\operatorname{sh}^2 \pi\tau + k^2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\tau - m\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\tau + m\right)} \Gamma(m) \operatorname{th} \pi\tau, \quad k = \frac{2(1-\nu)}{\sqrt{3-4\nu}}. \quad (77.31)$$

в интегральное разложение (77.28)

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_4 &= \frac{(1-2\nu)^2}{8(1-\nu)} \sqrt{2(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)} \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m F_m \Gamma(m) e^{im\varphi} \times \\ & \times \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{th} \pi\tau \operatorname{sh} \pi\tau}{\operatorname{sh}^2 \pi\tau + k^2} \operatorname{ch} \beta\tau P_{x+i\tau}^{-m}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau. \quad (77.32) \end{aligned}$$

Искомые коэффициенты F_m должны быть найдены из условия (77.15), которое можно записать в таком виде:

$$\begin{aligned} \int_{\infty}^z \Phi_4 dz \Big|_{\beta=0} &= -\frac{G}{2(1-\nu)} (xu + yv)_{\beta=0} + \\ & + \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \left[1 - \frac{m}{4(1-\nu)} \right] F_m r^m e^{im\varphi}. \quad (77.33) \end{aligned}$$

Так как

$$\Phi_4 = \bar{\Phi}_4 + \Phi_4^* + \Phi_4', \quad (77.34)$$

причем *

* Напомним, что соотношения (77.35) вытекают из гармоничности функции Φ_4 и из первого граничного условия (77.16) и (77.23).

$$\left. \begin{aligned} \int_{\infty}^s \Phi_4' dz |_{\beta=0} &= -\frac{G}{2(1-\nu)} (xu + yv)_{\beta=0} + \operatorname{Re} \sum_{m=0}^{\infty} G_m' r^m e^{im\varphi}, \\ \int_{\infty}^s \Phi_4^* dz |_{\beta=0} &= \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} G_m^* F_m r^m e^{im\varphi}, \\ \int_{\infty}^s \bar{\Phi}_4 dz |_{\beta=0} &= \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{G}_m F_m r^m e^{im\varphi}, \end{aligned} \right\} (77.35)$$

то из краевого условия (77.33) находим следующую формулу для F_m :

$$F_m = \frac{G_m'}{1 - \frac{m}{4(1-\nu)} - G_m^* - \bar{G}_m}, \quad (77.36)$$

где G_m' — известные числа, находимые после определения функции Φ_4 для заданных граничных условий задачи. Что касается величин G_m^* и \bar{G}_m , то мы получим их с помощью найденных выше выражений для функций Φ_4^* и $\bar{\Phi}_4$, а именно (см. § 58):

$$\begin{aligned} 4(1-\nu) \int_{\infty}^s \Phi_4^* dz |_{\beta=0} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m F_m J_0^{(m)}(\alpha, \beta) |_{\beta=0} e^{im\varphi} = \\ &= -\operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m F_m \frac{r^m}{a^{m-1}} \cdot \frac{(2m)!}{2^{2m+1} m! 2} e^{im\varphi} = \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} - m\right) F_m r^m e^{im\varphi}, \end{aligned}$$

откуда

$$G_m^* = \frac{1-2m}{8(1-\nu)}. \quad (77.37)$$

Для вычисления коэффициентов \bar{G}_m будем исходить из равенства

$$\frac{\partial^m}{\partial r^m} \left[\int_{\infty}^s \Phi_4 dr |_{\beta=0} \right] = \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{G}_m e^{im\varphi} m!, \quad (77.38)$$

правая часть которого не зависит от α . Поэтому интегрирование в левой части (77.38) можно производить по оси Oz , на которой $\alpha=0$, $dz = \frac{ad\beta}{1+\cos\beta}$ и переменная β меняется от π до нуля.

Имея в виду асимптотическое представление (см. § 57)

$$P_n^m |_{\beta \rightarrow \pi} (\operatorname{ch} \alpha) \approx_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}^m \alpha}{2^m m!} \approx_{r \rightarrow 0} \frac{(1+\cos\beta)^m}{2^m m!} \left(\frac{r}{a}\right)^m, \quad (77.39)$$

находим из (77.32), что

$$\frac{\partial^m \Phi_4}{\partial r^m} \Big|_{r=0} = \frac{(1-2\nu)^2}{8(1-\nu)} \sqrt{2(1+\cos\beta)} \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m F_m \Gamma(m) \times \\ \times e^{im\varphi} \frac{(1+\cos\beta)^m}{2^m a^m} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh}^2 \pi\tau \operatorname{ch} \beta\tau}{\operatorname{ch} \pi\tau (\operatorname{sh}^2 \pi\tau + k^2)} d\tau. \quad (77.40)$$

Пользуясь значением интеграла

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh}^2 \pi\tau \operatorname{ch} \beta\tau d\tau}{\operatorname{ch} \pi\tau (\operatorname{sh}^2 \pi\tau + k^2)} = \frac{1 - k \cos \beta\theta}{2(1-k^2) \cos \frac{\beta}{2}}, \quad k = \operatorname{ch} \pi\theta, \quad (77.41)$$

приводим условие (77.38) к такому виду:

$$\frac{(1-2\nu)^2}{16(1-\nu)(1-k^2)} \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m F_m \Gamma(m) e^{-im\varphi} a^{-m} \int_0^{\pi} \cos^{2m-2} \frac{\beta}{2} \times \\ \times (1 - k \operatorname{ch} \beta\theta) d\beta = \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{G}_m e^{im\varphi} m!. \quad (77.42)$$

Наконец, вычисляя входящую в (77.42) квадратуру [94]

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^{\pi} \cos^{2m-2} \frac{\beta}{2} (1 - k \operatorname{ch} \beta\theta) d\beta = \\ & = \left[\frac{\pi}{L_{m-1}(0)} - \frac{k \operatorname{sh} \pi\theta}{\theta L_{m-1}(4\theta^2)} \right] (2m-2)!, \\ L_n(p^2) |_{n \geq 1} &= (2^2 + p^2)(4^2 + p^2) \dots [(2n)^2 + p^2], \quad L_0(p^2) \equiv 1, \end{aligned} \right\} \quad (77.43)$$

находим

$$\bar{G}_m = \frac{3-4\nu}{32\pi(1-\nu)} 2^{2m} \left[\frac{\pi}{L_{m-1}(0)} - \frac{\operatorname{sh} 2\pi\theta}{2\theta L_{m-1}(4\theta^2)} \right] (m-1)!, \quad (77.44)$$

после чего формула (77.36) для искоемых коэффициентов F_m принимает окончательный вид

$$\left. \begin{aligned} F_m &= \frac{\bar{G}_m}{\lambda_m}; \quad m \geq 1, \\ \lambda_m &= 1 - \frac{(m-1)!^2}{8(1-\nu)} \left\{ 1 + (3-4\nu) 4^{m-1} \times \right. \\ & \times \left. \left[\frac{1}{L_{m-1}(0)} - \frac{\operatorname{sh} 2\pi\theta}{2\pi\theta L_{m-1}(4\theta^2)} \right] \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (77.45)$$

где θ имеет следующее значение [см. (76. 23) и (76. 24)]:

$$\operatorname{ch} \pi \theta = k = \frac{2(1-\nu)}{\sqrt{3-4\nu}}, \quad \theta = \frac{1}{2\pi} \ln(3-4\nu). \quad (77. 46)$$

На этом мы заканчиваем общее решение основной смешанной задачи для полупространства с круговой линией раздела граничных условий.

Заметим, что решение было дано для того случая, когда внутри круга (при $\beta=0$) заданы смещения, а вне его — напряжения; однако разработанная методика полностью применима и к другому типу основных смешанных задач, когда внутри круга (при $\beta=0$) известны напряжения, а вне его ($\beta=\pi$) — перемещения.

§ 78. Контактная задача для цилиндрического штампа, сцепленного с полупространством

Пусть на круговой в плане жесткий штамп, сцепленный с упругим полупространством $z \geq 0$, действует произвольная система внешних сил. При этом перемещения точек круга ($z=0, r < a$) будут, очевидно, совпадать с перемещениями точек основания штампа, в то время как вне указанной области отсутствуют напряжения.

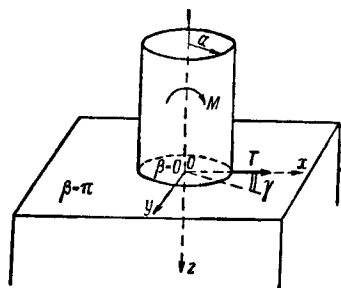


Рис. 47.

Так как задача о вдавливании штампа осевой силой решена выше (§ 75), а действие крутящего момента на сцепленный с полупространством штамп исследовано в известной работе Рейсснера и Сагоцци [217], то нам достаточно предположить, что к штампу приложена сила в плоскости его основания (например, в направлении оси Ox) и пара, расположенная в плоскости осевого сечения штампа (xOz).

Поначалу мы будем считать заданными поступательное перемещение u_0 штампа в направлении действия силы и угол поворота γ штампа вокруг оси Oy (рис. 47). В дальнейшем величины u_0 и γ будут выражены через заданные значения силы T и момента M .

Граничные условия такой задачи в случае штампа с плоским основанием имеют вид

$$\left. \begin{aligned} u|_{\beta=0} &= u_0, & w|_{\beta=0} &= \gamma x, \\ v|_{\beta=0} &= \sigma_x|_{\beta=\pi} = \tau_{xx}|_{\beta=\pi} = \tau_{yz}|_{\beta=\pi} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (78. 1)$$

и являются, очевидно, частным случаем краевых условий (77. 1) и (77. 2) основной смешанной задачи, рассмотренной в предыдущем параграфе.

Проведем соответствующие выкладки для получения решения поставленной контактной задачи.

Заметим прежде всего, что так как функции, стоящие в правых частях граничных условий данной задачи, зависят от полярного угла через множитель $\cos \varphi$, то, очевидно, зависимость функций напряжений от координаты φ будет носить тот же характер. Поэтому коэффициенты F_m при $m \geq 2$ будут равны нулю, а дополнительное условие (77.11) может быть записано в виде

$$F|_{\beta=0} = F_1 r \cos \varphi. \quad (78.2)$$

Переходя к определению функции Φ_1 из граничных условий

$$\Phi_1|_{\beta=0} = \frac{2Gu_0 + F_1}{4(1-\nu)} = A_1, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}|_{\beta=\pi} = 0, \quad (78.3)$$

мы видим, что можно формально положить $\Phi'_0 = 0$, после чего, согласно (59.7) и (59.16),

$$\Phi_1 \equiv \Phi_1^{(0)} = \frac{2}{\pi} A_1 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}{1 - \cos \beta}}. \quad (78.4)$$

Что касается функции Φ_2 , то для нее имеем однородные краевые условия, так что $\Phi_2 \equiv 0$. Следовательно, условие (78.2) принимает вид

$$\Phi_0|_{\beta=0} = (F_1 - A_1) r \cos \varphi = [(3 - 4\nu) A_1 - 2Gu_0] r \cos \varphi. \quad (78.5)$$

На основании результатов, полученных в предыдущем параграфе, функции напряжений $\Phi_3^{(0)}$ и $\Phi_4^{(0)}$ определяются следующими выражениями: *

$$\left. \begin{aligned} \Phi_3^{(0)} &\equiv \bar{\Phi}_3, \quad \Phi_4^{(0)} = \Phi_4^* + \bar{\Phi}_4, \\ \Phi_4^* &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} A_1 \sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \cos \frac{\beta}{2} \operatorname{th} \frac{\alpha}{2} \cos \varphi, \\ \bar{\Phi}_3 &= \frac{1-2\nu}{\pi} A_1 \cos \varphi \sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \times \\ &\times \int_0^{\infty} (\bar{A}_3 \operatorname{ch} \beta \tau + B_3 \operatorname{sh} \beta \tau) P_{\frac{1}{2}, \tau + i\alpha}^{-1}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau, \\ \bar{A}_3 &= -\frac{\sqrt{2}(1-2\nu) \operatorname{sh} \pi \tau \operatorname{th} \pi \tau}{\left(\tau^2 + \frac{1}{4}\right) (\operatorname{sh}^2 \pi \tau + k^2)}, \\ B_3 &= \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \operatorname{cth} \pi \tau \bar{A}_3, \quad k = \frac{2(1-\nu)}{\sqrt{3-4\nu}}, \\ \bar{\Phi}_4 &= \frac{A_1}{\pi} (1-2\nu)^2 \cos \varphi \sqrt{2(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)} \times \\ &\times \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \pi \tau \operatorname{th} \pi \tau \operatorname{ch} \beta \tau}{\operatorname{sh}^2 \pi \tau + k^2} P_{\frac{1}{2}, \tau + i\alpha}^{-1}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (78.6)$$

* Здесь использованы формулы (77.24), (77.25), (77.28) и (77.30), причем вместо F_1 подставлена величина $4(1-\nu)A_1$.

Неизвестный коэффициент A_1 (или F_1) можно будет определить после нахождения функций Φ'_3 и Φ'_4 из граничных условий (77.16), которые в данной задаче имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi'_4}{\partial z} \Big|_{\beta=0} = 0, \quad [(3-4\nu)\Phi'_3 - \Phi'_4]_{\beta=0} = 2G\gamma a \operatorname{th} \frac{\alpha}{2} \cos \varphi, \\ \left[2(1-\nu) \frac{\partial \Phi'_3}{\partial z} - \frac{\partial \Phi'_4}{\partial z} \right]_{\beta=\pi} = 0, \quad [(1-2\nu)\Phi'_3 - \Phi'_4]_{\beta=\pi} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (78.7)$$

Представляя искомые функции в виде интегральных разложений Мелера—Фока

$$\begin{aligned} \Phi'_{3,4} = 2G\gamma a \cos \varphi \sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \times \\ \times \int_0^{\infty} (A'_{3,4} \operatorname{ch} \beta\tau + B'_{3,4} \operatorname{sh} \beta\tau) P^1_{\nu, \nu+\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau \end{aligned} \quad (78.8)$$

и пользуясь формулой [см. (57.18)]

$$\frac{\operatorname{th} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{ch}^2 \frac{\alpha}{2}} = -4 \int_0^{\infty} P^1_{\nu, \nu+\tau}(\operatorname{ch} \alpha) \frac{d\tau}{\operatorname{ch} \pi\tau},$$

находим, что $B'_4 = 0$, $A'_4 = (3-4\nu)A'_3 + \frac{2\sqrt{2}}{\operatorname{ch} \pi\tau}$, а величины A'_3 и B'_3 должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} -(1-2\nu)A'_3 \operatorname{sh} \pi\tau + 2(1-\nu)B'_3 \operatorname{ch} \pi\tau = 2\sqrt{2} \operatorname{th} \pi\tau, \\ -2(1-\nu)A'_3 \operatorname{ch} \pi\tau + (1-2\nu)B'_3 \operatorname{sh} \pi\tau = 2\sqrt{2}. \end{aligned} \right\} \quad (78.9)$$

Таким образом, имеем

$$\left. \begin{aligned} A'_3 = -\frac{2\sqrt{2}}{3-4\nu} \cdot \frac{2(1-\nu) + \operatorname{sh}^2 \pi\tau}{\operatorname{ch} \pi\tau (\operatorname{sh}^2 \pi\tau + k^2)}, \quad B'_3 = \frac{2\sqrt{2}}{3-4\nu} \cdot \frac{\operatorname{sh} \pi\tau}{\operatorname{sh}^2 \pi\tau + k^2}, \\ A'_4 = -\frac{4\sqrt{2}(1-\nu)(1-2\nu)}{(3-4\nu) \operatorname{ch} \pi\tau (\operatorname{sh}^2 \pi\tau + k^2)}, \quad k = \frac{2(1-\nu)}{\sqrt{3-4\nu}}. \end{aligned} \right\} \quad (78.10)$$

Остается теперь найти величину A_1 из условия (78.5), которое на основании (77.35), (77.37) и (77.44) можно записать так:

$$\left. \begin{aligned} 4(1-\nu)A_1(G_1^* + \bar{G}_1) + G_1' = (3-4\nu)A_1 - 2Gu_0, \\ G_1^* = \frac{1}{8(1-\nu)}, \\ \bar{G}_1 = \frac{3-4\nu}{8(1-\nu)} \left(1 - \frac{\operatorname{sh} 2\pi\theta}{2\pi\theta} \right) \quad (k = \operatorname{ch} \pi\theta). \end{aligned} \right\} \quad (78.11)$$

Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_4' dz |_{\beta=0} = G_1' r \cos \varphi,$$

то

$$G_1' = \frac{1}{\cos \varphi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Phi_4'}{\partial z} dz |_{\beta=0} = \frac{1}{\cos \varphi} \int_{\pi}^0 \frac{\partial \Phi_4'}{\partial \alpha} |_{\alpha=0} d\beta. \quad (78.12)$$

Пользуясь асимптотической формулой

$$P_{1/2+i\tau}^{1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) \approx -\frac{\alpha}{2} \left(\tau^2 + \frac{1}{4} \right),$$

получаем из (78.8) и (78.10)

$$G_1' = -\frac{4\sqrt{2} G\gamma a (1-\nu)(1-2\nu)}{3-4\nu} \int_0^{\infty} \frac{\left(\tau^2 + \frac{1}{4} \right) d\tau}{\operatorname{ch} \pi\tau (\operatorname{sh}^2 \pi\tau + k^2)} \times \\ \times \int_0^{\pi} \operatorname{ch} \beta\tau \sqrt{1 + \cos \beta} d\beta \quad (78.13)$$

или окончательно, после взятия квадратур,

$$\int_0^{\pi} \operatorname{ch} \beta\tau \cos \frac{\beta}{2} d\beta = \frac{\operatorname{ch} \pi\tau}{2 \left(\tau^2 + \frac{1}{4} \right)}, \quad \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{\operatorname{sh}^2 \pi\tau + k^2} = \frac{\theta}{\operatorname{sh} 2\pi\theta}, \quad (78.14)$$

$$G_1' = -2G\gamma\theta, \quad \theta = \frac{1}{2\pi} \ln(3-4\nu). \quad (78.15)$$

Таким образом, искомый коэффициент A_1 дается формулой

$$A_1 = \frac{G(u_0 - \gamma a \theta)}{(1-\nu) \left(1 + \frac{1-2\nu}{2\pi\theta} \right)}, \quad (78.16)$$

на чем можно было бы закончить общее решение поставленной задачи.

Однако следует помнить, что вошедшие в решение перемещения штампа u_0 и γ на самом деле неизвестны и их следует определить через заданные значения момента M и силы T (рис. 47), пользуясь условиями статики

$$-M = \int_0^{a/2} \int_0^{a/2} \sigma_x |_{\beta=0} r^2 \cos \varphi dr d\varphi, \quad -T = \int_0^{a/2} \int_0^{a/2} \tau_{xz} |_{\beta=0} r dr d\varphi. \quad (78.17)$$

В дальнейшем вычисляются значения возмущающих в области контакта напряжений и с помощью (78.17) находятся связи между перемещениями штампа и приложенными к нему усилиями.

Для нормальных напряжений из (77.7) получаем формулу

$$\begin{aligned} \sigma_s |_{\beta=0} &= 2(1-\nu) \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \Big|_{\beta=0} = \\ &= \frac{2(1-\nu)}{a} (\operatorname{ch} \alpha + 1) \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial \beta} + \frac{\partial \Phi'_3}{\partial \beta} \right) \Big|_{\beta=0}. \end{aligned} \quad (78.18)$$

Так как

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_3}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0} &= -\frac{2\sqrt{2}(1-\nu)(1-2\nu)}{\pi(3-4\nu)} A_1 \cos \varphi \sqrt{\operatorname{ch} \alpha + 1} \times \\ &\times \int_0^{\infty} P_{-\nu/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) \frac{\tau \operatorname{sh} \pi \tau d\tau}{\left(\tau^2 + \frac{1}{4}\right)(\operatorname{sh}^2 \pi \tau + k^2)}, \\ \frac{\partial \Phi'_3}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0} &= \frac{4\sqrt{2}G\gamma a}{3-4\nu} \cos \varphi \sqrt{\operatorname{ch} \alpha + 1} \int_0^{\infty} P_{-\nu/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) \frac{\tau \operatorname{sh} \pi \tau d\tau}{\operatorname{sh}^2 \pi \tau + k^2}, \end{aligned} \right\} (78.19)$$

то формула (78.18) принимает вид

$$\begin{aligned} \sigma_s |_{\beta=0} &= \frac{4\sqrt{2}(1-\nu)}{a(3-4\nu)} \cos \varphi (\operatorname{ch} \alpha + 1)^{3/2} \times \\ &\times \left[2G\gamma a \frac{dI}{da} - \frac{A_1}{\pi} (1-\nu)(1-2\nu) I_1 \right], \end{aligned} \quad (78.20)$$

где введены обозначения

$$\left. \begin{aligned} I &= \int_0^{\infty} \frac{\tau \operatorname{sh} \pi \tau}{\operatorname{sh}^2 \pi \tau + k^2} P_{-\nu/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau, \\ I_1 &= \int_0^{\infty} \frac{\tau \operatorname{sh} \pi \tau}{\operatorname{sh}^2 \pi \tau + k^2} P_{-\nu/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) \frac{d\tau}{\tau^2 + \frac{1}{4}}. \end{aligned} \right\} (78.21)$$

Вычисление первой из этих квадратур производится подстановкой вместо $P_{-\nu/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha)$ его интегрального представления, переменной порядка интегрирования и использованием второй формулы (76.14), после чего получаем

$$I = -\frac{\pi}{\pi\sqrt{2} \operatorname{ch} \pi \theta} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} s - \operatorname{ch} \alpha}} d \left(\frac{\cos \theta s}{\operatorname{ch} \frac{s}{2}} \right). \quad (78.22)$$

Второй интеграл (78.21) вычисляется аналогично с помощью вытекающей из дифференциального уравнения для функций $P_{\nu, \mu}^{\lambda}(\operatorname{ch} \alpha)$ формулы

$$\frac{1}{\tau^2 + \frac{1}{4}} P_{\nu, \mu}^{\lambda}(\operatorname{ch} \alpha) = -\frac{1}{\operatorname{sh} \alpha} \int_0^{\alpha} \operatorname{sh} \xi P_{\nu, \mu}^{\lambda}(\operatorname{ch} \xi) d\xi. \quad (78.23)$$

Применяя интегральное представление (57.14), пользуясь первой формулой (76.14) и меняя порядок интегрирования, находим

$$I_1 = -\frac{\sqrt{2}}{\pi \operatorname{sh} \pi \theta \operatorname{sh} \alpha} \int_0^{\alpha} \sqrt{\operatorname{ch} \beta - \operatorname{ch} s} d \left(\frac{\sin \theta s}{\operatorname{ch} \frac{s}{2}} \right). \quad (78.24)$$

Таким образом, нормальные напряжения под штампом даются следующим выражением:

$$\begin{aligned} \sigma_z |_{\beta=0} &= \frac{4(1-\nu)}{\pi a(3-4\nu)} \cos \varphi (\operatorname{ch} \alpha + 1)^{3/2} \times \\ &\times \left[\frac{2A_1(1-\nu)(1-2\nu)}{\pi \operatorname{sh} \pi \theta \operatorname{sh} \alpha} \int_0^{\alpha} \sqrt{\operatorname{ch} \alpha - \operatorname{ch} s} d \left(\frac{\sin \theta s}{\operatorname{ch} \frac{s}{2}} \right) - \right. \\ &\left. - \frac{2G\gamma a}{\operatorname{ch} \pi \theta} \frac{d}{da} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} s - \operatorname{ch} \alpha}} d \left(\frac{\cos \theta s}{\operatorname{ch} \frac{s}{2}} \right) \right]. \quad (78.25) \end{aligned}$$

Применение первого из условий статики (78.17) с учетом равенства

$$r^2 dr |_{\beta=0} = \frac{a^3}{2} \cdot \frac{\operatorname{th}^2 \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{ch}^2 \frac{\alpha}{2}} d\alpha$$

приводит к вычислению следующих квадратур:

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} d\alpha}{\operatorname{ch}^2 \frac{\alpha}{2}} \int_0^{\alpha} \sqrt{\operatorname{ch} \alpha - \operatorname{ch} s} d \left(\frac{\sin \theta s}{\operatorname{ch} \frac{s}{2}} \right) = \\ &= \int_0^{\infty} \sin \theta s \operatorname{sh} \frac{s}{2} ds \int_s^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} d\alpha}{\operatorname{ch}^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{\operatorname{ch} \alpha - \operatorname{ch} s}} = \frac{2\sqrt{2} \pi \theta}{\operatorname{ch} \pi \theta}, \end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sh}^2 \frac{\alpha}{2} d\alpha}{\text{ch} \frac{\alpha}{2}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\text{ch } s - \text{ch } \alpha}} d \left(\frac{\cos \theta s}{\text{ch} \frac{s}{2}} \right) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} \left[\text{arc } \cos \frac{1}{\text{ch} \frac{s}{2}} + \frac{\text{sh} \frac{s}{2}}{\text{ch}^2 \frac{s}{2}} \right] d \left(\frac{\cos \theta s}{\text{ch} \frac{s}{2}} \right) =$$

$$= \frac{2\sqrt{2} \pi \theta (\theta^2 + 1)}{3 \text{sh } \pi \theta} \left(\text{ch } \pi \theta = \frac{2(1-\nu)}{\sqrt{3-4\nu}} \right),$$

после чего одна из искоемых связей принимает вид

$$-M = 8a^2 \theta \left[(1-\nu) A_1 - \frac{2G\gamma a \pi}{3(1-2\nu)} (\theta^2 + 1) \right]. \quad (78.26)$$

Переходим к определению касательных напряжений в зоне контакта. На основании (62.2) имеем

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} |_{\beta=0} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{\beta=0} + 2(1-\nu) \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \Big|_{\beta=0}, \quad \tau_{yz} |_{\beta=0} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_{\beta=0}, \\ \Phi |_{\beta=0} &= 2G\gamma a \text{th} \frac{\alpha}{2} \cos \varphi - 2(1-\nu) \Phi_3 |_{\beta=0}. \end{aligned} \right\} (78.27)$$

Пользуясь этими формулами, касательные напряжения $\tau_{xz} |_{\beta=0}$ и $\tau_{yz} |_{\beta=0}$ можно выразить в виде однократных квадратур типа (78.25). Опуская эти громоздкие выкладки, обратимся сразу ко второму условию статики (78.17). Так как

$$\tau_{xz} |_{\beta=0} = \frac{1}{2r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r\psi) \Big|_{\beta=0} + \frac{r}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\psi}{r} \right) \Big|_{\beta=0} \cos 2\varphi +$$

$$+ 2(1-\nu) \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \Big|_{\beta=0}, \quad (78.28)$$

где введено обозначение

$$\psi = 2G\gamma a \text{th} \frac{\alpha}{2} - 2(1-\nu) \frac{\Phi_3}{\cos \varphi}, \quad (78.29)$$

то из (78.17) получаем

$$-T = \pi a \psi |_{\alpha=\infty} + 2\pi a^2 (1-\nu) \int_0^{\infty} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \Big|_{\beta=0} \frac{\text{th} \frac{\alpha}{2}}{\text{ch}^2 \frac{\alpha}{2}} d\alpha. \quad (78.30)$$

Детальное исследование функции ψ показывает, что $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \psi = 0$.

Поэтому, имея в виду, что

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \Big|_{\beta=0} = -\frac{2A_1}{\pi a} \text{ch} \frac{\alpha}{2},$$

получаем вторую из искомых связей

$$T = 8a(1 - \nu) A_1. \quad (78.31)$$

Подставляя теперь в (78.26) и (78.31) значение A_1 из (78.16) и выражая u_0 и γ через T и M , получаем простые связи, выражающие перемещение штампа u_0 и угол его поворота γ через величину приложенной силы T и опрокидывающего момента M ,

$$\left. \begin{aligned} Gau_0 &= \left[\frac{1}{8} + \frac{1-2\nu}{16\pi\theta} + C\theta \right] T + C \frac{M}{a}, \\ Ga^2\gamma &= CT + \frac{C}{\theta} \cdot \frac{M}{a}, \quad C = \frac{3(1-\nu)}{16\pi(1+\theta^2)}, \\ \theta &= \frac{1}{2\pi} \ln(3-4\nu). \end{aligned} \right\} \quad (78.32)$$

Из полученных связей видно, что поперечная сила, приложенная к штампу, вызывает не только его перемещение в направлении силы, но и поворот на некоторый угол. Если же к штампу прикладывается опрокидывающий момент, то штамп не только поворачивается, но и получает поступательное перемещение.

§ 79. Контактная задача со сцеплением при наличии нагрузок, приложенных вне штампа

Выше было дано решение контактной задачи для плоского круглого штампа, сцепленного с упругим полупространством и подверженного действию внешних сил.

Сейчас будет рассмотрен случай контактной задачи со сцеплением, когда сам штамп неподвижен, а деформация производится путем приложения нагрузок на границе полупространства вне штампа.

Для упрощения выкладок мы в настоящем параграфе исследуем частную задачу такого типа, когда в некоторой точке $x=b, y=z=0$ приложена нормальная сосредоточенная сила.

При этом в граничных условиях (77.1) и (77.2) следует положить

$$u_0 = v_0 = w_0 = \tau_x = \tau_y = 0, \quad (79.1)$$

и для функций напряжений будем иметь

$$\Phi_1 \equiv \Phi_1^{(0)}, \quad \Phi_2 \equiv \Phi_2^{(2)}, \quad \Phi_3 = \bar{\Phi}_3 + \Phi_3^*, \quad \Phi_4 = \Phi_4^* + \bar{\Phi}_4 + \Phi_4'. \quad (79.2)$$

Так как функции $\Phi_1^{(0)}$, $\Phi_2^{(2)}$, $\bar{\Phi}_3$, Φ_4^* и $\bar{\Phi}_4$ были найдены в § 78, то остается найти Φ_3' и Φ_4' , а также входящие в формулу (77.36) коэффициенты G_m' .

Краевые условия для функций Φ'_3 и Φ'_4 имеют в данном случае такой вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi'_4}{\partial z} \Big|_{\beta=0} = 0, \quad [(3-4\nu)\Phi'_3 - \Phi'_4]_{\beta=0} = 0, \\ \left[2(1-\nu) \frac{\partial \Phi'_3}{\partial z} - \frac{\partial \Phi'_4}{\partial z} \right]_{\beta=0} = \sigma(\alpha, \varphi), \\ [(1-2\nu)\Phi'_3 - \Phi'_4]_{\beta=\pi} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (79.3)$$

где напряжение $\sigma(\alpha, \varphi)$ соответствует сосредоточенной силе P , приложенной в точке $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \pi$, $\varphi = 0$ ($\operatorname{cth} \frac{\alpha_0}{2} = \frac{b}{a}$).

Представляя искомые функции в виде разложений в ряды Фурье по углу φ и в обобщенный интеграл Мелера—Фока по координате α

$$\begin{aligned} \Phi'_{3,4} = \sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \times \\ \times \int_0^{\infty} (A_{3,4}^m \operatorname{ch} \beta\tau + B_{3,4}^m \operatorname{sh} \beta\tau) P_{-1/2+i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha) d\tau, \end{aligned} \quad (79.4)$$

находим, что

$$B_4^m = 0, \quad (3-4\nu)A_3^m = A_4^m, \quad (79.5)$$

причем величины $A_3^m(\tau)$ и $B_3^m(\tau)$ должны быть найдены из следующей системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} -2(1-\nu)A_3^m \operatorname{ch} \pi\tau + (1-2\nu)B_3^m \operatorname{sh} \pi\tau = 0, \\ -(1-2\nu)A_3^m \operatorname{sh} \pi\tau + 2(1-\nu)B_3^m \operatorname{ch} \pi\tau = \\ = \frac{a(-1)^m \operatorname{th} \pi\tau}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sh} \alpha\sigma(\alpha, \varphi)}{(\operatorname{ch} \alpha - 1)^{3/2}} P_{-1/2+i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha) e^{-im\varphi} d\alpha d\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (79.6)$$

Распределяя сосредоточенную силу P по малой окрестности точки $\alpha = \alpha_0$, $\varphi = 0$ и переходя к пределу, находим, что правая часть второго из условий (79.6) стремится к величине

$$\frac{(-1)^m P}{2\pi a} \sqrt{\operatorname{ch} \alpha_0 - 1} \operatorname{th} \pi\tau P_{-1/2+i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha_0),$$

после чего для A_3^m и B_3^m получаются следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} A_3^m = \frac{(-1)^m P (1-\nu) \sqrt{\operatorname{ch} \alpha_0 - 1}}{2\pi a (3-4\nu)} \cdot \frac{\operatorname{th} \pi\tau \operatorname{sh} \pi\tau}{\operatorname{sh}^2 \pi\tau + k^2} P_{-1/2+i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha_0), \\ B_3^m = \frac{(-1)^m P (1-\nu) \sqrt{\operatorname{ch} \alpha_0 - 1}}{\pi a (3-4\nu)} \cdot \frac{\operatorname{sh} \pi\tau}{\operatorname{sh}^2 \pi\tau + k^2} P_{-1/2+i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha_0), \end{aligned} \right\} \quad (79.7)$$

где $k = \frac{2(1-\nu)}{\sqrt{3-4\nu}}$.

Для определения коэффициентов G'_m воспользуемся формулой (77.35)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi'_4 dz \Big|_{\beta=0} = \operatorname{Re} \sum_{m=0}^{\infty} G'_m r^m e^{im\varphi} \quad (79.8)$$

и подставим в нее выражение для функции Φ'_4 *

$$\begin{aligned} \Phi'_4 &= \frac{P(1-\nu)}{\pi a} \sqrt{\operatorname{ch} \alpha_0 - 1} \sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos m\varphi \times \\ &\times \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh}^2 \pi \tau \operatorname{ch} \beta \tau}{\operatorname{sh}^2 \pi \tau + k^2} P_{-1/2+i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha_0) P_{1/2+i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha) d\tau = \\ &= 2 \operatorname{Re} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \Phi_4^{(m)} e^{im\varphi}. \end{aligned} \quad (79.9)$$

Условие (79.8) может быть записано в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Phi'_4}{\partial r^m} \Big|_{\beta=0} dz = \operatorname{Re} \sum_{m=0}^{\infty} G'_m m! e^{im\varphi}, \quad (79.10)$$

причем интегрирование слева можно производить по оси Oz где $\alpha=0$, $dz = \frac{a d\beta}{1 + \cos \beta}$, а переменная β меняется от π до нуля. Так как**

$$\begin{aligned} \Phi_4^{(m)} \Big|_{\alpha \rightarrow 0} &\approx \frac{(-1)^m P r^m (1-\nu)}{2\pi a} \sqrt{\operatorname{ch} \alpha_0 - 1} (1 + \cos \beta)^{m+1/2} \times \\ &\times \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh}^2 \pi \tau \operatorname{ch} \beta \tau}{\operatorname{ch} \pi \tau (\operatorname{sh}^2 \pi \tau + k^2)} P_{-1/2+i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha) d\tau, \end{aligned} \quad (79.11)$$

то

$$\begin{aligned} G'_m &= \frac{(-1)^m P (1-\nu)}{\pi a^m m! 2^{m+2}} \sqrt{\operatorname{ch} \alpha_0 - 1} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh}^2 \pi \tau}{\operatorname{ch} \pi \tau (\operatorname{sh}^2 \pi \tau + k^2)} \times \\ &\times P_{-1/2+i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha_0) d\tau \int_{\pi}^0 (1 + \cos \beta)^{m-1/2} \operatorname{ch} \beta \tau d\beta \end{aligned} \quad (79.12)$$

$$* \varepsilon_m = \begin{cases} \frac{1}{2}, & m=0, \\ 1, & m \neq 0. \end{cases}$$

** Здесь использована асимптотическая формула [см. (57.20)]

$$P_{-1/2+i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha) \Big|_{\alpha \rightarrow 0} \approx \frac{(1 + \cos \beta)^m r^m}{(2a)^m m!} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\tau + m\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\tau - m\right)}.$$

или окончательно ($m \geq 1$)

$$G'_m = -\frac{\sqrt{2} (-1)^m (1-\nu) P(2m-1)!}{\pi a^m m!} \times \\ \times \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh}^2 \pi \tau}{\operatorname{sh}^2 \pi \tau + k^2} P_{2l_{s+t}^m}(\operatorname{ch} \alpha_0) \frac{d\tau}{N_{m-1}(4\tau^2)}, \quad (79.13)$$

где

$$N_n(p^2) = (1^2 + p^2)(3^2 + p^2) \dots [(2n+1)^2 + p^2]. \quad (79.14)$$

В заключение четвертой части отметим, что наряду с основной смешанной задачей для полупространства с круговой линией раздела граничных условий преобразование Мелера—Фока дает возможность получить точное решение аналогичной смешанной задачи для неограниченного тела с плоской круговой щелью (внутренней или внешней), на одном берегу которой заданы перемещения, а на другом — напряжения.

Часть V

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КОНТОРОВИЧА—ЛЕБЕДЕВА

Если функция $f(r)$ непрерывна, имеет ограниченную вариацию в промежутке $0 < \varepsilon \leq r \leq R < \infty$ и интегралы

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f(r)| \ln \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{r}, \quad \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} |f(r)| \frac{dr}{\sqrt{r}} \quad (1)$$

сходятся, то справедлива формула

$$f(r) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \tau \operatorname{sh} \pi \tau K_{\frac{1}{2}\tau}(r) d\tau \int_0^{\infty} f(\rho) K_{\frac{1}{2}\tau}(\rho) \frac{d\rho}{\rho} \quad (0 < r < \infty), \quad (2)$$

где $K_{\frac{1}{2}\tau}(r)$ — функция Макдональда.

Преобразованием Конторовича—Лебедева называется интеграл

$$f(\tau) = \int_0^{\infty} f(r) K_{\frac{1}{2}\tau}(r) \frac{dr}{r} \quad (\tau \geq 0). \quad (3)$$

Исходя из зависимостей (2) и (3), получаем соответствующую формулу обращения

$$f(r) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \tau \operatorname{sh} \pi \tau f(\tau) K_{\frac{1}{2}\tau}(r) d\tau \quad (0 < r < \infty), \quad (4)$$

представляющую функцию $f(r)$ через ее преобразование $f(\tau)$.

Формула (2), впервые найденная М. И. Конторовичем и Н. Н. Лебедевым (см. статьи [39, 53]), в дальнейшем получила надлежащее обоснование в работах Н. Н. Лебедева [46, 48, 50]. Подобные интегральные преобразования широко используются в математической физике при решении трехмерных краевых задач для клиновидных областей, а также в некоторых задачах дифракции на клине и конусе.

Интегральное преобразование Конторовича—Лебедева позволяет получить точные решения ряда пространственных задач теории упругости для клина.

В пятой части настоящей книги рассмотрены следующие задачи, разрешимые с помощью преобразования Конторовича—Лебедева: вторая основная задача теории упругости для клина, деформация неограниченного упругого тела, ослабленного плоским полубесконечным разрезом, и основная смешанная задача для полупространства с прямолинейной границей раздела краевых условий.

Глава XIII. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КЛИНА ПРИ ЗАДАННЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ НА ГРАНИЦЕ

§ 80. Некоторые трехмерные краевые задачи для клиновидной области

Прежде чем переходить непосредственно к решению рассматриваемой в настоящей главе задачи об упругом равновесии клина, исследуем некоторые краевые задачи теории потенциала для клиновидной области, разрешимые с помощью интегрального преобразования Конторовича—Лебедева.

Рассмотрим задачу о нахождении функции u , гармонической в клиновидной области $0 < r < \infty$, $-\alpha < \theta < +\alpha$, $-\infty < z < +\infty$ (r, θ, z — цилиндрические координаты) при граничных условиях первого рода

$$u|_{\theta=-\alpha} = f_{-\alpha}(r, z), \quad u|_{\theta=+\alpha} = f_{\alpha}(r, z). \quad (80.1)$$

Все дальнейшее изложение с небольшими модификациями относится к граничным условиям второго рода (задача Неймана), а также к условиям смешанного типа, например

$$u|_{\theta=-\alpha} = f_{-\alpha}(r, z), \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} \Big|_{\theta=+\alpha} = f_{\alpha}(r, z). \quad (80.2)$$

Воспользуемся частными решениями уравнения Лапласа

$$[A(\sigma, \tau)e^{\theta\tau} + B(\sigma, \tau)e^{-\theta\tau}]e^{-i\sigma z} K_{i\tau}(|\sigma|r) \begin{pmatrix} 0 < \tau < \infty \\ -\infty < \sigma < +\infty \end{pmatrix}, \quad (80.3)$$

ограниченными как при $r \rightarrow 0$ (угловая точка клина), так и при $r \rightarrow \infty$ (бесконечно удаленная точка), и представим функцию u в виде двойного интегрального разложения

$$u(r, \theta, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} [Ae^{\theta\tau} + Be^{-\theta\tau}] e^{-i\sigma z} K_{i\tau}(|\sigma|r) d\sigma d\tau \quad (80.4)$$

[$K_{i\tau}(x)$ — функция Макдональда].

Граничные условия (80. 1) приводят нас к разложению некоторой заданной функции в такого рода двойной интеграл:

$$f(r, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-i\sigma z} K_{i\tau}(|\sigma|r) C(\sigma, \tau) d\sigma d\tau. \quad (80. 5)$$

Применяя обычную формулу Фурье, находим

$$\int_0^{\infty} C(\sigma, \tau) K_{i\tau}(|\sigma|r) d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(r, z) e^{i\sigma z} dz = \varphi. \quad (80. 6)$$

Следовательно, неизвестная функция $C(\sigma, \tau)$ является коэффициентом некоторого разложения заданной функции $\varphi(r, \sigma)$ в интеграл по функциям Макдональда с чисто мнимым значком (функции эти вещественны).

На основании формулы разложения Конторовича—Лебедева (см. введение к части V) имеем

$$C(\sigma, \tau) = \frac{2\tau \operatorname{sh} \pi\tau}{\pi^2} \int_0^{\infty} \varphi(r, \sigma) K_{i\tau}(|\sigma|r) \frac{dr}{r}. \quad (80. 7)$$

Формула (80. 7) позволяет дать полное решение поставленной задачи Дирихле для клина. Если для удобства выкладок вместо (80. 4) положить

$$u(r, \theta, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} [C_{\alpha} \operatorname{sh}(\alpha + \theta)\tau + \\ + C_{-\alpha} \operatorname{sh}(\alpha - \theta)\tau] e^{-i\sigma z} K_{i\tau}(|\sigma|r) \frac{d\sigma d\tau}{\operatorname{sh} 2\alpha\tau}, \quad (80. 8)$$

то по формулам Фурье и Конторовича—Лебедева сразу находим значения неизвестных величин $C_{\pm\alpha}(\sigma, \tau)$

$$C_{\pm\alpha}(\sigma, \tau) = \frac{\sqrt{2}\tau \operatorname{sh} \pi\tau}{\pi^2 \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} f_{\pm\alpha}(r, z) e^{i\sigma z} K_{i\tau}(|\sigma|r) \frac{1}{r} dz dr. \quad (80. 9)$$

Формула (80. 7) может быть видоизменена и для того практически важного случая, когда

$$\varphi(r, \sigma) \xrightarrow{r \rightarrow 0} \varphi(0, \sigma) \neq 0.$$

Такая видоизмененная формула получена Н. Н. Лебедевым [50] и имеет следующий вид:

$$C(\sigma, \tau) = \frac{2}{\pi} \varphi(0, \sigma) + \frac{2\tau \operatorname{sh} \pi\tau}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\varphi(r, \sigma) - \varphi(0, \sigma) e^{-|\sigma|r}}{r} \times \\ \times K_{i\tau}(|\sigma|r) dr. \quad (80.10)$$

причем при ее выводе использовано известное интегральное представление

$$e^{-x} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_{i\tau}(x) d\tau, \quad x > 0 \quad (80.11)$$

и предполагается, что функция $\varphi(r, \sigma) - \varphi(0, \sigma) e^{-|\sigma|r}$ удовлетворяет приведенным выше достаточным условиям разложимости в интеграл по функциям $K_{i\tau}(|\sigma|r)$.

Необходимо заметить, что, кроме граничных условий типа (80.1), для искомой функции u должны быть еще поставлены некоторые условия на бесконечности, т. е. при $R = \sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow \infty$. При решении указанных краевых задач для гармонических в клиновидной области функций предполагается, что на бесконечности поведение искомых функций определяется равенствами

$$u = O\left(\frac{1}{R}\right), \quad |\operatorname{grad} u| = O\left(\frac{1}{R^2}\right).$$

В связи с тем, что рассматриваемая клиновидная область содержит угловую линию $r=0$ (ребро клина), оказывается необходимым потребовать еще выполнения некоторых условий, касающихся поведения искомой функции при $r \rightarrow 0$. Можно показать, что решение поставленной задачи будет единственным, если, кроме граничных условий и условий на бесконечности, функции u и $\frac{du}{dr}$ при $r \rightarrow 0$ ведут себя таким образом, что интеграл от их произведения, взятый по окружающей ребро клина цилиндрической поверхности некоторого радиуса ϵ , стремится к нулю при $\epsilon \rightarrow 0$. Мы не останавливаемся на этом вопросе более подробно по той причине, что при решении задач теории упругости условия при $r \rightarrow 0$, обеспечивающие единственность решения, формулируются несколько иным образом. При дальнейшем изложении материала части V мы всегда будем предполагать, что перемещения на ребре клина остаются ограниченными. Что касается упругих напряжений, то при $r \rightarrow 0$ они могут неограниченно возрастать, однако при этом их главный вектор по цилиндрической поверхности радиуса ϵ , окружающей ребро, должен стремиться к нулю при $\epsilon \rightarrow 0$.

Проводя обычное доказательство теоремы единственности решения задач теории упругости применительно к области, состоящей из цилиндра радиуса $R \rightarrow \infty$, упомянутой цилиндрической поверхности радиуса $\epsilon \rightarrow 0$ и граней клина $\theta = \pm \alpha$ ($\epsilon \leq r \leq R$), можно без труда показать, что условия решаемых далее задач теории упругости, дополненные обычными для пространственных задач условиями на бесконечности (см., например, § 81) и указанными выше требованиями при $r \rightarrow 0$, обеспечивают единственность решения рассматриваемых классов задач.

В связи с тем, что упругие напряжения при приближении к ребру клина могут неограниченно возрастать, этим же свойством в ряде рассматриваемых далее задач будут обладать и искомые гармонические функции напряжений. Так как это обстоятельство, очевидно, препятствует разложению этих функций в интегралы Конторовича—Лебедева, то для решения соответствующих задач необходимо располагать некоторыми особыми классами гармонических функций, аналогичных рассмотренным в § 58. Мы в качестве таких особых решений применяем здесь решения Бейтмана [143] (см., например, §§ 82 и 85), однако во всех подобных случаях следует проверять выполнение требования ограниченности перемещений на ребре клина.

Заметим, что использование интегралов Конторовича—Лебедева для численных расчетов затруднено тем, что имеющиеся в литературе таблицы [203] функций $K_{\tau\tau}(x)$ охватывают весьма небольшой интервал значений x и τ . Поэтому часто приходится применять различные интегральные представления,* главные из которых имеют вид

$$K_{\tau\tau}(x) = \int_0^{\infty} e^{-x \operatorname{ch} s} \cos \tau s ds \quad (\operatorname{Re} x > 0), \quad (80.12)$$

$$K_{\tau\tau}(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi\tau}{2}} \int_0^{\infty} \cos(x \operatorname{sh} s) \cos \tau s ds \quad (x > 0). \quad (80.13)$$

Приведем еще весьма полезное интегральное представление для произведения двух функций Макдональда [51]

$$K_{\tau\tau}(x) K_{\tau\tau}(y) = \int_0^{\infty} K_0(\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \operatorname{ch} s}) \cos \tau s ds \quad (80.14)$$

$$(x, y > 0).$$

* Эти представления иногда позволяют выразить искомые решения в виде квадратур от элементарных функций.

§ 81. Вторая основная задача теории упругости для клина

В настоящей главе, как и в остальных главах (XIV, XV) части V, мы будем пользоваться выражениями для перемещений u , v , w точек тела в направлении осей цилиндрических координат r , θ , z через гармонические функции Папковича—Нейбера

$$\left. \begin{aligned} 2Gu &= -\frac{\partial F}{\partial r} + 4(1-\nu)(\Phi_1 \cos \theta + \Phi_2 \sin \theta), \\ 2Gv &= -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta} + 4(1-\nu)(\Phi_2 \cos \theta - \Phi_1 \sin \theta), \\ 2Gw &= -\frac{\partial F}{\partial z} + 4(1-\nu)\Phi_3, \end{aligned} \right\} (81.1)$$

где

$$F = \Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2 + z\Phi_3, \quad \Delta\Phi_i = 0 (i=0, 1, 2, 3),$$

G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона.

Если на границах $\theta = \pm\alpha$ клина заданы упругие перемещения u , v и w , то задача сводится к нахождению трех гармонических функций (четвертая функция может быть выбрана произвольно), удовлетворяющих шести граничным условиям, получаемым из (81.1) при $\theta = \pm\alpha$ соответственно:

$$\left[-\frac{\partial F}{\partial r} + 4(1-\nu)(\Phi_1 \cos \theta + \Phi_2 \sin \theta) \right]_{\theta=\pm\alpha} = 2Gu|_{\theta=\pm\alpha}, \quad (81.2)$$

$$\left[-\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta} + 4(1-\nu)(\Phi_2 \cos \theta - \Phi_1 \sin \theta) \right]_{\theta=\pm\alpha} = 2Gv|_{\theta=\pm\alpha}, \quad (81.3)$$

$$\left[-\frac{\partial F}{\partial z} + 4(1-\nu)\Phi_3 \right]_{\theta=\pm\alpha} = 2Gw|_{\theta=\pm\alpha}. \quad (81.4)$$

Кроме граничных условий непосредственно на гранях клина, гармонические функции Φ_i должны определенным образом вести себя на бесконечности (при $R = \sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow \infty$) и на ребре клина (при $r \rightarrow 0$). Мы будем, как обычно, считать, что упругие перемещения при $R \rightarrow \infty$ должны иметь порядок $\frac{1}{R}$, а напряжения — порядок $\frac{1}{R^2}$. Легко видеть, что эти условия будут выполнены, если потребовать, чтобы функции $|\text{grad } \Phi_0|$, Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 на бесконечности были бы величинами порядка $\frac{1}{R}$, а их производные по x , y и z — порядка $\frac{1}{R^2}$.

Что касается условий при $r \rightarrow 0$, то они сформулированы в предыдущем параграфе.

Для получения решения поставленной задачи распорядимся прежде всего определенным образом одной из четырех гармо-

нических функций, а именно поставим еще два дополнительных условия на гранях клина. Как нам представляется, наиболее простое решение задачи в общем случае получится, если указанные дополнительные условия выбрать в следующей форме:

$$F|_{\theta=-\alpha} = 0, \quad F|_{\theta=\alpha} = 0. \quad (81.5)$$

При этом граничные условия (81.2) сразу дают возможность определить функцию Φ_3 в результате решения первой краевой задачи

$$\left. \begin{aligned} \Delta\Phi_3 = 0, \quad \Phi_3|_{\theta=-\alpha} = \frac{G}{2(1-\nu)} w|_{\theta=-\alpha}, \\ \Phi_3|_{\theta=\alpha} = \frac{G}{2(1-\nu)} w|_{\theta=\alpha}, \end{aligned} \right\} \quad (81.6)$$

где $w|_{\theta=\pm\alpha}$ — суть заданные функции переменных r и z . При определенных условиях, накладываемых на эти функции, Φ_3 может быть найдена, как показано выше, с помощью интегрального преобразования Фурье по переменной z и интегрального преобразования Конторовича—Лебедева по переменной r .

Если считать функцию Φ_3 известной, то из условий (81.5), если еще учесть соотношение (81.2)

$$(\Phi_1 \cos \theta + \Phi_2 \sin \theta)|_{\theta=\pm\alpha} = \frac{G}{2(1-\nu)} u|_{\theta=\pm\alpha}.$$

немедленно вытекают граничные условия для гармонической функции Φ_0

$$\Phi_0|_{\theta=\pm\alpha} = -\frac{G}{2(1-\nu)} [ru + zw]|_{\theta=\pm\alpha}, \quad (81.7)$$

которые, вообще говоря, дают возможность найти функцию Φ_0 вышеуказанным способом.

После нахождения Φ_3 и Φ_0 оставшиеся граничные условия (81.2) и (81.3) приводят к следующей смешанной краевой задаче для функций Φ_1 и Φ_2 :

$$\left. \begin{aligned} \Delta\Phi_1 = 0, \quad \Delta\Phi_2 = 0, \\ (\Phi_1 \cos \theta + \Phi_2 \sin \theta)|_{\theta=\pm\alpha} = \frac{G}{2(1-\nu)} u|_{\theta=\pm\alpha}, \\ (3-4\nu)(\Phi_2 \cos \theta - \Phi_1 \sin \theta)|_{\theta=\pm\alpha} - \\ - \left(\cos \theta \frac{\partial\Phi_1}{\partial\theta} + \sin \theta \frac{\partial\Phi_2}{\partial\theta} \right)|_{\theta=\pm\alpha} = \\ = \left(2G\nu + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial\Phi_0}{\partial\theta} + \frac{z}{r} \cdot \frac{\partial\Phi_3}{\partial\theta} \right)|_{\theta=\pm\alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (81.8)$$

Если представить Φ_1 и Φ_2 в виде двойных интегральных разложений

$$\Phi_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} [A_{1,2}(\sigma, \tau) e^{i\sigma\tau} + B_{1,2}(\sigma, \tau) e^{-i\sigma\tau}] \times \\ \times e^{-i\sigma z} K_{i\tau}(|\sigma|r) d\sigma d\tau, \quad (81.9)$$

то для четырех неизвестных функций A_1, B_1, A_2, B_2 после применения к правым частям (81.8) формул Фурье и Контроревича—Лебедева* получится система четырех линейных алгебраических уравнений.

На этом общее решение поставленной задачи может быть закончено.

Следует заметить, что в отдельных случаях изложенный общий метод иногда целесообразно заменять иными приемами.

Так, например, в случае напряженного состояния, четного по переменной z (при этом величины $u, v, \Phi_0, \Phi_1, \Phi_2$ являются четными, а w, Φ_3 — нечетными функциями z), можно предложить следующий прием решения, используемый в следующем параграфе при рассмотрении одной конкретной задачи. Примем функцию Φ_3 равной нулю и разобьем наряду с этим задачу на две отдельные задачи: симметричную и антисимметричную по переменной θ . Остановимся сперва на первом из этих случаев, когда величины u, w, Φ_0, Φ_1 будут четными, а v, Φ_2 — нечетными функциями θ . Таким образом, в рассматриваемом случае можно положить

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{0,1} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} A_{0,1}(\sigma, \tau) \frac{\operatorname{ch} \theta \tau}{\operatorname{ch} \sigma \tau} K_{i\tau}(\sigma r) \cos \sigma z d\sigma d\tau, \\ \Phi_2 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} A_2(\sigma, \tau) \frac{\operatorname{sh} \theta \tau}{\operatorname{sh} \sigma \tau} K_{i\tau}(\sigma r) \cos \sigma z d\sigma d\tau, \end{aligned} \right\} \quad (81.10)$$

считать, что переменная z меняется в промежутке от нуля до бесконечности, а переменная θ — от 0 до α , и применять граничные условия (81.2)—(81.4) только при значении $\theta = +\alpha$.

Дифференцируя (81.2) по z , (81.4) — по r , вычитая второй результат из первого и снова интегрируя по z , получаем

$$\begin{aligned} &(\Phi_1 \cos \theta + \Phi_2 \sin \theta)_{\theta=\alpha} = \\ &= \frac{G}{2(1-\nu)} \left[u + \int_{,}^{\infty} \frac{\partial w}{\partial r} dz \right]_{\theta=\alpha} = \xi_1(r, z). \end{aligned} \quad (81.11)$$

где величина ξ_1 выражается через данные функции.

* Предполагается, что правые части (81.8) допускают соответствующие разложения.

Далее, из (81.4) интегрированием по z находим граничное условие для функции Φ_0^*

$$\Phi_0|_{z=0} = -r\xi_1 + 2G \int_0^\infty w|_{z=0} dz = \eta(r, z) \quad (81.12)$$

(η — известная функция).

Если функция $\eta(r, z)$ допускает разложение типа

$$\eta(r, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty \eta(\sigma, \tau) K_{\frac{1}{2}}(\sigma r) \cos cz d\sigma d\tau,$$

то Φ_0 можно считать известной ($A_0 = \eta$).

Наконец, (81.3) приводит нас к соотношению

$$\begin{aligned} & \left[(3 - 4\nu)(\Phi_2 \cos \theta - \Phi_1 \sin \theta) - \left(\cos \theta \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} \right) \right]_{\theta=0} = \\ & = \left(2Gv + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \theta} \right)_{\theta=0} = \xi_2(r, z), \end{aligned} \quad (81.13)$$

где ξ_2 может считаться известной величиной.

Если предположить, что функции ξ_1 и ξ_2 разлагаются в интеграл Фурье по переменной z и в интеграл Конторовича—Лебедева — по r , то из (81.10), (81.11) и (81.13) сразу находим систему уравнений для неизвестных функций A_1 и A_2 :

$$\left. \begin{aligned} & A_1 \cos \alpha + A_2 \sin \alpha = \xi_1, \\ & -[(3 - 4\nu) \sin \alpha + \tau \operatorname{th} \alpha \tau \cos \alpha] A_1 + \\ & + [(3 - 4\nu) \cos \alpha - \tau \operatorname{cth} \alpha \tau \sin \alpha] A_2 = \xi_2, \end{aligned} \right\} \quad (81.14)$$

где через ξ_1 и ξ_2 обозначены коэффициенты соответствующих интегральных разложений.

Находя из (81.14) A_1 и A_2 и подставляя их в (81.10), получим окончательное решение поставленной задачи.

Фактическое проведение вычислений по указанной схеме может оказаться весьма трудоемким. В частности, интегриро-

* Если интеграл, входящий в (81.12), расходится, то можно поставить аналогичную краевую задачу для гармонической функции $\frac{\partial \Phi_0}{\partial z}$ и, найдя ее, определить функцию Φ_0 соотношениями

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial x} = \int_0^z \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z \partial x} dz \quad \text{и} \quad \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} = \int_0^z \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z \partial y} dz,$$

причем последние интегралы сходятся в силу принятых нами условий на бесконечности.

вание по переменной τ связано с вычислением интегралов, содержащих в знаменателе определитель системы (81.14), пропорциональный следующему двухчленному выражению:

$$D_1(\tau) = (3 - 4\nu) \operatorname{sh} 2a\tau - \tau \sin 2a. \quad (81.15)$$

Заметим, что рассмотрение аналогичной задачи, антисимметричной по переменной θ (но по-прежнему симметричной по z), приводит к системе уравнений для A_1 и A_2 , определитель которой пропорционален двухчлену

$$D_2(\tau) = (3 - 4\nu) \operatorname{sh} 2a\tau + \tau \sin 2a. \quad (81.16)$$

Если пытаться вычислять входящие в решение квадратуры по переменной τ с помощью теоремы о вычетах, то необходимо знать корни (вообще говоря, комплексные) уравнений $D_i(\tau) = 0$ ($i = 1, 2$). Обозначая $2a\tau$ через z , мы приходим к уравнениям § 33, где рассматривалась плоская деформация клина. Следовательно, для нахождения корней полученных трансцендентных уравнений можно воспользоваться табл. 16.

Разумеется, расчеты сильно упрощаются в предельных случаях $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (полупространство) и $\alpha = \pi$ (неограниченное тело с разрезом в виде полуплоскости $\theta = \pm \pi$), когда правые части $D_1(\tau)$ и $D_2(\tau)$ становятся одночленными. Задача теории упругости для полупространств при заданных на границе перемещениях может быть рассмотрена в декартовых координатах с помощью двойного интегрального преобразования Фурье (см., например, [57]). Второй из указанных частных случаев ($\alpha = \pi$) рассмотрен в следующем параграфе на примере одной конкретной задачи.

§ 82. Растяжение тела, содержащего жестко впаивную пластинку

В качестве приложения полученных общих результатов рассмотрим распределение напряжений в неограниченном упругом теле, содержащем неподвижную, жестко соединенную с телом пластинку в виде полуплоскости $x < 0$, при условии, что в некоторой точке ($x = a, y = 0, z = 0$) приложена сосредоточенная сила P , направленная по оси Ox (рис. 48).

Для решения поставленной задачи выделим перемещения, создаваемые сосредоточенной силой P в неограниченном упругом теле, положив

$$u = u_0 - u_1, \quad v = v_0 - v_1, \quad w = w_0 - w_1, \quad (82.1)$$

где*

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= A \left\{ \left[\frac{(x-a)^2}{\rho^3} + \frac{3-4\nu}{\rho} \right] \cos \theta + \frac{y(x-a)}{\rho^3} \sin \theta \right\}, \\ v_0 &= A \left\{ - \left[\frac{(x-a)^2}{\rho^3} + \frac{3-4\nu}{\rho} \right] \sin \theta + \frac{y(x-a)}{\rho^3} \cos \theta \right\}, \\ w_0 &= A \frac{z(x-a)}{\rho^3}, \quad \rho^2 = (x-a)^2 + y^2 + z^2, \\ \xi A &= \frac{P}{16\pi G(1-\nu)}. \end{aligned} \right\} \quad (82.2)$$

Так как пластинка ($\theta = \pm\pi$) неподвижна, то перемещения точек сцепленного с нею упругого тела равны нулю. Учитывая симметрию задачи по переменной θ , приходим к следующим граничным условиям для добавочных перемещений u_1 , v_1 и w_1 :

$$\left. \begin{aligned} u_1|_{\theta=\pi} &= -A \left[\frac{(r+a)^2}{\rho_\pi^3} + \frac{3-4\nu}{\rho_\pi} \right], \\ v_1|_{\theta=\pi} &= 0, \quad w_1|_{\theta=\pi} = -A \frac{z(r+a)}{\rho_\pi}, \\ \rho_\pi &= \sqrt{(r+a)^2 + z^2}. \end{aligned} \right\} \quad (82.3)$$

В дальнейшем именно эти добавочные перемещения мы будем представлять через функции напряжений с помощью формул (81.1).

Для решения задачи мы применим изложенный в предыдущем параграфе частный прием, согласно которому следует положить $\Phi_3 = 0$, функцию Φ_0 найти из условия (81.12), после чего для коэффициентов A_1 и A_2 , входящих в интегральные разложения (81.10) для функций Φ_1 и Φ_2 , получается система уравнений (81.14).

Прежде всего необходимо вычислить величины ξ_1 и η . Применяя формулы (81.11), (81.12) и (82.3), после векоторых выкладок получаем

$$\left. \begin{aligned} \xi_1(r, z) &= \frac{G}{2(1-\nu)} \left[u_1 + \int_r^\infty \frac{dw_1}{dr} dz \right]_{\eta=0} = -\frac{2GA}{\rho_\pi}, \\ \eta(r, z) &= -r\xi_1 + 2G \int_r^\infty w_1|_{\theta=\pi} dz = -\frac{2GaA}{\rho_\pi}. \end{aligned} \right\} \quad (82.4)$$

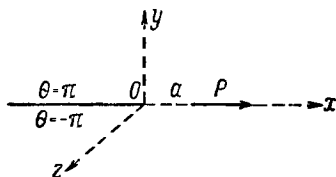


Рис. 48.

* См., например, [69], где даны выражения для выделяемых перемещений в декартовых координатах.

Обращаясь к системе (81.14) при $\alpha = \pi$, видим, что из первого уравнения сразу находится коэффициент A_1 :

$$A_1 = -\xi_1, \quad (82.5)$$

так что для нахождения функции Φ_1 достаточно разложить величину

$$\frac{1}{\rho_\pi} = \frac{1}{\sqrt{(r+a)^2 + z^2}}$$

в следующий двойной интеграл:

$$\frac{1}{\sqrt{(r+a)^2 + z^2}} = \int_0^\infty \int_0^\infty \xi_1(\sigma, \tau) K_{i\tau}(c\sigma) \cos \sigma z d\sigma d\tau \quad (82.6)$$

и определить отсюда функцию ξ_1 .

Разложения типа (82.6) рассмотрены в книге [51, стр. 209], и мы приведем здесь лишь окончательное выражение для величины ξ_1 ,

$$\xi_1 = -\frac{4\sqrt{2}GA}{\pi\sqrt{\pi}} K_{i\tau}(ca), \quad (82.7)$$

которое без труда можно проверить непосредственной подстановкой с помощью интегрального представления (80.11).

Таким образом, величина A_1 найдена.

В дальнейшем будет показано, что для получения правильного решения поставленной задачи интегральное выражение (81.10) функции Φ_1 должно быть дополнено еще некоторым слагаемым. Оказывается, что можно построить все равные тождественному нулю гармонические функции, четные по переменной θ и обращающиеся в нуль при $\theta = \pi$, что не нарушает справедливости граничного условия (81.11). В качестве такого особого решения мы выберем первое из следующих решений уравнения Лапласа [143]:

$$\frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{r}} \operatorname{Re} f(t), \quad \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sqrt{r}} \operatorname{Re} f(t), \quad t = r + iz \quad (82.8)$$

[$f(t)$ — произвольная аналитическая функция], убывающее на бесконечности и обращающееся в нуль на границе рассматриваемой области ($\theta = \pm\pi$).

В данной задаче целесообразно принять

$$f(t) = \frac{1}{t+a},$$

так что за функцию Φ_1 может быть принято, согласно (81. 10), (82. 5) и (82. 7), следующее выражение:

$$\Phi_1(r, \theta, z) = \frac{8GA}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\text{ch } \theta \tau}{\text{ch } \pi \tau} K_{i\tau}(ca) K_{i\tau}(cr) \cos cz d\sigma d\tau + \\ + B \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{r}} \frac{r+a}{(r+a)^2 + z^2}, \quad (82. 9)$$

где B — постоянная, подлежащая в дальнейшем определению.

Входящий в последнюю формулу интеграл может быть вычислен следующим образом: воспользуемся интегральным представлением (80. 14) для произведения цилиндрических функций, подставим его в (82. 9), переменим порядок интегрирования и вычислим последовательно квадратуры по переменным σ и τ , воспользовавшись значениями интегралов

$$\int_0^\infty K_0(\sigma \sqrt{r^2 + a^2 + 2ar \text{ch } s}) \cos cz d\sigma = \\ = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 + z^2 + 2ar \text{ch } s}}, \quad (82. 10)$$

$$\int_0^\infty \frac{\text{ch } \theta \tau}{\text{ch } \pi \tau} \cos \tau s d\tau = \frac{\cos \frac{\theta}{2} \text{ch } \frac{s}{2}}{\text{ch } s + \cos \theta}. \quad (82. 11)$$

Получаем

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\text{ch } \theta \tau}{\text{ch } \pi \tau} K_{i\tau}(ca) K_{i\tau}(cr) \cos cz d\sigma d\tau = \\ = \frac{\pi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \int_0^\infty \frac{\text{ch } \frac{s}{2}}{\text{ch } s + \cos \theta} \cdot \frac{ds}{\sqrt{r^2 + a^2 + z^2 + 2ar \text{ch } s}}. \quad (82. 12)$$

Наконец, последняя квадратура вычисляется подстановкой $\text{sh } \frac{s}{2} = u$, после чего решение представляется в замкнутой форме

$$\Phi_1 = \frac{4GA}{\pi \rho} \text{arctg} \frac{\rho}{2\sqrt{ar} \cos \frac{\theta}{2}} + B \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{r}} \cdot \frac{r+a}{(r+a)^2 + z^2} \quad (82. 13) \\ (\rho = \sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}).$$

Что касается функции Φ_0 , то так как из (82.4) и (81.12) следует, что $A_0 = \eta = -aA_1$, то сразу получаем

$$\Phi_0 = -\frac{4GaA}{\pi\rho} \operatorname{arctg} \frac{\rho}{2\sqrt{ar} \cos \frac{\theta}{2}}. \quad (82.14)$$

Остается найти функцию Φ_2 из второго уравнения системы (81.14), которое удобно записать в исходной форме (81.13). Подставляя в правую часть (81.13) найденные выражения для Φ_0 и Φ_1 , находим

$$\begin{aligned} -(3-4\nu)\Phi_2|_{\theta=\pi} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \theta} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \right)_{\theta=\pi} = \\ &= \left(\frac{B}{2} - \frac{4G\sqrt{aA}}{\pi} \right) \frac{1}{\sqrt{r}} \cdot \frac{r+a}{(r+a)^2+z^2}. \end{aligned} \quad (82.15)$$

Так как по условию Φ_2 — нечетная функция угла θ , то из (82.8) и (82.15) ясно, что функция Φ_2 имеет следующий вид:

$$\Phi_2 = C \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sqrt{r}} \cdot \frac{r+a}{(r+a)^2+z^2}, \quad (82.16)$$

где положено

$$C = \frac{1}{3-4\nu} \left(\frac{4G\sqrt{aA}}{\pi} - \frac{B}{2} \right). \quad (82.17)$$

Если бы мы не ввели в выражение (82.9) для Φ_1 особое решение, т. е. положили бы в (82.16) $B=0$, то полученные функции напряжений привели бы нас к выражениям для упругих перемещений, не ограниченным при $r \rightarrow 0$. Наличие же в выражениях (82.13) и (82.16) для функций Φ_1 и Φ_2 произвольной постоянной B позволяет так выбрать ее, чтобы перемещения на ребре $r=0$ были бы конечны. В самом деле, если составить асимптотические выражения для функций напряжений при $r \rightarrow 0$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= -\frac{2GaA}{\sqrt{a^2+z^2}} + \frac{8Ga\sqrt{aA}}{\pi(a^2+z^2)}\sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} + O(r\sqrt{r}), \\ \Phi_1 &= \frac{aB}{a^2+z^2} \cdot \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{r}} + O(1), \\ \Phi_2 &= \frac{aC}{a^2+z^2} \cdot \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sqrt{r}} + O(\sqrt{r}) \end{aligned} \right\} \quad (82.18)$$

и подставить их в формулы (81.1), то для перемещений u_1 и v_1 получим*

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_1 &= \frac{C-B}{\sqrt{r}} \left[\frac{1}{2} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} - (3-4\nu) \cos \theta \cos \frac{\theta}{2} \right] \times \\ &\quad \times \frac{a}{a^2+z^2} + O(1), \\ 2Gv_1 &= \frac{C-B}{\sqrt{r}} \left(\frac{5}{2} - 4\nu \right) \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \cdot \frac{a}{a^2+z^2} + O(\sqrt{r}). \end{aligned} \right\} (82.19)$$

Отсюда вытекает, что для ограниченности перемещений на ребре $r=0$ следует положить $C=B$, что на основании (82.17) дает значение величины B

$$B = \frac{8G\sqrt{a}A}{\pi(7-8\nu)} \left(A = \frac{P}{16\pi G(1-\nu)} \right). \quad (82.20)$$

При этом значении B формулы (82.13), (82.14) и (82.16) дают полное решение поставленной задачи, выраженное через элементарные функции.

В заключение вычислим касательные напряжения $\tau_{r\theta}$ на поверхности пластинки

$$\tau_{r\theta} \Big|_{\theta=\pi} = -\frac{G}{r} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\pi}. \quad (82.21)$$

Подставляя сюда значение u_1 , можно получить следующую формулу для касательных напряжений:

$$\tau_{r\theta} \Big|_{\theta=\pi} = 2(1-\nu) \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \right) \Big|_{\theta=\pi}. \quad (82.22)$$

Используя выражения (82.13) и (82.16) для Φ_1 и Φ_2 , находим окончательно

$$\tau_{r\theta} \Big|_{\theta=\pi} = \frac{P}{2\pi^2 a^2} \sqrt{\frac{a}{r}} \left[\frac{1}{(r+a)^2+z^2} - \frac{2}{7-8\nu} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{r+a}{(r+a)^2+z^2} \right]. \quad (82.23)$$

Глава XIV. РАВНОВЕСИЕ НЕОГРАНИЧЕННОГО УПРУГОГО ТЕЛА, ОСЛАБЛЕННОГО ПЛОСКИМ РАЗРЕЗОМ

§ 83. Постановка задачи

Рассмотрим неограниченное упругое тело, содержащее разрез в виде полуплоскости и находящееся под действием произвольной системы внешних сил.

Для решения задачи введем наряду с декартовыми координатами (рис. 49) систему цилиндрических координат (r, θ, z) ,

* Легко показать, что перемещение $w_1 \Big|_{r \rightarrow 0}$ ограничено при любых B .

направив ось z по ребру разреза и совместив берега разреза с плоскостями $\theta = \pm\pi$ (при этом $0 \leq r < \infty$, $-\pi \leq \theta \leq +\pi$, $-\infty < z < +\infty$).

Воспользуемся выражениями (81.1) для перемещений u, v, w в направлении осей цилиндрических координат

$$\left. \begin{aligned} 2Gu &= -\frac{\partial F}{\partial r} + 4(1-\nu)(\Phi_1 \cos \theta + \Phi_2 \sin \theta), \\ 2Gv &= -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta} + 4(1-\nu)(\Phi_2 \cos \theta - \Phi_1 \sin \theta), \\ 2Gw &= -\frac{\partial F}{\partial z} + 4(1-\nu)\Phi_3, \\ F &= \Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2 + z\Phi_3, \end{aligned} \right\} \quad (83.1)$$

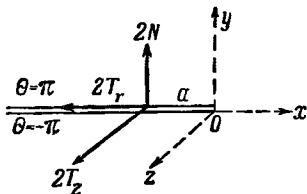


Рис. 49.

где G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, Φ_i ($i=0, 1, 2, 3$) — гармонические функции, одна из которых может быть выбрана произвольно.

Для решения задачи при заданных усилиях на границе нам, очевидно, понадобятся выражения для напряжений $\sigma_\theta, \tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \left(\cos \theta \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \theta^2} + \sin \theta \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \theta^2} \right) - \\ &- (1-2\nu) \left(\cos \theta \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \sin \theta \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \right) + \frac{2(1-\nu)}{r} \left(\cos \theta \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} - \sin \theta \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \right) + \\ &+ 2\nu \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} + z \left(\frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \quad (83.2)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{2(1-\nu)}{r} \left(\cos \theta \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} \right), \quad (83.3)$$

$$\tau_{\theta z} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{2(1-\nu)}{r} \cdot \frac{\partial \Phi_3}{\partial \theta}, \quad (83.4)$$

где введено обозначение

$$\Phi = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta} + 2(1-\nu)(\Phi_2 \cos \theta - \Phi_1 \sin \theta). \quad (83.5)$$

Таким образом, задача сводится к нахождению трех гармонических в неограниченной области с разрезом функций при граничных условиях, получаемых из (83.2)–(83.4) при $\theta = \pm\pi$, когда напряжения $\sigma_\theta, \tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}$ суть заданные функции координат r и z . Четвертая функция может быть выбрана произвольно.

Кроме того, надо поставить соответствующие условия на бесконечности: функции $|\text{grad } \Phi_0|, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ при $R = \sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow \infty$ должны иметь порядок $\frac{1}{R}$, а их производные — порядок $\frac{1}{R^2}$,

а также условия на ребре: при $r \rightarrow 0$ перемещения остаются ограниченными, а главный вектор напряжений, действующих по цилиндрической поверхности $r = \epsilon$, стремится к нулю при $\epsilon \rightarrow 0$.

В настоящей главе будет построена, притом в замкнутом виде, функция Грина рассматриваемой задачи, т. е. в качестве внешнего усилия будет принята сосредоточенная сила, которую, не нарушая общности, можно считать приложенной в произвольной точке $r = a$, $\theta = \pi$, $z = 0$ верхнего берега разреза. Легко видеть, что этим дается решение задачи для любой системы внешних сил. В самом деле, если нагрузка приложена в какой-либо внутренней области тела, то решение такой задачи может быть получено интегрированием по указанной области решения, соответствующего сосредоточенной силе, приложенной в произвольной внутренней точке. Последнее же, путем выделения известного решения о действии сосредоточенной силы на неограниченное упругое тело, сводится к рассматриваемой задаче при заданных усилиях на границе.

Разложим внешнюю сосредоточенную силу на три составляющие $2N$, $2T_r$, $2T_z$ (рис. 49) в направлении осей θ , r , z и соответственно этому разобьем задачу на три отдельные задачи, причем в первых двух задачах напряженное состояние будет, очевидно, симметрично по координате z (σ_θ , $\tau_{r\theta}$, Φ_0 , Φ_1 , Φ_2 — четные, а $\tau_{\theta z}$, Φ_3 — нечетные функции z), а в третьей задаче — антисимметрично по z . Наряду с этим каждая из упомянутых трех задач расчленяется нами еще на две в зависимости от симметрии или антисимметрии по координате θ . Последнее обстоятельство позволяет свести каждую из таких отдельных задач к крайевым задачам для гармонических в полупространстве $y > 0$ функций.

Если составляющая T_z внешней силы, параллельная ребру разреза, отсутствует, т. е. $\tau_{\theta z}|_{\theta=\pm\pi} = 0$, то удобно положить $\Phi_3 \equiv 0$, что и делается в §§ 84—87 при решении соответствующих задач. При этом из граничного условия (83. 4) $\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{\theta=\pm\pi} = 0$ сразу следует, что $\Phi|_{\theta=\pm\pi} = 0$ (так как $\Phi|_{|r| \rightarrow \infty} \rightarrow 0$). Кроме того, формула (83. 3) при $\theta = \pm\pi$ приводит к зависимостям, которые могут служить для нахождения функции Φ_1

$$\left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \right|_{\theta=\pm\pi} = -\frac{r}{2(1-\nu)} \tau_{r\theta} |_{\theta=\pm\pi}. \quad (83. 6)$$

Полученные соотношения вместе с крайевым условием, получаемым из (83. 2) при $\theta = \pm\pi$, после некоторых преобразований с учетом соотношения

$$\left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_{\theta=\pm\pi} = -\frac{1}{r} \cdot \left. \frac{\partial}{\partial \theta} \right|_{\theta=\pm\pi}$$

могут быть представлены в виде следующих смешанных граничных условий:

$$[(1-2\nu)\Phi_2 - \Phi_4]_{\theta=\pm\pi} = -\frac{r}{2(1-\nu)} \tau_{r\theta} |_{\theta=\pm\pi}, \quad (83.7)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial y} [2(1-\nu)\Phi_2 - \Phi_4] \right\}_{\theta=\pm\pi} = \\ & = \sigma_{\theta} |_{\theta=\pm\pi} - \left[(1-2\nu) \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \theta^2} \right]_{\theta=\pm\pi}, \end{aligned} \quad (83.8)$$

причем введена еще одна гармоническая функция Φ_4 :

$$\Phi_4 = \frac{\partial \Phi_0}{\partial y}. \quad (83.9)$$

Ближайшие четыре параграфа будут посвящены рассмотрению случаев приложения сосредоточенных сил (нормальной и перпендикулярной ребру касательной), каждый из которых разбивается на две задачи: симметричную и антисимметричную по координате θ (симметрия по z имеет место во всех четырех случаях). Как уже указывалось, во всех таких задачах принимается $\Phi_3 \equiv 0$, что позволяет использовать краевые условия в форме (83.6)—(83.8). В дальнейшем под термином «симметричная» («антисимметричная») нагрузка будут пониматься различные случаи приложения сосредоточенных сил, обладающие симметрией (антисимметрией) по координате θ .

§ 84. Случай нормальной симметричной нагрузки

В настоящем параграфе рассматривается задача об упругом равновесии неограниченного тела с плоским разрезом, в точках $r=a$, $\theta = \pm\pi$, $z=0$ которого приложены две противоположно направленные нормальные силы величины N каждая.

В силу симметрии напряженного состояния относительно координаты θ поставленная задача может быть сведена к следующей смешанной задаче теории упругости для полупространства $y > 0$: на граничной плоскости $y=0$ при $\theta=\pi$ заданы напряжения

$$\sigma_z |_{\theta=\pi} = \sigma(r, z), \quad \tau_{r\theta} |_{\theta=\pi} = 0, \quad \tau_{\theta z} |_{\theta=\pi} = 0, \quad (84.1)$$

в то время как при $\theta=0$ отсутствуют перемещение v и касательные напряжения $\tau_{r\theta}$ и $\tau_{\theta z}$:

$$v |_{\theta=0} = 0, \quad \tau_{r\theta} |_{\theta=0} = 0, \quad \tau_{\theta z} |_{\theta=0} = 0. \quad (84.2)$$

Легко видеть, что граничные условия (84.2) после использования выражений (83.1), (83.3) и (83.4) могут быть заменены следующими:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = 0, \quad \Phi_2 |_{\theta=0} = 0, \quad \Phi_4 |_{\theta=0} = 0. \quad (84.3)$$

Наряду с этим равенства (84.1), согласно изложенному в конце предыдущего параграфа, эквивалентны условиям (83.6)—(83.8)

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\pi} = 0, \quad [(1-2\nu)\Phi_2 - \Phi_4]_{\theta=\pi} = 0, \quad (84.4)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial y} [2(1-\nu)\Phi_2 - \Phi_4] \right\} \Big|_{\theta=\pi} = \sigma(r, z) - \left[(1-2\nu) \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \theta^2} \right]_{\theta=\pi}. \quad (84.5)$$

Из приведенных краевых условий немедленно следует, что функция Φ_1 тождественно равна нулю:

$$\Phi_1 \equiv 0, \quad (84.6)$$

а между функциями Φ_2 и Φ_4 существует зависимость

$$\Phi_4 \equiv (1-2\nu)\Phi_2. \quad (84.7)$$

Задача, следовательно, сводится к нахождению гармонической в полупространстве $y > 0$ функции Φ_2 , удовлетворяющей граничным условиям смешанного типа

$$\Phi_2|_{\theta=0} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\pi} = -r\sigma(r, z), \quad (84.8)$$

где $\sigma(r, z)$ — напряжение, соответствующее действию в точке $r = a$, $\theta = \pi$, $z = 0$ сосредоточенной силы величины N .

Как уже указывалось в §§ 80 и 82, краевые задачи подобного рода могут быть решены с помощью интегрального преобразования Фурье по координате z и интегрального преобразования Конторовича—Лебедева по координате r . В данном случае функцию Φ_2 следует искать в виде следующего двойного интегрального разложения:

$$\Phi_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty A(\sigma, \tau) \frac{\text{sh } \theta \tau}{\tau \text{ ch } \pi \tau} K_{i\tau}(\sigma r) \cos \sigma z d\sigma d\tau, \quad (84.9)$$

где $A(\sigma, \tau)$ — неизвестная функция.

Граничное условие при $\theta = \pi$ приводит к равенству

$$-r\sigma(r, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty A(\sigma, \tau) K_{i\tau}(\sigma r) \cos \sigma z d\sigma d\tau. \quad (84.10)$$

На основании формулы (80.7) получаем следующее выражение для искомой функции $A(\sigma, \tau)$ в виде двойной квадратуры:

$$A(\sigma, \tau) = -\frac{2\sqrt{2} \tau \text{ sh } \pi \tau}{\pi^2 \sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty \sigma(r, z) K_{i\tau}(\sigma r) \cos \sigma z dr dz. \quad (84.11)$$

Распределяя сосредоточенную силу N по малой окрестности точки $r = a$, $\theta = \pi$, $z = 0$ и осуществляя соответствующий предельный переход, находим

$$A(\sigma, \tau) = \frac{\sqrt{2} N}{\pi^2 \sqrt{\pi}} \tau \operatorname{sh} \pi \tau K_{\frac{3}{2}}(\sigma a), \quad (84.12)$$

после чего решение задачи (84.9) представляется следующим двойным интегралом:

$$\Phi_2(r, \theta, z) = \frac{2N}{\pi^3} \int_0^\infty \int_0^\infty \operatorname{th} \pi \tau \operatorname{sh} \theta \tau K_{\frac{3}{2}}(\sigma a) K_{\frac{3}{2}}(\sigma r) \cos \sigma z d\sigma d\tau. \quad (84.13)$$

Полученное решение может быть представлено в замкнутом виде через элементарные функции, если воспользоваться интегральным представлением (80.14) для произведения цилиндрических функций. Подстановка (80.14) в (84.13) после перемены порядка интегрирования и вычисления квадратуры по переменной σ с помощью формулы (82.10) приводит к следующему выражению:

$$\Phi_2 = \frac{N}{\pi^2 \sqrt{2ar}} \int_0^\infty \operatorname{th} \pi \tau \operatorname{sh} \theta \tau d\tau \int_0^\infty \frac{\cos \tau s ds}{\sqrt{\operatorname{ch} s + \operatorname{ch} \mu}}, \quad (84.14)$$

где введено обозначение

$$\operatorname{ch} \mu = \frac{r^2 + a^2 + z^2}{2ar}. \quad (84.15)$$

Воспользовавшись вытекающим из (57.15) и (57.16) соотношением

$$\int_0^\infty \frac{\cos \tau s ds}{\sqrt{\operatorname{ch} s + \operatorname{ch} \mu}} = \frac{1}{\operatorname{sh} \pi \tau} \int_\mu^\infty \frac{\sin \tau s ds}{\sqrt{\operatorname{ch} s - \operatorname{ch} \mu}}, \quad (84.16)$$

а также значением интеграла

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} \theta \tau}{\operatorname{ch} \pi \tau} \sin \tau s d\tau = \frac{\sin \frac{\theta}{2} \operatorname{sh} \frac{s}{2}}{\operatorname{ch} s + \cos \theta}, \quad |\theta| < \pi, \quad (84.17)$$

получаем выражение искомой функции Φ_2 уже в виде однократного интеграла

$$\Phi_2 = \frac{N \sin \frac{\theta}{2}}{\pi^2 \sqrt{2ar}} \int_\mu^\infty \frac{\operatorname{sh} \frac{s}{2} ds}{(\operatorname{ch} s + \cos \theta) \sqrt{\operatorname{ch} s - \operatorname{ch} \mu}}. \quad (84.18)$$

Вычисляя последнюю квадратуру с помощью подстановки $\text{ch} \frac{s}{2} = \text{ch} \frac{\mu}{2} \text{ch} u$, приходим к замкнутой форме решения

$$\Phi_2 = \frac{N}{\pi^2 \rho} \text{arctg} \frac{2\sqrt{ar} \sin \frac{\theta}{2}}{\rho}, \quad (84.19)$$

где через ρ обозначено расстояние от точки приложения силы до произвольной точки тела

$$\rho = \sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}. \quad (84.20)$$

Для полного решения поставленной задачи необходимо еще найти функцию Φ_0 по заданной функции Φ_4 из соотношения (83.9). В данном случае, очевидно, можно положить

$$\Phi_0 = \int_{\infty}^y \Phi_4 dy + \text{const}$$

или с учетом (84.7)

$$\Phi_0 = (1-2\nu) \int_{\infty}^y \Phi_2 dy + \text{const} \quad (y > 0). \quad (84.21)$$

Хотя квадратуры такого типа не вычисляются в конечном виде, однако значения производных $\frac{\partial \Phi_0}{\partial z}$ и $\frac{\partial \Phi_0}{\partial x}$, входящие в выражения для упругих перемещений, могут быть выражены через элементарные функции. Опуская довольно громоздкие выкладки, приводим окончательный результат:

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial x} + i \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} = \frac{N(1-2\nu)}{\pi^2(x+a-iz)} \times \left\{ \frac{\sqrt{\frac{a}{2}}}{\sqrt{x-a-iz}} \ln \frac{\sqrt{r+x} + \sqrt{x-a-iz}}{\sqrt{r+x} - \sqrt{x-a-iz}} - \frac{y}{\rho} \text{arctg} \frac{\sqrt{2a(r-x)}}{\rho} \right\}. \quad (84.22)$$

Непосредственной проверкой можно без особого труда установить, что полученные выражения для функций напряжений удовлетворяют также сформулированным выше условиям на бесконечности и на ребре.

В заключение данного параграфа приведем формулу для напряжений в средней плоскости $\theta = 0$ рассматриваемого тела. Общая формула (83.2) для нормального напряжения σ_{θ} при $\theta = 0$ переходит в такую:

$$\sigma_{\theta} |_{\theta=0} = \left[2(1-\nu) \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - \frac{\sigma}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \right) - (1-2\nu) \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_4}{\partial y} \right]_{\theta=0}. \quad (84.23)$$

Для рассматриваемого случая находим

$$\sigma_{\theta}|_{\theta=0} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \Big|_{\theta=0} = \frac{N}{\pi^2} \sqrt{\frac{a}{x}} \frac{1}{(x+a)^2 + z^2}. \quad (84.24)$$

§ 85. Нормальная антисимметричная нагрузка

В рассматриваемом случае нормальные силы величины N , приложенные в точках $r=a$, $\theta = \pm\pi$, $z=0$, имеют одинаковое направление.*

В силу антисимметрии поставленной задачи относительно координаты θ в средней плоскости $\theta=0$ должны отсутствовать перемещения u и w , а также нормальное напряжение

$$u|_{\theta=0} = 0, \quad w|_{\theta=0} = 0, \quad \sigma_{\theta}|_{\theta=0} = 0. \quad (85.1)$$

На основании формул (83.1) и (83.2) эти граничные условия могут быть заменены следующими:

$$\Phi_1|_{\theta=0} = 0, \quad (85.2)$$

$$\Phi_0|_{\theta=0} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = 0. \quad (85.3)$$

Что касается области $\theta=\pi$, то там по-прежнему имеют место краевые условия

$$\sigma_{\theta}|_{\theta=\pi} = \sigma(r, z), \quad \tau_{r\theta}|_{\theta=\pi} = 0, \quad \tau_{\theta z}|_{\theta=\pi} = 0,$$

которые на основании (83.6)—(83.8) могут быть записаны в следующем виде:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\pi} = 0, \quad (85.4)$$

$$[(1-2\nu)\Phi_2 - \Phi_4]_{\theta=\pi} = 0, \quad (85.5)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left[2(1-\nu)\Phi_2 - \Phi_4 - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} - (1-2\nu) \int_{\infty}^y \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} dy \right] \right\}_{\theta=\pi} = \sigma(r, z). \quad (85.6)$$

Заметим теперь, что хотя гармоническая функция Φ_1 удовлетворяет однородным краевым условиям (85.2) и (85.4), однако, как будет видно из дальнейшего изложения, в данном случае равенство $\Phi_1 \equiv 0$ не приводит к правильному решению поставленной задачи. Оказывается, можно построить гармоническую в полупространстве $y > 0$ функцию, удовлетворяющую краевым

* При решении задачи, рассматриваемой в этом параграфе, мы вообще не пользуемся методом интегральных преобразований. Однако возникают некоторые специфические трудности, преодолеваемые нами с помощью введения особых решений типа (85.7). Заметим, что отмеченная В. И. Моссаковским [75] ошибка в работе [71] относится, в частности, к исследуемому случаю (см. также §§ 69 и 71).

условиям (85.2) и (85.4) и убывающую на бесконечности, но не равную тождественно нулю. Функции такого типа могут быть получены с помощью следующих особых решений уравнения Лапласа:

$$\frac{1}{\sqrt{r}} e^{\pm \frac{i\theta}{2}} f(r \pm iz) \quad (85.7)$$

[$f(z)$ — произвольная аналитическая функция], частично уже применявшихся нами в предыдущей главе [см. (82.8)]. В соответствии с этим можно положить*

$$\Phi_1 = A_1 \omega_s, \quad \omega_s = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sqrt{r}} \operatorname{Re} f(t), \quad t = r + a + iz. \quad (85.8)$$

Далее, применяя к первому из условий (85.3) двумерную операцию Лапласа $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, получаем соотношение

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2} \Big|_{\theta=0} = \frac{\partial \Phi_4}{\partial y} \Big|_{\theta=0} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi_4}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = 0,$$

которое вместе со вторым условием (85.3), а также (85.5) приводит нас к следующим краевым условиям для гармонической функции $\psi = \Phi_4 - (1 - 2\nu)\Phi_2$:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = 0, \quad \psi \Big|_{\theta=\pi} = 0. \quad (85.9)$$

В соответствии с вышеизложенным можно положить $\psi = B\omega_c$. т. е.

$$\Phi_4 - (1 - 2\nu)\Phi_2 = B\omega_c, \quad (85.10)$$

где введена неопределенная постоянная B и обозначено

$$\omega_c = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{r}} \operatorname{Re} f(t). \quad (85.11)$$

Вид функции $f(t)$, а также постоянные A_1 и B должны в дальнейшем определиться из граничных условий задачи. Предполагается в соответствии с требованиями на бесконечности, что при $|t| \rightarrow \infty$ функция $f(t)$ убывает не медленнее, чем $\frac{1}{\sqrt{|t|}}$.

Наконец, оставшееся граничное условие (85.6) вместе с вытекающим из (85.2) и (85.3) соотношением

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[2(1 - \nu)\Phi_2 - \Phi_4 - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} - (1 - 2\nu) \int_{\infty}^y \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} dy \right] \Big|_{\theta=\pi} = 0 \quad (85.12)$$

* Произвольный множитель A_1 , который можно было бы и не вводить, удобен для дальнейших выкладок.

составляют краевые условия второго рода для гармонической функции, стоящей в квадратных скобках последнего равенства. Решение поставленной таким образом задачи Неймана для полупространства не представляет затруднений и может быть проведено любым из известных способов. Для функции $\varepsilon(r, z)$, соответствующей рассматриваемой точечной нагрузке, находим

$$2(1-\nu)\Phi_2 - \Phi_4 - \frac{\partial\Phi_1}{\partial\theta} - (1-2\nu)\int_{\infty}^y \frac{\partial\Phi_1}{\partial x} dy = \frac{N}{2\pi\rho}, \quad (85.13)$$

$$\rho = \sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}.$$

Из полученных связей (85.10) и (85.13) между функциями Φ_2 и Φ_4 , учитывая еще соотношение

$$\frac{\partial\omega_e}{\partial y} - \frac{\partial\omega_e}{\partial x} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sqrt{r}} \operatorname{Re} f'(t) \quad (85.14)$$

и вводя вместо B постоянную A_2 с помощью зависимости

$$A_2 = \left(\frac{3}{2} - 2\nu\right)A_1 + B, \quad (85.15)$$

находим следующие выражения для искоемых функций Φ_2 и Φ_4 :

$$\Phi_2 = A_2\omega_e - (1-2\nu)A_1 \int_{\infty}^y \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sqrt{r}} \operatorname{Re} f'(t) dy + \frac{N}{2\pi\rho}, \quad (85.16)$$

$$\Phi_4 = \left[\left(2\nu - \frac{3}{2}\right)A_1 + 2(1-\nu)A_2 \right] \omega_e - (1-2\nu)^2 A_1 \times$$

$$\times \int_{\infty}^y \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sqrt{r}} \operatorname{Re} f'(t) dy + \frac{(1-2\nu)N}{2\pi\rho}. \quad (85.17)$$

Необходимо теперь вспомнить, что первое из граничных условий (85.3)

$$\Phi_0|_{\theta=0} = 0 \quad (85.18)$$

выполнено при этом только с точностью до слагаемого, представляющего собой плоскую гармоническую функцию (от переменных x и z), ибо при получении условий (85.9) и (85.12) мы подвергали равенство (85.18) операции двумерного лапласиана $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Поэтому, учитывая еще связь $\Phi_4 = \frac{\partial\Phi_0}{\partial y}$, необходимо проинтегрировать соотношение (85.17) по y в пределах от ∞ до y и при $\theta=0$ приравнять найденный результат нулю; полу-

ченное равенство, как будет видно из дальнейшего, даст возможность определить функцию $f(t)$. Из сказанного ясна необходимость введения особых решений типа (85.8), ибо при $A_1 = A_2 = 0$ выражение (85.17) не дает возможности удовлетворить условию (85.18).

В связи с тем, что интеграл от функции $\frac{1}{\rho}$ расходится на бесконечном пределе, рассмотрим вместо (85.18) условие

$$\left. \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \right|_{\theta=0} = 0. \quad (85.19)$$

Легко видеть, что (85.19) совершенно эквивалентно (85.18). В самом деле, из (85.19) следуют равенства

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z^2} \right|_{\theta=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} \right|_{\theta=0} = 0 \quad \left(\text{последнее с учетом условия } \left. \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2} \right|_{\theta=0} = 0 \right),$$

$$\left. \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \right|_{\theta=0} = 0 \quad \left(\text{ибо } \left. \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \right|_{|x| \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \right), \quad \Phi_0|_{\theta=0} = \text{const},$$

а это равносильно (85.18), так как функция Φ_0 вообще определена с точностью до постоянного слагаемого.

Составим выражение

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial z} = \int_{-\infty}^y \frac{\partial \Phi_4}{\partial z} dy$$

с помощью формулы (85.17) и превратим двойную квадратуру в однократную интегрированием по частям.* Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} = & (1 - 2\nu) \frac{Nz}{2\pi\rho(\rho + y)} + \left[\left(2\nu - \frac{3}{2} \right) A_1 + 2(1 - \nu) A_2 \right] \times \\ & \times \int_{-\infty}^y \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{r}} \operatorname{Re} i f'(t) dy + A_1 (1 - 2\nu)^2 \left[\int_{-\infty}^y y \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sqrt{r}} \operatorname{Re} i f''(t) dy - \right. \\ & \left. - y \int_{-\infty}^y \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sqrt{r}} \operatorname{Re} i f'''(t) dy \right]. \end{aligned} \quad (85.20)$$

* При этом предполагается, что

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y \int_{-\infty}^y \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sqrt{r}} \operatorname{Re} \frac{df'(t)}{dz} dy = 0$$

— условие, которое можно проверить впоследствии, после нахождения функции $f(t)$.

Введем величину $t = r + a + iz$ в качестве новой независимой переменной и представим входящие в (85.20) интегралы в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \int_{\infty}^{\theta} \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{r}} f'(t) dy &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\infty}^t \frac{f'(t) dt}{\sqrt{t-t_0}}, \\ \int_{\infty}^{\theta} y \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sqrt{r}} f''(t) dy &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\infty}^t \sqrt{t-t_0} f''(t) dt, \end{aligned} \right\} \quad (85.21)$$

где положено

$$t_0 = t|_{\theta=0} = x + a + iz \quad (85.22)$$

$$\left(\text{при этом } \cos \frac{\theta}{2} \cdot \frac{dy}{\sqrt{r}} = \frac{dt}{\sqrt{2(t-t_0)}}, \quad y \sin \frac{\theta}{2} \cdot \frac{dy}{\sqrt{r}} = \sqrt{\frac{t-t_0}{2}} dt \right).$$

Учитывая еще равенство

$$\frac{z}{\rho^2} \Big|_{\theta=0} = -\operatorname{Im} \frac{1}{t_0},$$

можно привести теперь условие (85.19) к следующему интегральному уравнению для функции $f'(t)$:*

$$2(1-\nu)[A_2 - (1-\nu)A_1] \int_{t_0}^{\infty} \frac{f'(t)}{\sqrt{t-t_0}} dt = (1-2\nu) \frac{N}{\pi\sqrt{2}t_0}. \quad (85.23)$$

Полученное уравнение принадлежит к числу хорошо изученных интегральных уравнений типа Абеля, и его решение может быть найдено умножением обеих его частей на $\frac{dt_0}{\sqrt{t_0-t}}$ с последующим интегрированием по ζ в пределах от ζ до ∞ .

Пользуясь указанной выше произвольностью величины A_1 , положим

$$2(1-\nu)[A_2 - (1-\nu)A_1] = -(1-2\nu) \frac{N}{\pi\sqrt{2}}. \quad (85.24)$$

* Во втором интеграле (85.21) следует еще произвести интегрирование по частям и учесть, что, согласно предположенному поведению функции $f(t)$ при $t \rightarrow \infty$, имеет место равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\sqrt{t-t_0} f'(t)] = 0.$$

Тогда в результате решения интегрального уравнения (85. 23) найдем

$$\left. \begin{aligned} f'(t) &= -\frac{1}{2t\sqrt{t}}, \\ f(t) &= \frac{1}{\sqrt{t}}. \end{aligned} \right\} \quad (85. 25)$$

Теперь функции Φ_0 и Φ_2 могут быть найдены в замкнутом виде [первая — из (85. 17) интегрированием по переменной t в пределах от t_0 до t , а вторая — из (85. 16)]:

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{(1-2\nu)N}{\pi} \ln \frac{\sqrt{\rho+y}}{|\sqrt{t} + \sqrt{2r} \sin \frac{\theta}{2}|} + \\ &+ (1-2\nu)^2 A_1 \operatorname{Re} \frac{\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}}{\sqrt{t} + \sqrt{2r} \cos \frac{\theta}{2}}, \end{aligned} \quad (85. 26)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \frac{N}{2\pi\rho} + A_2 \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{r}} \operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{t}} - \\ &- (1-2\nu) A_1 \operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{2t}(\sqrt{t} + \sqrt{2r} \cos \frac{\theta}{2})}, \end{aligned} \quad (85. 27)$$

причем в эти формулы, по существу, входит лишь одна произвольная постоянная, ибо величины A_1 и A_2 связаны соотношением (85. 24).

Заметим теперь, что функции Φ_1 и Φ_2 , даваемые формулами (85. 8) и (85. 27), на ребре разреза, т. е. при $r \rightarrow 0$, неограниченно возрастают. Необходимо еще потребовать, чтобы полученные из них упругие перемещения оставались бы ограниченными при $r \rightarrow 0$. Если составить на основании зависимостей (83. 1) выражения для перемещений и устремить в них $r \rightarrow 0$, то асимптотические представления перемещений u и v будут таковы: *

$$\left. \begin{aligned} 2Gu &= \frac{7-8\nu}{2\sqrt{r}} (A_1 + A_2) \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{a+iz}} + O(1), \\ 2Gv &= \frac{7-8\nu}{2\sqrt{r}} (A_1 + A_2) \cos \theta \cos \frac{\theta}{2} \operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{a+iz}} + O(1). \end{aligned} \right\} \quad (85. 28)$$

Отсюда следует, что условием ограниченности перемещений на ребре $r=0$ будет связь

$$A_1 + A_2 = 0, \quad (85. 29)$$

* Можно проверить что перемещение $w|_{r \rightarrow 0}$ ограничено при любых значениях A_1 и A_2 .

которая вместе с соотношением (85.24) определяет постоянные A_1 и A_2 .

Решение системы (85.24)—(85.29) дает следующие значения постоянных:

$$A_1 = -A_2 = \frac{(1-2\nu)N}{2\pi\sqrt{2}(1-\nu)(2-\nu)}, \quad (85.30)$$

чем и дается окончательное решение поставленной задачи.

Имея замкнутые выражения для функций Φ_0, Φ_1, Φ_2 , можно легко установить, что условия на бесконечности и на ребре выполнены. В частности, ограниченность перемещений на ребре разреза вытекает в данном случае из самого способа построения функций напряжений.

В заключение выведем формулу для напряжений в средней плоскости ($\theta=0$) тела. На основании (83.3) имеем

$$\tau_{r\theta}|_{\theta=0} = \left[\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{2(1-\nu)}{r} \cdot \frac{\partial\Phi_1}{\partial\theta} \right]_{\theta=0}, \quad \tau_{\theta z}|_{\theta=0} = \frac{\partial\Phi}{\partial z} \Big|_{\theta=0}. \quad (85.31)$$

Так как

$$\Phi|_{\theta=0} = \left[(1-2\nu)\Phi_2 - \Phi_4 - \frac{\partial\Phi_1}{\partial\theta} \right]_{\theta=0} = 2(1-\nu) \frac{A_1}{\sqrt{x}} \operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{x+a+iz}},$$

то

$$\tau_{r\theta}|_{\theta=0} = -(1-\nu) \frac{A_1}{\sqrt{x}} \operatorname{Re} \frac{1}{t_0\sqrt{t_0}}, \quad \tau_{\theta z}|_{\theta=0} = (1-\nu) \frac{A_1}{\sqrt{x}} \operatorname{Im} \frac{1}{t_0\sqrt{t_0}},$$

что может быть представлено в виде одной формулы

$$(-\tau_{r\theta} + i\tau_{\theta z})_{\theta=0} = \frac{(1-\nu)A_1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{t_0\sqrt{t_0}}, \quad t_0 = x+a+iz. \quad (85.32)$$

§ 86. Касательная симметричная нагрузка, перпендикулярная ребру разреза

Внешняя нагрузка в этом случае представляет собой две одинаково направленные сосредоточенные касательные силы величины T , приложенные в точках $r=a$, $\theta = \pm\pi$, $z=0$ соответственно.

В средней плоскости $\theta=0$, очевидно, отсутствуют перемещение v и касательные напряжения

$$v|_{\theta=0} = 0, \quad \tau_{r\theta}|_{\theta=0} = 0, \quad \tau_{\theta z}|_{\theta=0} = 0, \quad (86.1)$$

что на основании (83.1), (83.3) и (83.4) равносильно условиям

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial\theta} \Big|_{\theta=0} = 0, \quad \Phi_2|_{\theta=0} = 0, \quad \Phi_4|_{\theta=0} = 0 \quad \left(\Phi_4 = \frac{\partial\Phi_0}{\partial y} \right). \quad (86.2)$$

При $\theta = \pi$ имеем

$$\sigma_{\theta}|_{\theta=\pi} = 0, \quad \tau_{r\theta}|_{\theta=\pi} = \tau(r, z), \quad \tau_{\theta z}|_{\theta=\pi} = 0, \quad (86.3)$$

где напряжение $\tau(r, z)$ соответствует сосредоточенной силе T_r , приложенной в точке $r = a$, $\theta = \pi$, $z = 0$.

Краевые условия (86.3) на основании (83.6)—(83.8) переходят в такие соотношения:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\pi} = -\frac{r}{2(1-\nu)} \tau(r, z), \quad (86.4)$$

$$[(1-2\nu)\Phi_2 - \Phi_4]_{\theta=\pi} = -\frac{r}{2(1-\nu)} \tau(r, z), \quad (86.5)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial y} [2(1-\nu)\Phi_2 - \Phi_4] - (1-2\nu) \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \right) \right\}_{\theta=\pi} = 0. \quad (86.6)$$

Из граничных условий (86.2)—(86.6) сразу выделяются условия второго рода для функции Φ_1

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\pi} = -\frac{r}{2(1-\nu)} \tau(r, z). \quad (86.7)$$

Следовательно, функция Φ_1 представляет собой решение задачи Неймана для полупространства $y > 0$. Для рассматриваемого случая точечной нагрузки находим

$$\Phi_1 = -\frac{T_r}{4(1-\nu)\pi\rho}, \quad \rho = \sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}. \quad (86.8)$$

Далее, из (86.2) и (86.5) получаем краевые условия первого рода для гармонической функции $(1-2\nu)\Phi_2 - \Phi_4$

$$\left. \begin{aligned} [(1-2\nu)\Phi_2 - \Phi_4]_{\theta=0} &= 0, \\ [(1-2\nu)\Phi_2 - \Phi_4]_{\theta=\pi} &= -\frac{r}{2(1-\nu)} \tau(r, z). \end{aligned} \right\} \quad (86.9)$$

Вспоминая, что $\Phi_4 = \frac{\partial \Phi_0}{\partial y}$ и считая

$$\Phi_0 = \Phi'_0 + \Phi''_0, \quad (86.10)$$

мы можем положить

$$\frac{\partial \Phi''_0}{\partial y} \equiv (1-2\nu)\Phi_2, \quad (86.11)$$

а функцию Φ'_0 определить в результате решения краевой задачи Неймана для полупространства $y > 0$

$$\Delta \Phi'_0 = 0, \quad \frac{\partial \Phi'_0}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = 0, \quad \frac{\partial \Phi'_0}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\pi} = -\frac{r^2}{2(1-\nu)} \tau(r, z), \quad (86.12)$$

откуда следует, что

$$\Phi'_0 \equiv a\Phi_1 = -\frac{aT_r}{4(1-\nu)\pi r}. \quad (86.13)$$

Оставшееся условие (86.6) с учетом тождества

$$\frac{\partial\Phi'_0}{\partial y} + \frac{\partial\Phi_1}{\partial\theta} = 0$$

и соотношения (86.11) может быть представлено в таком виде:

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial y} \Big|_{\theta=\pi} = (1-2\nu) \frac{\partial\Phi_1}{\partial x} \Big|_{\theta=\pi}. \quad (86.14)$$

Так как правая часть последнего равенства — известная функция, то, присоединяя к (86.14) второе условие (86.2): $\Phi_2|_{\theta=0} = 0$, получаем для функции Φ_2 краевую задачу смешанного типа, решение которой может быть получено с помощью интегрального преобразования Ковторовича—Лебедева.

Однако в данном случае можно предложить и другой способ решения, связанный с использованием особых решений типа (85.7).

Подвергая равенство $\Phi_2|_{\theta=0} = 0$ операции $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ и используя вытекающее из (86.2) соотношение

$$\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x\partial y} \Big|_{\theta=0} = 0,$$

можно присоединить к условию (86.14) еще такую зависимость:

$$\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial y^2} \Big|_{\theta=0} = (1-2\nu) \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x\partial y} \Big|_{\theta=0}. \quad (86.15)$$

Следовательно, гармоническая в полупространстве $y > 0$ функция

$$\psi = \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} - (1-2\nu) \frac{\partial\Phi_1}{\partial x},$$

как удовлетворяющая однородным краевым условиям

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \Big|_{\theta=0} = 0, \quad \psi \Big|_{\theta=\pi} = 0,$$

пропорциональна особому решению типа ω_o :

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial y} \equiv (1-2\nu) \frac{\partial\Phi_1}{\partial x} + \omega_o, \quad \omega_o = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{r}} \operatorname{Re} f(t), \quad (86.16)$$

$$t = r + a + iz,$$

причем функция $f(t)$ должна быть найдена из условия $\Phi_2|_{t=0} = 0$, которое пока еще удовлетворено с точностью до плоского гармонического слагаемого.

Составляя функцию Φ_2 , получаем после вычисления интеграла $\int_{\infty}^y \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} dy$

$$\Phi_2 = -\frac{(1-2\nu)T_r}{4\pi(1-\nu)} \cdot \frac{x+a}{\rho(\rho+y)} + \int_{\infty}^y \omega_c dy. \quad (86.17)$$

Последний интеграл введением t в качестве новой переменной интегрирования может быть приведен к виду

$$\int_{\infty}^y \omega_c dy = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\infty}^t \frac{\operatorname{Re} f(t)}{\sqrt{t-t_0}} dt, \quad t_0 = t|_{t=0} = x+a+iz. \quad (86.18)$$

Если теперь заметить, что

$$\frac{x+a}{\rho^2|_{t=0}} = \operatorname{Re} \frac{1}{t_0},$$

то условие $\Phi_2|_{t=0} = 0$ приводит к интегральному уравнению Абеля для искомой функции $f(t)$:

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{f(t)}{\sqrt{t-t_0}} dt = -\frac{(1-2\nu)T_r}{2\pi\sqrt{2}(1-\nu)} \cdot \frac{1}{t_0}, \quad (86.19)$$

решением которого является функция [см. (85.25)]

$$f(t) = -\frac{(1-2\nu)T_r}{4\pi\sqrt{2}(1-\nu)} \cdot \frac{1}{t\sqrt{t}}. \quad (86.20)$$

После того как функция $f(t)$ найдена, интеграл (86.18) может быть вычислен в явном виде, и мы приходим к следующему выражению для функции Φ_2 :

$$\Phi_2 = \frac{(1-2\nu)T_r}{4\pi(1-\nu)} \left[\operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{t}(\sqrt{t} + \sqrt{r-x})} - \frac{x+a}{\rho(\rho+y)} \right]. \quad (86.21)$$

Остается еще найти функцию Φ_0'' из соотношения (86.11). Так как функция Φ_2 при $y \rightarrow \infty$ имеет порядок $\frac{1}{y}$, то из равенства (86.11) можно получить значения производных $\frac{\partial \Phi_0''}{\partial x}$ и $\frac{\partial \Phi_0''}{\partial z}$, которые только и входят в выражения для перемещений и напряже-

ний. Опуская громоздкие выкладки, приводим окончательную формулу

$$\frac{\partial \Phi_0''}{\partial x} - i \frac{\partial \Phi_0''}{\partial z} = \frac{T_r (1 - 2\nu)^2}{4\pi (1 - \nu)} \left\{ \sqrt{r+x} \left[\frac{1}{t \sqrt{t}} - \frac{1}{2\sqrt{t}(\sqrt{t} + \sqrt{r-x})^2} \right] - \frac{\rho - y}{t_0^2} + \frac{(x+a)^2}{\rho |t_0|^2} \right\}. \quad (86.22)$$

Теперь можно составить выражение для самой функции Φ_0'' , которое имеет следующий вид:

$$\Phi_0'' = \frac{T_r (1 - 2\nu)^2}{4\pi (1 - \nu)} \left\{ \frac{x+a}{y+\rho} + \operatorname{Re} \left[\ln(\sqrt{t} + \sqrt{r+x}) - \frac{\sqrt{r+x}}{\sqrt{t} + \sqrt{r-x}} \right] \right\} + \text{const.} \quad (86.23)$$

Рассмотрим нормальные напряжения в средней плоскости ($\theta = 0$) тела. На основании формулы (84.23) получаем

$$\begin{aligned} \sigma_\theta|_{\theta=0} &= \left[2(1-\nu) \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial^2 \Phi_0''}{\partial y^2} - (1-2\nu) \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right]_{\theta=0} = \\ &= \left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - (1-2\nu) \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right]_{\theta=0} = \omega_\theta|_{\theta=0} \end{aligned}$$

или окончательно

$$\sigma_\theta|_{\theta=0} = -\frac{1-2\nu}{4\pi\sqrt{2}(1-\nu)} \cdot \frac{T_r}{\sqrt{x}} \operatorname{Re} \frac{1}{t_0 \sqrt{t_0}}. \quad (86.24)$$

§ 87. Касательная антисимметричная нагрузка, перпендикулярная ребру разреза

Если в точках $r=a$, $\theta = \pm\pi$, $z=0$ приложены противоположно направленные сосредоточенные касательные силы величины T_r , то в средней плоскости $\theta=0$ должны равняться нулю перемещения u и v и нормальное напряжение:

$$u|_{\theta=0} = 0, \quad v|_{\theta=0} = 0, \quad \sigma_\theta|_{\theta=0} = 0, \quad (87.1)$$

что равносильно следующим краевым условиям для функций напряжений:

$$\Phi_0|_{\theta=0} = 0, \quad \Phi_1|_{\theta=0} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta}|_{\theta=0} = 0. \quad (87.2)$$

На плоскости $\theta = \pi$ заданы напряжения

$$\sigma_\theta|_{\theta=\pi} = 0, \quad \tau_{r\theta}|_{\theta=\pi} = \tau(r, z), \quad \tau_{\theta z}|_{\theta=\pi} = 0, \quad (87.3)$$

причем последняя группа граничных условий на основании (83.6)—(83.8) может быть записана следующим образом:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\pi} = -\frac{r}{2(1-\nu)} \tau(r, z), \quad (87.4)$$

$$((1-2\nu)\Phi_2 - \Phi_4) \Big|_{\theta=\pi} = -\frac{r}{2(1-\nu)} \tau(r, z) \left(\Phi_4 = \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \right), \quad (87.5)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left[2(1-\nu)\Phi_2 - \Phi_4 - (1-2\nu) \int_{\infty}^y \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} dy - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \right] \right\} \Big|_{\theta=\pi} = 0. \quad (87.6)$$

Таким образом, для гармонической в полупространстве $y > 0$ функции Φ_1 имеют место краевые условия

$$\Phi_1 \Big|_{\theta=0} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\pi} = -\frac{r}{2(1-\nu)} \tau(r, z). \quad (87.7)$$

Решение соответствующей краевой задачи, данное в § 84 настоящей главы с помощью интегрального преобразования Конторовича—Лебедева, а также использование особого решения типа ω_s приводят к следующему результату [ср. (84.8) и (84.19)]:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= -\frac{r}{2\pi^2(1-\nu)} \psi + A_1 \omega_s, & \psi &= \frac{1}{\rho} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{ar} \sin \frac{\theta}{2}}{\rho}, \\ \rho &= \sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}, & \omega_s &= \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sqrt{r}} \operatorname{Re} f(t), \\ & & t &= r + a + iz, \end{aligned} \right\} \quad (87.8)$$

где аналитическая функция $f(t)$ подлежит в дальнейшем определению.

Далее, гармоническая функция $(1-2\nu)\Phi_2 - \frac{\partial \Phi_0}{\partial y}$ удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\left. \begin{aligned} \left[(1-2\nu)\Phi_2 - \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \right] \Big|_{\theta=\pi} &= -\frac{r\tau(r, z)}{2(1-\nu)}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[(1-2\nu)\Phi_2 - \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \right] \Big|_{\theta=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (87.9)$$

[последнее — на основании третьего условия (87.2), а также применения оператора $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ к первому условию (87.2)].

Полагая

$$\Phi_0 = \Phi_0' + \Phi_0'', \quad (87.10)$$

где функция Φ'_0 удовлетворяет условиям

$$\Phi'_0|_{\theta=0} = 0, \quad \frac{\partial \Phi'_0}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\pi} = -\frac{r^{2\tau}(r, z)}{2(1-\nu)},$$

находим значение Φ'_0 :

$$\Phi'_0 = -\frac{aT_r}{2\pi^2(1-\nu)} \psi, \quad (87.11)$$

а также тождественную связь между функциями Φ_2 и $\frac{\partial \Phi'_0}{\partial y}$, содержащую особое решение

$$(1-2\nu)\Phi_2 - \frac{\partial \Phi'_0}{\partial y} = A'\omega_e, \quad \omega_e = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{r}} \operatorname{Re} f(t). \quad (87.12)$$

Наконец, последнее граничное условие (87.6) с учетом равенства

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[(2(1-\nu)\Phi_2 - \Phi_4 - (1-2\nu) \int_{\infty}^y \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} dy - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \right]_{\theta=0} = 0 \quad (87.13)$$

дает вторую связь между функциями Φ_2 и $\frac{\partial \Phi'_0}{\partial y}$:

$$2(1-\nu)\Phi_2 - \frac{\partial \Phi'_0}{\partial y} = \frac{\partial \Phi'_0}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} + (1-2\nu) \int_{\infty}^y \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} dy. \quad (87.14)$$

Вычисляя выражение

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi'_0}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} &= -\frac{T_r}{2\pi^2(1-\nu)} \left(a \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + A_1 \frac{\partial \omega_e}{\partial \theta} = \\ &= -\frac{T_r \sqrt{a}}{2\pi^2(1-\nu)} \omega_e + \frac{A_1}{2} \omega_e = D\omega_e \end{aligned}$$

и вводя вместо A' постоянную B с помощью связи

$$(1-2\nu)D - 2(1-\nu)A' = B,$$

получаем из (87.12) и (87.14) следующие выражения для функций Φ_2 и $\frac{\partial \Phi'_0}{\partial y}$:

$$\Phi_2 = (D - A')\omega_e + (1-2\nu) \int_{\infty}^y \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} dy, \quad (87.15)$$

$$\frac{\partial \Phi'_0}{\partial y} = B\omega_e + (1-2\nu)^2 \int_{\infty}^y \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} dy. \quad (87.16)$$

Остается удовлетворить последнему оставшемуся граничному условию

$$\Phi_0''|_{\theta=0} = 0. \quad (87.17)$$

Подставляя в (87.16) значение функции Φ_1 из (87.8) и пользуясь формулой (85.14), находим

$$\frac{\partial \Phi_0''}{\partial y} = (1 - 2\nu)^2 \left[A_0 \omega_0 - A_1 \int_{-\infty}^y \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sqrt{r}} \operatorname{Re} f'(t) dy - \frac{T_r \chi}{2\pi^2 (1 - \nu)} \right], \quad (87.18)$$

где новая постоянная A_0 введена соотношением

$$A_0 = A_1 + \frac{B}{(1 - 2\nu)^2} \quad (87.19)$$

и через χ обозначено значение интеграла

$$\chi = \int_{-\infty}^y \frac{\partial \psi}{\partial x} dy = \frac{1}{|t_0|^2} \left\{ \sqrt{\frac{a}{2}} \operatorname{Re} \left[\frac{t_0}{\sqrt{2x - t_0}} \ln \frac{\sqrt{r+x} + \sqrt{2x - t_0}}{\sqrt{r+x} - \sqrt{2x - t_0}} \right] - y(x+a)\psi \right\}, \quad t_0 = t|_{\theta=0} = x + a + iz. \quad (87.20)$$

Интегрируя равенство (87.18) по y в пределах от $-\infty$ до y , применяя формулы типа (85.21) и вычисляя квадратуру

$$\int_{-\infty}^y \chi dy = y\chi - (x+a)\psi - \sqrt{2a} \operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{t_0}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{t_0}{r-x}}, \quad (87.21)$$

приходим к следующему выражению для функции Φ_0'' :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{(1 - 2\nu)^2} \Phi_0'' = & \left(A_0 - \frac{A_1}{2} \right) \operatorname{Re} \int_{-\infty}^t \frac{f(t) dt}{\sqrt{t - t_0}} + A_1 y \operatorname{Re} \int_{-\infty}^t f(t) d \frac{1}{\sqrt{t - t_0 - 2x}} - \\ & - \frac{T_r}{\sqrt{2} \pi^2 (1 - \nu)} \left[y\chi - (x+a)\psi - \sqrt{2a} \operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{t_0}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{t_0}{r-x}} \right]. \quad (87.22) \end{aligned}$$

Условие (87.17) приводит нас теперь к интегральному уравнению Абеля

$$\left(A_0 - \frac{A_1}{2} \right) \int_{t_0}^{\infty} \frac{f(t) dt}{\sqrt{t - t_0}} = \frac{T_r \sqrt{a}}{2\pi(1 - \nu)} \cdot \frac{1}{\sqrt{t_0}}, \quad (87.23)$$

решение которого, если положить

$$A_0 - \frac{A_1}{2} = \frac{T_r \sqrt{a}}{2\pi^2 (1-\nu)}, \quad (87.24)$$

будет

$$f(t) = \frac{1}{t}. \quad (87.25)$$

После того как функция $f(t)$ найдена, выражения (87.22) и (87.15) для функций Φ_0'' и Φ_2 могут быть путем вычисления квадратур приведены к следующему виду:

$$\begin{aligned} \Phi_0'' = & \frac{(1-2\nu)^2}{\sqrt{2}} \left\{ A_1 \sqrt{r-x} \operatorname{Re} \frac{1}{t_0-2x} + \frac{A_1}{2} y \operatorname{Re} \frac{1}{(2x-t_0)^{3/2}} \times \right. \\ & \times \ln \frac{\sqrt{r+x} + \sqrt{2x-t_0}}{\sqrt{r+x} - \sqrt{2x-t_0}} - \frac{T_r}{\sqrt{2} \pi^2 (1-\nu)} \left[\sqrt{\frac{a}{2}} \frac{y}{|t_0|^2} \operatorname{Re} \frac{t_0}{\sqrt{2x-t_0}} \times \right. \\ & \left. \left. \times \ln \frac{\sqrt{r+x} + \sqrt{2x-t_0}}{\sqrt{r+x} - \sqrt{2x-t_0}} - \frac{\rho^2 (x+a) \psi}{|t_0|^2} \right] \right\}, \quad (87.26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_2 = & A_2 \omega_0 - (1-2\nu) \left[\frac{T_r}{2\pi^2 (1-\nu)} \chi - \frac{A_1}{\sqrt{2}} \sqrt{r+x} \operatorname{Re} \frac{1}{t(2x-t_0)} - \right. \\ & \left. - \frac{A_1}{2\sqrt{2}} \operatorname{Re} \frac{1}{(2x-t_0)^{3/2}} \ln \frac{\sqrt{r+x} + \sqrt{2x-t_0}}{\sqrt{r+x} - \sqrt{2x-t_0}} \right], \quad (87.27) \end{aligned}$$

где положено

$$(1-\nu) A_2 = (1-\nu)^2 A_1 - \frac{\nu T_r \sqrt{a}}{\pi^2}. \quad (87.28)$$

Таким образом, значения функций Φ_0 , Φ_1 и Φ_2 , даваемые формулами (87.11), (87.26), (87.8) и (87.27), содержат вследствие наличия связи (87.28) только одну произвольную постоянную, которая должна быть найдена из условия ограниченности перемещений на оси $r=0$ (ребро разреза).

Если составить асимптотические выражения для перемещений u и v при $r \rightarrow 0^*$

$$\left. \begin{aligned} 2Gu = & \frac{a}{a^2+z^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{r}} (A_1 + A_2) \left[\frac{3-4\nu}{2} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} + \right. \\ & \left. + 2(1-\nu) \cos \theta \sin \frac{\theta}{2} \right] + O(1), \\ 2Gv = & \frac{a}{a^2+z^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{r}} (A_1 + A_2) \left[(1-2\nu) \cos \theta \cos \frac{\theta}{2} - \right. \\ & \left. - \frac{3-4\nu}{2} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} \right] + O(1), \end{aligned} \right\} \quad (87.29)$$

* Перемещение w при $r \rightarrow 0$ ограничено независимо от значений постоянных A_1 и A_2 .

то из них вытекает следующее условие:

$$A_1 + A_2 = 0, \quad (87.30)$$

которое вместе с соотношением (87.28) позволяет определить искомые постоянные A_1 и A_2 .

При этом получаем, что

$$A_1 = -A_2 = \frac{\nu \sqrt{a} T_r}{\pi^2 (1-\nu)(2-\nu)}. \quad (87.31)$$

Таким образом, найдено — и притом в конечном виде — полное решение поставленной задачи.

Весьма простой вид имеют формулы для напряжений в средней плоскости. Исходя из основных формул (83.3) и (83.4), находим

$$\tau_{r\theta}|_{\theta=0} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{2}{r} (1-\nu) \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} \right]_{\theta=0}, \quad \tau_{\theta x} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{\theta=0},$$

где

$$\begin{aligned} \Phi|_{\theta=0} &= \left[-\frac{\partial \Phi_0}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} + (1-2\nu) \Phi_2 \right]_{\theta=0} = \\ &= -\left(\frac{\partial \Phi'_0}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \right)_{\theta=0} + \left[(1-2\nu) \Phi_2 - \frac{\partial \Phi''_0}{\partial y} \right]_{\theta=0} = \\ &= 2(1-\nu) \frac{A_1}{\sqrt{x}} \operatorname{Re} \frac{1}{t_0}, \quad t = x + a + iz. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\tau_{r\theta}|_{\theta=0} = -\frac{T_r}{\pi^2} \sqrt{\frac{a}{x}} \frac{1}{(x+a)^2 + z^2} - \frac{2(1-\nu) A_1}{\sqrt{x}} \operatorname{Re} \frac{1}{t_0^2}, \quad (87.32)$$

$$\tau_{\theta x}|_{\theta=0} = \frac{2(1-\nu) A_1}{\sqrt{x}} \operatorname{Im} \frac{1}{t_0^2}, \quad (87.33)$$

что может быть представлено в виде одной формулы

$$\begin{aligned} (-\tau_{r\theta} + i\tau_{\theta x})|_{\theta=0} &= \frac{T_r}{\pi^2} \sqrt{\frac{a}{x}} \frac{1}{(x+a)^2 + z^2} + \\ &+ \frac{2(1-\nu) A_1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{(x+a+iz)^2}. \end{aligned} \quad (87.34)$$

§ 88. Касательная нагрузка, параллельная ребру разреза

В предыдущих четырех параграфах были рассмотрены задачи об упругом равновесии неограниченного тела с плоским разрезом, причем внешняя нагрузка сводилась к сосредоточенной силе, расположенной в плоскости xOy и перпендикулярной ребру

$r=0$ разреза. При этом было удобно считать, что $\Phi_3 \equiv 0$, и пользоваться формулами (83. 6)—(83. 8).

Если рассматривать сосредоточенную силу $2T_s$, приложенную в произвольной точке $r=a$, $\theta=\pi$, $z=0$ верхнего берега разреза и направленную по оси z , т. е. параллельно ребру разреза, то целесообразно положить $\Phi_1 \equiv 0$. При этом общие формулы (83. 2)—(83. 4) для напряжений σ_θ , $\tau_{r\theta}$ и $\tau_{\theta z}$ при $\theta = \pm\pi$ приводят к следующим граничным условиям:

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\pm\pi} = \frac{r}{2(1-\nu)} \tau_{\theta z} \Big|_{\theta=\pm\pi}, \quad (88. 1)$$

$$[(1-2\nu)\Phi_2 - \Phi_4]_{\theta=\pm\pi} = 0 \quad \left(\Phi_4 = \frac{\partial \Phi_0}{\partial y}\right), \quad (88. 2)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial y} [2(1-\nu)\Phi_2 - \Phi_4] + 2\nu \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} - z \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial y^2} \right\}_{\theta=\pm\pi} = 0. \quad (88. 3)$$

Разобьем, как и раньше, задачу на две: симметричную и антисимметричную по координате θ , первая из которых соответствует двум одинаково направленным (по оси z) силам величины T_s каждая, приложенным в точках $r=a$, $\theta = \pm\pi$, $z=0$, а вторая — двум противоположно направленным силам той же величины.

Заметим, что в обоих указанных случаях напряженное состояние по координате z будет антисимметричным (σ_θ , $\tau_{r\theta}$, Φ_0 , Φ_1 — нечетные, а $\tau_{\theta z}$, Φ_3 — четные функции z).

В первой, симметричной по θ , задаче в плоскости $\theta=0$ имеют место граничные условия

$$\nu \Big|_{\theta=0} = 0, \quad \tau_{r\theta} \Big|_{\theta=0} = 0, \quad \tau_{\theta z} \Big|_{\theta=0} = 0, \quad (88. 4)$$

равносильные требованиям

$$\Phi_2 \Big|_{\theta=0} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_3}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = 0, \quad \Phi_4 \Big|_{\theta=0} = 0. \quad (88. 5)$$

Используя (88. 1) при $\theta=\pi$ и решая задачу Неймана для функции Φ_3 , находим

$$\Phi_3 = \frac{T_s}{4(1-\nu)\pi\rho}, \quad \rho = \sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}. \quad (88. 6)$$

Далее, из (88. 2) и (88. 5) получаем тождественную связь

$$\Phi_4 \equiv (1-2\nu)\Phi_2. \quad (88. 7)$$

Для функции Φ_2 из (88. 3) и (88. 5) можно получить смешанные граничные условия

$$\Phi_2 \Big|_{\theta=0} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \Big|_{\theta=\pi} = (1-2\nu) \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \Big|_{\theta=\pi}, \quad (88. 8)$$

Решая соответствующую краевую задачу способом, изложенным в § 86, будем иметь

$$\Phi_2 = \frac{(1-2\nu)T_z}{4\pi(1-\nu)} \left[\operatorname{Im} \frac{1}{\sqrt{t}(\sqrt{t} + \sqrt{r-x})} + \frac{z}{\rho(\rho+y)} \right] \quad (88.9)$$

$(t = r + a + iz).$

Функция Φ_0 может быть найдена теперь из (88.7):

$$\Phi_0 = \frac{(1-2\nu)^2 T_z}{4\pi(1-\nu)} \left\{ \operatorname{Im} [\ln(\sqrt{t} + \sqrt{r+x})] - \frac{z}{y+\rho} - \frac{\sqrt{r+x}}{\sqrt{t} + \sqrt{r-x}} \right\} + \text{const.} \quad (88.10)$$

Ввиду громоздкости выкладок, совершенно аналогичных проведенным в § 87, мы не останавливаемся здесь на антисимметричном (по θ) случае. Укажем только, что в особых решениях типа ω_c вместо вещественной части функции $f(t)$ следует ввести ее мнимую часть, причем функция Φ_3 дается формулой (87.8), а интегральное уравнение (87.23) сохраняет свой вид.

В заключение настоящей главы укажем, что в ней, по существу, были даны решения некоторых классов смешанных задач теории упругости для полупространства ($y \geq 0$) с прямолинейной границей (ось Oz) раздела краевых условий. При этом в задачах одного типа (§§ 84, 86, 88) на всей плоскости $y=0$ были известны касательные напряжения, в области $y=0, x > 0$ равнялось нулю нормальное перемещение, а при $y=0, x < 0$ задавалось нормальное напряжение. В задачах же другого типа (§§ 85, 87, 88) на всей границе $y=0$ задавалось нормальное напряжение, при $y=0, x > 0$ отсутствовали касательные смещения, а в области $y=0, x < 0$ были известны касательные напряжения. Таким образом, во всех рассмотренных задачах неоднородности в краевых условиях относились только к напряжениям. Однако развитая методика может быть распространена и на аналогичные, но более общие смешанные задачи для полупространства, когда граничные условия, связанные с перемещениями, будут также неоднородными.

Глава XV. ОСНОВНАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕЙ РАЗДЕЛА КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ

§ 89. Сведение задачи к краевым задачам для гармонических функций

Под смешанной задачей, исследуемой в данной главе, понимается такая краевая задача теории упругости для полупространства, когда по одну сторону прямолинейной границы раз-

дела (например, при $\theta=0$) заданы перемещения, а по другую сторону (при $\theta=\pi$) — напряжения.

Таким образом, задача сводится к нахождению трех гармонических в полупространстве $y > 0$ функций, через которые выражаются перемещения [формулы (83. 1)] и напряжения [формулы (83. 2)—(83. 4)], при следующих граничных условиях:

$$u|_{\theta=0} = u_0(r, z), \quad v|_{\theta=0} = v_0(r, z), \quad w|_{\theta=0} = w_0(r, z), \quad (89. 1)$$

$$\sigma_{\theta}|_{\theta=\pi} = \sigma(r, z), \quad \tau_{r\theta}|_{\theta=\pi} = \tau_r(r, z), \quad \tau_{\theta z}|_{\theta=\pi} = \tau_z(r, z). \quad (89. 2)$$

Как и во всех ранее рассмотренных аналогичных случаях, мы воспользуемся наличием в решении Папковича—Нейбера четырех гармонических функций: $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ — и дополним условия (89. 1), (89. 2) еще двумя соотношениями. Положим, во-первых, что входящая в (83. 1) функция

$$F = \Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2 + z\Phi_3$$

при $\theta=0$ обращается в некоторую плоскую гармоническую функцию

$$F|_{\theta=0} = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma) e^{-x|\sigma|} e^{-i\sigma z} d\sigma, \quad (89. 3)$$

где $f(\sigma)$ — функция, подлежащая в дальнейшем определению.

Кроме того, будем считать, что функция Φ , данная формулой (83. 5), при $\theta=\pi$ обращается в нуль. В развернутом виде это условие имеет такой вид:

$$\left[(1 - 2\nu) \Phi_2 - \Phi_4 - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} + \frac{z}{r} \cdot \frac{\partial \Phi_3}{\partial \theta} \right]_{\theta=\pi} = 0 \quad \left(\Phi_4 = \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \right). \quad (89. 4)$$

При этом граничные условия (89. 1) и (89. 2), содержащие перемещения u, w и касательные напряжения $\tau_{r\theta}$ и $\tau_{\theta z}$, на основании формул (83. 1), (83. 3) и (83. 4) сразу приводят нас к раздельным краевым задачам для функций Φ_1 и Φ_3 . Граничные условия этих задач таковы:

$$\Phi_1|_{\theta=0} = \frac{1}{4(1-\nu)} \left(2Gu + \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{\theta=0}, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\pi} = -\frac{r\tau_r}{2(1-\nu)}, \quad (89. 5)$$

$$\Phi_3|_{\theta=0} = \frac{1}{4(1-\nu)} \left(2Gv + \frac{\partial F}{\partial y} \right)_{\theta=0}, \quad \frac{\partial \Phi_3}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\pi} = \frac{r\tau_z}{2(1-\nu)}. \quad (89. 6)$$

Краевые задачи с подобными граничными условиями могут быть решены с помощью двойного интегрального разложения: Фурье — по координате z и Конторовича—Лебедева — по переменной r [см., например, (84. 8)].

Если функции Φ_1 и Φ_3 считать известными, то оставшиеся граничные условия приводят к следующим неразделенным крайним условиям для гармонических функций Φ_2 и Φ_4 :

$$\frac{\partial \Phi_4}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = \frac{Gr}{2(1-\nu)} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (xu + zw) \right]_{\theta=0} = f_1(r, z), \quad (89.7)$$

$$((3-4\nu)\Phi_2 - \Phi_4)_{\theta=0} = 2Gv_0 + \left[\frac{\partial}{\partial y} (x\Phi_1 + y\Phi_3) \right]_{\theta=0} = f_2(r, z), \quad (89.8)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} [2(1-\nu)\Phi_2 - \Phi_4] \right\}_{\theta=\pi} = & -r \left[\sigma - 2\nu \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (x\Phi_1 + z\Phi_3) \right]_{\theta=\pi} = f_3(r, z), \end{aligned} \quad (89.9)$$

$$((1-2\nu)\Phi_2 - \Phi_4)_{\theta=\pi} = -\frac{1}{2(1-\nu)} (x\tau_{r\theta} + z\tau_{\theta z})_{\theta=\pi} = f_4(r, z). \quad (89.10)$$

При этом соотношение (89.7) было получено из (89.3) операцией $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Следовательно, если принять за функцию Φ_0 выражение $\int_{-\infty}^y \Phi_4 dy$, то при $\theta=0$ оно может отличаться от требуемого значения

$$\begin{aligned} \Phi_0|_{\theta=0} = & \left[F - \frac{1}{4(1-\nu)} \left(x \frac{\partial F}{\partial x} + z \frac{\partial F}{\partial z} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{G}{2(1-\nu)} (xu + zw) \right]_{\theta=0} \end{aligned} \quad (89.11)$$

на гармоническую функцию переменных x и z .* В дальнейшем будет показано, что соответствующим выбором функции $f(\sigma)$ можно добиться выполнения последнего оставшегося условия (89.11).

* Заметим, что если интеграл $\int_{-\infty}^y \Phi_4 dy$ расходится, то все рассуждения можно проводить по отношению к сходящемуся интегралу

$$\int_{-\infty}^y \frac{\partial \Phi_4}{\partial x} dy \quad \text{или} \quad \int_{-\infty}^y \frac{\partial \Phi_4}{\partial z} dy.$$

§ 90. Решение смешанной краевой задачи

Будем искать гармонические функции Φ_2 и Φ_4 в виде следующих интегральных разложений:

$$\begin{aligned} \Phi_{2,4}(r, \theta, z) = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} |A_{2,4} \operatorname{ch} \theta \tau + \\ & + B_{2,4} \operatorname{sh} \theta \tau| e^{-i\sigma z} K_{i\tau}(|\sigma|r) d\sigma d\tau. \end{aligned} \quad (90.1)$$

Подставляя (90.1) в (89.7)–(89.10), получим соотношения

$$\left. \begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \tau B_4 e^{-i\sigma z} K_{i\tau}(|\sigma|r) d\sigma d\tau = f_1 \sqrt{2\pi}, \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} |(3-4\nu)A_2 - A_4| e^{-i\sigma z} K_{i\tau}(|\sigma|r) d\sigma d\tau = f_2 \sqrt{2\pi}, \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \tau |2(1-\nu)(A_2 \operatorname{sh} \pi\tau + B_2 \operatorname{ch} \pi\tau) - (A_4 \operatorname{sh} \pi\tau + B_4 \operatorname{ch} \pi\tau)| \times \\ & \quad \times e^{-i\sigma z} K_{i\tau}(|\sigma|r) d\sigma d\tau = f_3 \sqrt{2\pi}, \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} |(1-2\nu)(A_2 \operatorname{ch} \pi\tau + B_2 \operatorname{sh} \pi\tau) - (A_4 \operatorname{ch} \pi\tau + B_4 \operatorname{sh} \pi\tau)| \times \\ & \quad \times e^{-i\sigma z} K_{i\tau}(|\sigma|r) d\sigma d\tau = f_4 \sqrt{2\pi}. \end{aligned} \right\} (90.2)$$

Если предположить, что функции $f_i(\sigma, \tau)$ ($i=1, 2, 3, 4$), стоящие в правых частях равенств (90.2), допускают аналогичные двойные интегральные разложения, то, обозначая через $J_i(\sigma, \tau)$ коэффициенты этих разложений, сразу получаем систему уравнений для неизвестных функций

$$\left. \begin{aligned} B_4 &= \frac{J_1}{\tau}, \\ (3-4\nu)A_2 - A_4 &= f_2, \\ 2(1-\nu)(A_2 \operatorname{sh} \pi\tau + B_2 \operatorname{ch} \pi\tau) - (A_4 \operatorname{sh} \pi\tau + B_4 \operatorname{ch} \pi\tau) &= \frac{J_3}{\tau}, \\ (1-2\nu)(A_2 \operatorname{ch} \pi\tau + B_2 \operatorname{sh} \pi\tau) - (A_4 \operatorname{ch} \pi\tau + B_4 \operatorname{sh} \pi\tau) &= J_4, \end{aligned} \right\} (90.3)$$

причем величины J_1 , стоящие в правых частях этой системы, могут быть, вообще говоря, получены по формулам (80.7) или (80.10).

Для нахождения функции $f(\sigma)$ перепишем граничное условие (89. 11) в такой форме:

$$\Phi_0|_{\theta=0} = \frac{G}{2(\nu-1)}(xu + zw)|_{\theta=0} + \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(\sigma) + \frac{(f\sigma)'}{4(1-\nu)} \right] e^{-x|\sigma|} e^{-i\sigma x} d\sigma, \quad (90. 4)$$

причем предполагается, что

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \sigma f(\sigma) = 0, \quad \lim_{\sigma \rightarrow \infty} |\sigma f(\sigma) e^{-x|\sigma|}| = 0.$$

Как уже отмечалось, в силу условия (89. 7) функция $\int_0^y \Phi_4 dy$ при $\theta=0$ может отличаться от правой части (90. 4) на некоторую плоскую гармоническую функцию. Для фактического нахождения последней обозначим через $\Phi_i^{(0)}$ ($i=1, 2, 3, 4$) те части функций Φ_i , которые обусловлены наличием в граничных условиях (89. 5) — (89. 10) членов, связанных с неизвестной функцией $f(\sigma)$.

При этом для $\Phi_1^{(0)}$ и $\Phi_3^{(0)}$ имеем краевые условия

$$\left. \begin{aligned} 4(1-\nu)\Phi_1^{(0)}|_{\theta=0} &= -\operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} |\sigma| e^{-|\sigma|x} e^{-i\sigma x} f(\sigma) d\sigma, \\ \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\pi} &= 0, \\ 4(1-\nu)\Phi_3^{(0)}|_{\theta=0} &= \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} i\sigma e^{-|\sigma|x} e^{-i\sigma x} f(\sigma) d\sigma, \\ \frac{\partial \Phi_3^{(0)}}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\pi} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (90. 5)$$

Полагая

$$\Phi_1^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{-i\sigma x} d\sigma \int_0^{\infty} A_1 \frac{\operatorname{ch}(\pi - \theta)\tau}{\operatorname{ch} \pi \tau} K_{i\tau}(|\sigma|r) d\tau \quad (90. 6)$$

и применяя формулу (80. 11) при $x=r|\sigma|$, находим из (90. 5), что

$$A_1(\sigma, \tau) = -\frac{|\sigma| f(\sigma)}{\sqrt{2\pi}(1-\nu)}, \quad (90. 7)$$

после чего

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(0)} = & -\frac{1}{2\pi(1-\nu)} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma s} |\sigma| f(\sigma) d\sigma \times \\ & \times \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(\pi - \theta)\tau}{\operatorname{ch} \pi\tau} K_{i\tau}(|\sigma|r) d\tau. \end{aligned} \quad (90.8)$$

Используя далее интегральное представление (80.12) функции Макдональда, меняя порядок интегрирования и учитывая формулы

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(\pi - \theta)\tau}{\operatorname{ch} \pi\tau} \cos \tau s d\tau = \frac{\sin \frac{\theta}{2} \operatorname{ch} \frac{s}{2}}{\operatorname{ch} s - \cos \theta}, \quad (90.9)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} e^{-2|\sigma|r y'} \frac{dy}{y^2 + \sin \frac{\theta}{2}} = \frac{\pi}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \times \\ & \times e^{2|\sigma|r \sin^2 \frac{\theta}{2}} \left[1 - \Phi\left(\sqrt{2}|\sigma|r \sin \frac{\theta}{2}\right) \right], \end{aligned} \quad (90.10)$$

где $\Phi(x)$ — функция вероятности, находим окончательно

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(0)} = & -\frac{1}{4(1-\nu)} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} |\sigma| f(\sigma) \times \\ & \times \left[1 - \Phi\left(\sqrt{2}|\sigma|r \sin \frac{\theta}{2}\right) \right] e^{-|\sigma|x} e^{-i\sigma s} d\sigma. \end{aligned} \quad (90.11)$$

Аналогичным способом находим функцию $\Phi_3^{(0)}$

$$\begin{aligned} \Phi_3^{(0)} = & \frac{1}{4(1-\nu)} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} i\sigma f(\sigma) \left[1 - \Phi\left(\sqrt{2}|\sigma|r \sin \frac{\theta}{2}\right) \right] \times \\ & \times e^{-|\sigma|x} e^{-i\sigma s} d\sigma. \end{aligned} \quad (90.12)$$

Подставляя (90.11) и (90.12) в правые части системы (90.2), получаем для функций $\Phi_2^{(0)}$, $\Phi_4^{(0)}$ следующие краевые условия:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \Phi_4^{(0)}}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} &= 0, \quad [(1-2\nu)\Phi_2^{(0)} - \Phi_4^{(0)}]_{\theta=\pi} = 0, \\
 [(3-4\nu)\Phi_2^{(0)} - \Phi_4^{(0)}]_{\theta=0} &= \frac{1}{4(1-\nu)\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{|\sigma|} |f(\sigma) + \\
 &+ 2(\sigma f)' |e^{-|\sigma|r} e^{-i\sigma s} d\sigma, \\
 \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} [2(1-\nu)\Phi_2^{(0)} - \Phi_4^{(0)}] \right\}_{\theta=\pi} &= -\frac{1}{8(1-\nu)\sqrt{2\pi r}} \times \\
 &\times \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{|\sigma|} |f(\sigma) + 2(\sigma f)' |e^{-|\sigma|r} e^{-i\sigma s} d\sigma + \\
 &+ \frac{1-2\nu}{4(1-\nu)} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} |\sigma| \sqrt{|\sigma|} f(\sigma) e^{-|\sigma|r} e^{-i\sigma s} d\sigma.
 \end{aligned} \right\} (90.13)$$

В связи с тем, что в двух последних уравнениях полученной системы правые части, содержащие множитель $\frac{1}{\sqrt{r}}$, не разлагаются в интеграл Конторовича—Лебедева, выделим из функции $\Phi_4^{(0)}$ особые решения типа (82.8), положив

$$\Phi_4^{(0)} = \Phi_4^* + \bar{\Phi}_4, \quad (90.14)$$

где

$$\Phi_4^* = -\frac{1}{4(1-\nu)} \cdot \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{|\sigma|} |f(\sigma) + 2(\sigma f)' |e^{-|\sigma|r} e^{-i\sigma s} d\sigma. \quad (90.15)$$

При этом правые части граничных условий для функций $\Phi_2^{(0)}$ и $\bar{\Phi}_4$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{\Phi}_4}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} &= 0, \quad [(1-2\nu)\Phi_2^{(0)} - \bar{\Phi}_4]_{\theta=\pi} = 0, \\
 [(3-4\nu)\Phi_2^{(0)} - \bar{\Phi}_4]_{\theta=0} &= 0, \\
 \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} [2(1-\nu)\Phi_2^{(0)} - \bar{\Phi}_4] \right\}_{\theta=\pi} &= \frac{1-2\nu}{4(1-\nu)} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \times \\
 &\times \int_{-\infty}^{\infty} |\sigma| \sqrt{|\sigma|} f(\sigma) e^{-|\sigma|r} e^{-i\sigma s} d\sigma
 \end{aligned} \right\} (90.16)$$

уже могут быть представлены в виде интегральных разложений по функциям $K_{\nu}(|\sigma|r)$ с помощью формулы [51]

$$\sqrt{|\sigma|r} e^{-|\sigma|r} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \tau \operatorname{th} \pi \tau K_{\nu}(|\sigma|r) d\tau. \quad (90.17)$$

В частности, интересующее нас выражение для функции $\bar{\Phi}_4$ имеет вид

$$\bar{\Phi}_4 = \frac{(1-2\nu)^2}{2\pi(1-\nu)} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} |\sigma| f(\sigma) e^{-i\sigma z} d\sigma \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh}^2 \pi \tau \operatorname{ch} \theta \tau}{\operatorname{ch} \pi \tau} \times \\ \times \frac{K_{i\tau}(|\sigma| r)}{\operatorname{sh}^2 \pi \tau + k^2} d\tau, \quad k = \frac{2(1-\nu)}{\sqrt{3-4\nu}}. \quad (90.18)$$

Теперь подсчитываем следующие интегралы:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^y \bar{\Phi}_4^* dy \Big|_{\theta=0} &= \frac{1}{8(1-\nu)} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} [f(\sigma) + 2(\sigma f)'] e^{-|\sigma| z} e^{-i\sigma z} d\sigma, \\ \int_0^y \bar{\Phi}_4 dy \Big|_{\theta=0} &= -\frac{(1-2\nu)^2}{8(1-\nu)(1+k)} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma) e^{-|\sigma| z} e^{-i\sigma z} d\sigma, \\ \int_0^y \bar{\Phi}_4' dy \Big|_{\theta=0} &= \frac{G}{2(\nu-1)} (xu + zw)_{\theta=0} + \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} g(\sigma) e^{-|\sigma| z} e^{-i\sigma z} d\sigma, \end{aligned} \right\} (90.19)$$

где $g(\sigma)$ — известная функция, и подставляем (90.19) в (90.4), после чего имеем окончательно

$$f(\sigma) = \frac{g(\sigma)}{1 + \frac{1}{8(1-\nu)} \left[\frac{(1-2\nu)^2}{1+k} - 1 \right]}. \quad (90.20)$$

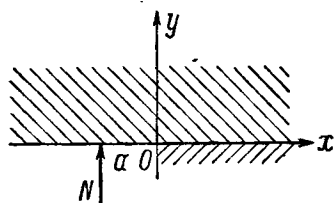


Рис. 50.

Полное решение задачи получится теперь, если разыскать функции $\bar{\Phi}_i$ ($i=1, 2, 3, 4$) из граничных условий (89.5)–(89.10), сохраняя

в правых частях значения $u_0, \nu_0, w_0, \sigma, \tau,$ и τ_z , заданные граничными условиями (89.1) и (89.2).

В качестве примера рассмотрим равновесие упругого полупространства ($y > 0$), часть поверхности которого ($\theta = 0$) неподвижна (например, сцеплена с жестким неподвижным телом), а к остальной части границы ($\theta = \pi$) в произвольной точке $r = a, \theta = \pi, z = 0$ приложена нормальная сосредоточенная сила (рис. 50).

В исходных граничных условиях (89.1) и (89.2) следует в данном случае положить

$$u_0 = \nu_0 = w_0 = \tau_r = \tau_z = 0. \quad (90.21)$$

При этом функции $\bar{\Phi}_1$ и $\bar{\Phi}_3$ совпадают с найденными в предыдущем параграфе функциями $\bar{\Phi}_1^{(0)}$ и $\bar{\Phi}_3^{(0)}$ [см. (90.11), (90.12)]. Так как функции $\bar{\Phi}_2^{(0)}$ и $\bar{\Phi}_4^{(0)}$ также найдены, то остается опре-

делить функции Φ'_2 и Φ'_4 в результате решения следующей краевой задачи:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\Phi'_2 = 0, \quad \Delta\Phi'_4 = 0, \\ \frac{\partial\Phi'_4}{\partial\theta}\Big|_{\theta=0} = 0, \quad [(3-4\nu)\Phi'_2 - \Phi'_4]_{\theta=0} = 0, \\ \left\{ \frac{\partial}{\partial\theta} [2(1-\nu)\Phi'_2 - \Phi'_4] \right\}_{\theta=\pi} = -r\sigma, \quad [(1-2\nu)\Phi'_2 - \Phi'_4]_{\theta=\pi} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (90.22)$$

где напряжение $\sigma(r, z)$ соответствует заданной сосредоточенной силе.

Представляя Φ'_2 и Φ'_4 в виде интегральных разложений типа (90.1)

$$\Phi'_{2,4} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} [A'_{2,4} \operatorname{ch} \theta\tau + B'_{2,4} \operatorname{sh} \theta\tau] e^{-i\sigma\tau} K_{i\tau}(|\sigma|r) d\sigma d\tau \quad (90.23)$$

и составляя системы, аналогичные (90.2), (90.3), находим, что

$$f_1 = f_2 = f_4 = 0,$$

а величина f_3 определяется двойной квадратурой

$$f_3 = -\frac{\sqrt{2}}{\pi^2 \sqrt{\pi}} \tau \operatorname{sh} \pi\tau \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} K_{i\tau}(|\sigma|r) \sigma(r, z) e^{-i\sigma z} d\sigma d\tau. \quad (90.24)$$

Распределяя силу P по малой окрестности точки ее приложения и осуществляя предельный переход, находим

$$f_3 = \frac{P\sqrt{2}}{\pi^2 \sqrt{\pi}} \tau \operatorname{sh} \pi\tau K_{i\tau}(|\sigma|a). \quad (90.25)$$

Таким образом, для величин A'_2 , B'_2 и A'_4 получается система уравнений

$$\left. \begin{aligned} (3-4\nu)A'_2 - A'_4 &= 0, \\ 2(1-\nu)(A'_2 \operatorname{sh} \pi\tau + B'_2 \operatorname{ch} \pi\tau) - A'_4 \operatorname{sh} \pi\tau &= \\ &= \frac{P\sqrt{2}}{\pi^2 \sqrt{\pi}} \tau \operatorname{sh} \pi\tau K_{i\tau}(|\sigma|a), \\ (1-2\nu)(A'_2 \operatorname{ch} \pi\tau + B'_2 \operatorname{sh} \pi\tau) - A'_4 \operatorname{ch} \pi\tau &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (90.26)$$

причем $B'_4 = 0$.

Остается еще найти величину $f(\sigma)$ по формуле (90.20), т. е., по существу, разыскать функцию $g(\sigma)$ из соотношения

$$\int_{-\infty}^y \Phi'_4 dy \Big|_{\theta=0} = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} g(\sigma) e^{-|\sigma|z} e^{-i\sigma z} d\sigma. \quad (90.27)$$

Полагая здесь $x=0$, производя интегрирование при $\theta = \frac{\pi}{2}$ по переменной r от нуля до бесконечности и учитывая значение

$$A'_4 = \frac{P(1-2\nu)\sqrt{2}}{\pi^2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{K_{i\tau}(|\sigma|a) \operatorname{sh}^2 \pi\tau}{\operatorname{sh}^2 \pi\tau + k^2}, \quad k = \frac{2(1-\nu)}{\sqrt{3-4\nu}}, \quad (90.28)$$

получаем

$$g(\sigma) = \frac{(1-2\nu)P}{2\pi^3|\sigma|} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}^2 \pi\tau K_{i\tau}(|\sigma|a)}{\operatorname{sh}^2 \pi\tau + k^2} d\tau. \quad (90.29)$$

Последнее равенство после использования интегрального представления (80.12) и формулы (80.11) может быть представлено в виде квадратуры от элементарных функций

$$g(\sigma) = \frac{(1-2\nu)P}{4\pi^3|\sigma|} \left[\pi e^{-|\sigma|a} - \operatorname{cth} \pi\theta \int_0^\infty e^{-|\sigma|a \operatorname{ch} u} \frac{\sin \theta u}{\operatorname{sh} \frac{u}{2}} du \right], \quad (90.30)$$

где $\operatorname{ch} \pi\theta = k$.

В заключение заметим, что методика, развитая в настоящей главе и связанная с преобразованием Конторовича—Лебедева, может быть также использована при получении точного решения основной смешанной задачи для неограниченного упругого тела, ослабленного полубесконечным разрезом, на одном берегу которого заданы упругие перемещения, а на другом — напряжения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамов В. М. Распределение напряжений в плоском безграничном клине при произвольной нагрузке. Труды Конфер. по оптич. методу изучения напряжений, НИИММ ЛГУ, ОНТИ, Л., 1937.
2. Абрамов В. М. Исследование случая несимметричного давления штампа круглого сечения на упругое полупространство. ДАН СССР, 23, № 8, 759, 1939.
3. Александрон В. М., И. И. Ворович. О действии штампа на упругий слой конечной толщины. Прикл. матем. и механика, 24, № 2, 323, 1960.
4. Альперин И. Г. Задача о бесконечно длинной балке на упругой полуплоскости. Прикл. матем. и механика, 2, № 3, 287, 1939.
5. Альперин И. Г. Напряжения в бесконечной полосе, равномерно сжатой по половине длины. Зап. Научно-исслед. инст. матем. и механики ХГУ и Харьк. матем. общ., № 20, 107, 1950.
6. Белевский М. Я. Смешанная задача теории упругости для бесконечной полосы. Прикл. матем. и механика, 16, № 3, 283, 1952.
7. Белоносов С. М. Плоская задача теории упругости для клина при заданных на границе напряжениях или смещениях. ДАН СССР, 131, № 5, 1041, 1960.
8. Белоносов С. М. Плоская задача теории упругости для бесконечной полосы при заданных на границе напряжениях или смещениях. ДАН СССР, 131, № 6, 1291, 1960.
9. Белоносов С. М. Основные плоские статические задачи теории упругости для односвязных и двусвязных областей. Автореф. дисс. на соиск. учен. степ. докт. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1961.
10. Берг Б. А. К плоской задаче теории упругости для бесконечной полосы. Прикл. матем. и механика, 4, № 4, 37, 1940.
11. Бирман С. Е. Задача об упругом равновесии бесконечной полосы и ее приложения. Автореф. дисс. на соиск. учен. степ. докт. техн. наук. Л., 1950.
12. Блох В. И. Изгиб плоских кривых брусьев. Научн. зап. Харьк. мех.-маш. инст., № 5, 107, 1940.
13. Блох В. И. Напряжения в плоских кривых брусьях, ограниченных двумя пересекающимися дугами окружностей для некоторых случаев загрузки. Инж. сборник, 6, 47, 1950.
14. Блох В. И. Кручение упругого изотропного цилиндра поверхностными усилиями при наличии осевой симметрии. Труды Харьк. автор. инст., № 16, 159, 1955.
15. Бурак Я. И., М. Я. Леонов. Кручение стержня, поперечное сечение которого ограничено дугами двух пересекающихся окружностей. Изв. АН СССР, ОТН, сер. мех. и маш., № 3, 181, 1960.
16. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. ИЛ, М., 1949.
17. Виленкин Н. Я. Матричные элементы неприводимых унитарных представлений группы движений пространства Лобачевского и обобщенные преобразования Мелера—Фока. ДАН СССР, 118, № 2, 219, 1958.

18. В о р о в и ч И. И., Ю. А. У с т и н о в. О давлении штампа на слой конечной толщины. Прикл. матем. и механика, 23, № 3, 445, 1959.
19. Г а л е р к и н Б. Г. Упругие тонкие плиты. Госстройиздат, М., 1933.
20. Г а л и н Л. А. Контактные задачи теории упругости. ГТТИ, М., 1953.
21. Г о б с о н Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. ИЛ, М., 1952.
22. Г о л у ш к е в и ч С. С. О некоторых задачах теории изгиба ледяного покрова. Л., 1947.
23. Г р и л и ц к и й Д. В. Кручения двояртового пружного середовища. Прикладная механика, 7, № 1, 89, 1961.
24. Г р и л и ц к и й Д. В., Я. М. К и з и м а. Тиск штампа на трансверсально-изотропний шар. Доповіди АН УРСР, 1, 26, 1962.
25. Г р и н б е р г Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд. АН СССР, М.—Л., 1948.
26. Г р и н б е р г Г. А., А. Н. П о к р о в с к и й, Я. С. У ф л я н д. О характере напряженного состояния упругой тонкой клиновидной плиты с закрепленной и свободной сторонами. Инж. сборник, 22, 193, 1955.
27. Д и т к и н В. А., А. П. П р у д н и к о в. Интегральные преобразования и операционное исчисление. Физматгиз, М., 1961.
28. Е г а н я н В. В. Плоская задача теории упругости для области, ограниченной дугами двух пересекающихся окружностей. Автореф. дисс. на соиск. учен. степ. канд. техн. наук. Ереван, 1959.
29. Е г о р о в К. Е. К вопросу деформации основания конечной толщины. Сборник трудов Акад. строит. и архит. СССР, НИИ оснований и подз. сооруж., № 34, Госстройиздат, М., 3, 1959.
30. Е г о р о в К. Е. Контактная задача для упругого слоя при действии внецентренной вертикальной силы на круглый жесткий штамп. ДАН СССР, 133, № 4, 781, 1960.
31. Ж е м о ч к и Б. Н. Расчет балок на упругом пространстве и полуплоскости. ВИА, М., 1937.
32. Ж у р и н а М. И., Л. Н. К а р м а з и н а. Таблицы функций Лежандра $P_{\frac{1}{2} + \nu}(x)$. Изд. АН СССР, М., 1960.
33. И ш к о в а А. Г. Точное решение задачи об изгибе круглой пластинки, лежащей на упругом полупространстве, под действием осесимметричной равномерно распределенной нагрузки. ДАН СССР, 56, № 2, 129, 1947.
34. К и т о в е р К. А. Об использовании специальных систем бигармонических функций для решения некоторых задач теории упругости. Прикл. матем. и механика, 16, № 6, 739, 1952.
35. К о г а н Б. И. Давление жесткого штампа на двухслойное основание. Труды Харьк. автодор. инст., № 17, 43, 1954.
36. К о г а н Б. И. Напряженное состояние бесконечного цилиндра, зажатого в абсолютно жесткую полубесконечную цилиндрическую обойму. Прикл. матем. и механика, 20, № 2, 236, 1956.
37. К о г а н Б. И. Осесимметрическая задача теории упругости для многослойного полупространства. Изв. АН СССР, ОТН, сер. мех. и мат., № 6, 11, 1958.
38. К о к е р Э., Л. Ф а й л о н. Оптический метод исследования напряжений. ОНТИ, М., 1936.
39. К о н т о р о в и ч М. И., Н. Н. Л е б е д е в. Об одном методе решения некоторых задач теории дифракции и родственных ей проблем. Журн. экспер. и теор. физики, 8, № 10—11, 1192, 1938.
40. К о р е н е в Б. Г. Об изгибе плиты, лежащей на упругом основании, нагрузкой, распределенной по прямой и прямоугольнику. ДАН СССР, 79, № 3, 411, 1954.
41. К о р е н е в Б. Г. Вопросы расчета балок и плит на упругом основании. Госстройиздат, М., 1954.

42. Куршин Л. М. Смешанная плоская задача теории упругости для квадрата. Прикл. матем. и механика, 23, № 5, 981, 1959.
43. К у ф а р е в П. П. Определение напряжений в анизотропном клине. ДАН СССР, 32, № 8, 534, 1941.
44. К у ф а р е в П. П., В. А. Свекло. Определение напряжений в анизотропной полосе. ДАН СССР, 32, № 9, 609, 1941.
45. Л а ш и н С. Г. Напряжения в упругом клине от местной касательной нагрузки. Труды Лен. инст. инж. вода. трансп., 22, 1933, 1955.
46. Л е б е д е в Н. Н. Об одной формуле обращения. ДАН СССР, 52, № 8, 661, 1946.
47. Л е б е д е в Н. Н. Решение проблемы Дирихле для гиперболоидов вращения. Прикл. матем. и механика, 11, № 2, 251, 1947.
48. Л е б е д е в Н. Н. О разложении произвольной функции в интеграл по цилиндрическим функциям мнимого значка и аргумента. Прикл. матем. и механика, 13, № 5, 465, 1949.
49. Л е б е д е в Н. Н. Некоторые интегральные представления для произведений сферических функций. ДАН СССР, 73, № 3, 449, 1950.
50. Л е б е д е в Н. Н. Некоторые интегральные преобразования математической физики. Автореф. дисс. на соиск. учен. степ. докт. физ.-мат. наук. Л., 1951.
51. Л е б е д е в Н. Н. Специальные функции и их приложения. ГТТИ, М., 1953.
52. Л е б е д е в Н. Н. Распределение электричества на тонком параболическом сегменте. ДАН СССР, 114, № 3, 513, 1957.
53. Л е б е д е в Н. Н., М. И. К о н т о р о в и ч. О применении формул обращения к решению некоторых задач электродинамики. Журн. экспер. и теор. физики, 9, № 6, 729, 1939.
54. Л е б е д е в Н. Н., И. П. С к а л ь с к а я, Я. С. У ф л я н д. Сборник задач по математической физике. ГТТИ, М., 1955.
55. Л е б е д е в Н. Н., Я. С. У ф л я н д. Осесимметричная контактная задача для упругого слоя. Прикл. матем. и механика, 22, № 3, 320, 1958.
56. Л е б е д е в Н. Н., Я. С. У ф л я н д. Пространственная задача теории упругости для неограниченного тела, ослабленного двумя плоскими круглыми щелями. Труды Лен. политехн. инст., № 210, 39, 1960.
57. Л е й б е н з о н Л. С. Курс теории упругости. Гостехиздат, М., 1947.
58. Л е о н о в М. Я. К теории расчета упругих оснований. Прикл. матем. и механика, 3, № 2, 53, 1939.
59. Л е о н о в М. Я. Некоторые задачи и приложения теории потенциала. Прикл. матем. и механика, 4, № 5—6, 71, 1940.
60. Л е о н о в М. Я. Общая задача о давлении круглого штампа на упругое полупространство. Прикл. матем. и механика, 17, № 1, 87, 1953.
61. Л е х н и ц к и й С. Г. Симметричная деформация и кручение анизотропного тела вращения с анизотропией частного вида. Прикл. матем. и механика, 4, № 3, 41, 1940.
62. Л е х н и ц к и й С. Г. Теория упругости анизотропного тела. ГТТИ, М., 1950.
63. Л е х н и ц к и й С. Г. Анизотропные пластинки. ГТТИ, М., 1957.
64. Л и в ш и ц П. З. Напряженное состояние в упругом цилиндре, нагруженном по боковой поверхности касательными усилиями. Инж. сборник, 30, 47, 1960.
65. Л у р ь е А. И. Решение плоской задачи теории упругости для бесконечной плоскости с прямолинейным разрезом. Труды Лен. индустр. инст., № 3, 94, 1939.
66. Л у р ь е А. И. К теории толстых плит. Прикл. матем. и механика, 6, № 2—3, 151, 1942.

67. Л у р ь е А. И. Пространственные задачи теории упругости. ГТТИ, М., 1955.
68. Л у р ь е А. И., Б. З. Б р а ч к о в с к и й. Решение плоской задачи теории упругости для клина. Труды Лен. политехн. инст., № 3, 158, 1941.
69. Л я в А. Математическая теория упругости. ОНТИ, М., 1935.
70. М е л ь н и к С. И. Балка на упругом основании. Прикл. матем. и механика, 4, № 2, 116, 1940.
71. М и х л и н С. Г. Решение одной трехмерной задачи теории упругости. Прикл. матем. и механика, 10, № 2, 209, 1946.
72. М о с с а к о в с к и й В. И. Давление круглого штампа на упругое полупространство. Автореф. дисс. на соиск. учен. степ. канд. физ.-мат. наук. Львов, 1952.
73. М о с с а к о в с к и й В. И. Основная смешанная задача теории упругости для полупространства с круговой линией раздела граничных условий. Прикл. матем. и механика, 18, № 2, 187, 1954.
74. М о с с а к о в с к и й В. И. Некоторые пространственные контактные задачи теории упругости. Автореф. дисс. на соиск. учен. степ. докт. физ.-мат. наук. М., 1955.
75. М о с с а к о в с к и й В. И. Первая основная задача теории упругости для пространства с плоской круглой щелью. Прикл. матем. и механика, 19, № 4, 443, 1955.
76. М о с с а к о в с к и й В. И., В. С. Г у б е н к о. Нові методи розв'язання задачі про тиск кругового штампа на пружний шівпростір. Прикладна механіка, 7, № 1, 25, 1961.
77. М у с х е л и ш в и л и Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. ГТТИ, М., 1953.
78. М у с х е л и ш в и л и Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Основные уравнения, плоская теория упругости, кручение и изгиб. Изд. АН СССР, М., 1954.
79. Н е й б е р Г. Концентрация напряжений. ГТТИ, М., 1947.
80. Н о в о ж и л о в В. В. Теория упругости. Судпромгиз, Л., 1958.
81. О л е в с к и й М. Н. Об одном обобщении бесселевых функций. ДАН СССР, 40, № 1, 5, 1943.
82. О л е в с к и й М. Н. О представлении произвольной функции в виде интеграла с ядром, являющимся гипергеометрической функцией. ДАН СССР, 69, № 1, 11, 1949.
83. П а л ь м о в В. А. Контактная задача о пластинке, лежащей на упругом слое. Прикл. матем. и механика, 24, № 3, 416, 1960.
84. П а п к о в и ч П. Ф. Теория упругости. Оборонгиз, М., 1939.
85. П а п к о в и ч П. Ф. Строительная механика корабля, ч. II. Судпромгиз, Л., 1941.
86. П о п о в Г. Я. Изгиб полубесконечной плиты, лежащей на линейно деформируемом основании. Прикл. матем. и механика, 25 № 2, 342, 1961.
87. П у п ы р е в В. А. Контактная задача для упругого слоя. Сборник научн. работ студ. Физ.-мех. фак. Лен. политехн. инст., № 3, 1959.
88. П у п ы р е в В. А., Я. С. У ф л я н д. Некоторые контактные задачи для упругого слоя. Прикл. матем. и механика, 24, № 4, 683, 1960.
89. Р а п п о р т Р. М. Задача Буссинеска для слоистого упругого полупространства. Труды Лен. политехн. инст., № 5, 3, 1948.
90. Р в а ч е в В. Л. Давление на упругое полупространство штампа, имеющего в плане форму полосы. Прикл. матем. и механика, 20, № 2, 248, 1956.
91. Р в а ч е в В. Л. Пространственная контактная задача теории упругости и некоторые ее приложения. Автореф. дисс. на соиск. учен. степ. докт. физ.-мат. наук. М., 1960.
92. Р о с т о н ц е в Н. А. К задаче о кручении упругого полупространства. Прикл. матем. и механика, 19, № 1, 55, 1955.

93. Ростовцев Н. А. Комплексные потенциалы для задачи о штампе круглом в плане. Прикл. матем. и механика, 21, № 1, 77, 1957.
94. Рыжик И. М., И. С. Градштейн. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. ГТТИ, М., 1951.
95. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. ГТТИ, М., 1951.
96. Саврук М. А. Вплив кругових та луночних отворів на напруженя в смугі при чистому зовні. Научн. зап. Львовск. политехн. инст., № 38, 126, 1957.
97. Сахаров И. Е. Изгиб клиновидной заземленной пластинки под действием произвольной нагрузки. Прикл. матем. и механика, 12, № 4, 407, 1948.
98. Скальская И. П. Поле точечного источника тока, расположенного на поверхности земли над наклонным пластом. Журн. техн. физики, 18, № 10, 1242, 1948.
99. Смирнов Ю. Н. Две задачи теории упругости со смешанными краевыми условиями. Труды Лен. политехн. инст., № 210, 79, 1960.
100. Снеддон И. Преобразования Фурье. ИЛ, М., 1955.
101. Снеддон И., Д. Берри. Классическая теория упругости. Физматгиз, М., 1961.
102. Сомов Н. И. Исследование лицевого и тыльного откола в толстых плитах. Автореф. дисс. на соиск. учен. степ. канд. физ.-мат. наук. М., 1958.
103. Сомов Н. И. Решение смешанной статической задачи теории упругости для бесконечной полосы. Изв. АН СССР, ОТН, сер. мех. и маш., № 2, 136, 1958.
104. Сунчелеев Р. Я. К решению контактных задач теории упругости для анизотропного тела с осью симметрии бесконечного порядка. Научн. зап. Львовск. политехн. инст., № 38, 53, 1956—1957.
105. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. ГТТИ, М., 1948.
106. Трантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике. ГТТИ, М., 1956.
107. Трэфтц Е. Математическая теория упругости. ГТТИ, М., 1934.
108. Уфлянд Я. С. Кручение призматического стержня с профилем, ограниченным дугами двух пересекающихся окружностей. ДАН СССР, 68, № 1, 17, 1949.
109. Уфлянд Я. С. Точное решение задачи изгиба призматического стержня для одного класса несимметричных поперечных сечений. ДАН СССР, 68, № 6, 751, 1949.
110. Уфлянд Я. С. Биполярные координаты в теории упругости. ГТТИ, М., 1950.
111. Уфлянд Я. С. Применение преобразования Меллина к задаче изгиба клиновидной плиты. ДАН СССР, 84, № 3, 463, 1952.
112. Уфлянд Я. С. Контактная задача теории упругости для кругового в плане штампа при наличии сцепления. Прикл. матем. и механика, 20, № 5, 578, 1956.
113. Уфлянд Я. С. Осесимметричная задача теории упругости для полупространства с круговой линией раздела граничных условий. ДАН СССР, 110, № 4, 531, 1956.
114. Уфлянд Я. С. О решении одной смешанной задачи теории упругости для полупространства. Труды III Всесоюзн. матем. съезда, 1, М., 213, 1956.
115. Уфлянд Я. С. Некоторые задачи теории упругости, разрешимые с помощью интегральных преобразований. Автореф. дисс. на соиск. учен. степ. докт. физ.-мат. наук. Л., 1957.
116. Уфлянд Я. С. Основная смешанная задача теории упругости для полупространства с прямолинейной границей раздела краевых усло-

- вий. Научно-техн. инф. бюлл. Лен. политехн. инст., разд. физ.-мат. наук, № 12, 22, 1957.
117. У ф л я н д Я. С. Пространственная задача теории упругости для неограниченного тела с плоским разрезом. Труды Лен. политехн. инст., № 192, 60, 1958.
 118. У ф л я н д Я. С. Смешанная задача для упругого слоя. ДАН СССР, 123, № 6, 991, 1958.
 119. У ф л я н д Я. С. Концентрация напряжений в упругом слое, ослабленном плоской круглой щелью. Научно-техн. инф. бюлл. Лен. политехн. инст., разд. физ.-мат. наук, № 8, 56, 1959.
 120. У ф л я н д Я. С. Кручение упругого слоя. ДАН СССР, 129, № 5, 997, 1959.
 121. У ф л я н д Я. С. Смешанная задача теории упругости для клина. Изв. АН СССР, ОТН, сер. мех. и маш., № 2, 156, 1959.
 122. У ф л я н д Я. С. Упругое равновесие неограниченного тела, ослабленного внешней круговой щелью. Прикл. матем. и механика, 23, № 1, 101, 1959.
 123. У ф л я н д Я. С. Вторая основная задача теории упругости для клина. Труды Лен. политехн. инст., № 210, 87, 1960.
 124. Ф и л и п п о в А. П. Бесконечная балка на упругом полупространстве. Прикл. матем. и механика, 6, № 2—3, 169, 1942.
 125. Ф о к В. А. О разложении произвольной функции в интеграл по функциям Лежандра с комплексным значком. ДАН СССР, 39, № 7, 279, 1943.
 126. Х р у с т а л е в А. Ф. Решение некоторых осесимметрических задач теории упругости при смешанных граничных условиях. Автореф. дисс. на соиск. учен. степ. канд. физ.-мат. наук. М., 1958.
 127. Х р у с т а л е в А. Ф., Ф. А. В а й н ш т е й н. Об одной смешанной задаче теории упругости для трансверсально-изотропного полого цилиндра. Изв. вузов, Математика, № 4, 118, 1961.
 128. Х р у с т а л е в А. Ф., Б. И. К о г а н. О напряженном состоянии полого кругового цилиндра. Изв. вузов, Математика, № 4, 178, 1959.
 129. Ш а п и р о Г. С. Напряженное состояние бесконечной цилиндрической оболочки и неограниченной толстой плиты. ДАН СССР, 37, № 9, 288, 1942.
 130. Ш а п и р о Г. С. О расчете плиты, имеющей вид бесконечной ленты, лежащей на упругом основании. ДАН СССР, 37, № 7—8, 230, 1942.
 131. Ш а п и р о Г. С. Изгиб полубесконечной плиты, лежащей на упругом основании. Прикл. матем. и механика, 7, № 4, 316, 1943.
 132. Ш а п и р о Г. С. О сжатии бесконечного полого цилиндра давлением, приложенным на участке боковой поверхности. Прикл. матем. и механика, 7, № 5, 379, 1943.
 133. Ш а п и р о Г. С. О распределении напряжений в неограниченном слое. Прикл. матем. и механика, 8, № 2, 167, 1944.
 134. Ш е в л я к о в Ю. А., А. К. П р и в а р н и к о в. До расчета шароухватих основ. Прикладна механіка, 8, № 2, 113, 1962.
 135. Ш е п е л е н к о В. Н. Определение напряжений в двойной ортотропной полосе. Учен. зап. Томск. унив., № 36, 59, 1960.
 136. Ш е р е м е т ь е в М. П., Д. Г. Х л е б н и к о в. Згин нескінченної смуги з підкріпленням краєм. Прикладна механіка, 7, № 2, 212, 1961.
 137. Ш т а е р м а н И. Я. Контактная задача теории упругости. ГТИ, М., 1949.
 138. Ш т е р н б е р г Е., В. К о й т е р. Клин под действием сосредоточенного момента, парадокс в плоской теории упругости. Механика, Период. сб. переводов иностр. статей, № 3 (55), 57, 1959.
 139. Ш у л ь м а н С. Г. Два случая расчета плотины треугольного профиля. Сб. докладов по гидротехнике. Госэнергоиздат, М., 1961.
 140. Ш у л ь м а н С. Г. Треугольный составной клин под действием местной нагрузки на участке грани. Инж. физ. журн., 4, № 5, 81, 1961.

141. Ш у л ь м а н С. Г. Некоторые задачи статического расчета массивных гидросооружений треугольного профиля. Автореф. дисс. на соиск. учен. степ. канд. техн. наук. Л., 1962.
142. B a r n a r d M. Flexure an infinite plate, having in it a semiinfinite straight crack. *Ztschr. f. Angew. Math. u. Mech.*, 15, № 3, 121, 1935.
143. B a t e m a n H. *Differential equations*. London, 1926.
144. B i e r e n s de H a a n D. *Nouvelles tables d'integrales definies*. New York, 1939.
145. B l e i c h F. Der gerade Stab mit Rechteckquerschnitt als ebenes Problem. *Bauingenieur*, 4, 1923.
146. B o r s C. I. Решение уравнений статики анизотропных тел с помощью преобразований Фурье. *Studii Cers. Stiint. Mat. Acad. RPR, Fil. Jasi*, 7, № 2, 99, 1956.
147. B o u s s i n e s q J. *Applications des potentiels á l'étude de l'équilibre et du mouvements de solides élastiques*. Paris, 1885.
148. B r a h t z J. H. A. Stress distribution in wedges with arbitrary boundary forces. *Physics*, 4, № 2, 56, 1933.
149. B u s b r i d g e I. Dual integral equations. *Proc. Lond. Math. Soc.*, (2), 44, 115, 1938.
150. Ч а к р а в о р т ы J. G. On the distribution of stress in an infinite circular cylinder of transversely isotrop material caused by a band of uniform pressure on the boundary. *Bull. Calcutta Math. Soc.*, 48, № 4, 163, 1956.
151. C h o n g F. Solution by dual integral equations of a planestrain Bousinesq problem for an orthotropic medium. *Iowa State Coll. Ing. Sci.*, 27, № 3, 321, 1953.
152. C h o n g F. Solutions by dual integral equations of mixed boundary value problems in elasticity. *Iowa State Coll. Ing. Sci.*, 27, № 2, 143, 1953.
153. C h o u d h u r y P. Stress distribution in a thin aelotropic strip due to a nucleus of strain. *Ztschr. Angew. Math. u. Mech.*, 36, № 11—12, 413, 1956.
154. C o n w a y H. D. Some problems of orthotropic plane stress. *Journ. Appl. Mech.*, 20, № 1, 72, 1953.
155. C o n w a y H. D. The stress distributions induced by concentrated loads acting in isotropic and orthotropic half planes. *Journ. Appl. Mech.*, 20, № 1, 82, 1953.
156. C o n w a y H. D., M. K. H u a n g. The bending of uniformly loaded sectorial plates with clamped edges. *Journ. Appl. Mech.*, 19, № 1, 5, 1952.
157. C o o k e J. A solution of Tranter's dual integral equations problem. *Quart. Journ. Mech. a. Appl. Math.*, 9, № 1, 103, 1956.
158. D a s S. C. Note on the elastic distortion of a cylindrical hole by tangential tractions on the inner boundary. *Quart. Appl. Math.*, 11, № 1, 124, 1953.
159. D e a n W. R. The Green's function of an elastic plate. *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, 49, № 2, 319, 1953.
160. D u t t S. B. Torsion of a large thick plate with rigidity varing linearly with depth and rigidly fixed at one face. *Ztschr. f. Angew. Math. u. Mech.*, 29, № 7, 290, 1959.
161. E l l i o t t H. A. Axine symmetric stress distribution in aelotropic hexagonal crystals. The problem of the plane and related problems. *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, 45, № 4, 624, 1949.
162. E r d é l y i A., W. M a g n u s, F. O b e r h e t t i n g e r, F. T r i c o m i. *Higher transcendental functions*, vv. 1—3. New York, Toronto, London, 1953.
163. E r d é l y i A., W. M a g n u s, F. O b e r h e t t i n g e r, F. T r i c o m i.

- comi. Tables of integral transforms, vv. 1, 2. New York, Toronto, London, 1954.
164. Fadle I. Die Selbstspannungs-Eigenfunktionen der quadratischen Scheibe. Ing. Arch., 11, № 4, 125, 1940.
 165. Fillunger P. Über die Spannung im Mittelschaft eines Eisenbahnzughakens. Ztschr. f. Angew. Math. u. Mech., 10, 218, 1930.
 166. Filon L. N. G. In the approximate solution for the bending of a beam of rectangular cross-section under any system of load, with special reference to points of concentrated or discontinuous loading. Phil. Trans. Roy. Soc. Lond., A, № 201, 63, 1903.
 167. Florence A. L. Two contact problems for an elastic layer. Quart. Journ. Mech. a. Appl. Math., 14, № 4, 456, 1961.
 168. Franklin Ph. Fourier methods. New York., 1949.
 169. Giuliano L. On the equilibrium of an infinite strip, built in and simply supported. Ann. Sci. Norm. Sup. Pisa, (III), 6, № 3—4, 147, 1952.
 170. Godfrey D. E. R. Normal-loading on a wedged shaped plate. Aero Quart., 6, № 3, 196, 1955.
 171. Harding J. W., I. N. Sneddon. The elastic stresses produced by the indentation of the plane surface of a semiinfinite elastic solid by a rigid punch. Proc. Camb. Phil. Soc., 41, № 1, 16, 1945.
 172. Holl D. L. Cantilever plate with concentrated edge load. Trans. ASME 59, № 4, 8, 1937.
 173. Hopkins H. G. Elastic deformations of infinite strips. Proc. Camb. Phil. Soc., 46, № 1, 164, 1950.
 174. (Hu Hai-chang) Ху Хай-чан. Кручение призмы, ограниченной двумя пересекающимися круглыми цилиндрами. Ули Сюэбао, Acta Phys. Sinica, 9, № 4, 238, 1953.
 175. (Hu Hai-chang) Ху Хай-чан. О равновесии трансверсально-изотропного упругого полупространства. Ули Сюэбао, Acta Phys. Sinica, 10, № 3, 239, 1954.
 176. (Jamasida I.) Ямасида И. Исследование напряжений в полубесконечной полосе под действием сил, приложенных к ее концу. Нихон кикай гаккай ромбунсю. Trans. Japan Mech. Engr., 20, № 95, 466, 1954.
 177. Jaramillo T. J. Deflections and moments due to a concentrated load on a cantilever plate of infinite length. Journ. Appl. Mech., 17, № 1, 67, 1950.
 178. Jeffery G. B. Plane stress and plane strain in bipolar coordinates. Phil. Trans. Roy. Soc. Lond., A, № 221, 265, 1921.
 179. Journey W. H. On laterally loaded semicircular plate with clamped edges. Journ. Appl. Mech., 26, № 2, 224, 1959.
 180. Карман Т. Über die Grundlagen der Balken-Theorie. Abhandl. aus dem Aerodyn. Inst. an der Techn. Hochschule, Aachen, 7, 3, 1927.
 181. Karunes B. On the concentration of stress round the edge of a hole bounded by the two intersecting circles in a laye plate. Ind. Journ. Phys., 27, № 4, 208, 1953.
 182. Koiter W. T., J. B. Alblas. On the bending of cantilever rectangular plates. Proc. Koninkl. Nederl. Acad. Wetench., 57, № 2, 250, 1954.
 183. Koiter W. T., J. B. Alblas. On the bending of cantilever rectangular plates. Proc. Koninkl. Nederl. Acad. Wetench., 60, № 3, 173, 1957.
 184. Landolino G. Sull' equilibrio di una piastra indefinita a forma districcia incastrata e appoggiata. Ann. Schola norm. sup. Pisa, 6, № 3—4, 147, 1953.
 185. Ling C. On the stresses in a notched plate under tension. Journ. Math. a. Phys., 26, № 4, 284, 1947.

186. Ling C. Stresses in a notched strip under tension. Journ. Appl. Mech., 14, № 4, 275, 1947.
187. Ling C. The stresses in a plate containing an overlapped circular hole. Journ. Appl. Phys., 19, № 4, 405, 1948.
188. Ling C. On the stresses in a notched strip. Journ. Appl. Mech., 19, № 2, 141, 1952.
189. Ling C. Stresses in a circular cylinder having a spherical cavity under tension. Quart. Appl. Math., 13, № 4, 381, 1956.
190. Ling C. Stresses in a perforated strip. ASME, Summer conf. Berkeley, Calif., Pap. 57, APM 8, 11, 1957.
191. Lowengrub M. Stress in the vicinity of a crack in a thick elastic plate. Quart. Appl. Math., 19, № 2, 119, 1961.
192. MacGregor C. W. Deflection of a long helical gear tooth. Mech. Eng., 57, 225, 1935.
193. Mader F. W. Contribution to the computation of plate strips. Ing. Arch., 25, 201, 1957.
194. Magnus W., F. Oberhettinger. Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik. Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1948.
195. Marguerre K. Über den Trägen auf elastischer Unterlage. Ztschr. f. Angew. Math. u. Mech., 17, № 4, 224, 1937.
196. Mehler F. G. Ueber die Vertheilung der statischen Elektrizität in einem von zwei Kugelkalottenbergrenzten Körper. Journ. R. Angew. Math., 68, 134, 1868.
197. Mehler F. G. Ueber eine mit Kugel und Cylinder Funktionen verwandte Funktion und ihre Anwendung in der Theorie der Elektrizitätsverteilung. Math. Annalen, 18, 161, 1881.
198. Melan E. Die Druckverteilung durch eine elastische Schicht. Beton u. Eisen, № 83, 1919.
199. Mitchell J. H. Elementary distributions of plane stress. Proc. Lond. Math. Soc., 33, 35, 1901.
200. Mitchell J. H. The flexure of circular plates. Proc. Lond. Math. Soc., 34, 223, 1902.
201. Mitchell I. H. A Fourier integral solution for the stresses in a semi-infinite strip. Quart. Journ. Mech. a. Appl. Math., 7, № 1, 51, 1954.
202. (Миуао К.) Мияо К. Изгиб плиты, ограниченной двумя дугами окружностей. Канадзава дайгану кокакубу кий. Mem. Fac. Technol. Kanazawa Univ., 1, № 4, 56, 1955.
203. Morgan S. Tables of Bessel functions of imaginary order and imaginary argument. Pasadena, Calif. Inst. Technol., 1947.
204. (Муки Р.) Муки Р. Пространственная задача теории упругости для полубесконечного тела, на поверхности которого действуют тангенциальные нагрузки. Нихон кикай гаккай ромбунсю, Trans. Japan Soc. Mech. Engr., 22, № 119, 468, 1956.
205. Neuber H. Der Ebene Stromlinienspannungszustand mit lastfreiem Rand. Ing. Arch., 6, 325, 1935.
206. Nowacki W. Thermoelasticity. Pergamon Press., 1962.
207. Nowacki W., St. Turcki. Application of the Fourier integral to the theory of orthotropic plates. Arch. Mech. Stos., 3, № 2, 89, 1951.
208. Paria G. Stresses in a infinite strip due to a nucleus of thermo-elastic strain inside it. Bull. Calcutta Math. Soc., 45, № 3, 83, 1953.
209. Paria G. Elastic stress distribution in a threelayered system due to a concentrated force. Bull. Calcutta Math. Soc., 48, № 2, 75, 1956.
210. Payne L. E. On axially symmetric punch, crack and torsion problems. Journ. Soc. for Indust. a. Appl. Math. (Philadelphia), № 1, 53, 1953.
211. Payne L. E. On axially symmetric crack and punch problems a medium with transverse isotropy. Proc. Cambr. Phil. Soc., 50, 466, 1954.

- 212 Payne L. E. On a class of plane and axially symmetric problems in elasticity. Proc. first. Congr. of Theor. a. Appl. Mech. Kharagpur, Ind. Inst. Technol., № 1—2, 1955.
- 213 Piechocki W. The stresses in an infinite wedge due to a heat source. Arch. Mech. Stos., 11, № 1, 93, 1959.
- 214 Piechocki W., H. Zorski. Thermoelastic problem for a wedge. Bull. Acad. Polon. Sci., ser. sci. techn., 7, № 10, 555, 1959.
- 215 Rankin A. W. Shrink-fit stresses and deformations. Journ. Appl. Mech., 11, № 2, 77, 1944.
- 216 Reissner E. Beitrag zur Problem Spannungsverteilung in Gartplatten. Ztschr. f. Angew. Math. u. Mech., 15, № 6, 359, 1935.
- 217 Reissner E., H. Sagocci. Forced torsional oscillations of an elastic half-space. Journ. Appl. Phys., 15, 9, 1944.
- 218 Rumpel G. Behavior of thin plates corners. Bauingenier, 33, № 3, 50, 1958.
- 219 Sack A. Extension of Griffith's theory of rupture to three dimensions. Proc. Phys. Soc. Lond., 58, № 330, 729, 1946.
- 220 Sheng P. L. Note on the torsional rigidity of semicircular bars. Quart. Appl. Math., 9, 309, 1951.
- 221 Sneddon I. N. The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid. Proc. Roy. Soc. Lond., A-187, 229, 1946.
- 222 Snow C. Hypergeometric and Legendre functions with applications to integral equations of potential theory. Washington, 1952.
- 223 Sokolowski Marek. Pewne zagadnienia plaskie teorii sprzyzystosci ciala ortotropowego. Arch. Mech. Stos., 6, № 1, 65, 1954.
- 224 Teodorescu P. Sur le problème de la demibande plane élastique. Arch. Mech. Stos., 12, № 3, 313, 1960.
- 225 Terezaawa K. On the elastic equilibrium of a semiinfinite solid under given boundary conditions with same applications. Journ. College of Imp., Univ., Tokyo, 37, 7, 1916.
- 226 Tiffen R. Generalized plane stress problem in infinite elastic strips. Quart. Journ. Mech. a. Appl. Math., 6, № 3, 344, 1953.
- 227 Timpe A. Die Torsion von Umdrehungskörpern. Math. Ann., 71, 480, 1912.
- 228 Tranter C. J. The use of the Mellin transform in finding the stress distribution in an infinite wedge. Quart. Journ. Mech. a. Appl. Math., 1, 125, 1948.
- 229 Tranter C. J., J. W. Craggs. The stress distribution in a long circular cylinder when discontinuous pressure is applied to the curved surface. Phil. Mag., 36, № 255, 241, 1945.
- 230 Weber C. Die Lehre der Drehungsfestigkeit. Forschungshefte, № 249, 1921.
- 231 Weinel E. Die Spannungserhöhung durch Kreisbogenkerben. Ztschr. f. Angew. Math. u. Mech., 21, № 4, 228, 1941.
- 232 Whitehead L., L. Mcquillin. The centre of shear for sections bounded by two circular arcs. Journ. Roy. Aeronaut. Soc., 58, № 518, 138, 1954.
- 233 Wigglesworth L. A., A. C. Stevenson. Flexure and torsion of cylinders with cross-sections bounded by orthogonal circular arcs. Proc. Roy. Soc. Lond., A-170, 391, 1939.
- 234 Wijngarden A. Eenige toepassingen van Fourierintegralen op elastische problemen. Doctor's, Thesis, Delft, 1945.
- 235 Williams M. L. The plate problem for a cantilever sector of uniform thickness. Air Force Techn. Rep., № 5761, 1, 1950.
- 236 Williams M. L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. Journ. Appl. Mech., 19, № 4, 526, 1952.
- 237 Williams M. L. Surface stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of platen under bending. Proc.

- first. U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., Publ. Amer. Soc. Mech Engrs., New York, 325, 1952.
238. Woinowsky-Krieger S. Über die Anwendung der Mellin-Transformation zur Lösung einer Aufgabe der Plattenbiegung. Ing. Arch., 20, 391, 1952.
239. Woinowsky-Krieger S. The bending of a wedge-shaped plate. Journ. Appl. Mech., 20, № 1, 77, 1953.
240. Woinowsky-Krieger S. Clamped semicircular plate under uniform bending load. Journ. Appl. Mech., 22, № 1, 129, 1955.
241. Woinowsky-Krieger S. Über die Verwendung von Bipolar-kordinaten zur Lösung einiger Problems der Plattenbiegung. Ing. Arch. 24, 47, 1956.
-

**ОБЗОР НОВЫХ РАБОТ ПО ПРИЛОЖЕНИЯМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ
ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

За несколько лет, прошедших со времени выхода первого издания настоящей книги, научная литература пополнилась значительным количеством работ, посвященных применению метода интегральных преобразований в теории упругости.

Хотя большинство таких исследований связано с аппаратом парных интегральных уравнений, тем не менее следует кратко остановиться и на некоторых статьях, посвященных задачам теории упругости, непосредственно разрешимых с помощью классических преобразований Фурье, Меллина и Ханкеля. Из работ этого направления укажем прежде всего на диссертацию Д. Г. Хлебникова [55], в которой с помощью преобразования Фурье решены многие плоские задачи о деформации полуплоскости и полосы с подкреплениями в виде стержней или тонких плит. В статье С. Е. Бирмана [8] автор распространяет свой способ решения задач о равновесии бесконечной полосы на вторую краевую задачу Интегральное преобразование Фурье применялось в задачах о деформации полосы, лежащей на полуплоскости (статья И. А. Прусова [42]), а также при изучении многослойных оснований (работа В. И. Петришина и А. К. Приварникова [37]). Продолжались исследования, связанные с применением аппарата интегралов Фурье в биполярных координатах. Так, в статье В. М. Дзюба [21] рассматривались кручение и изгиб составных стержней луночного профиля; работа В. В. Еганяна [23] посвящена некоторым задачам для плоскости с загруженным луночным отверстием. К. В. Соляник-Красса [49] с помощью интегрального преобразования Фурье дал решение задачи о кручении конуса поверхностными силами. Из работ, относящихся к применению преобразования Меллина, укажем на статью Бептема [61], в которой рассмотрена деформация неограниченного анизотропного клина. В работе Н. А. Ростовцева [45], связанной с применением интегрального преобразования Фурье, даны решения новых и трудных задач для неоднородной упругой среды. Применению интегральных преобразований Фурье и Ханкеля к ряду задач

теории упругости посвящены работы Снеддона [85, 87, 88]. В статье Р. М. Раппопорт [43] преобразования Фурье и Ханкеля использованы для изучения деформации многослойных анизотропных сред. Р. Я. Сунчелев в работе [50] удачно использовал метод интегральных преобразований при построении общих решений ряда задач теории упругости для полупространства, слоя и цилиндра (силошного и полого), пригодных также при наличии трансверсальной изотропии. Применению преобразования Контровича—Лебедева для решения некоторых задач о деформации бесконечного цилиндрического сектора посвящена статья Н. Б. Реморова [44].

Переходим теперь к обзору наиболее интересных работ, относящихся к тем классам смешанных задач упругого равновесия, при решении которых использование интегральных преобразований приводит к парным интегральным уравнениям.

Некоторые приложения в теории упругости парных уравнений с тригонометрическими ядрами даны в работах Снеддона [84], Смайта [83], Г. Я. Попова [40], Ловенграба и Снеддона [75, 76].

В статьях Г. М. Валова [15, 16] парные интегральные уравнения с тригонометрическими ядрами использовались при решении смешанных задач о кручении бесконечного цилиндра. Различные смешанные задачи о деформации бесконечного цилиндра рассматривались также в работах Г. Я. Попова [39], Матчинского [78], Ф. А. Вайнштейна [13], причем в ряде случаев получаемые парные уравнения могут быть точно решены путем построения некоторой мероморфной функции в виде бесконечного произведения. Аналогичная методика, связанная с интегральным преобразованием Меллина, применялась в работах Матчинского [77] и Керра [69] к смешанным задачам для клина и в статье Лоу [74] — к задаче о кручении конуса при смешанных краевых условиях.

Наибольшее количество работ последних лет относится, по-видимому, к вопросам применения в задачах теории упругости парных интегральных уравнений, связанных с преобразованием Ханкеля. Обзор большинства подобных исследований, выполненных в основном к 1963 г., был сделан Снеддоном [86], который по праву может считаться инициатором широкого использования метода парных уравнений в смешанных краевых задачах математической физики и теории упругости. В последующие годы различные исследователи успешно продолжали работы этого направления применительно к полупространству, упругому слою, слоистым средам, анизотропным телам, задачам термоупругости и др.

В работе Б. Л. Абрамяна, Н. Х. Арутюняна и А. А. Баблюна [2] рассмотрена контактная задача для полупространства при наличии сцепления. В статье Вестманна [95] дано решение смешанной задачи для полупространства с круговой линией раздела граничных условий в том случае, когда на всей границе заданы

нормальные усилия. В работах Н. М. Бородачева [9, 10] рассмотрены термоупругая задача Герца, а также термоупругое равновесие неограниченного тела, ослабленного плоской круговой щелью. В статьях Эрдогана [67, 68] рассмотрен контакт двух разнородных полупространств, на общей границе которых имеется круглая щель. Интересные смешанные задачи для полупространства рассматривались в диссертациях Г. Я. Попова [38], Н. А. Ростовцева [46], а также в статье А. Ф. Хрусталева [56].

Остановимся теперь на некоторых работах, посвященных применению преобразования Ханкеля к различным смешанным задачам для упругого слоя и сводящимся к парным интегральным уравнениям или системам таких уравнений. В работе И. А. Маркузона [36] получено распределение напряжений в неограниченном плоскопараллельном слое, в срединной плоскости которого расположена нагруженная круглая щель, причем найденные результаты используются для определения по методу Г. И. Баренблатта размеров равновесной трещины в условиях хрупкого разрушения.

В работе Керра [70] дано решение задачи о кручении упругого слоя, сцепленного с жестким основанием; существенно, что при этом приближенно учитывается трение между штампом и слоем. Различные контактные задачи для упругого слоя рассмотрены в работах Г. М. Валова [14], Лоу [72, 73], В. И. Довноровича [22].

Новые и весьма эффективные методы подхода к смешанным задачам для упругого слоя, в принципе пригодные для произвольной области контакта, развиты в последние годы И. И. Ворovichem и его учениками. Основные результаты этих исследований изложены в обзорной работе В. М. Александрова и И. И. Ворovichа [3]. Отметим еще, что указанные методы удалось распространить на двуслойное основание, а также на случай вдавливания штампа в клиновидное основание (см. также работу С. А. Лутченко [35]).

Из работ, относящихся к изучению деформации тел со щелями, укажем на статью Ю. Н. Кузьмина и Я. С. Уфлянда [31], в которой с помощью систем парных интегральных уравнений исследовано упругое равновесие полупространства, содержащего круглую щель, расположенную в плоскости, параллельной границе. Задача сведена к системе уравнений Фредгольма, решаемой методом разложения в ряд по степеням малого параметра — отношения радиуса щели к ее расстоянию от границы полупространства. В работе Ю. Н. Кузьмина [29] рассмотрено неограниченное тело, ослабленное системой периодически расположенных соосных круглых щелей одинакового размера. В другой работе [30] этого автора дано решение осесимметричной задачи о равновесии упругого пространства, содержащего две параллельные круговые щели различных радиусов.

Статьи С. М. Котляра [28] и Чайла [82] посвящены некоторым смешанным задачам термоупругости для плоскопараллельного слоя. Из работ, связанных со смешанными задачами для анизотропных тел, укажем на статью С. М. Котляра [28] и Чайла [82].

тропных тел, укажем на статью Ингланда [64] и диссертации Д. В. Грилицкого [17] и Я. М. Кизыма [27], в которых даны решения многих контактных задач для трансверсально-изотропного упругого тела. В статьях Р. Я. Сунчелеева [51, 52] рассмотрены вопросы концентрации напряжений около круглых щелей в трансверсально-изотропном теле. Ряд интересных контактных задач исследовался в работах В. С. Губенко (см., например, его статью [20]).

Парные интегральные уравнения, связанные с преобразованием Ханкеля, допускают интересное обобщение, относящееся к смешанным задачам с двусвязной круговой границей раздела краевых условий. Простейшей задачей этого класса является контактная задача о вдавливании полого цилиндрического (кольцевого) штампа в упругое полупространство, рассматривавшаяся многими авторами с помощью различных методов. Непосредственное применение к этой задаче преобразования Ханкеля приводит к так называемым тройным (triple) интегральным уравнениям. В работе Кука [62] с помощью тройных уравнений рассмотрена электростатическая задача о поле кольцевого диска, математически эквивалентная упомянутой контактной задаче для кольцевого штампа. Решение этим методом контактных задач для кольцевой области дано в двух работах Н. М. Бородачева и Ф. Н. Бородачевой [11, 12], причем в первой статье рассматривается кручение, а во второй — осевое вдавливание. В этих работах результаты доведены до интересных числовых данных. Задаче о кольцевом штампе посвящена также работа Олесяка [81], в которой решение тройных уравнений осуществляется путем последовательного рассмотрения парных уравнений. Метод тройных интегральных уравнений с тригонометрическими ядрами эффективно применялся к некоторым плоским смешанным задачам (см. работы Трантера [93] и В. С. Тонояна [53, 54]).

К рассмотренным исследованиям примыкают интересные работы Н. Х. Арутюняна и А. А. Баблояна [5] и Сривастава [90], связанные с интегральным преобразованием Вебера и соответствующими тройными уравнениями (см. также статьи Сривастава [89] и А. И. Цейтлина [58], в которых рассмотрены некоторые типы парных интегральных уравнений, содержащих цилиндрические функции первого и второго рода).

Наряду с парными интегральными уравнениями, ядра которых выражаются через тригонометрические и цилиндрические функции, в последнее время в литературе появились исследования, связанные с преобразованием Мелера — Фока и относящиеся к парным уравнениям, ядра которых выражаются через функции Лежандра с комплексным значком. Первой работой этого нового в математической физике направления явилась работа В. Т. Гринченко и А. Ф. Улитко [18], в которой парные уравнения указанного типа применены к одной смешанной задаче теории тепло-

проводности для полупространства с двусвязной круговой границей раздела краевых условий. Предложенный этими авторами метод позволяет сводить задачи подобных типов к регулярному интегральному уравнению Фредгольма. Дальнейшее развитие эта методика получила в работах А. А. Баблюяна [6] и А. Н. Руховец и Я. С. Уфлянда [47, 48]. В другой работе В. Т. Гринченко и А. Ф. Улитко [19] парные уравнения, связанные с преобразованием Мелера—Фока, применены к расчету напряжений в упругом теле, ослабленном плоской кольцевой трещиной.

Мы не останавливаемся более детально на этих сравнительно малоизвестных вопросах, так как на материале упомянутых статей составлено специальное дополнение 2 настоящей книги, посвященное парным интегральным уравнениям, возникающим при использовании преобразования Мелера—Фока для решения некоторых смешанных задач статической теории упругости.

В самое последнее время появились работы, посвященные некоторым новым интегральным преобразованиям по сферическим функциям с комплексным значком и их приложениям к задачам теории упругости. Так, в статьях Н. Н. Лебедева и И. П. Скальской [33, 34] выведена новая формула обращения для одного интегрального преобразования, родственного преобразованию Мелера—Фока, и с ее помощью получено точное решение задачи о кручении однополостного гиперболоида вращения. В работе Н. А. Беловой и Я. С. Уфлянда [7] дано обобщение преобразования Мелера—Фока на случай неполного промежутка, которое, в частности, позволило рассмотреть задачу о кручении тороидального сегмента.

Следует указать, что практическое использование преобразования Мелера—Фока облегчается тем, что в настоящее время мы располагаем таблицами М. И. Журиной и Л. Н. Кармашиной [24, 25] функций Лежандра с комплексным значком.

В связи с большим развитием за последние годы метода парных интегральных уравнений мы считаем необходимым в данном обзоре упомянуть о работах Эрдейи и Сведдона [66], Трантера [94], Нобла [79], Лява [71], Вильямса [96], Сривастава [91], А. И. Цейтлина [57], Шефера [92], в которых рассмотрены некоторые общие вопросы теории парных уравнений и их приложений в смешанных задачах математической физики и теории упругости.

В заключение заметим, что некоторые работы, связанные с применением интегральных преобразований в теории упругости и не вошедшие в настоящий обзор, читатель может найти в обзорных докладах Д. И. Шермана [60], Сведдона [86], Олесяка [80], Б. Л. Абрамяна и А. Я. Александрова [11], А. Г. Ишковой и Б. Г. Коренева [26], Г. Я. Попова и Н. А. Ростовцева [41].

О ПАРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ, СВЯЗАННЫХ
С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ МЕЛЕРА—ФОКА, И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ
В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

а) Некоторые классы смешанных задач математической физики и теории упругости приводят к необходимости решения парных интегральных уравнений вида

$$\int_0^{\infty} A(\tau) P_{-\nu/\kappa+i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha) [1 + g(\tau)] d\tau = f(\alpha), \quad 0 \leq \alpha < \alpha_0; \quad (1)$$

$$\int_0^{\infty} \tau A(\tau) \operatorname{th} \pi \tau P_{-\nu/\kappa+i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha) d\tau = 0, \quad \alpha_0 < \alpha < \infty, \quad (2)$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$; $A(\tau)$ — искомая, $g(\tau)$ и $f(\alpha)$ — заданные функции.

Ниже излагается прием, позволяющий свести уравнения (1) и (2) к регулярному интегральному уравнению Фредгольма с симметричным ядром.

Если ввести новую неизвестную функцию $\varphi(t)$ соотношением

$$A(\tau) = \int_0^{\alpha} \varphi(t) \cos \tau t dt, \quad (3)$$

то с помощью формулы

$$P_{\nu}^m(\lambda) = (\lambda^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_{\nu}(\lambda)}{d\lambda^m}, \quad \lambda = \operatorname{ch} \alpha \quad (4)$$

и соотношения*

$$\int_0^{\infty} \operatorname{th} \pi \tau P_{-\nu/\kappa+i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha) \sin \tau t d\tau = \begin{cases} 0, & t < \alpha, \\ [2(\operatorname{ch} t - \operatorname{ch} \alpha)]^{-1/2}, & t > \alpha. \end{cases} \quad (5)$$

используя прием, примененный в § 48, нетрудно показать, что уравнение (2) удовлетворяется тождественно относительно любой функции $\varphi(t)$, имеющей непрерывную производную. Интегрируя уравнение (1) m раз по переменной λ , приведем его к виду

$$\int_0^{\infty} A(\tau) [1 + g(\tau)] P_{-\nu/\kappa+i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha) d\tau = F(\alpha) + \sum_{k=0}^{m-1} c_k \lambda^k = \chi(\alpha), \quad (6)$$

* Формула (5) есть следствие (57, 16); см. также [32].

где c_k — постоянные и положено *

$$F(\alpha) = \int_1^\lambda \int_1^\lambda \dots \int_1^\lambda f(\alpha) (\lambda^2 - 1)^{-\frac{m}{2}} d\lambda^m. \quad (7)$$

Подставляя значение $A(\tau)$ из (3) в (6) и пользуясь вытекающим из (57.14) соотношением

$$\int_0^\infty P_{-\nu/2+\nu\tau}(\operatorname{ch} \alpha) \cos \tau t d\tau = \begin{cases} [2(\operatorname{ch} \alpha - \operatorname{ch} t)]^{-1/2}, & t < \alpha, \\ 0, & t > \alpha, \end{cases} \quad (8)$$

преобразуем (6) к следующему виду:

$$\int_0^\alpha \Phi(x) [2(\operatorname{ch} \alpha - \operatorname{ch} x)]^{-1/2} dx = \chi(\alpha), \quad (9)$$

где

$$\varphi(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [G(t+x) + G(t-x)] \varphi(t) dt = \Phi(x), \quad 0 \leq x \leq \alpha_0, \quad (10)$$

а функция G есть косинус-преобразование Фурье функции g :

$$G(y) = \int_0^\infty g(\tau) \cos \tau y d\tau. \quad (11)$$

Замечая, что выражение (9) есть интегральное уравнение Абеля относительно функции $\Phi(x)$, находим его решение

$$\Phi(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{d}{dx} \int_0^x [2(\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} \alpha)]^{-1/2} \chi(\alpha) \operatorname{sh} \alpha d\alpha. \quad (12)$$

Таким образом, величина $\Phi(x)$ может считаться известной, так что уравнение (10) и является искомым интегральным уравнением относительно основной неизвестной функции $\varphi(x)$.

Свободный член полученного уравнения (10) содержит m произвольных постоянных, которые могут быть найдены только после формулировки некоторых дополнительных условий. Исходя из постановки краевых задач, приводящих к рассма-

* Считается, что заданные функции удовлетворяют некоторым общим условиям, обеспечивающим законность производимых операций. В частности, должно существовать косинус-преобразование Фурье от функции $g(\tau)$.

триваемым парным уравнениям [см., например, (26)], наложим на функцию

$$\psi(\alpha) = \int_0^{\infty} \tau A(\tau) \operatorname{th} \pi \tau P_{-1/2+i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha) d\tau \quad (13)$$

дополнительное условие ее интегрируемости в промежутке $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$. Подставляя (3) в (13) и применяя (4), (5), можно привести (13) к виду

$$\begin{aligned} \psi(\alpha) = & (\lambda^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{d\lambda^m} \left\{ \varphi(\alpha_0) [2(\operatorname{ch} \alpha_0 - \operatorname{ch} \alpha)]^{-1/2} - \right. \\ & \left. - \int_{\alpha}^{\alpha_0} \varphi'(t) [2(\operatorname{ch} t - \operatorname{ch} \alpha)]^{-1/2} dt \right\}, \quad 0 \leq \alpha < \alpha_0. \end{aligned} \quad (14)$$

Проводя в (14) последовательное интегрирование по частям, убеждаемся в том, что поставленное дополнительное условие эквивалентно равенствам

$$\varphi^{(i)}(\alpha_0) = 0; \quad i = 0, 1, \dots, m-1, \quad (15)$$

причем при $\alpha \rightarrow \alpha_0 - 0$ функция $\psi(\alpha)$ имеет порядок

$$(\operatorname{ch} \alpha_0 - \operatorname{ch} \alpha)^{-1/2}.$$

Нетрудно показать, что условия (15) однозначно определяют значения величин c_k . Действительно, если разбить функции $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ на две части:

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x), \quad \Phi(x) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x), \quad (16)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(x) &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{d}{dx} \int_0^x [2(\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} \alpha)]^{-1/2} F(\alpha) \operatorname{sh} \alpha d\alpha, \\ \varphi_2(x) &= \sum_{k=0}^{m-1} c_k \omega_k(x), \quad \Phi_2(x) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \frac{dI_k}{dx}, \\ I_k(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^x [2(\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} \alpha)]^{-1/2} \operatorname{ch}^k \alpha \operatorname{sh} \alpha d\alpha, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

получим из (10) для искоемых функций $\varphi_1(x)$ и $\omega_k(x)$ отдельные уравнения Фредгольма с правыми частями $\Phi_1(x)$ и $I'_k(x)$ соответственно. Теперь условия (15) являются линейной алгебраической системой

$$\varphi_1^{(i)}(\alpha_0) + \sum_{k=0}^{m-1} c_k \omega_k^{(i)}(\alpha_0) = 0 \quad (18)$$

относительно искоемых постоянных c_k .

Отметим еще, что заменой переменных $\text{sh} \frac{\alpha}{2} = \text{sh} \frac{t}{2} \sin \theta$ интегралы типа $I_k(x)$ можно представить в виде полиномов $2k+1$ порядка относительно $\text{sh} \frac{x}{2}$:

$$I_k(x) = \frac{4}{\pi} \text{sh} \frac{x}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} P_{2k} \left(\text{sh} \frac{x}{2} \sin \theta \right) \sin \theta d\theta, \quad (19)$$

где обозначено $P_{2k} \left(\text{sh} \frac{\alpha}{2} \right) = \text{ch}^k \alpha$.

б) В качестве первого приложения изложенного метода в теории упругости рассмотрим задачу о кручении усеченного шара, с плоской поверхностью которого сцеплен круговой цилиндрический штамп (рис. 51).

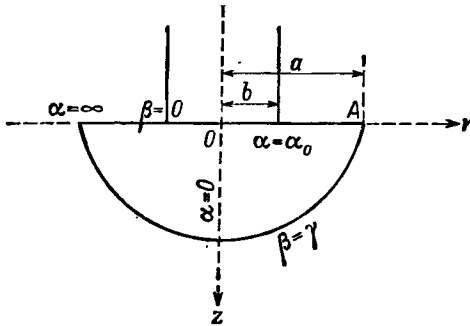


Рис. 51.

Если считать сферическую часть поверхности неподвижной и ввести тороидальные координаты зависимостями (56. 2), то задача сводится (§ 47) к решению уравнения

$$\Delta u - \frac{u}{r^2} = 0 \quad (20)$$

при граничных условиях

$$\left. \begin{aligned} u|_{\beta=0} &= \epsilon r, \quad 0 \leq \alpha < \alpha_0; \quad \frac{\partial u}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0} = 0, \quad \alpha_0 < \alpha < \infty; \\ u|_{\beta=\gamma} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где ϵ — угол поворота штампа.

Согласно (56. 10), функция

$$u(\alpha, \beta) = \sqrt{\text{ch} \alpha + \cos \beta} \int_0^{\infty} B(\tau) \frac{\text{sh} \tau (\gamma - \beta)}{\text{sh} \tau \gamma} P_{1-\frac{1}{2} + i\tau}(\text{ch} \alpha) d\tau \quad (22)$$

удовлетворяет уравнению (20) и последнему из условий (21). Применяя оставшиеся краевые условия (21), мы приходим к парным интегральным уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} B(\tau) P_{-1/2+i\tau}^1(\operatorname{ch} \alpha) d\tau &= \frac{\varepsilon a \operatorname{th} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\operatorname{ch} \alpha + 1}}, & 0 \leq \alpha < \alpha_0, \\ \int_0^{\infty} \tau \operatorname{cth} \gamma \tau B(\tau) P_{-1/2+i\tau}^1(\operatorname{ch} \alpha) d\tau &= 0, & \alpha_0 < \alpha < \infty, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

которые подстановкой $B(\tau) \operatorname{cth} \gamma \tau = A(\tau) \operatorname{th} \pi \tau$ сводятся к рассмотренным выше уравнениям (1) и (2) при значениях

$$g(\tau) = -\frac{\operatorname{ch}(\pi - \gamma)\tau}{\operatorname{ch} \pi \tau \operatorname{ch} \gamma \tau}, \quad m = 1. \quad (24)$$

Таким образом, рассматриваемая смешанная задача кручения сведена к интегральному уравнению Фредгольма (10), свободный член которого после некоторых выкладок может быть представлен в явном виде:

$$\Phi(x) = c \operatorname{ch} \frac{x}{2} - \frac{2\sqrt{2} \varepsilon a}{\pi \operatorname{ch} \frac{x}{2}}. \quad (25)$$

Решение уравнений (23) содержит одну произвольную постоянную, определяемую, согласно (15), из условия $\varphi(\alpha_0) = 0$. Легко видеть, что это условие, являющееся следствием требования интегрируемости величины $\psi(\alpha)$ в (13), соответствует условию конечности приложенного к штампу крутящего момента M . Действительно, в данном случае

$$\psi(\alpha) = -\frac{a}{(\operatorname{ch} \alpha + 1)^{3/2}} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\frac{a}{2G\sqrt{2}\operatorname{ch}^2 \frac{\alpha}{2}} \tau_{\varphi s} \Big|_{z=0}, \quad 0 \leq \alpha < \alpha_0,$$

где G — модуль сдвига, причем момент M определяется формулой (47.20). Таким образом,

$$M = 2\sqrt{2}\pi a^2 G \int_0^{\alpha_0} \operatorname{th} \frac{\alpha}{2} \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} \psi(\alpha) d\alpha, \quad (26)$$

откуда и вытекает эквивалентность указанных условий.

Соотношение (26) позволяет также найти весьма простое выражение момента M непосредственно через основную функ-

цию $\varphi(t)$. Для этого воспользуемся формулой (14), которая при условии $\varphi(a_0) = 0$ и значении $m = 1$ дает

$$\psi(a) = -\frac{d}{da} \int_a^{\infty} \varphi'(t) [2(\operatorname{ch} t - \operatorname{ch} a)]^{-1/2} dt. \quad (27)$$

Если подставить (27) в (26), произвести интегрирование по частям и затем перемену порядка интегрирования, то получим равенство

$$M = -2\pi G a^2 \int_0^{\infty} \varphi(t) \left[\frac{d}{dt} \int_0^t (\operatorname{ch} t - \operatorname{ch} a)^{-1/2} \left(\frac{d}{da} \cdot \frac{\operatorname{sh}^2 \frac{a}{2}}{\operatorname{ch} a} \right) da \right] dt,$$

которое после некоторых выкладок и дает искомое выражение

$$M = -\sqrt{2}\pi G a^2 \int_0^{\infty} \frac{\varphi(t)}{\operatorname{ch}^3 \frac{t}{2}} dt. \quad (28)$$

Так как свободный член уравнения (10), а следовательно, и функция $\varphi(t)$ пропорциональны величине ϵ , то формула (28), по существу, определяет угол поворота штампа ϵ через заданный момент M .

Отметим еще интересный предельный случай $\gamma = \pi$, соответствующий кручению полупространства штампом радиуса b при условии, что поверхность $z = 0$, $r > a$ жестко закреплена, а кольцевая область $z = 0$, $b < r < a$ свободна от усилий. При этом ядро уравнения Фредгольма (10) вычисляется в явном виде, так как

$$g(\tau) = -\frac{1}{\operatorname{ch}^2 \pi \tau}; \quad G(y) = -\int_0^{\infty} \frac{\cos \tau y}{\operatorname{ch}^2 \pi \tau} d\tau = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{y}{\operatorname{sh} \frac{y}{2}}. \quad (29)$$

Из изложенного ясно, что к парным интегральным уравнениям рассмотренных типов (1) и (2) сводится также и общая смешанная краевая задача для усеченного шара в том случае, когда на сферической его поверхности $\beta = \gamma$ задана искомая гармоническая функция u , а на плоской гравиде $\beta = 0$ при $0 \leq r < b$ известны значения u , а при $b < r < a$ — значения $\frac{\partial u}{\partial z}$.

То обстоятельство, что оба уравнения, (1) и (2), делаются при этом неоднородными, несущественно, так как, применяя обобщенное преобразование Мелера—Фока, можно уравнение (2) сделать однородным [см. § 48, а также формулу (44)].

В предельном случае $\gamma = \pi$ при произвольном значении m мы приходим к общей смешанной задаче для полупространства с двусвязной ($r = b$ и $r = a$) линией раздела краевых условий первого и второго рода. К таким задачам (см. §§ 62 и 64) сводятся статические задачи для упругого полупространства в том случае, когда на плоском круговом кольце ($z = 0$, $b < r < a$) задано нормальное напряжение, а на остальной части границы — нормальное перемещение (касательные напряжения считаются известными на всей плоскости $z = 0$). В частности, могут быть решены задачи о симметричной относительно средней плоскости деформации неограниченного упругого тела, ослабленного плоской кольцевой трещиной, — см. работу В. Т. Гривченко и А. Ф. Улитко [19]. В этой работе авторы удачно аппроксимируют ядро вырожденным и получают интересные численные результаты, относящиеся, в частности, к определению критических разрывающих напряжений.

в) Изложенный выше способ применим также и к парным уравнениям несколько иного вида:

$$\int_0^{\infty} \tau A(\tau) [1 + g(\tau)] P_{\gamma, \tau}^m(\operatorname{ch} \alpha) d\tau = f(\alpha), \quad 0 \leq \alpha < \alpha_0, \quad (30)$$

$$\int_0^{\infty} A(\tau) \operatorname{th} \pi \tau P_{\gamma, \tau}^m(\operatorname{ch} \alpha) d\tau = 0, \quad \alpha_0 < \alpha < \infty. \quad (31)$$

Если сделать подстановку

$$A(\tau) = \int_0^{\infty} \varphi(t) \sin \tau t dt \quad (32)$$

и считать $\varphi(0) = 0$, то уравнение (31) будет удовлетворено, а (30) можно преобразовать в уравнение Фредгольма (10) с ядром $G(t - x) - G(t + x)$ и правой частью (12). Входящие в решение постоянные можно найти из требования интегрируемости левой части (30) в области $z = 0$, $b < r < a$, которое после вычислений по-прежнему приводится к условиям (15).

К парным уравнениям вида (30) и (31) сводятся, очевидно, краевые задачи о нахождении гармонической в сегментной области ($0 < \beta < \gamma$, $0 \leq \alpha < \infty$) функции u при условии ее задания на сферической части сегмента $\beta = \gamma$ и смешанных условиях на плоской части $\beta = 0$: при $0 \leq \alpha < \alpha_0$ задается $\frac{\partial u}{\partial \beta}$, а при $\alpha_0 < \alpha < \infty$ — искомая функция u .

Примером такой задачи может служить смешанная задача о кручении усеченного шара в предположении, что на поверх-

ности $\beta = \gamma$ заданы касательные напряжения $\tau_{\varphi z}|_{\beta=\gamma} = \tau(\alpha)$, а штамп неподвижен. При этом удобно ввести в рассмотрение функцию напряжений Φ , удовлетворяющую уравнению [4]

$$\Delta \Phi - \frac{4}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \quad (33)$$

и граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} = 0, \beta = 0, 0 \leq \alpha < \alpha_0; \Phi = 0, \beta = 0, \alpha_n < \alpha < \infty, \\ \Phi = \frac{1}{G} \int_0^{\alpha} (r^2 \tau)_{\beta=\gamma} ds, \beta = \gamma, 0 \leq \alpha < \infty, \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

где дуга s отсчитывается от точки A (рис. 51).

Если сделать подстановку $\Phi = r^2 w$, то функция w будет удовлетворять уравнению

$$\Delta w - \frac{4}{r^2} w = 0, \quad (35)$$

решение которого представляется в виде (56.10) при $m = 2$:

$$w = \sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \int_0^{\infty} [C(\tau) \operatorname{ch} \beta \tau + S(\tau) \operatorname{sh} \beta \tau] P_{-1/2+\beta \tau}^2(\operatorname{ch} \alpha) d\tau. \quad (36)$$

Применяя граничные условия (34), мы приходим к неоднородным парным уравнениям (30) и (31) при $m = 2$.

Для частного случая полупространства ($\gamma = \pi$) при помощи парных уравнений можно дать решение смешанных граничных задач и иного типа, когда на кольце $z = 0$, $b < r < a$ задано краевое условие первого рода, а на остальной части границы — условие второго рода. К таким задачам относятся проблемы равновесия упругого полупространства при следующих краевых условиях: при $z = 0$, $b < r < a$ задано нормальное перемещение, а вне этой области — нормальное напряжение, причем касательные напряжения при $z = 0$ известны. Частными случаями такой общей задачи являются некоторые вопросы концентрации напряжений в неограниченном теле, ослабленном внутренней и внешней круговыми щелями, а также контактная задача для полого цилиндрического (кольцевого) штампа, решение которой приводится ниже.

В случае осевого вдавливания без трения кольцевого штампа в упругое полупространство задача, очевидно, сводится к на-

хождению одной гармонической в полупространстве $z > 0$ функции u при следующих граничных условиях:*

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} = 0, \beta = 0, 0 \leq \alpha < \alpha_0, \quad (37)$$

$$u = \frac{G\delta}{1-\nu} [1 - \chi(\alpha)], \beta = 0, \alpha_0 < \alpha < \infty, \quad (38)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} = 0, \beta = \pi, 0 \leq \alpha < \infty, \quad (39)$$

где δ — осевое перемещение штампа, а функция χ определяется формой основания штампа (ν — коэффициент Пуассона).

Если искать решение задачи u в виде

$$u = \frac{G\delta}{1-\nu} \sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \int_0^{\infty} B(\tau) \frac{\operatorname{ch}(\pi - \beta)\tau}{\operatorname{ch} \pi\tau} P_{-\nu/2 + i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau, \quad (40)$$

то условие (39) удовлетворено, а (37) и (38) дают парные интегральные уравнения

$$\int_0^{\infty} \tau B(\tau) \operatorname{th} \pi\tau P_{-\nu/2 + i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau = 0, 0 \leq \alpha < \alpha_0, \quad (41)$$

$$\int_0^{\infty} B(\tau) P_{-\nu/2 + i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau = \omega(\alpha), \alpha_0 < \alpha < \infty, \quad (42)$$

где

$$\omega(\alpha) = \frac{1 - \chi(\alpha)}{\sqrt{\operatorname{ch} \alpha + 1}}. \quad (43)$$

Представляя $\omega(\alpha)$ в виде разложения Мелера—Фока

$$\omega(\alpha) = \int_0^{\infty} C(\tau) P_{-\nu/2 + i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau \quad (44)$$

и вводя новую неизвестную $A \operatorname{th} \pi\tau = B - C$, получим из (41) и (42) для величины $A(\tau)$ парные уравнения вида (30) и (31) при

$$m = 0, g(\tau) = -\frac{1}{\operatorname{ch}^2 \pi\tau}, f(\alpha) = -\int_0^{\infty} \tau C(\tau) \operatorname{th} \pi\tau P_{-\nu/2 + i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau. \quad (45)$$

* Как и выше, задача решается в тороидальных координатах.

Таким образом, задача о кольцевом штампе может быть сведена к интегральному уравнению Фредгольма (10) с ядром $G(t-x) - G(t+x)$, где, на основании (29), $G(y) = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{y}{\operatorname{sh} \frac{y}{2}}$.

Для случая штампа с плоским основанием, когда $\chi(\alpha) \equiv 0$, имеем, на основании (59.11) и (59.13),

$$C(\tau) = \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{ch} \pi \tau}, \quad f(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{\pi (\operatorname{ch} \alpha + 1)}. \quad (46)$$

После некоторых выкладок основное уравнение (10) приводится к виду

$$\begin{aligned} \varphi(x) + \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \left[\frac{t+x}{\operatorname{sh} \frac{t+x}{2}} - \frac{t-x}{\operatorname{sh} \frac{t-x}{2}} \right] \varphi(t) dt = \\ = -\frac{\sqrt{2} x}{\pi^3 \operatorname{ch} \frac{x}{2}}, \quad 0 \leq x < a_0. \end{aligned} \quad (47)$$

Решение задачи требует еще нахождения связи между перемещением штампа δ и приложенной к нему силой P , которую мы приводим без промежуточных выкладок:

$$\begin{aligned} P = \frac{4Gba}{1-\nu} \left[\frac{1}{\operatorname{ch} \frac{a_0}{2}} - \operatorname{ch} \frac{a_0}{2} \int_0^{a_0} \varphi(t) \operatorname{th} \frac{t}{2} \times \right. \\ \left. \times \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \alpha + 1}{\operatorname{ch} a_0 - \operatorname{ch} t} \frac{dt}{\sqrt{\operatorname{ch} a_0 - \operatorname{ch} t}}} \right]; \end{aligned} \quad (48)$$

здесь a — радиус внешней окружности, $b = a \operatorname{th} \frac{a_0}{2}$ — радиус внутренней окружности основания штампа.

При $a_0 = 0$ $P = \frac{4Gba}{1-\nu}$, как и должно быть в случае круглого штампа.

Развитая методика позволяет дать и более общее решение контактной задачи для кольцевого штампа с плоским основанием, когда осевая симметрия отсутствует. Нетрудно видеть, что при этом соответствующие парные интегральные уравнения типа (41) и (42) должны быть составлены для разложений по функциям $P_{-\nu/2+it}(\operatorname{ch} \alpha)$, где

$$\omega(\alpha) = \frac{\operatorname{th} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\operatorname{ch} \alpha + 1}}, \quad (49)$$

а величина δ в формуле (40) должна быть заменена на $a\gamma$ (γ — угол поворота штампа). При этом оказывается, что подобные уравнения совпадают с парными интегральными уравнениями для смешанной задачи о кручении полупространства, рассмотренной в работе А. Н. Руховец и Я. С. Уфлянда [48], в связи с чем мы здесь не останавливаемся на соответствующих выкладках.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамян Б. Л., А. Я. Александров. Осесимметричные задачи теории упругости. Труды 2-го Всесоюз. съезда по теор. и прикл. механике, Обзорные доклады, 3, М., 7, 1966.
2. Абрамян Б. Л., Н. Х. Арутюнян, А. А. Баблюян. О симметричном давлении круглого штампа на упругое полупространство при наличии сцепления Прикл. матем. и механика, 30, № 1, 143, 1966.
3. Александров В. М., И. И. Ворovich. Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. Труды IV Всесоюз. конфер. по прочности и пластичности, М., 1967.
4. Арутюнян Н. Х., Б. Л. Абрамян. Кручение упругих тел. Физматгиз, М., 1963.
5. Арутюнян Н. Х., А. А. Баблюян. О контактных задачах для полупространства с включением. Прикл. матем. и механика, 30, № 6, 1050, 1966.
6. Баблюян А. А. Решение некоторых парных интегральных уравнений. Прикл. матем. и механика, 28, № 6, 1015, 1964.
7. Белова Н. А., Я. С. Уфлянд. Задача Дирихле для тороидального сегмента. Прикл. матем. и механика, 31, № 1, 59, 1967.
8. Бирман С. Е. К задаче теории упругости для бесконечной полосы в перемещениях. ДАН СССР, 145, № 5, 1016, 1963.
9. Бородачев Н. М. Термоупругая задача Герца. Изв. АН СССР, ОТН, сер. мех. и маш., № 5, 83, 1964
10. Бородачев Н. М. Термоупругая задача для бесконечного тела с осесимметричной трещиной. Прикл. механика, 2, № 2, 91, 1966.
11. Бородачев Н. М., Ф. Н. Бородачева. Кручение упругого полупространства, вызванное поворотом кольцевого штампа. Инж. журн., МТТ, № 1, 94, 1966.
12. Бородачев Н. М., Ф. Н. Бородачева. Вдавливание кольцевого штампа в упругое полупространство. Инж. журн., МТТ, № 4, 158, 1966.
13. Вайнштейн Ф. А. Об одной смешанной задаче теории упругости для трансверсально-изотропного цилиндра. Изв. вузов, Математика, № 1 (44), 28, 1965.
14. Валов Г. М. Об упругой и термоупругой осесимметричной деформации бесконечного слоя. Изв. АН СССР, ОТН, сер. мех. и маш., № 1, 54, 1964.
15. Валов Г. М. Решение смешанных задач о кручении бесконечного упругого цилиндра методом дуальных интегральных уравнений и дифференцированием граничных условий. Прикл. матем. и механика, 29, № 3, 532, 1965.
16. Валов Г. М. Смешанная задача о кручении полого бесконечного цилиндра. Инж. журн., МТТ, № 5, 70, 1966.
17. Грлицкий Д. В. Применение интегральных уравнений к решению некоторых контактных задач теории упругости. Автореф. дисс. на соиск. учен. степ. докт. техн. наук. Киев, 1964.

18. Гринченко В. Т., А. Ф. Улитко. Об одной смешанной граничной задаче теплопроводности для полупространства. Инж.-физ. журн., 5, № 10, 67, 1963.
19. Гринченко В. Т., А. Ф. Улитко. Растяжение упругого пространства, ослабленного кольцевой трещиной. Прикл. механика, 1, № 10, 61, 1965.
20. Губенко В. С. Об одном типе интегральных преобразований. Прикл. механика, 1, № 4, 67, 1965.
21. Дзюба В. М. Кручение и кривой изгиб многослойных луночек. Прикл. механика, 2, № 10, 63, 1966.
22. Довнорович В. И. О действии кругового в плане штампа на упругий слой, лежащий на жестком основании. Изв. АН СССР, ОТН, сер. мех. и маш., № 2, 119, 1964.
23. Егавян В. В. Общее решение задачи теории упругости для бесконечной плоскости с луночным отверстием, вдоль которого действуют заданные усилия. Изв. АН Арм. ССР. сер. физ.-мат. наук. 17, № 4, 35, 1964.
24. Журива М. И., Л. Н. Кармазина. Таблицы функций Лежандра $P_{-\frac{1}{2}+\nu}(z)$, тт. 1, 2. Изд. АН СССР, М., 1960, 1962.
25. Журива М. И., Л. Н. Кармазина. Таблицы и формулы для сферических функций $P_{-\frac{1}{2}+\nu}^m(z)$. Изд. АН СССР, М., 1962.
26. Ишкова А. Г., Б. Г. Кореньев. Изгиб пластинок на увругом и упруго-пластическом основании. Труды 2-го Всесоюз. съезда по теор. и прикл. механике, Обзорные доклады, 3, М., 157, 1966.
27. Кизыма Я. М. Напряженно-деформированное состояние упругого слоя, подверженного осесимметричному давлению штампа. Автореф. дисс. на соиск. учен. степ. канд. физ.-мат. наук. Львов, 1964.
28. Котляр С. М. О термоупругости плоскопараллельного слоя. Инж. журн., МТТ, 4, № 2, 297, 1964.
29. Кузьмин Ю. Н. Упругое равновесие пространства, содержащего периодически расположенные круглые щели. Инж. журн., МТТ, № 3, 140, 1966.
30. Кузьмин Ю. Н. Осесимметричная задача теории упругости для неограниченного тела, имеющего две соосные щели различных радиусов. Инж. журн., МТТ, № 6, 129, 1966.
31. Кузьмин Ю. Н., Я. С. Уфлянд. Осесимметричная задача теории упругости для полупространства, ослабленного плоской круглой щелью. Прикл. матем. и механика, 29, № 6, 1132, 1965.
32. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. Изд. 2-е. Физматгиз, М., 1963.
33. Лебедев Н. Н., И. П. Скальская. Об одном разложении произвольной функции в интеграл по сферическим функциям. Прикл. матем. и механика, 30, № 2, 252, 1966.
34. Лебедев Н. Н., И. П. Скальская. Некоторые краевые задачи математической физики и теории упругости для однополостного гиперболюида вращения. Прикл. матем. и механика, 30, № 5, 889, 1966.
35. Лутченко С. А. О вдавливании штампа в боковую поверхность упругого основания в виде клина. Прикл. механика, 2, № 12, 61, 1966.
36. Маркузон И. А. Равновесные трещины в полосе конечной ширины. Прикл. механика и техн. физика, № 5, 69, 1963.
37. Петришин В. И., А. К. Приварников. Основные граничные задачи теории упругости для многослойных оснований. Прикл. механика, 1, № 4, 58, 1965.
38. Попов Г. Я. Решение контактных задач теории упругости методом интегральных уравнений. Автореф. дисс. на соиск. учен. степ. докт. физ.-мат. наук. М., 1963.

39. П о п о в Г. Я. Контактная задача для бесконечно длинного цилиндра. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук, 17, № 4, 51, 1964.
40. П о п о в Г. Я. Некоторые свойства классических многочленов и их применение к контактными задачам. Прикл. матем. и механика, 28, № 3, 442, 1964.
41. П о п о в Г. Я., Н. А. Ростовцев. Контактные (смешанные) задачи теории упругости. Труды 2-го Всесоюзн. съезда по теор. и прикл. механике, Обзорные доклады, 3, М., 235, 1966.
42. П р у с о в И. А. Об одном решении первой и второй основных задач теории упругости для полосы, лежащей на упругой полуплоскости. Изв. АН СССР, ОТН, сер. мех. и маш., № 4, 102, 1964.
43. Р а п п о р т Р. М. К вопросу о построении решения плоской и осесимметричной задач теории упругости для среды, составленной из анизотропных слоев. Изв. Всесоюзн. научно-исслед. инст. гидротехн., 77, 249, 1965.
44. Р е м о р о в Н. Б. Некоторые задачи о деформации бесконечного цилиндрического сектора. Инж. журн., МТТ, 4, № 3, 577, 1964.
45. Р о с т о в ц е в Н. А. К теории упругости неоднородной среды. Прикл. матем. и механика, 28, № 4, 601, 1964.
46. Р о с т о в ц е в Н. А. Некоторые контактные задачи теории упругости в линейно-деформируемого основания. Автореф. дисс. на соиск. учен. степ. докт. физ.-мат. наук. М., 1964.
47. Р у х о в е ц А. Н., Я. С. У ф л я н д. Электростатическое поле пары тонких сферических оболочек. Журн. техн. физики, 35, № 9, 1532, 1965.
48. Р у х о в е ц А. Н., Я. С. У ф л я н д. Об одном классе парных интегральных уравнений и их приложениях в теории упругости. Прикл. матем. и механика, 30, № 2, 271, 1966.
49. С о л я н и к - К р а с с а К. В. Кручение конусов силами, распределенными по боковой поверхности. Изв. вузов, Строит. и архит., № 11, 31, 1965.
50. С у н ч е л е е в Р. Я. Решение некоторых краевых задач для трансверсально-изотропной упругой среды. Изв. АН Узб. ССР, № 3, 21, 1965.
51. С у н ч е л е е в Р. Я. Деформация неограниченного трансверсально-изотропного тела, ослабленного внешней круговой щелью. Инж. журн., МТТ, № 3, 116, 1966.
52. С у н ч е л е е в Р. Я. Упругое равновесие трансверсально-изотропного тела, ослабленного внутренним плоским круговым разрезом. Прикл. матем. и механика, 30, № 3, 579, 1966.
53. Т о н о я я В. С. Об одной плоской контактной задаче для четверть-плоскости. ДАН Арм. ССР, 37, № 3, 121, 1963.
54. Т о н о я я В. С. О вдавливании двух жестких штампов в полуплоскость. ДАН Арм. ССР, 17, № 2, 81, 1964.
55. Х л е б н и к о в Д. Г. Некоторые задачи об упругом равновесии подкрепленных пластинок в виде полосы и полуплоскости с круговым отверстием. Автореф. дисс. на соиск. учен. степ. канд. физ.-мат. наук. Львов, 1966.
56. Х р у с т а л е в А. Ф. Контактная задача термоупругости для полупространства. Инж. журн., МТТ, 5, № 1, 180, 1965.
57. Ц е й т л и н А. И. О методе парных интегральных уравнений и парных рядов и его приложениях к задачам механики. Прикл. матем. и механика, 30, № 2, 259, 1966.
58. Ц е й т л и н А. И. Об одном классе парных интегральных уравнений. Дифф. уравнения, № 8, 1134, 1966.
59. Ш е р е м е т ь е в М. П. Определение напряженного состояния тавровых и двутавровых балок методами плоской задачи теории упругости. Приложения теории функций в механике сплошной среды. Труды Междунар. симпозиума в Тбилиси, 1963 г., т. I, МТТ, изд. «Наука», М., 340, 1965.

60. Ш е р м а н Д. И. Метод интегральных уравнений в плоских и пространственных задачах статической теории упругости. Труды Всесоюз. съезда по теор. и прикл. механике, М., 405, 1962.
61. B e n t h e m I. P. On the stress distribution in anisotropic infinite wedges. *Quart. Appl. Math.*, 21, № 3, 189, 1963.
62. C o o k e J. C. Triple integral equations. *Quart. Journ. Mech. a. Appl. Math.*, 16, № 2, 193, 1963.
63. C o o k e J. C. The solution of triple integral equations in operational form. *Quart. Journ. Mech. a. Appl. Math.*, 18, № 1, 57, 1965.
64. E n g l a n d A. A punch problem for a transversely isotropic layer. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 58, № 3, 539, 1962.
65. E n g l a n d A., A. G r e e n. Some two-dimensional punch and crack problems in elasticity. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 59, № 2, 489, 1963.
66. E r d e l y i A., I. S n e d d o n. Fractional integration and dual integral equations. *Canad. Journ. Math.*, 14, № 5, 685, 1962.
67. E r d o g a n F. Stress distribution in a nonhomogeneous elastic plane with cracks. *Journ. Appl. Mech.*, *Trans. ASME*, E85, № 3, 232, 1963.
68. E r d o g a n F. Stress distribution in bonded dissimilar materials with cracks. *Journ. Appl. Mech.*, *Trans. ASME*, E87, № 6, 403, 1965.
69. K e r r L. M. Stress distribution at a edge of an equilibrium crack. *Journ. Mech. Phys. Solids*, 12, № 3, 149, 1964.
70. K e r r L. M. The torsion of a rigid punch in contact with an elastic layer where the friction law is arbitrary. *Journ. Appl. Mech.*, *Trans. ASME*, E31, № 3, 430, 1964.
71. L o v e E. R. Dual integral equations. *Canad. Journ. Math.*, 15, № 4, 631, 1963.
72. L o w R. D. On a mixed boundary value problem for an infinite elastic layer. *Quart. Journ. Mech. a. Appl. Math.*, 17, № 4, 395, 1964.
73. L o w R. D. On a doubly mixed boundary value problem for an elastic layer. *Quart. Appl. Math.*, 22, № 2, 153, 1964.
74. L o w R. D. On the torsion of an elastic cone as a mixed boundary value problem. *Quart. Journ. Mech. a. Appl. Math.*, 19, № 1, 57, 1966.
75. L o w e n g r u b M. Some dual trigonometric equations with an application to elasticity. *Int. Journ. Eng. Sci.*, 4, № 1, 69, 1966.
76. L o w e n g r u b M., I. S n e d d o n. The distribution of stress in the vicinity of an external crack in an infinite elastic solid. *Int. Journ. Eng. Sci.*, 3, № 5, 451, 1965.
77. M a t c z y n s k i M. Elastic wedge with discontinuous boundary conditions. *Arch. Mech. Stos.*, 15, № 6, 833, 1963.
78. M a t c z y n s k i M. Axisymmetric problem for a partly clamped elastic rod. *Arch. Mech. Stos.*, 17, № 1, 17, 1965.
79. N o b l e B. The solution of Bessel function dual integral equations by a multiplying-factor method *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 59, № 2, 35f. 1963.
80. O l e s i a k Z. Обзор польских работ, касающихся задач с разрывными краевыми условиями в теории упругости. *Mech. Teor. i Stos.*, 2, № 1, 15, 1964.
81. O l e s i a k Z. Annular punch on elastic semi-space. *Arch. Mech. Stos.*, 17, № 4, 633, 1965.
82. S h a i l R. Some thermoelastic stress distributions in an infinite solid and thick plate containing penny-shaped cracks. *Mathematika*, 11, № 2, 102, 1964.
83. S m i t h S. F. On a flat punch indenting an elastic layer in plane strain. *Quart. Journ. Math.*, 15, № 59, 223, 1964.
84. S n e d d o n I. Dual integral equations with trigonometrical kernels. *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, 5, № 3, 147, 1962.
85. S n e d d o n I. A relation involving Hankel transform with applications to boundary value problems in potential theory. *Journ. Math. a. Mech.*, 14, № 1, 33, 1965.

86. S n e d d o n I. Dual equations in elasticity. Приложения теории функций в механике сплошной среды. Труды Международн. симпозиума в Тбилиси, 1963 г., т. I, МТТ, изд. «Наука», М., 76, 1965.
 87. S n e d d o n I. The relation between load and penetration in the axisymmetric Boussinesq problem for a punch of arbitrary profile. Int. Journ. Eng. Sci., 3, № 1, 47, 1965.
 88. S n e d d o n I. The stress on the boundary of an elastic half-plane in which body forces are acting. Proc. Glasgow Math. Assoc., 7, № 1, 48, 1965.
 89. S r i v a s t a v R. A pair of dual integral equations involving Bessel functions of the first and the second kind. Proc. Edinb. Math. Soc., 14, № 2, 25, 1964.
 90. S r i v a s t a v R. An axisymmetric mixed boundary value problem for a half-space with a cylindrical cavity. Journ. Math. a. Mech., 13, № 3, 385, 1964.
 91. S r i v a s t a v K. N. On some dual integral equations. Journ. Ind. Math. Soc., N. S., 28, 155, 1964—1965.
 92. S z e f e r G. О решениях некоторых систем парных интегральных уравнений и их применении к теории упругости. Bull. Acad. Polon. Sci., ser. sci. techn., 13, № 2, 79, 1965.
 93. T r a n t e r C. J. The opening of a pair of complanar Griffiths crack under internal pressure. Quart. Journ. Mech. a Appl. Math., 14, № 3, 283, 1961.
 94. T r a n t e r C. J. A note on dual equations with trigonometric kernels. Proc. Edinb. Math. Soc., 13, ser. II, № 3, 267, 1963.
 95. W e a t m a n n R. A. Asymmetric mixed-value problems of the elastic half-space. Journ. Appl. Mech., Trans. ASME, E32, № 2, 411, 1965.
 96. W i l l i a m s W. E. The solution of dual series and dual integral equations. Proc. Glasgow Math. Assoc., 6, № 3, 123, 1964.
-

Яков Соломонович Уфлянд
ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ЗАДАЧАХ
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Издание второе, дополненное

Утверждено к печати
Физико-техническим институтом
Академии наук СССР

Редактор издательства А. Л. Иванова
Художник В. В. Грибакин
Технический редактор М. Н. Кондратьева
Корректоры Р. Г. Гершинская
и А. И. Кац

Сдано в набор 4/X 1967 г. Подписано к печати 4/IV 1968 г.
РИСО АН СССР 24—12В. Формат бумаги 60×90^{1/16}.
Бум. л. 12^{3/8}. Печ. л. 25^{1/4} = 25,25 усл. печ. л. Уч.-изд. л.
27,78. Изд. № 3550. Тип. зак. № 1034. Допечатка тиража
250 экз. М-11435. Бумага типографская № 1. Цена 2 р. 14к.

Ленинградское отделение издательства «Наука»
Ленинград, В-164, Менделеевская лин., д. 1

1-я тип. издательства «Наука»
Ленинград, Б-34, 9 линия, л. 12