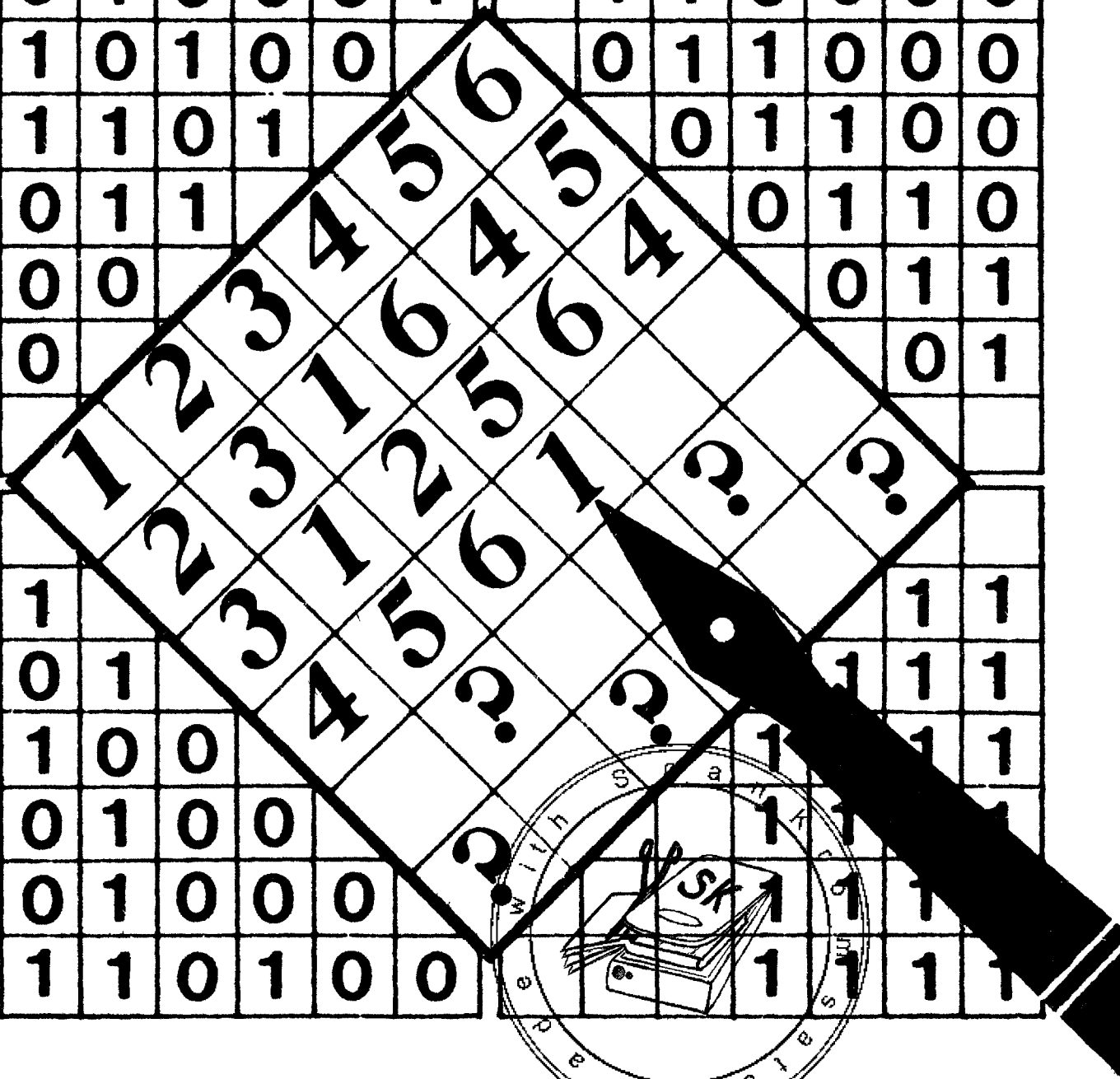


П  
Н  
Т  
П

В. Е. ТАРАКАНОВ

# КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ и (0,1) - МАТРИЦЫ

1	0	1	0	0	0	1		1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0			0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1				0	1	1	0	0	
0	0	1	1						0	1	1	0	
0	0	0								0	1	1	
1	0											0	1
0													
1										?		?	
1	1											1	1
1	0	1										1	1
1	1	0	0									1	1
1	0	1	0	0								1	1
1	0	1	0	0	0							1	1
0	1	1	0	1	0	0						1	1



ПРОБЛЕМЫ НАУКИ  
И ТЕХНИЧЕСКОГО ПРОГРЕССА

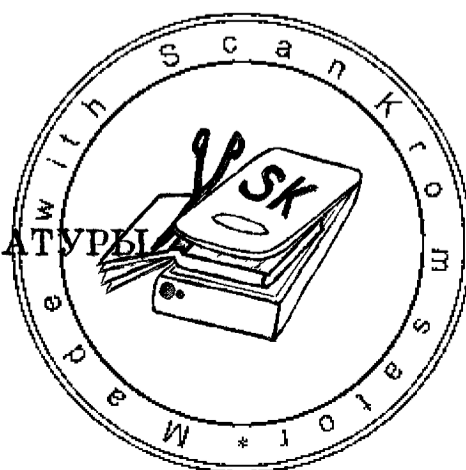
---

В. Е. ТАРАКАНОВ

# КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ И (0, 1)-МАТРИЦЫ



МОСКВА «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
1985



ББК 22.18

Т19

УДК 519.6

**Тараканов В. Е.**

**Т 92** Комбинаторные задачи и  $(0, 1)$ -матрицы.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985.— 192 с.

65 к., 45 000 экз.

Книга посвящена изложению метода описания и решения разнообразных задач дискретного характера, возникающих в прикладной математике. Этот метод позволяет строить математические модели без привлечения сложного математического аппарата.

Для студентов младших курсов нематематических специальностей, а также для лиц, интересующихся математикой.

Табл. 1. Ил. 11. Библиогр. 29 назв.

**Т 1702070000—163**  
**053(02)-85** КБ-5-44-85

**ББК 22.18**

**Рецензент**

доктор физико-математических наук *В. Н. Сауков*

© Издательство «Наука»  
Главная редакция физико-  
математической литературы,  
1985



## ПРЕДИСЛОВИЕ

Еще сравнительно недавно комбинаторика представлялась большинству людей, в том числе и многим математикам, собранием более или менее трудных, но весьма занимательных головоломок. И хотя идеи комбинаторного характера возникали порой у самых выдающихся математических умов и оказывались плодотворными в разных областях, за комбинаторной математикой признавалась, за редкими исключениями, лишь вспомогательная роль в математических исследованиях. Положение изменилось и довольно резко с середины XX в.

Научно-техническая революция, в частности внедрение ЭВМ во все области жизни, вызвала подлинный расцвет дискретной математики. Ее методы должны были стать достоянием не только математиков, но и научно-технических работников — программистов, инженеров, вычислителей, экономистов и других, обеспечивающих успешное функционирование, а также дальнейшую разработку и совершенствование многочисленных систем управления и сложных вычислительных устройств. И комбинаторика, будучи важной составной частью дискретной математики, одним из ее краеугольных камней, также испытала подлинный подъем. Он сказался не только в усилении интереса к комбинаторным проблемам и получении все большего числа результатов, но также в изменении самого отношения к ней: комбинаторика стала осознаваться математиками как самостоятельная, полноценная отрасль науки.

Как всякой математической дисциплине, комбинаторной математике свойствен вполне очерченный круг задач. Эта специфически комбинаторная постановка проблемы ощущается даже при определенном типе рассмотрений в рамках других отраслей математики. Недаром говорят, например, о «комбинаторной теории групп», «комбинаторной геометрии» или «комбинаторной топологии».



Другой важной стороной всякой развитой математической теории является присущий только ей аппарат решения возникающих в ней проблем. Комбинаторная математика, однако, широко заимствует свои методы из разных математических дисциплин: алгебры, анализа, теории вероятностей, геометрии и др. В этом не только ее слабость, но и сила: известно, что в настоящее время многие выдающиеся научные результаты получаются именно на стыке наук, на перекрестках различных направлений. Тем не менее специалисты по комбинаторной математике с конца 60-х гг. стремятся выявить специфические комбинаторные методы трактовки задач дискретной математики, чтобы поставить комбинаторные исследования на более прочный теоретический фундамент.

Знакомство с проблемами современной комбинаторной математики должно оставить впечатление, что, становясь полноценной математической дисциплиной, комбинаторика не утрачивает издавна присущего ей духа находчивости и занимательности.

Среди комбинаторных методов свое место занимает и матричный метод. Матрицы широко применяются практически во всех областях теоретической и прикладной математики. Однако их использование в комбинаторике имеет ряд специальных черт; одна из основных — систематическое рассмотрение матриц инцидентности различных комбинаторных конфигураций.

Настоящая книга посвящена матричным методам комбинаторной математики. Автор поставил своей целью показать, как матрицы из нулей и единиц используются для решения самых разных комбинаторных задач. При этом среди комбинаторных проблем автор старался выделить те, которые имеют наиболее принципиальный характер, — с точки зрения их универсальности.

Книга обращена ко всем интересующимся дискретной математикой. Для ее чтения достаточно знаний в объеме курса математики обычного технического вуза. В целях облегчения понимания основной части в книгу включена вводная гл. 1, посвященная матрицам и операциям над ними. Для желающих более глубоко изучить проблемы, затронутые в книге, в конце указана соответствующая литература.

## § 1. Что такое матрица?

В этой главе мы напомним некоторые факты, касающиеся матриц, а также связанных с ними математических объектов — подстановок, определителей и пермапентов. Доказательства этих фактов нетрудны и общеизвестны, и мы их нередко опускаем.

*Матрицей* называется прямоугольная таблица, составленная из чисел или других символов. В этой книге мы будем иметь дело в основном с числовыми матрицами и лишь иногда с матрицами из элементов другой природы — многочленов. Поэтому предполагается, что элементы матрицы можно складывать, перемножать и т. д. Итак, приведем несколько матриц:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1], \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

Горизонтальный ряд элементов матрицы называется *строкой*, вертикальный ряд — *столбцом* матрицы. Если матрица имеет  $m$  строк и  $n$  столбцов, то мы скажем, что ее *размер* есть  $m \times n$ . Если  $m = n$ , то матрица называется *квадратной*, а число  $n$  — ее *порядком*. Размеры матриц  $A, B, C, D, E$  из (1.1) — соответственно  $2 \times 3, 3 \times 3, 1 \times 5, 4 \times 3, 4 \times 1$ ;  $B$  — квадратная матрица порядка 3. Матрица, составленная из нулей и единиц, называется  $(0, 1)$ -матрицей. Например,  $C, D$  из (1.1) являются  $(0, 1)$ -матрицами. Матрицы размеров  $1 \times n$  и  $m \times 1$  называются *векторами* — соответственно *вектор-строкой* и *вектор-столбцом*; таковы матрицы  $C, E$  из (1.1). Любую матрицу можно представлять как совокупность записанных в

определенном порядке вектор-строк (или вектор-столбцов).

Элементы матрицы обычно записывают одной буквой, снабженной двумя цифровыми индексами: первый из них обозначает номер строки, в которой расположен элемент, второй — номер столбца. Итак, если  $A$  — матрица размера  $m \times n$ , то она представляется в виде

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Так, в матрице  $A$  из (1.1)  $a_{11} = 1$ ,  $a_{22} = 4$ ,  $a_{23} = 6$ . Столь же обычна сокращенная запись с «бегущими» индексами:  $A = [a_{ij}]$ , или  $B = [b_{kl}]$ , или  $D = [d_{rs}]$ ; в применении к соответствующим матрицам из (1.1)  $i$  меняется от 1 до 2,  $j$  — от 1 до 3,  $k, l$  — от 1 до 3,  $r$  — от 1 до 4,  $s$  — от 1 до 3. При этом обычно оговаривается размер матрицы, например матрица  $D = [d_{rs}]$  размера  $4 \times 3$ .

**Подматрицы. Транспонирование.** Пусть  $A = [a_{ij}]$  — матрица размера  $m \times n$ . Выделим в  $A$  некоторые  $k$  строк и  $l$  столбцов,  $1 \leq k \leq m$ ,  $1 \leq l \leq n$ ; пусть их номера будут  $i_1, i_2, \dots, i_k$  и  $j_1, j_2, \dots, j_l$ . Рассмотрим теперь матрицу  $A'$  размера  $k \times l$ , образованную всеми элементами  $A$ , лежащими на пересечении этих  $k$  строк и  $l$  столбцов. Такая матрица называется *подматрицей* матрицы  $A$ . Например,

матрица 2-го порядка  $D' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  есть подматрица мат-

рицы  $D$  из (1.1), образованная, скажем, пересечением строк с номерами 2 и 4 и столбцов с номерами 1 и 3. Если  $\alpha = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$  и  $\beta = \{j_1, j_2, \dots, j_l\}$  — множества выбранных индексов строк и столбцов соответственно, то  $A'$  называется *подматрицей* матрицы  $A$ , состоящей из  $k$  строк и  $l$  столбцов, и обозначается  $A' = A[\alpha | \beta]$ . Так,  $D' = D[2, 4 | 1, 3]$ .

Для каждой матрицы  $A = [a_{ij}]$  размера  $m \times n$  можно определить операцию *транспонирования*, заключающуюся в том, что ее строки мы по порядку записываем в виде столбцов, двигаясь слева направо. Получаем матрицу размера  $n \times m$ , которую обозначим через  $A^T$ . Если  $a_{ij}^T$  — элемент  $A^T$ , находящийся в ее  $i$ -й строке и  $j$ -м столбце, то, очевидно,  $a_{ij}^T = a_{ji}$ . Для квадратной матрицы  $A$  порядка  $n$  матрица  $A^T$  — также квадратная матрица того же порядка.

Диагональю матрицы  $A$  назовем такое множество мест, что никакие два не лежат в одной строке или одном столбце. Среди диагоналей квадратной матрицы выделяются *главная*, которая идет от верхнего левого угла к правому нижнему, и *побочная*, идущая от верхнего правого к нижнему левому углу. Индексы элементов главной диагонали матрицы порядка  $n$  — это  $(i, i)$ , побочной — это  $(i, n - i + 1)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Операцию транспонирования матрицы  $A$  можно представлять себе как переход к таблице, симметричной относительно ее главной диагонали.

Матрица  $A$ , совпадающая со своей транспонированной, называется *симметрической*. Ясно, что симметрической может быть лишь квадратная матрица.

Матрицы  $I$  и  $J$ . Среди  $(0,1)$ -матриц выделяются две матрицы, играющие особую роль в комбинаторных исследованиях. Это, во-первых, квадратная матрица  $I_n$  порядка  $n$ , у которой на главной диагонали стоят единицы, а вне главной диагонали — нули:

$$I_1 = [1], \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (1.2)$$

$I_n$  — симметрическая матрица при любом  $n$ .

Во-вторых, это матрица  $J_{mn}$  размера  $m \times n$ , составленная из единиц:

$$J_{11} = [1], \quad J_{24} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_{43} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.3)$$

Если  $m = n$ , то  $J_{mn}$  обозначается просто  $J_n$ ; она также симметрическая при любом  $n$ .

В случаях, когда это не вызывает недоразумений, индексы в обозначениях этих матриц опускаются, и мы просто пишем  $I, J$ .

**Сложение матриц.** Пусть заданы матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

одинакового размера  $m \times n$ . Их сумма  $A + B$  определяется путем сложения элементов, расположенных на

одинаковых местах:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Из этого определения ясно, что для матриц сохраняются основные свойства сложения чисел: *коммутативность*:  $A + B = B + A$  и *ассоциативность*:  $(A + B) + C = A + (B + C)$  для любых матриц  $A, B, C$  одинакового размера. Для каждой матрицы  $A = [a_{ij}]$  существует матрица  $-A = [-a_{ij}]$ , для которой  $A + (-A) = O$ , где  $O$  — матрица того же размера, что и  $A$ , составленная из нулей.

**Умножение матриц.** Пусть заданы матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} \end{bmatrix}$$

размера  $m \times r$  и матрица

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rn} \end{bmatrix}$$

размера  $r \times n$ . Тогда мы можем определить *произведение*  $AB$  матрицы  $A$  на матрицу  $B$  как матрицу

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix},$$

где  $c_{ij} = \sum_{k=1}^r a_{ik}b_{kj}$ . Размер  $C$  есть, очевидно,  $m \times n$ , где  $m$  — число строк в  $A$ ,  $n$  — число столбцов в  $B$ .

Кратко образование элемента матрицы  $C$  можно описать как «перемножение»  $i$ -й строки  $A$  на  $j$ -й столбец  $B$ . Например, при умножении матрицы  $A$  на матрицу  $B$  из (1.1) получаем

$$c_{11} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (1/2) + 3 \cdot (1/3) = 3,$$

$$c_{12} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = -1,$$

$$c_{13} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1/2) + 3 \cdot 0 = 0,$$

$$c_{21} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot (1/2) + 6 \cdot (1/3) = 6,$$

$$c_{22} = 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = -2,$$

$$c_{23} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-1/2) + 6 \cdot 0 = 0;$$

$$C = AB = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

В отличие от сложения умножение даже числовых матриц не коммутативно. Пусть, например,  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ . Тогда  $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , и  $AB \neq BA$ .

Однако другое основное свойство числового умножения — ассоциативность — сохраняется и для умножения матриц.

**Теорема 1.1** (закон ассоциативности умножения матриц). Пусть  $A, B, C$  — матрицы соответственно размеров  $m \times n, n \times p, p \times q$ . Тогда  $(AB)C = A(BC)$ .

**Единица по умножению. Обратная матрица.** При умножении чисел особую роль играет число 1: любое число, умноженное слева или справа на 1, не изменяется. Для матричного умножения аналогичную роль играет матрица  $I$  (см. (1.2)). Пусть  $A$  — матрица размера  $m \times n$ ,  $I_m, I_n$  — единичные матрицы порядков  $m, n$ . Тогда, как легко убедиться,

$$I_m A = A I_n = A. \quad (1.4)$$

Например, для матрицы  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  порядка 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Число 1 имеет еще одно замечательное свойство: для любого числа  $a \neq 0$  найдется такое единственное число  $a^{-1}$ , что  $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ . Единичная матрица  $I$  до некоторой степени обладает и этим свойством: если для квадратной матрицы  $A$  порядка  $n$  существует такая матрица  $B$ , что  $AB = I_n$ , то  $BA = I_n$ . Такая матрица  $B$  называется *обратной* к матрице  $A$ .

Однако не для всякой квадратной матрицы существует обратная. Например, не имеют обратных матрицы с нулевой строкой. Действительно, пусть  $A = \begin{bmatrix} a & a' \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Тогда

для любой матрицы 2-го порядка  $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$  имеем

$$AB = \begin{bmatrix} ab_{11} + a'b_{21} & ab_{12} + a'b_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

и такая матрица не может совпасть с  $I_2$  (пример легко переносится на матрицы любого порядка). Признаки наличия обратной у данной матрицы мы рассмотрим в § 3.

**Частные случаи умножения матриц. Скалярное произведение векторов.** Наряду с умножением матрицы на матрицу определяется умножение матрицы на число: если  $A = [a_{ij}]$  — матрица размера  $m \times n$  и  $\lambda$  — число, то  $\lambda A = [\lambda a_{ij}]$ , т. е. умножение матрицы на число  $\lambda$  заключается в умножении на  $\lambda$  каждого ее элемента.

Покажем, что умножение на число можно реализовать в виде обычного матричного умножения. Действительно, рассмотрим матрицу

$$\Lambda_n = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}$$

порядка  $n$ , у которой на главной диагонали стоит число  $\lambda$ , а на остальных местах — нули. Тогда, как легко видеть,

$$A\Lambda_n = \lambda A.$$

Точно так же имеем

$$\Lambda_m A = \lambda A.$$

А что произойдет, если матрицу  $A$  умножить на такую матрицу  $D$ , у которой вне главной диагонали стоят нули, а на главной диагонали не обязательно одинаковые

числа? Пусть  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ,  $D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}$ . Тогда

$$AD = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}d_1 & a_{12}d_2 \\ a_{21}d_1 & a_{22}d_2 \end{bmatrix}.$$

Мы видим, что все элементы первого столбца умножились на  $d_1$ , а второго — на  $d_2$ . Это — общее правило: при умножении матрицы  $A$  размера  $m \times n$  на матрицу

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}$$

все элементы первого столбца  $A$  умножаются на  $d_1$ , второго — на  $d_2$ , ...,  $n$ -го — на  $d_n$ . Совершенно аналогично, при умножении матрицы  $D$  на матрицу  $B$  размера  $n \times p$  все элементы первой строки  $B$  умножаются на  $d_1$ , второй — на  $d_2$ , ...,  $n$ -й — на  $d_n$ .

Из определения умножения матриц следует, что мы можем перемножить любую вектор-строку (матрицу размера  $1 \times n$ ) на вектор-столбец (матрицу размера  $n \times 1$ ) — в результате получится квадратная матрица порядка 1, т. е. число. Под *вектором* обычно понимают вектор-строку, т. е. последовательность  $n$  чисел  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ; число  $n$  называется *размерностью* вектора  $a$ , а числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — его *компонентами*. *Скалярным произведением* вектора  $a$  на вектор  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  называется число  $ab^T = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$ , представляющее собой результат матричного умножения вектор-строки  $a$  на вектор-столбец  $b^T$ , получающийся транспонированием  $b$ . Если не возникает недоразумений, мы обозначаем скалярное произведение вектора  $a$  на вектор  $b$  просто как  $(a, b)$ . Итак,

$$(a, b) = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n. \quad (1.5)$$

Ясно, что  $(a, b) = ab^T = ba^T = (b, a)$ .

Пусть задана матрица  $A = [a_{ij}]$  размера  $m \times n$ . Часто приходится рассматривать суммы ее элементов по строкам и столбцам. Число  $r_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}$  назовем  *$i$ -й строчной суммой* ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), число  $c_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}$  —  *$j$ -й столбцевой суммой* ( $j = 1, 2, \dots, n$ ); векторы  $(r_1, r_2, \dots, r_m)$  и  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$  — соответственно *векторами строчных и столбцевых сумм*.

Если теперь матрицу  $A$  умножить на матрицу  $J_n$ , то приходим к матрице

$$AJ_n = \begin{bmatrix} r_1 & r_1 & \dots & r_1 \\ r_2 & r_2 & \dots & r_2 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ r_m & r_m & \dots & r_m \end{bmatrix}$$

размера  $m \times n$ , в которой каждый столбец есть вектор строчных сумм. Аналогично,

$$J_mA = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix}$$



имеет размер  $m \times n$ , и каждая ее строка — вектор столбцовых сумм. Такие матрицы мы будем рассматривать в дальнейшем при выводе основных результатов гл. 4.

## § 2. Подстановки

При изучении матриц часто используются подстановки. Взаимно однозначное соответствие между элементами конечного множества называется *подстановкой* на этом множестве. Обозначим через  $Z_n$  множество первых  $n$  натуральных чисел  $1, 2, \dots, n$ . Любое множество из  $n$  элементов можно представить как  $Z_n$ , если перенумеровать его элементы, иначе говоря, если *упорядочить* их.

Пусть задана подстановка  $P$  на  $Z_n$ , при которой каждому числу  $r \in Z_n$  ставится в соответствие некоторое число  $i_r \in Z_n$  или, иначе говоря,  $r$  переходит в  $i_r$ . Обычно это соответствие записывается в виде матрицы размера  $2 \times n$ :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

где под каждым числом в верхней строке записано в нижней то число, в которое оно переходит при подстановке  $P$ . Ясно, что нижнюю строку в (2.1) составляют те же числа  $1, 2, \dots, n$ , только записанные в другом порядке. Такой ряд чисел  $i_1, i_2, \dots, i_n$  называется *перестановкой* чисел  $1, 2, \dots, n$ . Число  $n$  называется *степенью* подстановки  $P$  из (2.1). Выпишем, например, все подстановки степени 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Матрица  $P$  есть фактически запись функциональной зависимости, которая задается соответствием  $P$ .

**Запись подстановки в виде произведения циклов.** Пусть мы имеем подстановку  $P$  степени  $n$ , для которой  $P(i) = i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Ее стандартная запись

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Такая подстановка называется *тождественной*: порядок элементов в нижней строке повторяет естественный порядок.

Пусть теперь  $P$  — не тождественная подстановка степени  $n$ . Тогда в ее верхней строке найдется такое число  $i$ , что  $j = P(i) \neq i$ . Найдем, далее,  $P(j)$  и обозначим это число через  $k$ , затем  $P(k) = l$  и т. д. Ясно, что не позднее чем через  $n$  шагов мы снова встретим число  $i$ . Обозначим пройденный путь стрелками:  $i \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow l \rightarrow \dots \rightarrow t \rightarrow i$ . Если число таких стрелок равно  $r$ , то мы скажем, что подстановка  $P$  содержит *цикл  $z$  длины  $r$* . Цикл записываем в виде последовательности чисел, заключенной в скобки:  $z = (ijkl\dots t)$ ; последним записывается число, которое при подстановке  $P$  переходит в число  $i$ , с которого мы начали. Начало цикла при этом несущественно: тот же цикл можно было начать, скажем, с числа  $k$  и через  $r$  шагов вновь возвратиться к нему. Соответствующая запись того же цикла была бы  $z = (kl\dots tij)$ . Отметим также, что случай, когда при подстановке  $P$  число, скажем  $i$ , переходит в себя, т. е.  $P(i) = i$ , включается в наше рассмотрение: имеем цикл  $i \rightarrow i$  или, в другой записи,  $(i)$  длины 1.

Могло случиться так, что пройденный путь охватил по одному разу все числа из  $Z_n$ , т. е.  $r = n$ . Тогда скажем, что подстановка  $P$  состоит из *одного цикла длины  $n$* . В противном случае возьмем любое число, не вошедшее в цикл  $z_1 = z$  длины  $r_1 = r < n$ , и, начиная с него, строим таким же способом другой цикл, содержащийся в  $P$ . Обозначим его через  $z_2$ , а его длину — через  $r_2$ . Ни одно из чисел, через которые проходит  $z_2$ , не может совпасть с числом из  $z_1$  — ведь подстановка есть взаимно однозначное соответствие, а это совпадение означало бы, что два различных числа из  $Z_n$  при  $P$  переходят в одно и то же число. Если  $z_1$  и  $z_2$  еще не исчерпали всего  $Z_n$ , то берем число, не входящее в них, и строим цикл  $z_3$ . Ясно, что, продолжая дальше таким же образом, мы построим циклы  $z_1, z_2, \dots, z_k$ , которые исчерпают всю подстановку  $P$ , т. е. при записи циклов числами, заключенными в скобках, по одному разу встретятся в каком-либо из  $z_1, z_2, \dots, z_k$  все числа из  $Z_n$ . Любые два цикла в такой записи не содержат общих элементов. Записывая все такие циклы один рядом с другим, мы получаем *цикловое разложение подстановки  $P$* :

$$P = z_1 z_2 \dots z_k. \quad (2.3)$$

Ясно, что порядок записи циклов при цикловом разложении не имеет значения.

Напишем цикловые разложения для подстановок степени 3 из (2.2):

$$(1)(2)(3), (1\ 2)(3), (1\ 3)(2), (1)(2\ 3), (1\ 2\ 3), \\ (1\ 3\ 2). \quad (2.4)$$

Подстановка  $(1)(2)(3)$  тождественная, она состоит из трех циклов длины 1, подстановки  $(1\ 2\ 3)$  и  $(1\ 3\ 2)$  состоят из одного цикла длины 3.

Можно действовать также в обратном направлении: зная совокупность циклов  $z_1, z_2, \dots, z_k$ , исчерпывающих подстановку  $P$ , можно восстановить ее однозначно: произведя все отображения, которые составляют циклы  $z_1, z_2, \dots, z_k$ , можно написать всю  $P$  в виде (2.1).

Приведем пример. Пусть подстановка  $P$  степени 8 имеет цикловое разложение  $P = (1\ 7\ 2)(3)(4\ 8)(5\ 6)$ . Тогда  $z_1 = (1\ 7\ 2)$ ,  $z_2 = (3)$ ,  $z_3 = (4\ 8)$ ,  $z_4 = (5\ 6)$ . Восстановим запись  $P$  в виде (2.1). Из рассмотрения  $z_1$  ясно, что под 1 нужно написать 7, под 7 — 2 и под 2 — 1. Далее, из  $z_2$  следует, что  $P(3) = 3$ , из  $z_3$  — что  $P(4) = 8$ ,  $P(8) = 4$ . Наконец, по  $z_4$  5 переходит в 6, а 6 — в 5. Итак,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 1 & 3 & 8 & 6 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Таким образом, то соответствие, которое устанавливается на элементах  $Z_n$  с помощью подстановки  $P$ , фактически распадается на ряд соответствий, устанавливаемых с помощью циклов  $z_1, z_2, \dots, z_k$ , входящих в цикловое разложение  $P$ . Другими словами,  $P$  распадается в произведение попарно непересекающихся циклов  $z_1, z_2, \dots, z_k$ .

Пусть число циклов длины  $r$  в цикловом разложении подстановки  $P$  степени  $n$  равно  $k_r$ , где  $r = 1, 2, \dots, n$ . Так как цикловое разложение исчерпывает всю подстановку, то

$$1 \cdot k_1 + 2 \cdot k_2 + \dots + n \cdot k_n = n. \quad (2.6)$$

Совокупность чисел  $k_1, k_2, \dots, k_n$  называется *цикловой структурой* подстановки  $P$  степени  $n$ .

**Четные и нечетные подстановки.** Все подстановки данной степени  $n$  разделяются на два больших класса. Пусть  $P = z_1 z_2 \dots z_s$  — цикловое разложение подстановки  $P$  степени  $n$ , где цикл  $z_i$  имеет длину  $r_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ).

Образуем сумму

$$\rho(P) = \sum_{i=1}^s (r_i - 1). \quad (2.6a)$$

Так как  $\sum_{i=1}^s r_i = n$ , ясно, что

$$\rho(P) = n - s. \quad (2.7)$$

Число  $\rho(P)$  называется *декрементом* подстановки  $P$ . Если  $\rho$  четно, то подстановка  $P$  называется *четной* подстановкой, если нечетно — *нечетной*. Среди подстановок из (2.4) подстановки  $(1)(2)(3)$ ,  $(1\ 2\ 3)$ ,  $(1\ 3\ 2)$  — четные,  $(1)(2\ 3)$ ,  $(1\ 3)(2)$ ,  $(1\ 2)(3)$  — нечетные.

Подстановка  $P$  из (2.5) — четная. Поменяем местами какие-либо два числа в ее нижней строке, скажем 7 и 6. Тогда приходим к подстановке

$$P' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 1 & 3 & 8 & 7 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ее цикловое разложение  $P' = (1\ 6\ 5\ 7\ 2)(3)(4\ 8)$ , декремент  $\rho(P') = 8 - 3 = 5$ . Таким образом,  $P'$  — нечетная подстановка. Этот пример отражает общую закономерность.

**Теорема 2.1.** Пусть

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

есть подстановка степени  $n$ . Тогда перемена мест любых двух чисел в нижней строке  $P$  изменяет ее четность.

**Доказательство.** Предположим для определенности, что мы меняем местами числа 1 и 2 в нижней строке  $P$ . Обозначим  $i_1 = i$ ,  $i_2 = k$  и рассмотрим цикловые разложения подстановки  $P$  и подстановки  $P'$ , получающейся из  $P$  изменением нижней строки. Очевидно, что циклы  $P$ , в которых нет ни 1, ни 2, измениться не могут и в том же самом виде войдут в цикловое разложение  $P'$ . Рассмотрим теперь два случая.

1) Числа 1 и 2 входят в один цикл  $z$  подстановки  $P$ . Предположим теперь, что в записи  $P$   $i \neq 2$ ,  $k \neq 1$ , или, кратко, что  $(i, k) \neq (2, 1)$ . Тогда можно написать

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & j & \dots & l & \dots \\ i & k & \dots & 2 & \dots & 1 & \dots \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

т. е.  $P(j) = 2$ ,  $P(l) = 1$ , и

$$P' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & j & \dots & l & \dots \\ i & k & \dots & 1 & \dots & 2 & \dots \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

т. е.  $P'(j) = 1$ ,  $P'(l) = 2$ .

Выпишем тот цикл  $z$  подстановки  $P$ , в который входят 1, 2:  $z = (1i \dots j 2k \dots l)$ . В  $P'$  он, как видно из (2.9), заменится на два цикла  $z_1 z_2$ , где  $z_1 = (1i \dots j)$  и  $z_2 = (2k \dots l)$ , так как  $P'(j) = 1$ ,  $P'(l) = 2$ , а все остальные соответствия в  $P$  и  $P'$  одинаковы.

Если же  $P(1) = i = 2$  и  $P(2) = k = 1$ , то  $P$ ,  $P'$  имеют соответственно вид

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 1 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix}, \quad P' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix}.$$

Ясно, что и здесь вместо одного цикла  $(1\ 2)$  в  $P$  возникают два цикла  $(1)$  и  $(2)$  в  $P'$ .

Таким образом, общее число циклов в  $P'$  увеличивается на 1 по сравнению с числом  $s$  циклов в  $P$ , и по формуле (2.7)  $\rho(P') = n - s - 1$ ; следовательно, если  $\rho(P)$  было четным, то  $\rho(P')$  нечетно, и наоборот.

2) Числа 1 и 2 входят в два разных цикла  $z_1$  и  $z_2$  подстановки  $P$ . Пусть  $(i, k) \neq (1, 2)$ . Тогда запишем  $P$  и  $P'$  соответственно в виде (2.8) и (2.9), и  $z_1 = (1i \dots l)$ ,  $z_2 = (2k \dots j)$ . Ясно, что в  $P'$  эти два цикла сольются в один:  $z = (1i \dots l 2 \dots j)$ .

Если  $i = 1$ ,  $k \neq 2$ , то  $P$  и  $P'$  имеют соответственно вид

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & j & \dots \\ 1 & k & \dots & 2 & \dots \end{pmatrix}, \quad P' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & j & \dots \\ 2 & k & \dots & 1 & \dots \end{pmatrix},$$

с циклами  $z_1 = (1)$ ,  $z_2 = (2k \dots j)$ , и в  $P'$  получаем один цикл  $z = (1 2 k \dots j)$ . Точно так же при  $i \neq 1$ ,  $k = 2$  имеем  $z_1 = (1i \dots l)$ ,  $z_2 = (2)$ ,  $z = (1i \dots l 2)$  и, наконец, при  $i = 1$ ,  $k = 2$  имеем  $z_1 = (1)$ ,  $z_2 = (2)$ ,  $z = (1 2)$ . Итак, во всех случаях число циклов в  $P'$  на единицу меньше, чем в  $P$ , и по формуле (2.7) декременты  $\rho(P)$  и  $\rho(P')$  также отличаются друг от друга на 1.

Остается лишь заметить, что если бы вместо 1 и 2 мы поменяли местами в нижней строке любые другие два числа, скажем  $a$  и  $b$ , то доказательство дословно осталось бы тем же, надо было бы лишь обозначить  $P(a) = i$ ,  $P(b) = k$ ,  $P(j) = b$ ,  $P(l) = a$ .

**Общее число подстановок.** С помощью теоремы 2.1 без труда доказывается

**Теорема 2.2.** *Число четных подстановок данной степени равно числу нечетных подстановок той же степени.*

Сколько же всего подстановок степени  $n$ ? Чтобы ответить на этот вопрос, воспользуемся стандартной записью (2.1). Ясно, что число всех подстановок равно числу всех возможных нижних строк; это число в свою очередь равно числу способов записи друг за другом чисел  $1, 2, \dots, n$ . Подсчитаем его. Если на первом месте мы поставим какое-либо из этих  $n$  чисел, то на втором может оказаться любое из  $n - 1$  оставшихся; если мы выбрали второе число, то для третьего числа остается  $n - 2$  возможности. Продолжая так рассуждать, получаем, что искомое число способов записи друг за другом чисел  $1, 2, \dots, n$  (другими словами, число возможных упорядочений множества  $Z_n$ ) равно  $n(n - 1) \cdot \dots \cdot 1$ ; обычная запись этого произведения, называемого *факториалом*,  $n!$ . Сформулируем доказанный нами факт.

**Теорема 2.3.** *Число всех подстановок степени  $n$  равно  $n!$ .*

Из теорем 2.2 и 2.3 вытекает

**Следствие.** *Число четных подстановок степени  $n$  и число нечетных подстановок той же степени равны  $n!/2$ .*

**Сокращенная запись циклового разложения. Циклические подстановки.** При записи циклового разложения подстановки часто опускаются все циклы длины 1. Так, например, если подстановка степени 5 записана как  $(1\ 3)$ , то под этим подразумевается подстановка  $(1\ 3)(2)(4)(5)$  в полной записи. При сокращенной записи всегда оговаривается степень рассматриваемой подстановки. Ясно, что декремент подстановки легко подсчитать и по этой сокращенной записи. Действительно, рассмотрим формулу (2.6а). В ней ничего не изменится, если в сумме убрать слагаемые с  $r_i = 1$ ; фактически ее можно переписать так:

$$\rho(P) = \sum_{r_i \neq 1} (r_i - 1), \quad (2.10)$$

где суммирование распространяется на длины циклов в цикловом разложении  $P$ , не равные 1.

Подстановки (в сокращенной записи) вида  $(ab)$ , где  $a, b \in Z_n$ , называются *транспозициями*. Запись транспозиции  $T$  в виде (2.1) можно представить как

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \dots & a & \dots & b & \dots & n \\ 1 & \dots & b & \dots & a & \dots & n \end{pmatrix},$$

где числа в верхней и нижней строках совпадают везде, кроме мест чисел  $a$  и  $b$ . Транспозиция — нечетная подстановка при любом  $n$ . Действительно, длины всех циклов в транспозиции  $T$  равны 1, кроме одного, равного 2, и по (2.10)  $\rho(T) = 1$ .

Подстановка, в цикловом разложении которой имеется лишь один цикл длины  $r > 1$ , называется *циклической* или просто *циклом*; число  $r$  называется при этом *длиной цикла*. Транспозиции — циклы длины 2.

**Теорема 2.4.** *Каково бы ни было  $n$ , любая циклическая подстановка  $S$  степени  $n$  с длиной цикла  $r$  нечетна, если  $r$  — четное число, и четна, если  $r$  — нечетное число.*

Доказательство теоремы получается непосредственно, если  $\rho(S)$  вычислить по формуле (2.10).

**Представление подстановок степени  $n$  матрицами порядка  $n$ .** Для изучения матриц оказывается полезным представить подстановку данной степени  $n$  как квадратную  $(0, 1)$ -матрицу порядка  $n$ . Этого можно достичь, например, следующим способом.

Пусть задана подстановка  $P$  степени  $n$ :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}.$$

Построим по  $P$  квадратную  $(0, 1)$ -матрицу: в таблице размера  $n \times n$  расставим 1 на местах  $(1, i_1)$ ,  $(2, i_2)$ , ...,  $(n, i_n)$ , на остальные места поставим нули и обозначим полученную матрицу той же буквой  $P$ . Ясно, что эта матрица имеет в точности одну единицу в каждой строке и каждом столбце. Пусть, например,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

есть подстановка степени 3. Тогда ей по нашему способу соответствует матрица 3-го порядка

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Обратно, если задана квадратная  $(0, 1)$ -матрица порядка  $n$  такая, что в каждой ее строке и каждом столбце имеется в точности по одной единице, то ей можно однозначно сопоставить некоторую подстановку степени  $n$ . Этого можно достичь следующим способом. Пусть  $j_1$  — номер столбца, в котором стоит единица из первой стро-

ки,  $j_2, j_3, \dots, j_n$  — номера столбцов, в которых стоят единицы из 2-й, 3-й, ...,  $n$ -й строк. По условию числа  $j_1, j_2, \dots, j_n$  попарно различны, поэтому

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$$

есть подстановка.

Назовем *матрицей подстановки* или *подстановочной матрицей* любую  $(0, 1)$ -матрицу порядка  $n$ , у которой в каждой строке и каждом столбце имеется в точности одна единица (иногда в том же смысле говорят о *матрице перестановки*). Как мы видели, подстановочные матрицы порядка  $n$  взаимно однозначно соответствуют подстановкам степени  $n$ . Поэтому их столько же, сколько этих подстановок, т. е. по теореме 2.3 их всего  $n!$ .

Матрицы подстановки можно использовать при описании некоторых преобразований матриц. Предположим, что мы решили каким-то образом переставить столбцы матрицы  $A$  размера  $m \times n$ , например, так, чтобы 1-й столбец занял место  $j_1$ , 2-й — место  $j_2$ , ...,  $n$ -й — место  $j_n$ . Иными словами, переставим столбцы матрицы  $A$  согласно подстановке

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что нужная перестановка столбцов получится, если мы умножим  $A$  на подстановочную матрицу, соответствующую  $P$ . Не проводя доказательства, убедимся в этом на примере. Пусть задана квадратная матрица 3-го порядка

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

и мы хотим поставить 1-й столбец на 2-е место, 2-й на 3-е и 3-й на 1-е, т. е. переставить столбцы согласно подстановке  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ . Этой подстановке, как мы видели (см. (2.11), (2.12)), соответствует матрица

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$



Найдем произведение  $AP$ :

$$AP = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix};$$

мы убеждаемся, что столбцы  $A$  при этом действительно переставились так, как было нужно.

Если мы теперь хотим переставить строки матрицы  $A$  размера  $m \times n$  так, чтобы 1-я строка стала  $i$ -й, 2-я —  $i_2$ -й, ...,  $m$ -я —  $i_m$ -й, т. е., согласно подстановке  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ i_1 & i_2 & \dots & i_m \end{pmatrix}$ , то, как легко показать, для этого нужно взять транспонированную матрицу  $Q^T$  для матрицы  $Q$ , соответствующей нашей подстановке, и умножить ее на  $A$ .

### § 3. Определители и перманенты

Применение матриц во многом основано на том, что на множестве матриц можно рассмотреть числовые функции. Наиболее известными среди таких функций являются определитель и перманент.

Рассмотрим квадратную матрицу  $A$  порядка  $n$ :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Образуем все возможные произведения по  $n$  элементов матрицы  $A$ , в которых элементы берутся по одному из каждой строки и каждого столбца: если в произведение входит, например, элемент  $a_{21}$ , то никакой элемент из 1-го столбца или из 2-й строки в нем уже не встретится. Сколько всего таких произведений? Очевидно, столько, сколько всего подстановок степени  $n$ . Действительно, в такое произведение должен обязательно входить в качестве сомножителя элемент каждой из  $n$  строк.

Таким образом, общий вид этого произведения  $a_{1i_1}a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$ ; образуем теперь подстановку

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

где в нижнем ряду записаны номера столбцов, из которых взяты сомножители, находящиеся в 1-й, 2-й, ...,  $n$ -й стро-

ках. Ясно, что все числа в нижней строке попарно различны между собой, иначе в произведение входили бы два элемента из одного столбца. Поэтому  $\sigma$  — действительно подстановка. С другой стороны, каждой подстановке  $\sigma$  степени  $n$ , записанной в виде (3.1), можно сопоставить произведение  $a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$  элементов матрицы  $A$ , в котором в качестве сомножителей встречаются по одному элементу из каждой строки и каждого столбца; это произведение можно записать по-другому:  $a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$ . По теореме 2.3 всего имеется  $n!$  подстановок степени  $n$ .

Пусть теперь задана функция  $f$ , которая каждой подстановке  $\sigma$  ставит в соответствие число  $f(\sigma)$ , действительное или комплексное. Тогда можно рассмотреть сумму вида

$$\sum_{\sigma} f(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} \quad (3.2)$$

с  $n!$  членами, представляющую собой числовую функцию от матрицы  $A$ . В этом параграфе мы изучим свойства функции от матрицы вида (3.2) при некоторых  $f(\sigma)$ .

**Определители.** Припишем каждой подстановке  $\sigma$  число  $1$ , если она четная, и число  $-1$ , если она нечетная. Тем самым мы получаем некоторую функцию на множестве всех подстановок степени  $n$ , принимающую значения  $\pm 1$ . Обозначим эту функцию через  $\text{sgn}(\sigma)$ . Пусть  $\Sigma_n$  — множество всех подстановок степени  $n$ .

*Определителем* квадратной матрицы  $A = [a_{ij}]$  порядка  $n$  называется число

$$\Delta(A) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}, \quad (3.3)$$

где суммирование распространяется по всем подстановкам из множества  $\Sigma_n$ .

Приведем примеры. Пусть  $n = 2$ . Тогда имеется всего две подстановки степени 2:  $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  с цикловыми разложениями  $\sigma_1 = (1)(2)$ ,  $\sigma_2 = (1\ 2)$ . Рассмотрим произвольную матрицу порядка 2:  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ . Ясно, что  $\rho(\sigma_1) = 0$ ,  $\rho(\sigma_2) = 1$ , т. е.  $\text{sgn}(\sigma_1) = 1$ ,  $\text{sgn}(\sigma_2) = -1$ . Следовательно, определитель матрицы 2-го порядка есть сумма двух произведений:  $a_{11}a_{22}$ , взятого со знаком  $+$ , и  $a_{12}a_{21}$ , взятого со знаком  $-$ . Итак,

$$\Delta(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (3.3a)$$

Определитель матрицы порядка  $n$  будем называть *определителем  $n$ -го порядка*.

Пусть  $n = 3$ . Возьмем все 6 подстановок 3-й степени, записанные с помощью их цикловых разложений (см. (2.4)), и вычислим их декременты по (2.7); получаем, что определитель матрицы 3-го порядка

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

равен

$$\Delta(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + \\ + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}. \quad (3.4)$$

**Свойства определителей.** Вводя определители, мы опирались на подстановки номеров строк. Однако в каждом из произведений вида  $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$  в (3.3) можно так переставить сомножители, чтобы вначале шел элемент из 1-го столбца, затем из 2-го, ..., затем из  $n$ -го. Тогда индексы строк в записанном произведении образуют некоторую подстановку номеров столбцов, которую мы обозначим через  $\sigma^{-1}$ , т. е.

$$a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} = a_{\sigma^{-1}(1)1}a_{\sigma^{-1}(2)2} \dots a_{\sigma^{-1}(n)n}. \quad (3.5)$$

Нетрудно показать, что у  $\sigma^{-1}$  такая же цикловая структура, как и у  $\sigma$ ; следовательно,  $\rho(\sigma^{-1}) = \rho(\sigma)$  и  $\text{sgn}(\sigma^{-1}) = \text{sgn}(\sigma)$ . Когда  $\sigma$  пробегает все подстановки номеров строк,  $\sigma^{-1}$  пробегает все подстановки номеров столбцов. Итак, (3.3) можно записать в виде

$$\Delta(A) = \sum_{\sigma^{-1} \in \Sigma_n} \text{sgn}(\sigma^{-1}) a_{\sigma^{-1}(1)1} a_{\sigma^{-1}(2)2} \dots a_{\sigma^{-1}(n)n} = \\ = \sum_{\tau \in \Sigma_n} \text{sgn}(\tau) a_{\tau(1)1} a_{\tau(2)2} \dots a_{\tau(n)n}, \quad (3.6)$$

где  $\tau$  пробегает все подстановки из множества  $\Sigma_n$ .

Отсюда непосредственно получается

**Теорема 3.1.** Пусть  $A = [a_{ij}]$  — матрица порядка  $n$ . Для транспонированной матрицы  $A^T$  справедливо  $\Delta(A^T) = \Delta(A)$ .

**Доказательство.** Действительно, в  $A^T$  на месте  $(i, j)$  стоит элемент  $a_{ji}$ ; следовательно, по (3.3)

$$\Delta(A^T) = \sum_{\tau \in \Sigma_n} \text{sgn}(\tau) a_{\tau(1)1} a_{\tau(2)2} \dots a_{\tau(n)n};$$

однако по (3.6) это совпадает с  $\Delta(A)$ .

Рассмотрим теперь матрицу 3-го порядка

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}.$$

Подсчитаем ее определитель (см. (3.4)):

$$\Delta(A) = abf + bcd + cae - baf - cbd - ace = 0.$$

Мы видим, что определитель матрицы 3-го порядка с двумя одинаковыми строками равен нулю. Но это справедливо на самом деле для любых матриц.

**Теорема 3.2.** *Если в матрице  $A = [a_{ij}]$  порядка  $n$  две вектор-строки или два вектора-столбца одинаковы, то  $\Delta(A) = 0$ .*

**Доказательство.** Пусть в  $A$  совпадают строки с номерами  $i$  и  $k$ , т. е. вектор-строка  $a_i = [a_{i1} a_{i2} \dots a_{in}]$  и вектор-строка  $a_k = [a_{k1} a_{k2} \dots a_{kn}]$  имеют на одинаковых местах равные компоненты  $a_{ij} = a_{kj}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ). Возьмем какое-нибудь произведение  $a = a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$ , где  $\sigma$  — некоторая подстановка степени  $n$ . Пусть  $\sigma(i) = j$ ,  $\sigma(k) = l$ . Запишем  $\sigma$  в виде (2.1):

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & k & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & j & \dots & l & \dots & i_n \end{pmatrix},$$

т. е.  $a = a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ij} \dots a_{kl} \dots a_{ni_n}$ .

Пусть теперь

$$\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & k & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & l & \dots & j & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

есть другая подстановка, отличающаяся от  $\sigma$  только в двух местах. Числа  $a$  и  $a' = a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{il} \dots a_{kj} \dots a_{ni_n}$  равны, так как  $a_{ij} = a_{kj}$  и  $a_{il} = a_{kl}$ . Но по теореме 2.1  $\sigma$  и  $\sigma'$  имеют разную четность; следовательно,  $\text{sgn}(\sigma) = -\text{sgn}(\sigma')$ , поэтому в  $\Delta(A)$  будут слагаемые  $\text{sgn}(\sigma)a$  и  $\text{sgn}(\sigma')a'$ , которые взаимно уничтожатся. Итак, для каждого слагаемого в  $\Delta(A)$  найдется другое, с которым оно взаимно уничтожится, т. е.  $\Delta(A) = 0$ . Соответствующее утверждение для столбцов доказывается совершенно так же.

Мы отмечали, что матрицу  $A = [a_{ij}]$  порядка  $n$  можно записать с помощью, например, вектор-столбцов:  $A = [a_1 a_2 \dots a_n]$ , где  $a_j = [a_{1j} a_{2j} \dots a_{nj}]^T$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) — вектор-столбцы  $A$ . Непосредственно из (3.2) и (3.6) получаются следующие свойства определителей.

**Теорема 3.3.** а) *Пусть какой-либо вектор-столбец  $a_j$  матрицы  $A = [a_{ij}]$  представляется в виде суммы двух*

векторов:  $a_j = a'_j + a''_j$ . Тогда  $\Delta(A) = \Delta(A') + \Delta(A'')$ , где

$$A' = [a_1 \dots a_{j-1} a'_j a_{j+1} \dots a_n],$$

$$A'' = [a_1 \dots a_{j-1} a''_j a_{j+1} \dots a_n].$$

б) Если умножить все элементы какого-либо столбца  $A$  на одно и то же число  $r$ , то и  $\Delta(A)$  умножится на  $r$ .

Аналогичные утверждения справедливы для строк.

Следствия. 1. Если к какой-либо строке матрицы прибавить другую ее строку, умноженную на некоторое число  $r$ , то определитель при этом не изменится.

Аналогичное утверждение справедливо для столбцов.

2. Если две строки или два столбца матрицы поменять местами, то ее определитель изменит знак.

Проиллюстрируем следствие 2 на примере матриц порядка 2 (в общем случае действуем точно так же).

Пусть  $A = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  — запись матрицы порядка 2 с помощью вектор-строк. Тогда по теореме 3.3 и следствию 1

$$\Delta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \Delta \begin{bmatrix} a+b \\ b \end{bmatrix} = \Delta \begin{bmatrix} a+b \\ -a \end{bmatrix} = \Delta \begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix} = -\Delta \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}.$$

**Приведение матрицы к треугольному виду. Определитель произведения матриц.** Назовем квадратную матрицу *треугольной*, если все элементы ниже диагонали — нули. Таковы, например, матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Из (3.2) ясно, что определитель треугольной матрицы равен произведению ее элементов на главной диагонали, так как из  $n!$  произведений вида  $a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$  отлнчно от нуля лишь произведение  $a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$ , соответствующее четной подстановке (1) (2) ... (n).

Легко проверить непосредственно по определению матричного умножения, что произведение двух треугольных матриц — треугольная матрица. Также очевидно, что если  $A, A'$  — треугольные матрицы порядка  $n$ , то  $\Delta(AA') = \Delta(A)\Delta(A')$ .

Треугольные матрицы интересны тем, что любая матрица преобразованиями строк или столбцов, не изменяющими абсолютную величину определителя, может быть превращена в треугольную. Процесс приведения мы по-

кажем на примере матриц порядка 3 — это даст представление также о том, как поступают в общем случае.

Если дана матрица порядка 3 и в ее первом столбце есть элемент, отличный от нуля, то прежде всего переставим строки матрицы так, чтобы этот элемент оказался на месте (1, 1). В результате приходим к матрице

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

где  $a_{11} \neq 0$ . Далее умножим первую строку на число  $a_{21}/a_{11}$  и вычтем из второй строки; затем умножим первую строку на  $a_{31}/a_{11}$  и также вычтем из третьей. Приходим к матрице

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}} & a_{23} - \frac{a_{13}a_{21}}{a_{11}} \\ 0 & a_{32} - \frac{a_{12}a_{31}}{a_{11}} & a_{33} - \frac{a_{13}a_{31}}{a_{11}} \end{bmatrix}.$$

Матрица  $A'$  уже «почти» треугольная. Процесс приведения завершается следующим образом. Если  $a = a_{22} - a_{12}a_{21}/a_{11} = 0$ , то переставляем вторую и третью строки  $A'$  и получаем треугольную матрицу. В противном случае вычтем из третьей строки  $A'$  вторую, умноженную на число  $(a_{32} - a_{12}a_{31}/a_{11})/a$ . Получаем 0 на месте (3, 2), и процесс завершен. Если в исходной матрице первый столбец состоял из нулей, то все сказанное следовало проделать начиная со второго столбца.

Понятно, что к треугольной матрице можно было прийти, преобразуя аналогичным способом вместо строк столбцы исходной матрицы. Итак, мы можем произвольную матрицу преобразовать в треугольную, используя лишь две операции: а) перестановку строк; б) сложение одной строки с другой, умноженной на какое-либо число. Можно пользоваться теми же операциями для столбцов.

Опишем теперь эти операции с помощью умножения матриц. В § 2 мы отмечали, что любая перестановка строк матрицы согласно некоторой подстановке  $P$  равносильна умножению соответствующей подстановочной матрицы  $P^T$  на  $A$ . А как обстоит дело с операцией б)?

Рассмотрим матрицу порядка  $n$

$$Q = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ \hline & & 1 & & r & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & & 1 & \\ \hline & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{array} \right], \quad (3.7)$$

в которой на месте  $(i, k)$  стоит число  $r$ , на главной диагонали стоят единицы, а на остальных местах — нули. Если  $Q$  умножить на любую матрицу порядка  $n$ , то к  $i$ -й строке матрицы прибавится  $k$ -я, умноженная на  $r$ .

Проверим это для матриц порядка 3. Пусть, например, из третьей строки матрицы  $A = [a_{ij}]$  порядка 3 нужно вычистить первую строку. Тогда нужно воспользоваться матрицей

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} QA &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -a_{11} + a_{31} & -a_{12} + a_{32} & -a_{13} + a_{33} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Если же к  $j$ -му столбцу  $A$  нужно прибавить  $l$ -й, умноженный на число  $r$ , то это равносильно умножению  $A$  на матрицу

$$Q = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & 0 \\ \hline & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ \hline & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{array} \right],$$

устроенную так же, как (3.7), с числом  $r$  на месте  $(l, j)$ .

Пусть, например, мы прибавляем к первому столбцу матрицы  $A = [a_{ij}]$  порядка 3 второй столбец, умноженный на 3. Это равносильно тому, что  $A$  умножается на

матрицу  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Проверяем это:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + 3a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + 3a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + 3a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Как мы видели (следствие 1 теоремы 3.3), определитель не изменится, если произвести с матрицей операцию б). Отсюда следует, что для любой квадратной матрицы  $A$  справедливо  $\Delta(QA) = \Delta(A) = \Delta(AQ')$ , где  $Q, Q'$  — матрицы вида (3.7) и того же порядка, что и  $A$ . Любая перестановка строк матрицы  $A$  равносильна умножению на  $A$  некоторой подстановочной матрицы  $P$ , а перестановка столбцов — взятию произведения вида  $AP'$  с подстановочной матрицей  $P'$ . Каждую перестановку строк можно представить себе как серию последовательных перестановок двух строк. Если  $R$  — соответствующая подстановочная матрица, то по следствию 2 теоремы 3.3  $\Delta(RA) = -\Delta(A)$ . Отсюда следует, что при произвольной матрице подстановки  $P$  имеем  $\Delta(PA) = \pm\Delta(A)$ . Точно так же  $\Delta(AP') = \pm\Delta(A)$ .

Если теперь  $A_{\text{тр}}$  — треугольная матрица порядка  $n$ , полученная из  $A$  описанными преобразованиями строк, то

$$A_{\text{тр}} = R_1 R_2 \dots R_s A,$$

где  $R_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) — матрицы вида (3.7) или матрицы подстановки. Если теперь задана матрица  $B$  того же порядка, что и  $A$ , то ее можно привести к треугольному виду, например, преобразованиями столбцов. Тогда

$$B_{\text{тр}} = B R'_1 R'_2 \dots R'_t,$$

где  $R_i$  — матрицы того же типа, что и  $R_i$ .

Для любой матрицы  $X$  порядка  $n$  справедливо

$$\Delta(R_1 R_2 \dots R_s X) = \varepsilon \Delta(X), \quad \Delta(X R'_1 R'_2 \dots R'_t) = \varepsilon' \Delta(X),$$

где  $\varepsilon, \varepsilon' = \pm 1$  и не зависят от  $X$ .

Образуем теперь матрицу  $AB$  и посмотрим, как ее определитель зависит от определителей сомножителей. Мы видели, что

$$\Delta(A_{\text{тр}}) \Delta(B_{\text{тр}}) = \Delta(A_{\text{тр}} B_{\text{тр}}). \quad (3.8)$$

Обозначим  $R = R_1 R_2 \dots R_s$ ,  $R' = R'_1 R'_2 \dots R'_t$ . Как мы



показали,

$$\Delta(A_{\text{тр}}) = \Delta(RA) = \varepsilon \Delta(A), \quad \Delta(B_{\text{тр}}) = \Delta(BR') = \varepsilon' \Delta(B).$$

Пользуясь ассоциативностью матричного умножения (теорема 1.1), можно записать

$$\begin{aligned} \Delta(A_{\text{тр}}B_{\text{тр}}) &= \Delta(RABR') = \Delta((RAB)R') = \\ &= \varepsilon' \Delta(RAB) = \varepsilon' \Delta(R(AB)) = \varepsilon \varepsilon' \Delta(AB). \end{aligned}$$

Но по (3.8) это равно  $\varepsilon \Delta(A) \varepsilon' \Delta(B)$ . Отсюда следует, что

$$\Delta(AB) = \Delta(A) \Delta(B).$$

Нами доказана

**Теорема 3.4.** *Определитель произведения двух матриц порядка  $n$  равен произведению определителей сомножителей.*

**Критерий существования обратной матрицы.** Теорема 3.4 помогает решить вопрос о существовании *обратной* для заданной матрицы  $A$  порядка  $n$ , т. е. такой матрицы  $B$ , что  $AB = BA = I_n$ . Отметим, что если существует такая  $B$ , что  $AB = I_n$  (*правая обратная*), и такая  $B'$ , что  $B'A = I_n$  (*левая обратная*), то  $B = B'$ . Действительно, из  $AB = I_n$  следует, что  $B'AB = B'$  (так как  $B'I_n = B'$ ). Тогда  $(B'A)V = I_n B = B$ , т. е.  $B' = B$  (использовали ассоциативность матричного умножения). Далее, обратная матрица единственна: из  $AB = BA = I_n$  и  $AB' = I_n$  следует, что  $B' = (BA)B' = B(AB') = B$ , т. е.  $B' = B$ .

Теорема 3.4 показывает, что необходимым условием существования обратной матрицы для  $A$  является  $\Delta(A) \neq 0$ . Действительно, легко видеть, что  $\Delta(I_n) = 1$  при любом  $n$ , поэтому из  $AB = I_n$  следует, что  $\Delta(A) \Delta(B) = \Delta(I_n) = 1$ , т. е.  $\Delta(A)$  не может быть равен нулю.

Мы покажем, что верно также обратное утверждение: если определитель матрицы отличен от нуля, то у матрицы есть обратная. Затем будет указан способ построения обратной матрицы.

*Минором* матрицы называется определитель любой ее квадратной подматрицы. *Порядок* минора определяется как порядок этой подматрицы. Особую роль в матрице порядка  $n$  играют миноры порядка  $n - 1$ . Они получаются путем вычеркивания из матрицы какой-либо строки и какого-либо столбца. Так как эти строки и столбец однозначно определяют элемент матрицы, стоящий на их пересечении, то такой минор называется *минором этого элемента*. Если, например, мы говорим о миноре элемента  $a_{ij}$  матрицы  $A = [a_{ij}]$  порядка  $n$ , то мы имеем в виду

определитель матрицы порядка  $n - 1$ , получающейся в результате вычеркивания  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца.

Рассмотрим миноры всех элементов какой-либо строки, скажем  $i$ , в матрице  $A$ . Обозначим минор элемента  $a_{ij}$  через  $M_{ij}$ . Несложными (хотя и несколько громоздкими) выкладками, исходя из определения (см. (3.3)), можно показать, что справедливо соотношение

$$\sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \Delta(A), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.9)$$

Проверим это для определителей порядка 2. Пусть  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ . Тогда  $M_{11} = a_{22}$ ,  $M_{12} = a_{21}$ , и, действительно, по (3.3а)  $\Delta(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ , что дает (3.9) при  $i = 1$ .

Формула (3.9) называется *разложением определителя по  $i$ -й строке*. Справедлива аналогичная формула *разложения определителя по  $j$ -му столбцу*:

$$\Delta(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.10)$$

Рассмотрим суммы, устроенные аналогично (3.9) и (3.10):

$$\sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{kj} M_{ij}, \quad (3.11)$$

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{il} M_{ij} \quad (3.12)$$

при  $k \neq i$ ,  $l \neq j$ . Оказывается, что они равны нулю. Действительно, наряду с  $A$  рассмотрим матрицу  $A' = [a'_{ij}]$ , полученную из  $A$  заменой  $i$ -й строки на  $k$ -ю (остальные элементы оставляет без изменения), т. е.  $a'_{ij} = a_{kj}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ).

С одной стороны, так как  $A'$  имеет две одинаковые строки, то  $\Delta(A') = 0$ . С другой стороны, разложим определитель  $A'$  по  $i$ -й строке:

$$\Delta(A') = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a'_{ij} M'_{ij}.$$

Очевидно, что в матрицу порядка  $n - 1$ , определителем которой является  $M'_{ij}$ , элементы  $i$ -й строки войти не

могут, поэтому  $M'_{ij} = M_{ij}$ , следовательно,

$$\Delta(A') = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{kj} M_{ij} = 0.$$

Точно так же доказывается равенство нулю суммы (3.12).

Матрицу с определителем, отличным от нуля, назовем *невырожденной*. Теперь можно указать способ вычисления обратной для невырожденной матрицы.

Для матрицы  $A = [a_{ij}]$  порядка  $n$  с не равным нулю определителем рассмотрим матрицу  $B = [b_{jk}]$  порядка  $n$  с элементами

$$b_{jk} = (-1)^{j+k} M_{kj} / \Delta(A), \quad (3.13)$$

т. е. в  $B$  на месте  $(j, k)$  стоит минор элемента матрицы  $A$ , расположенного симметрично элементу  $a_{jk}$  относительно главной диагонали, поделенный на определитель и взятый со знаком  $(-1)^{j+k}$ . Умножим теперь  $A$  на  $B$ , получим матрицу  $C = [c_{ik}]$  порядка  $n$ . Тогда

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} = \frac{1}{\Delta(A)} \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} a_{ij} M_{kj}. \quad (3.14)$$

Если  $i = k$ , то сумма в (3.14) превращается в (3.9), т. е. формулу разложения  $\Delta(A)$  по  $i$ -й строке. Если же  $i \neq k$ , то сумма равна нулю (см. (3.11)). Таким образом,

$$c_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases}$$

т. е.  $C = I_n$ . Точно так же, используя (3.10) и равенство нулю суммы (3.12), можно доказать, что  $BA = I_n$ .

Итак, справедлива

**Теорема 3.5.** *Матрица  $A = [a_{ij}]$  порядка  $n$  имеет обратную в том и только том случае, когда ее определитель отличен от нуля. В этом случае элементы обратной матрицы вычисляются по формуле (3.13).*

Обратная матрица для  $A$  обозначается через  $A^{-1}$ . Как мы убедились в начале этого пункта,  $A^{-1}$  — единственная матрица, которая удовлетворяет соотношениям  $AX = XA = I_n$ .

Найдем обратную для невырожденной матрицы порядка 2. Пусть  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ . Тогда  $\Delta(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

(см. (3.3а)). По формуле (3.13)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{22}/\Delta(A) & -a_{12}/\Delta(A) \\ -a_{21}/\Delta(A) & a_{11}/\Delta(A) \end{bmatrix}.$$

**Перманенты.** Если для матрицы  $A = [a_{ij}]$  порядка  $n$  вместо суммы (3.3) рассмотреть сумму  $\sum_{\sigma \in \Sigma_n} a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$ ,

то приходим к другой интересной матричной функции вида (3.2), на этот раз с  $f(\sigma) \equiv 1$ , перманенту матрицы. Но, в отличие от определителя, перманент можно определить не только для квадратной, но и для прямоугольной матрицы.

Пусть  $m, n$  — натуральные числа,  $m \leq n$ . Назовем *упорядоченной  $m$ -выборкой без повторения* из элементов множества  $Z_n = \{1, 2, \dots, n\}$  упорядоченный набор  $(j_1, j_2, \dots, j_m)$ , где  $j_1, j_2, \dots, j_m \in Z_n$  и попарно различны. Если  $m = n$ , то упорядоченная  $m$ -выборка будет перестановкой. Тем же термином «упорядоченная  $m$ -выборка без повторения» будем обозначать соответствующее отображение  $\sigma: i \rightarrow j_i$  множества  $Z_m$  во множество  $Z_n$ .

*Перманентом* матрицы  $A = [a_{ij}]$  размера  $m \times n$ , где  $m \leq n$ , называется число

$$\text{per}(A) = \sum_{\sigma} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{m\sigma(m)}, \quad (3.15)$$

где суммирование распространяется по всем упорядоченным  $m$ -выборкам без повторения  $\sigma$  из элементов  $Z_n$ . Если  $A$  — квадратная матрица, т. е.  $m = n$ , то суммирование в (3.15) распространяется, очевидно, по всем подстановкам из множества  $\Sigma_n$ . Скобки в обозначении  $\text{per}(A)$  мы, как правило, будем опускать.

Возьмем, например, матрицу  $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ . Ее перманент равен  $\text{per} A = 0 + (-2) + (-1) + 0 + (-2) + 1 = -4$ .

Далее, легко видеть, что

$$\text{per} I_n = 1 \quad (3.16)$$

для любого  $n$ .

Подсчитаем перманенты матриц  $J_n$  и  $J_{mn}$  ( $m \leq n$ ) (см. § 1). Ясно, что произведение вида  $a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$  у матрицы  $J_n$  при любой  $\sigma \in \Sigma_n$  равно 1, а всего таких произведений  $n!$ , поэтому

$$\text{per} J_n = n! \quad (3.17)$$

для любого  $n$ . Нетрудно показать, что

$$\text{per } J_{mn} = n(n-1)\dots(n-m+1). \quad (3.18)$$

Действительно, найдем число упорядоченных  $m$ -выборок без повторения из  $Z_n$ . Возьмем какое-либо отображение  $\sigma: Z_m \rightarrow Z_n$ . Будем строить его последовательно. Ясно, что  $\sigma(1)$  может принимать любое из  $n$  значений. Пусть  $\sigma(1)$  известно. Тогда для  $\sigma(2)$  имеется  $n-1$  возможностей, для  $\sigma(3)$  имеется  $n-2$  возможностей, ..., для  $\sigma(m)$  имеется  $n-m+1$  возможностей. Приходим тем самым к (3.18).

Перманенты рассматриваются в математике давно — с начала XIX в., однако интенсивно они стали изучаться лишь со второй половины XX в., так как применяются главным образом в дискретной математике, которая испытала большой подъем именно в это время. О комбинаторных математических задачах в связи с перманентами речь будет идти в гл. 3. Здесь же мы отметим лишь некоторые их общие свойства.

При сравнении (3.15) и (3.3) видно большое сходство между определениями перманента и определителя матрицы. И в самом деле, некоторые (но далеко не все) свойства у этих функций — общие. Совершенно тем же путем, каким мы пришли к соотношению (3.6), можно показать, что перманент квадратной матрицы  $A = [a_{ij}]$  может быть определен формулой

$$\text{per } A = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}. \quad (3.19)$$

Отсюда следует

**Теорема 3.1'.** Пусть  $A = [a_{ij}]$  — матрица порядка  $n$ . Для транспонированной матрицы  $A^T$  справедливо равенство  $\text{per } A^T = \text{per } A$ .

Но теорема 3.2, конечно, для перманента не справедлива. Мы видели, что  $\text{per } J_n = n!$  (см. (3.17)), хотя любая матрица  $J_n$  имеет одинаковые строки. Напротив, линейность по строкам, утверждаемая для определителей теоремой 3.3, имеет место и для перманентов.

**Теорема 3.3'.** а) Пусть какая-либо вектор-строка  $a_i$  матрицы  $A = [a_{ij}] = [a_1 a_2 \dots a_m]^T$  размера  $m \times n$ , где  $m \leq n$ , представляется в виде суммы двух векторов, скажем  $a_i = a'_i + a''_i$ . Тогда  $\text{per } A = \text{per } A' + \text{per } A''$ , где

$$A' = [a_1 \dots a_{i-1} a'_i a_{i+1} \dots a_m]^T,$$

$$A'' = [a_1 \dots a_{i-1} a''_i a_{i+1} \dots a_m]^T.$$

б) Если умножить все элементы какой-либо строки  $A$  на одно и то же число  $r$ , то и ее перманент умножится на  $r$ .

Если  $A$  — квадратная матрица, то аналогичные утверждения справедливы также для столбцов.

Доказательство совершенно аналогично доказательству теоремы 3.3.

Так как для перманентов неверна теорема 3.2, то несправедливо также следствие 1 теоремы 3.3. Аналогом следствия 2 теоремы 3.3 является следующее утверждение, справедливость которого вытекает непосредственно из определения (см. (3.15)).

При любой перестановке строк или столбцов произвольной матрицы  $A$  размера  $m \times n$ , где  $m \leq n$ , перманент не изменяется.

Для подсчета перманентов не существует никакого естественного процесса упрощения матрицы, подобного приведению матрицы к треугольному виду для подсчета определителя.

Отметим, наконец, что перманент произведения матриц не равен, вообще говоря, произведению перманентов сомножителей. Например, возьмем матрицы порядка 2:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Имеем}$$

$$C = AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{per } C = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3.$$

Однако  $\text{per } A = \text{per } B = 1$ , и мы видим, что  $\text{per } C \neq \text{per } A \cdot \text{per } B$ .

### § 4. Основные типы комбинаторных задач. Матрицы инцидентности

Попробуем кратко определить, чем занимается комбинаторная математика. Предмет комбинаторики — свойства систем подмножеств конечного множества произвольной природы, подчиненных различным условиям, главным образом изучение количества таких систем или подмножеств в них и взаимного расположения этих подмножеств. Иными словами, основной вопрос комбинаторики — какие конфигурации, удовлетворяющие тем или иным условиям, можно составить из элементов заданного множества и сколько их существует. Под *конфигурацией* будем понимать любую систему подмножеств конечного множества. Множество, состоящее из  $n$ -элементов, будем называть  *$n$ -элементным* или просто  *$n$ -множеством*. Часть множества, состоящую из элементов, называем  *$k$ -подмножеством*. Рассмотрим несколько типичных комбинаторных задач.

1. Возьмем такую классическую комбинаторную задачу, как нахождение числа сочетаний без повторения из  $n$  элементов по  $k$ , где  $k \leq n$ . В ней нас интересует, сколько различных наборов, содержащих в точности по  $k$  предметов, можно составить из заданных  $n$  различных предметов. Иначе говоря, из скольких различных  $k$ -подмножеств может состоять конфигурация, содержащая все  $k$ -подмножества  $n$ -множества. Это число равно

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\dots k}; \quad (4.1)$$

оно называется *числом сочетаний из  $n$  по  $k$*  и обозначается  $\binom{n}{k}$  или  $C_n^k$ . Число сочетаний из  $n$  по  $k$  определяется также для  $k = 0$ : полагаем  $\binom{n}{0} = 1$  при любом  $n$ . Если,

например,  $n = 7$ ,  $k = 3$ , то

$$\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35;$$

и если эти 7 элементов — числа, скажем  $1, 2, \dots, 7$ , то каждый без труда выпишет все 35 троек.

Несколько отличается от этой задачи другая — о размещении без повторения  $n$  элементов по  $k$  (в § 3 мы называли такие размещения *упорядоченными  $k$ -выборками без повторения*): здесь добавляется требование точно указать место элемента. Например, размещения (3-выборки)  $(1, 2, 3)$  и  $(1, 3, 2)$  считаются различными, хотя они приводят к одному и тому же сочетанию  $\{1, 2, 3\}$ . Как мы отмечали в § 3 (см. (3.18)), число таких размещений равно  $n(n-1) \dots (n-k+1)$ .

2. Рассмотрим теперь ту же семерку чисел  $1, 2, \dots, 7$  и поставим другое условие: найти такую конфигурацию на этом множестве чисел, состоящую из 3-подмножеств, чтобы каждая пара различных чисел встретила лишь в одной из этих троек. Это условие выполнить труднее. Очевидно, что читателю не сразу удастся отыскать такую конфигурацию, как, например:

$$\begin{aligned} \{1, 3, 7\}, \quad \{1, 2, 4\}, \quad \{2, 3, 5\}, \quad \{3, 4, 6\}, \\ \{4, 5, 7\}, \quad \{1, 5, 6\}, \quad \{2, 6, 7\}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Впрочем, главное затруднение в этой и подобных задачах состоит в том, что вообще нет уверенности, что такая конфигурация существует. Можно убедиться, что системы троек с таким условием на пары элементов для множеств, состоящих, например, из 5 или 6 элементов, не существует.

3. Введем условие еще одного типа. Пусть на  $n$ -множестве  $S$  задана некоторая система  $\mathcal{S}$   $k$ -подмножеств, имеющая то свойство, что каждый из  $n$  элементов  $S$  обязательно встретится в одном из подмножеств системы. Поставим задачу: найти минимальную подсистему  $\mathcal{S}'$  системы  $\mathcal{S}$  с тем же свойством, содержащую наименьшее число подмножеств (под минимальной мы понимаем такую подсистему, что при удалении из нее хотя бы одного подмножества интересующее нас свойство нарушается). Сколько подмножеств может содержать такая минимальная подсистема?

Для системы из семи подмножеств множества из семи элементов, представленной в (4.2), без труда находим та-



кие подмножества:  $\{1, 2, 4\}$ ,  $\{1, 3, 7\}$ ,  $\{1, 5, 6\}$ . Очевидно, что любая минимальная подсистема должна содержать в точности три подмножества. Действительно, меньше чем три быть не может, так как два 3-подмножества содержат не более шести элементов. С другой стороны, любая система из семи 3-подмножеств на множестве с тем же условием на пары элементов, что и (4.2), имеет минимальную подсистему из трех подмножеств. В самом деле, возьмем пары элементов  $\{1, 2\}$  и  $\{3, 4\}$ . Каждая из них встретится по условию лишь в одном 3-подмножестве, которые обозначим  $B_1 = \{1, 2, a\}$  и  $B_2 = \{3, 4, b\}$ . Если при этом  $a = b$ , то берем пару элементов  $\{c, d\}$ , не входящих в  $B_1, B_2$ , и тройку  $B_3$ , где они встречаются вместе. Если же  $a \neq b$ , то берем любую тройку  $B_3$ , в которую входит элемент, не встретившийся в  $B_1, B_2$ . В обоих случаях  $B_1, B_2, B_3$  образуют минимальную подсистему.

Пусть, в отличие от рассмотренного примера, система  $\mathcal{S}$  из семи подмножеств 7-множества состоит из

$$\begin{aligned} &\{1, 2, 3\}, \quad \{1, 2, 4\}, \quad \{1, 3, 5\}, \quad \{1, 2, 6\}, \\ &\{1, 3, 6\}, \quad \{1, 3, 7\}, \quad \{2, 3, 5\}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Легко убедиться в том, что любая минимальная подсистема для системы (4.3) состоит из четырех подмножеств.

Приведенные нами примеры иллюстрируют три основных типа комбинаторных задач.

I. Существование интересующих нас конфигураций не вызывает сомнения, не ясен лишь вопрос об их количестве. Такие задачи называются *перечислительными*. Примерами таких задач являются задачи о сочетаниях и размещениях.

II. Существование конфигураций, удовлетворяющих поставленным условиям, находится под вопросом. Требуется их построить. Такие задачи называются задачами *существования и построения*. К таким задачам принадлежит задача п. 2.

III. При заведомо существующих конфигурациях ищутся связанные с ними конфигурации, подчиненные дополнительным требованиям. Такие задачи называются задачами *о выборе*. Они занимают как бы промежуточное положение между задачами типов I и II. Требования, о которых мы говорим, часто представляют собой условия типа максимума или минимума; в этом случае задачи типа III называются *экстремальными комбинаторными*.

Пример — задача о числе подмножеств в минимальной подсистеме, рассмотренная в п. 3.

Многие комбинаторные задачи связаны с изучением  $(0, 1)$ -матриц. Особенно это относится к задачам типов II и III. Наиболее естественно эта связь осуществляется с помощью матриц инцидентности комбинаторных конфигураций.

**Матрицы инцидентности.** Пусть на множестве  $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  задана конфигурация  $\mathcal{S}$ , состоящая из подмножеств  $S_1, S_2, \dots, S_m$ . Условимся говорить, что элемент  $a_j$  и подмножество  $S_i$  *инцидентны*, если  $a_j \in S_i$  ( $1 \leq j \leq n$ ,  $1 \leq i \leq m$ ). Этот факт обозначается  $a_j \mathcal{I} S_i$  или  $S_i \mathcal{I} a_j$ .

Для конфигурации  $\mathcal{S}$  определим  $(0, 1)$ -матрицу  $A = [\alpha_{ij}]$  размера  $m \times n$ :

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } a_j \mathcal{I} S_i, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (4.4)$$

Матрица  $A = [\alpha_{ij}]$  называется *матрицей инцидентности* конфигурации  $\mathcal{S}$  на  $S$ . Матрицы инцидентности служат основным связующим звеном между комбинаторными задачами о существовании и о выборе, с одной стороны, и теорией матриц, с другой.

Вновь обратимся к рассмотренным ранее примерам. Найдем матрицу инцидентности для конфигурации из (4.2). Она имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Посмотрим, как требования, которым отвечает конфигурация, отражаются в строении ее матрицы инцидентности.

Число столбцов матрицы инцидентности равно числу элементов множества  $S$ , а число строк — числу подмножеств в  $\mathcal{S}$ . В каждой строке  $A$  ровно три единицы — это соответствует равномоности подмножеств, входящих в конфигурацию, в данном случае, состоящих из трех элементов. Основным свойством  $\mathcal{S}$  было то, что каждая пара различных элементов  $S$  принадлежит одному и только

одному подмножеству из  $\mathcal{S}$ . Это означает, что в  $A$  мы не найдем никакой подматрицы вида  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ , зато для каждой пары столбцов найдется (в точности одна) строка, содержащая единицы в этих столбцах. Другими словами, скалярное произведение (см. (1.5)) любых двух различных вектор-столбцов в  $A$  равно 1. Отметим кстати, что в любой  $(0, 1)$ -матрице скалярное произведение вектор-строки (вектор-столбца) на себя равно числу единиц в этой строке (столбце).

Исследуя далее матрицу  $A$ , мы видим, что в ней не только число единиц в каждой строке, но также число единиц в каждом столбце равно трем. Это, как видно, означает, что любой элемент  $S$  встречается в точности 3 раза в подмножествах конфигурации. Дальнейшее рассмотрение матрицы  $A$  убеждает нас в том, что скалярное произведение любой пары различных ее вектор-строк также равно 1. Другими словами, каждая пара различных подмножеств из  $\mathcal{S}$  содержит в точности один элемент. Мы покажем в дальнейшем, что эти явления совсем не случайны. Напротив, подобные свойства присущи матрицам инцидентности каждой конфигурации того типа, что рассмотрен в примере 2.

Выпишем теперь матрицу инцидентности для конфигурации (4.3):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Пользуясь  $A$ , можно наглядно представить поиск системы  $\mathcal{S}'$  для конфигурации  $\mathcal{S}$  из п. 3. Очевидно, нужно найти такую совокупность строк в  $A$ , чтобы в каждом столбце образованной этими строками подматрицы имелась бы единица, но чтобы удаление любой строки из этой совокупности нарушало это свойство. Ясно, что непременно нужно взять 2-ю и 6-ю строки, так как лишь они содержат 1 соответственно в 4-м и 7-м столбцах. Понятно, далее, что к ним необходимо добавить по одной строке из пар строк соответственно с номерами  $\{3, 7\}$  и  $\{4, 5\}$ . Таким образом, из рассмотрения  $A$  видно, как

нужно строить конфигурацию  $\mathcal{S}'$ : надо взять 4 подмножества, соответствующие этим строкам.

**Глубина и ширина  $(0, 1)$ -матрицы.** *Глубиной*  $(0, 1)$ -матрицы  $A$  размера  $m \times n$  называется такое минимальное число ее строк, что сумма элементов в каждом столбце образованной ими подматрицы положительна. Глубина матрицы  $A$  обозначается  $\varepsilon(A)$ . В предыдущем пункте мы фактически показали, что  $\varepsilon(A) = 3$  для матрицы (4.5) и  $\varepsilon(A) = 4$  для матрицы (4.6).

Глубина матрицы связана с одной из наиболее важных экстремальных комбинаторных задач — *задачей о покрытии* (о ней будет идти речь в гл. 5). Аналогично, *ширина*  $(0, 1)$ -матрицы определяется как такое минимальное число ее столбцов, что сумма элементов в каждой строке образованной ими подматрицы положительна. Ширина  $(0, 1)$ -матрицы  $A$  совпадает с глубиной транспонированной матрицы  $A^T$ . Ширина связана с известной задачей о *минимальной системе представителей*, родственной задаче о покрытии.

Из определения следует, что ни глубина, ни ширина  $(0, 1)$ -матрицы не зависят от произвольных перестановок строк и столбцов матрицы. Отметим также, что при определении матрицы инцидентности конфигурации  $\mathcal{S}$  на  $S$  мы фактически не придавали значения тому, в каком порядке берутся элементы множества  $S$  или подмножества в конфигурации  $\mathcal{S}$ . Таким образом, одной и той же конфигурации  $\mathcal{S}$  соответствует не одна, а целое семейство матриц инцидентности, которые получаются из какой-либо одной в результате перестановок строк (что соответствует взятию в другом порядке подмножеств конфигурации) и столбцов (что соответствует перенумерации элементов  $S$ ).

Однако (как показывают задачи из пп. 2, 3) особенность большинства комбинаторных задач такова, что интересующие нас свойства и характеристики конфигураций не зависят от перенумераций элементов и подмножеств, и, следовательно, отражающие их свойства матриц инцидентности не зависят от перестановок строк и столбцов. Таково, скажем, свойство постоянства скалярных произведений столбцов (в задаче из п. 2) или глубина  $(0, 1)$ -матрицы (в задаче из п. 3). Таким образом, при решении подобных задач среди всех матриц инцидентности комбинаторной конфигурации можно брать ту, которая нам более удобна по тем или иным соображениям. Перейдем теперь к рассмотрению конфигураций, наиболее часто встречающихся в комбинаторных задачах.

## § 5. Блок-схемы

Блок-схема представляет собой одну из наиболее интересных комбинаторных конфигураций — это не только чисто математический объект, но и средство для решения ряда практических задач. Рассмотрим вначале пример. Пусть нам необходимо сравнить урожайность  $v$  сортов какой-либо сельскохозяйственной культуры, скажем пшеницы, и у нас в распоряжении имеется  $b$  опытных полей. Поскольку урожайность зависит не только от сорта, но и от разницы в условиях развития растения (в первую очередь от плодородия почвы), то эксперимент по проверке урожайности будет правильно поставлен, если удастся устранить влияние этих различий. Поэтому с точки зрения математической теории обработки наблюдений желательно соблюдение следующих условий: а) на каждом поле выделяется одинаковое число  $k$  участков, в которые высевается какой-либо один сорт пшеницы; б) каждый сорт высевается на одинаковом числе  $r$  опытных полей; в) каждая пара различных сортов встречается вместе на одном и том же числе  $\lambda$  опытных полей. Сразу встает вопрос: а возможно ли соблюдение всех этих условий? Как мы увидим дальше, это не всегда возможно.

Но пока рассмотрим пример, показывающий, что такой эксперимент при некоторых условиях осуществим. Пусть нам нужно испытать 6 сортов пшеницы и у нас имеется 10 опытных полей. Обозначим эти сорта через  $v_1, v_2, \dots, v_6$ , а поля через  $b_1, b_2, \dots, b_{10}$ . Разделим теперь каждое поле на 3 участка и засеем поля по следующей схеме:

$$\begin{aligned} b_1 &= \{v_1, v_2, v_3\}, & b_5 &= \{v_1, v_5, v_6\}, & b_8 &= \{v_2, v_4, v_6\}, \\ b_2 &= \{v_1, v_2, v_5\}, & b_6 &= \{v_2, v_3, v_6\}, & b_9 &= \{v_3, v_4, v_5\}, \\ b_3 &= \{v_1, v_3, v_4\}, & b_7 &= \{v_2, v_4, v_5\}, & b_{10} &= \{v_3, v_5, v_6\} \\ b_4 &= \{v_1, v_4, v_6\}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

(в скобках — сорта, посеянные на участках соответствующего поля). Можно проверить, что все условия соблюдены. Действительно: а) каждое поле разделено на 3 участка; б) каждый сорт посеян на 5 полях (например,  $v_3$  на полях  $b_1, b_3, b_6, b_9, b_{10}$ ;  $v_5$  на полях  $b_2, b_5, b_7, b_9, b_{10}$  и т. д.); в) каждые два различных сорта посажены вместе на каких-либо двух полях (например,  $v_1, v_6$  на полях  $b_4, b_5$ ;  $v_3, v_4$  на полях  $b_3, b_9$  и т. д.).

Схема (5.1) называется *блок-схемой* эксперимента. Ясно, что ее можно рассматривать как конфигурацию, состоящую из 10 подмножеств на множестве из 6 элементов.

Конфигурации, удовлетворяющие условиям типа а) — в), имеют большое прикладное значение, в частности при планировании экспериментов, где позволяют не только получать достоверные опытные данные, но также обеспечивают правильную организацию опытов, что приводит к экономии, достигающей многих миллионов рублей.

**Уравновешенные неполные блок-схемы.** Перейдем теперь к систематическому рассмотрению наиболее интересных комбинаторных конфигураций. *Уравновешенной неполной блок-схемой* называется такая конфигурация на множестве из  $v$  элементов, что каждое ее подмножество (блок) состоит из  $k$  элементов и каждая пара различных элементов множества появляется вместе точно в  $\lambda$  подмножествах. Этот термин происходит из теории планирования экспериментов.

Именно уравновешенную неполную блок-схему в комбинаторной математике часто называют просто блок-схемой. А каково происхождение других элементов нашего определения?

Рассмотрим конфигурацию из всех  $k$ -подмножеств данного  $v$ -множества  $S$ . Посмотрим, выполняется ли условие о парах элементов. Возьмем какие-либо элементы  $a, b$  из  $S$  и все  $k$ -подмножества, содержащие  $a, b$ . Ясно, что общий вид такого подмножества (блока) —  $\{a, b, x_3, \dots, x_k\}$ , где  $x_3, x_4, \dots, x_k$  — любые  $k - 2$  различных элементов из  $S$ , отличных от  $a, b$ . Следовательно, общее число таких блоков равно числу всех сочетаний без повторения из

$v - 2$  элементов по  $k - 2$ , т. е.  $\binom{v-2}{k-2}$ . Итак, конфигу-

рация удовлетворяет всем условиям нашего определения  $\left( c \lambda = \binom{v-2}{k-2} \right)$ . Число блоков в такой блок-схеме равно,

очевидно,  $\binom{v}{k}$ . Ее называют *полной блок-схемой*, так

как никакая уравновешенная неполная блок-схема на  $v$ -множестве, у которой блоки имеют величину  $k$  и все различны между собой, не может иметь большее число блоков. Однако блок-схемы с меньшим числом блоков представляют бóльший интерес; по контрасту с этой они и называются *неполными*.

Блок-схемы называются уравновешенными, поскольку в них любая пара различных элементов встречается с одинаковой вероятностью \*). Иногда о блок-схемах говорят как о конфигурациях, уравновешенных (или сбалансированных) относительно пар элементов, так как изучаются также конфигурации, уравновешенные относительно троек, четверок элементов и т. д.

**Элементарные свойства блок-схем. Параметры блок-схем.** В определении уравновешенной неполной блок-схемы содержится требование одинаковой встречаемости в блоках лишь для пар различных элементов. А как обстоит дело со встречаемостью самих элементов?

Очевидно, что все элементы должны появляться в блоках одинаковое число раз. Действительно, пусть некоторый элемент  $a \in S$  входит точно в  $r_a$  блоков. Подсчитаем число пар, которые он образует во всех блоках с каждым из остальных элементов  $v$ -множества  $S$ . С элементами всякого блока, в который он входит, образуется  $k - 1$  пар, так как всего таких блоков  $r_a$ , поэтому искомое число равно  $r_a(k - 1)$ . Вспомним, с другой стороны, что по определению блок-схемы число появлений любой пары  $\{a, x\}$ , где  $x \neq a, x \in S$ , равно  $\lambda$ ; следовательно, всего таких появлений  $\lambda(v - 1)$ . Итак,  $r_a(k - 1) = \lambda(v - 1)$ , откуда следует, что  $r_a$  фактически не зависит от  $a$ .

Обозначим это число появлений элемента в блоках через  $r$ ; для него справедливо соотношение  $r(k - 1) = \lambda(v - 1)$ . Обозначим, далее, число блоков в схеме через  $b$ . Если теперь заметить, что каждый блок состоит из  $k$  элементов, а каждый из  $v$  элементов принадлежит в точности  $r$  блокам, то получается, что  $bk = vr$ . Целые числа  $b, v, r, k, \lambda$  называются *параметрами* блок-схемы. Уравновешенную неполную блок-схему с параметрами  $b, v, r, k, \lambda$  иногда называют  $(b, v, r, k, \lambda)$ -конфигурацией.

Параметры блок-схемы удовлетворяют соотношениям

$$bk = vr, \quad (5.2)$$

$$r(k - 1) = \lambda(v - 1). \quad (5.3)$$

Существование этих соотношений показывает, что пять параметров блок-схемы не независимы: задавая любые три из них, мы получаем из (5.2), (5.3) значения остальных.

---

\*) Далее в этих случаях мы будем говорить об «одинаковой встречаемости».



Целочисленность параметров накладывает ограничения на существование блок-схем. Так, например, ясно, почему не существует блок-схемы с  $\lambda = 1$ ,  $k = 3$ ,  $v = 5$  или 6 (см. § 4, п. 2). Действительно, из (5.3) при  $v = 6$  следует, что  $2r = 5$ . При  $v = 5$  из (5.3) получается, что  $r = 2$ , но тогда (5.2) означает, что  $3b = 10$ , что невозможно. Очевидно, что блок-схемы с  $\lambda = 1$ ,  $k = 3$  в силу (5.3) не существует ни при каком четном  $v$ . С другой стороны, конфигурация (4.2) на 7-множестве есть  $(b, v, r, k, \lambda)$ -конфигурация с  $b = v = 7$ ,  $r = k = 3$ ,  $\lambda = 1$ . В ней проявляется общая закономерность, вытекающая из (5.2): если в уравновешенной неполной блок-схеме число блоков равно числу элементов, т. е.  $b = v$ , то число появлений каждого элемента в блоках схемы равно величине блока, т. е.  $r = k$  (и наоборот). Блок-схемы с таким свойством называются *симметричными*.

**Тактические конфигурации.** Блок-схемы выделяются среди комбинаторных конфигураций требованием уравновешенности относительно пар, т. е. одинаковой частоты появления в подмножествах — блоках пар элементов. А что если наложить такое же условие на тройки, четверки или, вообще,  $t$ -подмножества для какого-нибудь целого числа  $t$ ? Такие конфигурации действительно изучаются в комбинаторике.

*Тактической конфигурацией* или  *$t$ -конфигурацией* на множестве  $S$  из  $v$  элементов называется такая конфигурация, что каждое ее подмножество (блок) состоит из  $k$  элементов и каждое  $t$ -подмножество  $S$  для некоторого целого числа  $t \geq 2$  встречается точно в  $\lambda$  подмножествах. Ясно, что при  $t = 2$  мы приходим к определению блок-схемы, т. е. уравновешенная неполная блок-схема — это 2-конфигурация; числа  $v$ ,  $k$ ,  $\lambda$  называются *параметрами  $t$ -конфигурации*. Докажем теперь, что  $t$ -конфигурации на  $v$ -множестве при  $t > 2$  образуют подкласс класса блок-схем.

**Теорема 5.1.** *Каждая  $t$ -конфигурация есть  $s$ -конфигурация для любого  $s \leq t$ . Число  $\lambda_s$  появлений произвольного  $s$ -подмножества  $\lambda_s$  дается формулой*

$$\lambda_s = \lambda \binom{v-s}{t-s} / \binom{k-s}{t-s}, \quad (5.4)$$

где  $v$ ,  $k$ ,  $\lambda$  — параметры  $t$ -конфигурации.

**Доказательство.** Покажем сначала, что любая  $t$ -конфигурация есть  $t-1$ -конфигурация. Рассуждаем так же, как в предыдущем пункте. Пусть  $A$  — произволь-



ное  $t - 1$ -подмножество  $\nu$ -множества  $S$ , на котором задана  $t$ -конфигурация. Предположим, что оно встретилось в  $r_A$  блоках. Подсчитаем двумя способами число появлений в блоках  $t$ -подмножеств, содержащих  $A$ . С одной стороны, оно равно  $r_A(k - (t - 1))$ ; с другой стороны, так как всего существует  $\nu - (t - 1)$  таких  $t$ -подмножеств, оно равно  $\lambda(\nu - t + 1)$  (по определению  $t$ -конфигурации). Итак,  $r_A(k - t + 1) = \lambda(\nu - t + 1)$ , и мы видим, что  $r_A = \lambda(\nu - t + 1)/(k - t + 1)$ , т. е. не зависит от взятого нами  $t - 1$ -подмножества  $A$ .

Обозначим теперь

$$\lambda_t = \lambda, \quad \lambda_{t-1} = \lambda \frac{\nu - t + 1}{k - t + 1}. \quad (5.5)$$

Предположим, далее, что  $t$ -конфигурация есть  $t'$ -конфигурация при  $t' = s + 1, s + 2, \dots, t$  и

$$\lambda_{t'} = \lambda_t \binom{\nu - t'}{t - t'} / \binom{k - t'}{t - t'}.$$

В частности,

$$\lambda_{s+1} = \lambda_t \binom{\nu - s - 1}{t - s - 1} / \binom{k - s - 1}{t - s - 1}.$$

Но мы показали (см. (5.5)), что любая  $s + 1$ -конфигурация есть  $s$ -конфигурация с  $\lambda_s = \lambda_{s+1}(\nu - s)/(k - s)$ . Следовательно,

$$\lambda_s = \lambda_t \frac{\nu - s}{k - s} \binom{\nu - s - 1}{t - s - 1} / \binom{k - s - 1}{t - s - 1},$$

и по (4.1)

$$\begin{aligned} \lambda_s &= \lambda_t \frac{(\nu - s - 1)(\nu - s - 2) \dots (\nu - t + 1)}{(k - s - 1)(k - s - 2) \dots (k - t + 1)} \cdot \frac{\nu - s}{k - s} = \\ &= \lambda \binom{\nu - s}{t - s} / \binom{k - s}{t - s}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

В частности, мы видим, что любая тактическая конфигурация при  $t \geq 2$  есть блок-схема с параметрами  $\nu, k, \lambda_2 = \lambda \binom{\nu - 2}{t - 2} / \binom{k - 2}{t - 2}$ . Отметим, что основные соотношения (5.2), (5.3) для блок-схем можно рассматривать как частные случаи соотношений (5.4), (5.5), если положить  $\lambda_1 = r, \lambda_0 = b$ . Действительно, тогда (5.4)

обратится при  $t = 2$ ,  $s = 1$  в

$$\lambda_1 = \lambda \binom{v-1}{1} / \binom{k-1}{1} = \lambda \frac{v-1}{k-1},$$

а (5.5) при  $t = 1$  в  $\lambda_0 = \lambda_1 v / k$ , т. е.  $bk = vr$ .

Однако далеко не каждая блок-схема есть  $t$ -конфигурация с  $t > 2$ . Существование тактических конфигураций требует, например, того, чтобы все  $t + 1$  чисел

$$\lambda \binom{v-s}{t-s} / \binom{k-s}{t-s}, \quad s = 0, 1, \dots, t, \quad (5.6)$$

были целыми. Понятно, что четверки чисел  $v$ ,  $k$ ,  $\lambda$ ,  $t$ , обеспечивающие выполнение этого условия, подобрать не легко. Уже по этой причине  $t$ -конфигурации при  $t > 2$  встречаются довольно редко.

Неясно, кроме того, в какой мере целочисленность дробей (5.6) гарантирует существование  $t$ -конфигурации с параметрами  $v$ ,  $k$ ,  $\lambda$ . Лишь для блок-схем этот вопрос до известной степени изучен. Было доказано (1975 г.), что для всех достаточно больших  $v$  условия (5.2), (5.3) достаточны для существования блок-схем с параметрами  $v$ ,  $k$ ,  $\lambda$ . Известно, кроме того, что эти условия достаточны для существования конфигураций, состоящих из троек ( $k = 3$ ) и четверок ( $k = 4$ ). Для  $k = 5$  это уже неверно, т. е. существуют такие  $\lambda$ ,  $v$ ,  $b$ ,  $r$ , что  $\lambda(v-1) = 4r$ ,  $5b = vr$ , по  $(b, v, r, 5, \lambda)$ -конфигурации не существует. Таковы, например,  $v = 15$ ,  $b = 21$ ,  $r = 7$ ,  $\lambda = 2$ .

**Симметричные блок-схемы.** Между параметрами уравновешенной неполной блок-схемы, кроме (5.2), (5.3), существуют также другие соотношения. В гл. 4 мы покажем, что в блок-схеме число элементов  $v$  и число блоков  $b$  связаны неравенством  $b \geq v$ . В симметричных схемах (т. е. при  $b = v$ ), как мы уже отмечали, каждый элемент встречается в числе блоков, равном величине блока (т. е.  $k = r$ ). Таким образом, в матрице инцидентности симметричной блок-схемы содержится не только в точности  $k$  единиц в каждой строке, но и  $k$  единиц в каждом столбце.

У симметричной блок-схемы есть еще одно интересное свойство: любые ее два блока содержат в точности  $\lambda$  общих элементов. В качестве примера вновь рассмотрим блок-схему (4.2). Это — симметричная блок-схема ( $b = v = 7$ ,  $r = k = 3$ ) с  $\lambda = 1$ . Как мы отмечали в § 4, скалярное произведение любой пары строк ее матрицы инцидентности (см. (4.5)) равно 1, т. е. любые ее два различных блока имеют один и только один общий элемент. От-

меченное нами свойство пересечений блоков мы докажем в гл. 4.

Сейчас покажем, как, пользуясь этим свойством, из любой симметричной блок-схемы можно получить две другие блок-схемы. Пусть  $\mathcal{D}$  — симметричная блок-схема на множестве  $S$  с параметрами  $v, k, \lambda$ . Перенумеруем ее блоки —  $B_1, B_2, \dots, B_b$ . Возьмем, далее, произвольный блок  $B_b$  и построим блоки  $B'_1, B'_2, \dots, B'_{b-1}$  следующим образом:  $B'_i$  состоит из  $\lambda$  элементов, общих для  $B_i$  и  $B_b$  ( $i = 1, 2, \dots, b-1$ ). Легко видеть, что любая пара различных элементов из  $B_b$  встретится в  $\lambda - 1$  этих новых блоков. Таким образом, на множестве  $B_b$  получена новая блок-схема с блоками  $B'_1, B'_2, \dots, B'_{b-1}$ . Ее параметры  $b' = b - 1 = v - 1$ ,  $v' = k$ ,  $r' = r - 1 = k - 1$ ,  $k' = \lambda$ ,  $\lambda' = \lambda - 1$ . Такая блок-схема называется *производной схемой* от блок-схемы  $\mathcal{D}$ .

Возьмем теперь снова блок-схему  $\mathcal{D}$ . Удалим из нее блок  $B_b$  и вычеркнем все входящие в него элементы из остальных блоков. Легко видеть, что, взяв блоки  $B_1, B_2, \dots, B_{b-1}$  без элементов, принадлежащих  $B_b$ , и учитывая, что любые два блока  $\mathcal{D}$  имеют в точности  $\lambda$  элементов, приходим к блок-схеме с параметрами  $b^* = b - 1 = v - 1$ ,  $v^* = v - k$ ,  $r^* = r = k$ ,  $k^* = k - \lambda$ ,  $\lambda^* = \lambda$ . Такая блок-схема называется *остаточной схемой* по отношению к  $\mathcal{D}$ .

Приведем примеры производной и остаточной блок-схем. Рассмотрим следующую конфигурацию  $\mathcal{D}$  на множестве из 15 элементов  $S = \{0, 1, \dots, 14\}$ :

$$\begin{aligned}
 B_0 &= \{0, 1, 2, 4, 5, 8, 10\}, & B_8 &= \{1, 3, 8, 9, 10, 12, 13\}, \\
 B_1 &= \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 11\}, & B_9 &= \{2, 4, 9, 10, 11, 13, 14\}, \\
 B_2 &= \{2, 3, 4, 6, 7, 10, 12\}, & B_{10} &= \{0, 3, 5, 10, 11, 12, 14\}, \\
 B_3 &= \{3, 4, 5, 7, 8, 11, 13\}, & B_{11} &= \{0, 1, 4, 6, 11, 12, 13\}, \\
 B_4 &= \{4, 5, 6, 8, 9, 12, 14\}, & B_{12} &= \{1, 2, 5, 7, 12, 13, 14\}, \\
 B_5 &= \{0, 5, 6, 7, 9, 10, 13\}, & B_{13} &= \{0, 2, 3, 6, 8, 13, 14\}, \\
 B_6 &= \{1, 6, 7, 8, 10, 11, 14\}, & B_{14} &= \{0, 1, 3, 4, 7, 9, 14\}. \\
 B_7 &= \{0, 2, 7, 8, 9, 11, 12\}, & &
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Легко убедиться, что каждая пара различных элементов  $S$  появляется в блоках в точности 3 раза. Таким образом,  $\mathcal{D}$  — блок-схема, причем симметричная, так как число блоков  $b$ , равное 15, совпадает с числом элементов в  $S$ .

Другие ее параметры:  $r = k = 7$ ,  $\lambda = 3$ . Возьмем блок  $B_{14} = \{0, 1, 3, 4, 7, 9, 14\}$ . Тогда производной к  $\mathcal{D}$  будет схема  $\mathcal{D}'$  с блоками

$$\begin{aligned} B'_0 &= \{0, 1, 4\}, & B'_5 &= \{0, 7, 9\}, & B'_{10} &= \{0, 3, 14\}, \\ B'_1 &= \{1, 3, 9\}, & B'_6 &= \{1, 7, 14\}, & B'_{11} &= \{0, 1, 4\}, \\ B'_2 &= \{3, 4, 7\}, & B'_7 &= \{0, 7, 9\}, & B'_{12} &= \{1, 7, 14\}, \\ B'_3 &= \{3, 4, 7\}, & B'_8 &= \{1, 3, 9\}, & B'_{13} &= \{0, 3, 14\}, \\ B'_4 &= \{4, 9, 14\}, & B'_9 &= \{4, 9, 14\}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

Параметры схемы  $\mathcal{D}'$ :  $b' = 14$ ,  $v' = 7$ ,  $r' = 6$ ,  $k' = 3$ ,  $\lambda' = 2$ . Каждый блок в этой схеме повторяется дважды. Если взять все блоки по одному разу, то получим схему с параметрами  $(7, 7, 3, 3, 1)$ ; легко убедиться, надлежащим образом перенумеровав элементы, что эта схема — симметричная блок-схема (4.2).

Вычеркнув из блоков  $\mathcal{D}$  элементы  $0, 1, 3, 4, 7, 9, 14$ , составляющие блок  $B_{15}$ , получим остаточную схему  $\mathcal{D}^*$ , составленную из блоков:

$$\begin{aligned} B_1^* &= \{2, 5, 8, 10\}, & B_6^* &= \{5, 6, 10, 13\}, & B_{11}^* &= \{5, 10, 11, 12\}, \\ B_2^* &= \{2, 5, 6, 11\}, & B_7^* &= \{6, 8, 10, 11\}, & B_{12}^* &= \{6, 11, 12, 13\}, \\ B_3^* &= \{2, 6, 10, 12\}, & B_8^* &= \{2, 8, 11, 12\}, & B_{13}^* &= \{2, 5, 12, 13\}, \\ B_4^* &= \{5, 8, 11, 13\}, & B_9^* &= \{8, 10, 12, 13\}, & B_{14}^* &= \{2, 6, 8, 13\}, \\ B_5^* &= \{5, 6, 8, 12\}, & B_{10}^* &= \{2, 10, 11, 13\}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

Эта схема не содержит повторяющихся блоков. Ее параметры  $b^* = 14$ ,  $v^* = 8$ ,  $r^* = 7$ ,  $k^* = 4$ ,  $\lambda^* = 3$ . Интересно отметить, что  $\mathcal{D}^*$  представляет собой тактическую конфигурацию с  $t = 3$ . Действительно, легко проверить, что каждая тройка различных элементов множества  $S^* = \{2, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13\}$  встречается один и только один раз в блоках из  $\mathcal{D}^*$ . Взяв, например, любую пару  $x, y$  различных элементов  $S^*$  и три содержащих ее блока, видим, что эти блоки содержат по одному разу все шесть троек из  $S^*$ , в которые входят  $x, y$ .

**Конечные плоскости.** Известно, что через любые две точки плоскости проходит только одна прямая, а любые две (непараллельные) прямые пересекаются в одной точке. Оговорка относительно параллельных прямых устраняется в проективной геометрии введением еще одной (несобственной, бесконечно удаленной) прямой, на кото-

рой располагаются точки пересечения параллельных прямых. Такая дополненная плоскость называется *проективной*. В комбинаторной математике рассматриваются конечные проективные плоскости.

Рассмотрим конфигурацию на конечном множестве  $S$ -множестве точек, для подмножеств которой, называемых *прямыми*, выполняются следующие условия:

- 1) две различные точки принадлежат одной и только одной прямой;
- 2) две различные прямые имеют одну и только одну общую точку;
- 3) существуют четыре точки, из которых никакие три не лежат на одной прямой.

Конфигурация  $\mathcal{P}$  на конечном множестве точек  $S$  называется *конечной проективной плоскостью*, если для ее подмножеств (прямых) выполняются условия 1)–3). Несложно доказывается

**Теорема 5.2 [22].** Пусть  $n \geq 2$  — целое число. Для проективной плоскости  $\mathcal{P}$ , заданной на конечном множестве точек  $S$ , равносильны следующие свойства:

- а) некоторая прямая содержит точно  $n + 1$  точек;
- б) некоторая точка принадлежит точно  $n + 1$  прямым;
- в) каждая прямая содержит точно  $n + 1$  точек;
- г) каждая точка принадлежит точно  $n + 1$  прямым;
- д)  $S$  состоит из  $n^2 + n + 1$  точек;
- е)  $\mathcal{P}$  состоит из  $n^2 + n + 1$  прямых.

Конечная проективная плоскость, каждая прямая которой состоит из  $n + 1$  точек, называется *проективной плоскостью порядка  $n$* . Так как по теореме 5.2 число точек проективной плоскости равно числу прямых, каждая прямая содержит одинаковое число точек, равное  $n + 1$ , и через любые две точки проходит в точности одна прямая, то любая конечная проективная плоскость порядка  $n$  есть симметричная уравновешенная неполная блок-схема с параметрами  $b = v = n^2 + n + 1$ ,  $r = k = n + 1$ ,  $\lambda = 1$ .

Обратно, пусть на множестве  $S$  задана симметричная блок-схема  $\mathcal{P}$  с параметрами  $b = v = n^2 + n + 1$ ,  $r = k = n + 1$ ,  $\lambda = 1$ , где  $n \geq 2$ . Если мы назовем элементы  $S$  *точками*, а блоки — *прямыми*, то  $\mathcal{P}$  можно рассматривать как конечную проективную плоскость на множестве точек  $S$ : свойства симметричных блок-схем обеспечивают, как нетрудно убедиться, выполнение аксиом 1)–3) конечной проективной плоскости. Таким образом, блок-схема (4.2) дает пример конечной проективной плоскости порядка 2. Приведем еще проективную плоскость поряд-

ка 3 на множестве из 13 элементов  $\{0, 1, \dots, 12\}$ :

$$\begin{aligned} &\{0, 1, 3, 9\}, \quad \{1, 5, 6, 8\}, \quad \{5, 9, 10, 12\}, \\ &\{1, 2, 4, 10\}, \quad \{2, 6, 7, 9\}, \quad \{0, 6, 10, 11\}, \\ &\{2, 3, 5, 11\}, \quad \{3, 7, 8, 10\}, \quad \{1, 7, 11, 12\}, \\ &\{3, 4, 6, 12\}, \quad \{4, 8, 9, 11\}, \quad \{0, 2, 8, 12\}. \\ &\{0, 4, 5, 7\}, \end{aligned} \tag{5.10}$$

В комбинаторной математике рассматриваются не только конечные плоскости, но также конечные пространства бóльших размерностей. С помощью конечных проективных плоскостей (а также конечных проективных пространств) устанавливается связь между теорией блок-схем и геометрией, которая позволяет использовать в комбинаторике различные соображения геометрического характера.

**Классы вычетов целых чисел.** Прежде чем рассмотреть еще один интересный класс комбинаторных конфигураций, нужно познакомиться с некоторыми операциями на множестве целых чисел.

Пусть задано целое положительное число  $m \geq 2$ . Любое другое целое число можно разделить на  $m$  с остатком. Пусть в результате деления натурального числа  $n$  на  $m$  получается число  $q$  с остатком  $r$ . Запишем это так:

$$n = mq + r, \tag{5.11}$$

при этом  $0 \leq r \leq m - 1$ . Понятно, что каждое целое число можно представить в виде (5.11).

Все целые числа разобьем теперь на классы, в зависимости от того, какой из  $m$  возможных остатков, называемых *вычетами*, появляется в представлении (5.11). Пусть, например,  $m = 4$ . Тогда в один класс попадут все числа вида  $4t$ , т. е. делящиеся без остатка на 4:  $\dots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, \dots$  ( $r = 0$ ), в другой — числа вида  $4t + 1$ :  $\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots$  ( $r = 1$ ), в третий — числа вида  $4t + 2$ :  $\dots, -6, -2, 2, 6, 10, \dots$  ( $r = 2$ ) и в четвертый — числа вида  $4t + 3$ :  $\dots, -5, -1, 3, 7, 11, \dots$  ( $r = 3$ ). Эти классы для данного  $m$  называются *классами вычетов по модулю  $m$* . Обозначим их через  $C_0, C_1, \dots, C_{m-1}$ ; любое число  $n \in C_i$  при делении на  $m$  дает остаток  $i$  ( $0 \leq i \leq m - 1$ ) (в представлении (5.11)). Всякое число какого-либо класса называем его *представителем*. Числа  $0, 1, \dots, m - 1$  назовем *системой минимальных предста-*

вителей классов вычетов по модулю  $m$ . Множество  $\{0, 1, \dots, m - 1\}$  обозначаем через  $R_m$ .

Интересным свойством классов  $C_0, C_1, \dots, C_{m-1}$  является возможность их сложения и умножения. Она основана на том, что если даны два класса  $A$  и  $B$ , то, какие бы два числа  $a \in A, b \in B$  мы ни взяли,  $a + b$  всегда окажется в одном и том же классе. Это же справедливо для произведений  $ab$  для любых  $a \in A, b \in B$ .

Действительно, пусть классы  $A$  и  $B$  определяются соответственно остатками  $r_1$  и  $r_2$ . Пусть  $a, a' \in A, b, b' \in B$ , т. е. в представлении (5.11)

$$a = mq_1 + r_1, \quad a' = mq'_1 + r_1,$$

$$b = mq_2 + r_2, \quad b' = mq'_2 + r_2.$$

Тогда  $a + b = m(q_1 + q_2) + r_1 + r_2, a' + b' = m(q'_1 + q'_2) + r_1 + r_2$ , т. е. и  $a + b$ , и  $a' + b'$  входят в класс  $C$ , который определяется либо  $r_1 + r_2$ , либо  $r_1 + r_2 - m$  в соответствии с  $r_1 + r_2 < m$  или  $r_1 + r_2 \geq m$ . Пусть, далее,  $r_1 r_2 = mq_3 + r_3, 0 \leq r_3 < m$ . Тогда

$$ab = (mq_1 + r_1)(mq_2 + r_2) = m(mq_1q_2 + q_1r_2 + q_2r_1) + r_3,$$

$$a'b' = m(mq'_1q'_2 + q'_1r_2 + q'_2r_1 + q_3) + r_3,$$

т. е.  $ab$  и  $a'b'$  принадлежат одному и тому же классу, определяемому остатком  $r_3$ .

По доказанному можно записать, что  $A + B = C$  и  $AB = D$  для любых классов вычетов  $A$  и  $B$ , подразумевая под  $C$  и  $D$  те классы вычетов, которые получаются соответственно при сложении и умножении элементов классов  $A$  и  $B$ . Такие сложение и умножение называются *сложением* и *умножением по модулю  $m$* . Если числа  $a$  и  $b$  входят в один класс вычетов по модулю  $m$ , то это записываем так:

$$a \equiv b \pmod{m}. \quad (5.12)$$

Если число  $n$  делится на  $m$ , то  $n \equiv 0 \pmod{m}$ ; в частности, из  $a \equiv b \pmod{m}$  следует, что  $a - b$  делится на  $m$  (в силу (5.11)). Таким образом, из  $a \equiv b \pmod{m}$  следует, что  $a - b \equiv 0 \pmod{m}$ .

О числах  $a$  и  $b$ , связанных соотношением (5.12), говорят, что они *сравнимы по модулю  $m$* , а само соотношение (5.12) называется *сравнением по модулю  $m$* . Очевидные свойства сравнений:

а) Если  $a \equiv b \pmod{m}$ ,  $c \equiv d \pmod{m}$ , то  $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ .

Действительно, если  $a - b$  и  $c - d$  делятся на  $m$ , то и  $(a + c) - (b + d)$  также делится на  $m$ .

б) Если  $a \equiv b \pmod{m}$ , то для любого целого числа  $k$  справедливо  $ka \equiv kb \pmod{m}$ .

Действительно, если  $a - b$  делится на  $m$ , то и  $k(a - b) = ka - kb$  делится на  $m$ .

Из свойств а), б) следует, что со сравнениями можно в известной мере обращаться, как с обычными равенствами, например переносить члены из одной части сравнения в другую, умножать обе части сравнения на одно и то же число.

Перейдем теперь к еще одному виду конфигураций, связанному с вычетами по модулю  $m$ .

**Разностные множества.** Множество  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_k\}$ , состоящее из  $k$  вычетов по модулю натурального числа  $v$ , называется  $(v, k, \lambda)$ -разностным множеством, если для каждого  $d \not\equiv 0 \pmod{v}$  существует в точности  $\lambda$  упорядоченных пар чисел  $(d_i, d_j)$  ( $d_i, d_j \in D$ ) таких, что  $d_i - d_j \equiv d \pmod{v}$ . Элементы  $D$  чаще всего для удобства берутся из множества  $R_v$ , т. е. из системы минимальных представителей по модулю  $v$ . Иногда в том же значении употребляется термин *совершенное разностное множество*.

Приведем пример разностного множества. Пусть  $v = 13$  и рассмотрим множество  $D = \{0, 4, 5, 7\}$  чисел из системы  $R_{13}$  минимальных представителей классов вычетов по модулю 13. Образует все разности упорядоченных пар чисел из  $D$ :

$$4, 5, 7, 1, 3, 2, -4, -5, -7, -1, -3, -2; \quad (5.13)$$

заметим, что  $-4 \equiv 9$ ,  $-5 \equiv 8$ ,  $-7 \equiv 6$ ,  $-1 \equiv 12$ ,  $-3 \equiv 10$ ,  $-2 \equiv 11 \pmod{13}$ . Итак, мы получаем, что в (5.13) выписаны по одному разу все 12 представителей ненулевых классов вычетов по модулю 13, т. е.  $D$  есть  $(13, 4, 1)$ -разностное множество.

Покажем теперь, как из  $(v, k, \lambda)$ -разностного множества  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_k\}$  получить симметричную блок-схему с параметрами  $v, k, \lambda$ . Наряду с  $D = D_0$  рассмотрим множества  $D_1, D_2, \dots, D_{v-1}$ , где

$$D_a = \{d_1 + a, d_2 + a, \dots, d_k + a\}, \quad a = 0, 1, \dots, v - 1 \quad (5.14)$$

(сложение понимается по модулю  $v$ : при  $d_i + a \geq v$



вместо него берем элемент из  $R_v$ , с которым сравнимо это число). Множества  $D_0, D_1, \dots, D_{v-1}$  возьмем в качестве блоков схемы.

Докажем, что каждая пара различных элементов  $b, c \in R_v$  встретится точно в  $\lambda$  блоках. Так как  $b - c \not\equiv 0 \pmod{v}$ , существует  $\lambda$  различных упорядоченных пар  $(d_i, d_j)$  элементов разностного множества  $D$  со свойством  $b - c \equiv d_i - d_j \pmod{v}$ , т. е. по свойству сравнений а)  $b - d_i \equiv c - d_j \pmod{v}$ . Для каждой из этих пар обозначаем через  $a$  элемент  $R_v$ , для которого  $a \equiv b - d_i \equiv c - d_j \pmod{v}$ . Тогда по свойству сравнений а)  $a + d_i \equiv b$ ,  $a + d_j \equiv c \pmod{v}$ , т. е.  $b, c \in D_a$ . Из определения разностного множества следует, что таких  $a$  получается всего  $\lambda$  и все они различны между собой. Таким образом, конфигурация на  $R_v$ , состоящая из блоков  $D_0, D_1, \dots, D_{v-1}$ , — симметричная блок-схема с параметрами  $v, k, \lambda$ .

Возьмем рассмотренное выше разностное множество  $D = \{0, 4, 5, 7\}$  вычетов по модулю 13. Если образовать множества  $D_0, D_1, \dots, D_{12}$ , то мы, очевидно, приходим к рассмотренной ранее конфигурации (5.10). Таким образом, представленная там конечная проективная плоскость оказалась также разностным множеством.

Приведем еще пример разностного множества. Рассмотрим множество  $D = \{1, 3, 4, 5, 9\}$  вычетов по модулю 11. Легко убедиться в том, что каждый ненулевой элемент из  $R_{11}$  представляется в точности двумя способами, как взятая по модулю 11 разность чисел из  $D$ . Выпишем множества:

$$\begin{aligned} D_0 &= \{1, 3, 4, 5, 9\}, & D_4 &= \{2, 5, 7, 8, 9\}, & D_8 &= \{0, 1, 2, 6, 9\}, \\ D_1 &= \{2, 4, 5, 6, 10\}, & D_5 &= \{3, 6, 8, 9, 10\}, & D_9 &= \{1, 2, 3, 7, 10\}, \\ D_2 &= \{0, 3, 5, 6, 7\}, & D_6 &= \{0, 4, 7, 9, 10\}, & D_{10} &= \{0, 2, 3, 4, 8\}. \\ D_3 &= \{1, 4, 6, 7, 8\}, & D_7 &= \{0, 1, 5, 8, 10\}, & & \end{aligned} \quad (5.15)$$

Конфигурация (5.15) представляет собой, как мы показали, симметричную блок-схему с параметрами  $v = 11$ ,  $k = 5$ ,  $\lambda = 2$ .

Отметим одну особенность блок-схем, происходящих от разностных множеств. Для всякой такой конфигурации можно так записать ее матрицу инцидентности, что каждая строка этой матрицы получается из соседней сверху циклическим сдвигом вправо ее элементов. Напишем, на-

пример, матрицу инцидентности для блок-схемы (5.15):

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (5.16)$$

Матрицы, в которых каждая строка получается из соседней сверху циклическим сдвигом в одном и том же направлении, называется *циркулянтной матрицей* или просто *циркулянтной*. Матрица (5.16) есть циркулянтная матрица.

## § 6. Графы

Самыми распространенными среди изучаемых в комбинаторике конфигураций являются графы. Обычно *граф*  $G$ , заданный на конечном множестве  $V$ , определяется как система, состоящая из элементов  $V$  и некоторой совокупности  $E$  неупорядоченных пар элементов из  $V$ . Чаще всего сюда добавляются еще два условия: а) в  $E$  все пары состоят из различных элементов, т. е. не допускаются пары вида  $\{x, x\}$  ( $x \in V$ ); б) все пары из  $E$  различны между собой. Элементы из  $V$  называются *вершинами* графа, пары из  $E$  — его *ребрами*.

Граф, как правило, представляют как некоторую совокупность точек на плоскости и соединяющих их отрезков (допускаются их пересечения). При этом точки — это вершины, а ребра наглядно изображаются отрезками, которые связывают точки. Более того, любую расположенную в пространстве конечную совокупность точек и соединяющих их отрезков (не обязательно прямолинейных) можно считать графом, взяв в качестве вершин точки, а в качестве ребер — пары вершин, соединенные отрезком. Условие а) при этом выполняется, если в нашей совокупности нет *петель*, т. е. отрезков с концами в одной и той же точке; условие б) — тогда, когда нет двух отрезков, соеди-

няющих одну и ту же пару точек — так называемых *кратных ребер*. Граф  $G$ , определяемый множеством вершин  $V$  и множеством ребер  $E$ , обозначается через  $G(V, E)$ . Приведем примеры графов.

1. Пусть  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ,  $E = \{\{v_3, v_4\}\}$ . Тогда граф  $G(V, E)$  можно изобразить в виде совокупности точек и отрезка, если через  $v_3, v_4$  обозначить точки, соединенные отрезком (рис. 1, а).

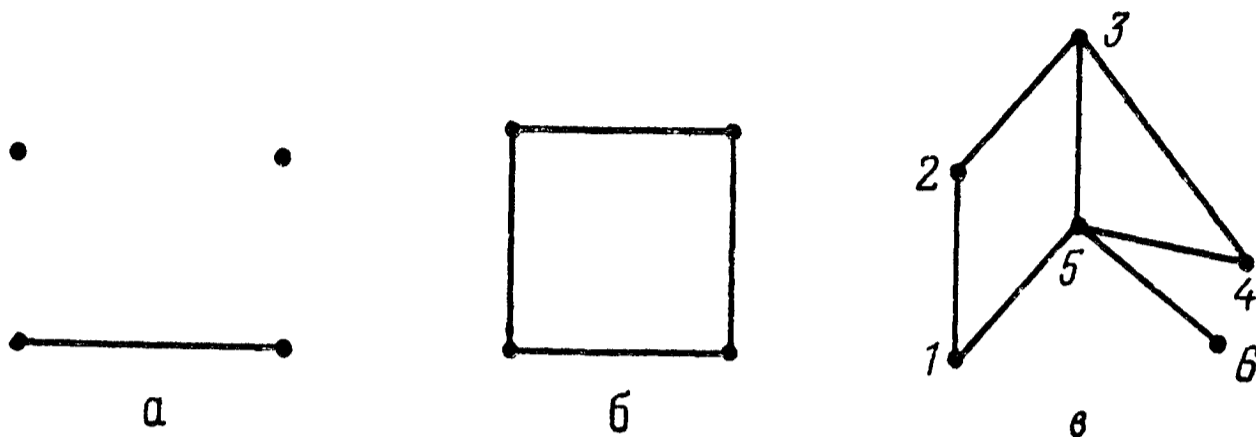


Рис. 1

2. Пусть  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ,  $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_1, v_4\}\}$ . Граф  $G(V, E)$ , как легко видеть, можно представить геометрически, как показано на рис. 1, б.

О вершинах и ребрах графа можно говорить, что они *инцидентны*, если вершина принадлежит ребру или ребро имеет своим концом вершину. Если вершина графа не инцидентна никакому ребру, то она называется *изолированной*. У графа, изображенного на рис. 1, а, две изолированные вершины, у графов, изображенных на рис. 1, б, в, изолированных вершин нет.

3. Пусть  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\}$ . Если перенумеровать 6 точек на плоскости так, как показано на рис. 1, в, то, очевидно, получаем представление графа  $G(V, E)$ .

Число ребер, сходящихся в какой-либо вершине, называется ее *степенью*. Так, в графе, изображенном на рис. 1, а, две вершины имеют степень 1, а две — степень 0; в графе, изображенном на рис. 1, б, все вершины имеют степень 2; в графе, изображенном на рис. 1, в, вершина 5 имеет максимальную степень, а вершина 6 единственная, имеющая степень 1.

**Матрица инцидентности графа.** Граф, очевидно, представляет собой некоторую комбинаторную конфигурацию. Пусть граф  $G(V, E)$  задан на множестве вершин  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  и множество его ребер есть  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ . Матрица инцидентности графа  $G$  есть

матрица  $B(G) = [b_{ij}]$  размера  $m \times n$ , где

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } v_j \text{ инцидентна } e_i, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом, матрицы инцидентности графов среди  $(0, 1)$ -матриц выделяются тем условием, что сумма элементов в каждой их строке равна 2. Столбцы из нулей матрицы  $B(G)$  соответствуют изолированным вершинам графа. Ясно также, что в  $B(G)$  нет двух строк со скалярным произведением, равным 2, так как иначе в  $G$  были бы кратные ребра. Выпишем, например, матрицы инцидентности для графов, изображенных на рис. 1, а, в:

$$B(G_1) = [0 \ 0 \ 1 \ 1], \quad B(G_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.1)$$

Обратно, если задана матрица  $B$  размера  $m \times n$  с суммой элементов по строке, равной 2, в которой нет двух одинаковых строк, то по ней легко построить граф  $G$ , для которого эта матрица служит матрицей инцидентности: берутся  $n$  вершин  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , и вершина  $v_j$  соединяется ребром с вершиной  $v_k$ , если в  $B = [b_{ij}]$  найдется такая строка с номером  $i$ , что  $b_{ij} = b_{ik} = 1$ . Нулевым столбцам ставим в соответствие изолированные вершины. Пусть, например, задана  $(0, 1)$ -матрица 4-го порядка

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Взяв 4 точки на плоскости и соединив их отрезками, приходим к графу, изображенному на рис. 1, б.

Как мы заметили в § 4, матрица инцидентности комбинаторной конфигурации определяется по ней не однозначно, а лишь с точностью до произвольных перестановок строк и столбцов. Применительно к графу мы видим, что матрица инцидентности определяет граф с точностью до перенумерации его ребер и вершин. Граф, в котором при его геометрическом представлении вершины снабжены какими-либо метками, скажем перенумерованы, называется *помеченным*. Таким образом, граф, изображенный на рис. 1, в, — помеченный, а графы, изображенные на

рис. 1, а, б, — нет. Ясно, что матрица инцидентности для помеченного графа определена с точностью до перестановок строк, а для непомеченного, как и для любой комбинаторной конфигурации, — с точностью до перестановок строк и столбцов.

Итак, граф с точки зрения строения его матрицы инцидентности представляет собой, казалось бы, одну из наиболее простых комбинаторных конфигураций (фактически это просто конфигурация из 2-подмножеств). Это, наряду с возможностью наглядного представления, действительно делает изучение графов привлекательной, заманчивой задачей. К тому же применения этого комбинаторного объекта кажутся поистине неисчерпаемыми: графы используются в физике и химии, в проектировании вычислительных устройств и генетике, в теории связи и математической экономике, во многих социальных науках. И все-таки в теории графов остались проблемы, стоящие на протяжении десятилетий, а то и столетий и не решенные до сих пор. К таким задачам относилась знаменитая проблема четырех красок, поставленная в прошлом веке и решенная лишь в 70-х гг. этого века.

**Матрица смежности.** Вершины графа, соединенные ребром, называются *смежными*. С графом, помимо матрицы инцидентности, связываются некоторые другие  $(0, 1)$ -матрицы. Среди них наиболее интересна матрица смежности.

Пусть  $G$  — помеченный граф с  $n$  вершинами  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Матрицей смежности  $A(G)$  графа  $G$  называется  $(0, 1)$ -матрица  $A = [a_{ij}]$  порядка  $n$ , в которой

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } v_i \text{ и } v_j \text{ смежны,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для графов, изображенных на рис. 1, б, в, матрицами смежности будут соответственно матрицы

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.2)$$

Из определения ясно, что матрица  $A = A(G)$  должна быть симметрической, т. е.  $A^T = A$ . Кроме того, легко заметить, что число единиц в  $i$ -м столбце (следовательно, и в  $i$ -й строке) матрицы  $A$  равно степени вершины  $v_i$ .

Наконец, по главной диагонали матрицы  $A(G)$  всегда стоят нули (иначе в  $G$  были бы петли).

Обратно, если дана симметрическая  $(0, 1)$ -матрица порядка  $n$  с нулями по главной диагонали, то по ней всегда можно построить граф  $G$ , для которого она будет матрицей смежности  $A(G)$ . Для этого надо взять  $n$  вершин  $v_1, v_2, \dots, v_n$  и соединить  $v_i$  и  $v_j$  ребрами во всех тех случаях, когда  $a_{ij} = 1$ .

*Однородным* или *регулярным* графом называется граф, у которого степени всех вершин равны одному и тому же числу  $d$ . Граф, изображенный на рис. 1, б, однородный, так как степень каждой его вершины равна 2. Если степень вершины однородного графа равна  $d$ , то он называется *однородным степени  $d$* . Если граф однороден степени  $d$ , то число единиц в каждой строке (и, конечно, в каждом столбце) его матрицы смежности равно  $d$ .

*Маршрутом* в графе  $G$  называется последовательность  $v_0, v_1, \dots, v_r$  его вершин, в которой соседние вершины соединены ребром. О таком маршруте скажем, что он соединяет вершины  $v_0$  и  $v_r$ ;  $r$  называется *длиной* маршрута. Маршрут *замкнут*, если  $v_0 = v_r$ . Замкнутый маршрут длины  $r \geq 3$  называется *простым циклом длины 3*, если все его вершины различны. Изучение различных маршрутов — важная задача в теории графов. В ней весьма существенна роль матриц смежности. Иллюстрацией этого может служить следующий результат.

**Теорема 6.1.** Пусть  $G$  — помеченный граф с вершинами  $v_1, v_2, \dots, v_n$  и матрицей смежности  $A(G) = A = [a_{ij}]$ . Тогда элемент на месте  $(i, j)$  в матрице  $A^n$  равен числу маршрутов длины  $n$ , соединяющих вершину  $v_i$  с вершиной  $v_j$  в графе  $G$  ( $A^n$  —  $n$  раз помноженная на себя матрица  $A$ ).

**Доказательство.** Его проведем лишь для  $n = 2$ . Обозначим матрицу  $A^2 = AA$  через  $C = [c_{ij}]$ . Пусть в  $G$  есть маршрут длины 2, соединяющий  $v_i$  с  $v_j$ . Ясно, что таких маршрутов столько, сколько в  $G$  имеется вершин, смежных одновременно с  $v_i$  и  $v_j$  (рис. 2). Но для каждой такой вершины  $v_k$  справедливо  $a_{ik} = a_{kj} = 1$ . Если же вершина  $v_k$  этим свойством не обладает, то в матрице смеж-

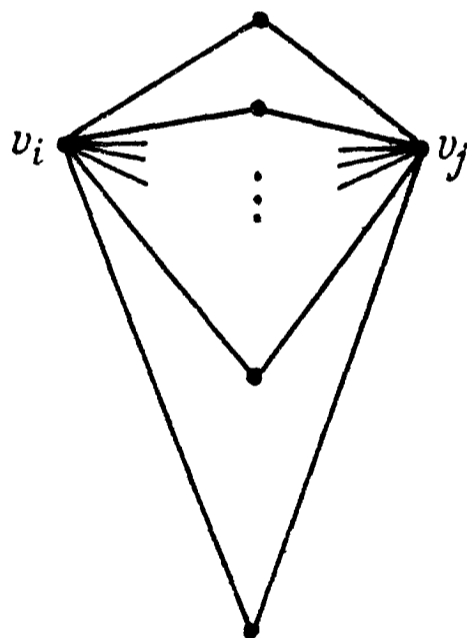


Рис. 2

ности по крайней мере один из элементов  $a_{ik}$ ,  $a_{kj}$  равен нулю.

Рассмотрим теперь элемент  $c_{ij}$  в матрице  $C = A^2$ , стоящий на месте  $(i, j)$ . По правилу матричного умножения

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{kj}.$$

Как мы только что видели,  $a_{ik}a_{kj} = 1$ , если  $v_k$  смежна с  $v_i$  и  $v_j$  (а в противном случае  $a_{ik}a_{kj} = 0$ ). Следовательно,  $c_{ij}$  равно числу таких вершин  $v_k$ , т. е., как мы показали, числу маршрутов длины между  $v_i$  и  $v_j$ .

Утверждение для произвольного  $n$  получается без особого труда с помощью метода математической индукции.

*Следствие. Элемент на месте  $(i, i)$  на главной диагонали матрицы  $A^2$  равен степени  $d_i$  вершины  $v_i$ ; в  $A^3$  элемент на том же месте равен удвоенному числу простых циклов длины 3 («треугольников»), проходящих через  $v_i$  (так как каждый такой цикл можно проходить в двух противоположных направлениях).*

**Изоморфизм комбинаторных конфигураций.** При изучении комбинаторных конфигураций возникает одно специфическое затруднение. А именно, пусть заданы две конфигурации на одном и том же множестве, в которых подмножества, состоящие из одинакового числа элементов, встречаются одинаковое число раз, например две уравновешенные неполные блок-схемы с одинаковыми параметрами или два графа с одинаковым числом ребер. Возникает естественный вопрос: имеем ли мы дело с двумя на самом деле разными конфигурациями или перед нами фактически одна и та же конфигурация, только по-разному представленная? Ведь для данной конфигурации возможна другая нумерация элементов множества или подмножества конфигурации. При этом, хотя мы, по сути дела, не получили ничего нового, обнаружить сходство первоначальной и вновь полученной конфигурации иной раз не просто. Чтобы иметь возможность в принципе различать две существенно разные конфигурации от двух представлений одной и той же конфигурации, вводится понятие изоморфизма комбинаторных конфигураций.

Пусть задана конфигурация  $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$  на множестве  $S$  и конфигурация  $\mathcal{S}' = \{S'_1, S'_2, \dots, S'_m\}$  на множестве  $S'$ , и пусть множества  $S$  и  $S'$  состоят из одинакового числа элементов. Если между элементами

$S$  и  $S'$  можно установить такое взаимно однозначное соответствие  $\varphi$ , что совокупность подмножеств  $\{\varphi(S_1), \varphi(S_2), \dots, \varphi(S_m)\}$  множества  $S'$ , соответствующих  $S_1, S_2, \dots, S_m$ , совпадает с совокупностью  $S'_1, S'_2, \dots, S'_m$ , то говорят, что конфигурации  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{P}'$  *изоморфны*, а соответствие  $\varphi$  называют *изоморфизмом* конфигураций  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{P}'$ . Если обе конфигурации заданы на одном и том же множестве  $S$  и  $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$ , то такое соответствие  $\varphi$ , которое есть подстановка на  $S$ , называется *автоморфизмом*  $\mathcal{P}$ .

Приведем пример. Пусть на множестве  $S = Z_8 = \{1, 2, \dots, 8\}$  заданы три графа  $G_1 = G(S, E_1)$ ,  $G_2 = G(S, E_2)$ ,  $G_3 = G(S, E_3)$ , где  $E_1 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}\}$ ,  $E_2 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{1, 6\}\}$ ,  $E_3 = \{\{1, 4\}, \{2, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 7\}, \{4, 6\}, \{5, 7\}\}$ . Изобразим графы  $G_1$  и  $G_2$  геометрически, как это показано

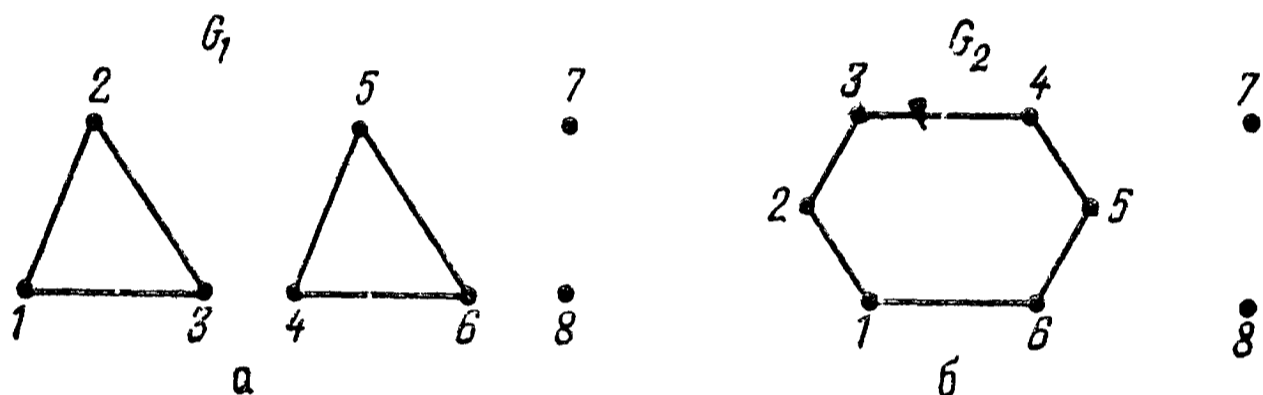


Рис. 3

на рис. 3. Из этого представления ясно, что, как бы ни перенумеровывать вершины, мы из графа  $G_1$  не можем получить граф  $G_2$ , так как при любой такой нумерации  $\varphi$  в графе  $\varphi(G_1)$ , который получается из  $G_1$  с помощью  $\varphi$ , будут две тройки вершин, образующие треугольник, чего нет в графе  $G_2$ . Поэтому  $G_1$  и  $G_2$  не изоморфны. Напротив, очевидна изоморфность графов  $G_1$  и  $G_3$ . Изоморфизм  $\varphi$  задается, например, следующей подстановкой на  $Z_8$ :

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 6 & 2 & 5 & 7 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что комбинаторные конфигурации, в частности графы, изоморфны тогда и только тогда, когда их матрицы инцидентности получаются одна из другой какими-либо перестановками строк и столбцов. Аналогично, два графа изоморфны тогда и только тогда, когда их матрицы смежности получаются одна из другой одинаковой перестановкой строк и столбцов (ясно, что перестановка должна быть одинаковой, потому что как строки, так и



столбцы матрицы смежности соответствуют вершинам графа).

**Реберные графы.** Связь матрицы инцидентности и матрицы смежности графа. Мы видели, что граф определяется с точностью до изоморфизма как своей матрицей инцидентности, так и матрицей смежности, т. е. матрица инцидентности графа может служить матрицей инцидентности также для любого изоморфного ему непомеченного графа, и то же самое можно сказать о матрице смежности помеченного графа. Это наводит на мысль о том, что матрица смежности и матрица инцидентности должны быть

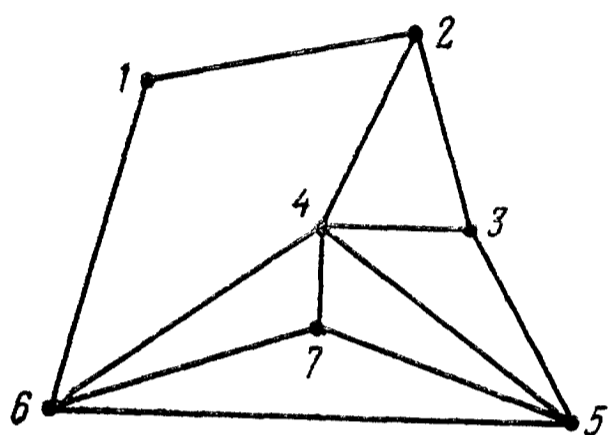


Рис. 4

как-то связаны между собой. Так и есть в действительности, однако взаимосвязь этих понятий устанавливается при рассмотрении наряду с графом  $G$  другого графа, тесно связанного с  $G$ .

Пусть  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  — множество ребер графа  $G(V, E)$ , рассматриваемых обычным способом как 2-подмножества

множества вершин  $V$ . Рассмотрим теперь граф  $L(G)$ , вершины которого обозначим через  $e_1, e_2, \dots, e_m$ . Считаем  $e_i$  и  $e_j$  смежными в  $L(G)$ , если они как ребра графа  $G$  имеют общий конец, т. е.  $e_i \cap e_j \neq \emptyset$ . Ясно, что если  $e_i = \{v, w\}$ , то степень вершины  $e_i$  в  $L(G)$  есть  $d(v) - 1 + d(w) - 1 = d(v) + d(w) - 2$ , где  $d(v), d(w)$  — степени вершин  $v, w$  в  $G$ . Для графа, изображенного на рис. 1, а,  $L(G)$  можно представить так, как показано на рис. 4. Для графа  $G$  (рис. 1, б), являющегося простым циклом,  $L(G)$  также представляет собой простой цикл длины 4, т. е.  $L(G)$  и  $G$  изоморфны. Выведем формулу для числа ребер в реберном графе.

**Теорема 6.2.** Пусть  $G$  — граф с  $n$  вершинами  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , имеющими степени  $d_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), и с  $t$  ребрами. Тогда  $L(G)$  имеет  $t$  вершин и  $q = -t +$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d_i^2 \text{ ребер.}$$

**Доказательство.** Заметим, во-первых, что для числа  $t$  ребер графа  $G$  справедливо соотношение  $2t = \sum_{i=1}^n d_i$ . Действительно, если мы будем считать ребра,

сходящиеся в одной вершине, переходя от одной вершины к другой, то всякое ребро посчитаем два раза. Далее, граф  $L(G)$  имеет столько вершин, сколько ребер у  $G$ , т. е.  $m$  вершин. Из  $d_i$  ребер графа  $G$ , сходящихся к вершине  $v_i$ , образуется в точности  $\binom{d_i}{2} = \frac{d_i(d_i-1)}{2}$  ребер  $L(G)$  (так как мы должны взять все пары различных ребер, инцидентных с  $v_i$ ). Итак, общее число  $q$  ребер в  $L(G)$  равно

$$\sum_{i=1}^n \binom{d_i}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{d_i(d_i-1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d_i;$$

но мы заметили, что  $m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d_i$ . Отсюда следует утверждение теоремы.

Выше мы отмечали, что простой цикл, изображенный на рис. 1, б, изоморфен своему реберному графу. Это — отражение общей ситуации.

**Теорема 6.3.** Пусть  $G$  — граф на  $n$  вершинах  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , и для степеней его вершин справедливо  $d_i \geq 2$ . Тогда  $G$  изоморфен  $L(G)$  в том и только том случае, когда  $G$  — однородный граф степени 2.

**Доказательство.** Очевидно, что если  $G$  — однородный граф степени 2, то он распадается на совокупность не связанных между собой простых циклов. Рассмотрим каждый такой простой цикл  $Z$  по отдельности. Пусть его длина равна  $r$ . Если мы перенумеруем его ребра так, что  $e_i$  и  $e_{i+1}$  ( $i = 1, 2, \dots, r-1$ ), а также  $e_r$  и  $e_1$  имеет общую вершину, то в  $L(Z)$   $e_i$  будет соединена ребром лишь с  $e_{i-1}$  и  $e_{i+1}$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) (индексы берем по модулю  $r$ ). Поэтому  $L(Z)$  представляет собой простой цикл той же длины  $r$ . Но любые два простых цикла одинаковой длины, очевидно, изоморфны. Так как  $L(G)$  можно представить как совокупность простых циклов тех же длин, что и циклы, входящие в  $G$ , то он действительно изоморфен  $G$ .

Пусть, напротив,  $G$  и  $L(G)$  изоморфны. Тогда, во всяком случае, число вершин и ребер у них одинаково. Если  $m$  — число ребер в  $G$ , то отсюда получается, что  $m = n$ , так как  $m$  — число вершин в  $L(G)$ . Кроме того,

по теореме 6.2  $n = m + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d_i^2$ , т. е.  $n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d_i^2$ . Как

мы заметили при доказательстве теоремы 6.2,  $m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d_i$ ,

т. е. в нашем случае  $n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d_i$ , и поэтому  $2 \sum_{i=1}^n d_i =$

$= \sum_{i=1}^n d_i^2$ . Но если  $d_i \geq 2$  для любого  $i$ , то отсюда следует,

что  $d_1 = d_2 = \dots = d_n = 2$ , т. е. мы показали, что  $G$  — однородный граф степени 2.

Отметим, что теорема 6.3 верна фактически для любого графа (ограничение  $d_i \geq 2$  было принято нами для упрощения доказательства).

Ясно, что для двух изоморфных графов их реберные графы также изоморфны. Почти всегда (за единственным исключением) имеет место обратное утверждение: из изоморфизма реберных графов  $L(G)$  и  $L(G')$  следует изоморфизм  $G$  и  $G'$ .

Выведем теперь зависимость между матрицами инцидентности и смежности.

**Теорема 6.4.** Пусть граф  $G$  с  $m$  ребрами и с  $n$  вершинами имеет матрицу инцидентности  $B = B(G)$ . Тогда

$$A(L(G)) = BB^T - 2I_n, \quad (6.3)$$

где  $A(L(G))$  — матрица смежности реберного графа  $L(G)$ .

**Доказательство.** Образует граф  $L(G)$  и выпишем его матрицу смежности  $A(L(G)) = [a_{ij}]$ . Рассмотрим, с другой стороны, матрицу  $C = BB^T = [c_{ij}]$ . Очевидно, что  $c_{ij}$  представляет собой скалярное произведение  $i$ -й вектор-строки  $B$  на  $j$ -й вектор-столбец  $B^T$ , т. е.  $j$ -ю вектор-строку  $B$ . По свойствам матриц инцидентности это скалярное произведение равно 2 лишь при  $i = j$ . При  $i \neq j$  оно равно 1, если ребра  $e_i$  и  $e_j$  графа  $G$ , соответствующие  $i$ -й и  $j$ -й строкам, имеют общую вершину, и равно 0 в противном случае. Но при первой из этих возможностей вершины  $e_i$  и  $e_j$  в  $L(G)$  соединены ребром, а при второй — нет. Таким образом, матрица  $C$  по главной диагонали имеет везде 2, а в остальных местах  $c_{ij} = a_{ij}$ .

Теорема 6.4 дает фактически способ построения  $L(G)$  без вычерчивания самого  $G$ . Если  $G$  задан в виде конфигурации 2-подмножеств, то мы можем выписать его матрицу инцидентности  $B$ , затем найти по (6.3)  $A(L(G))$  и непосредственно по этой матрице получить 2-подмножества, составляющие  $L(G)$ , или «нарисовать» этот граф.

**Ориентированные графы.** Наряду с обычными часто рассматривают ориентированные графы. Представим себе, что на  $n$ -множестве  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  задана некоторая совокупность  $E$  упорядоченных 2-подмножеств, т. е. семейство пар  $(v_i, v_j)$ , в которых места элементов твердо закреплены. Такую совокупность назовем *ориентированным графом* или кратко *орграфом* на множестве вершин  $V$ . Если  $(v_i, v_j) \in E$ , то мы скажем, что *из  $v_i$  исходит дуга с концом в  $v_j$*  или что *в  $v_j$  входит дуга с началом в  $v_i$* . Ориентированный граф на множестве вершин  $V$  с множеством дуг  $E$  обозначается через  $G = G(V, E)$ .

Ориентированные графы изображаются в виде точек на плоскости, соединенных стрелками. Обычно предполагается, что  $E$  не содержит пар вида  $(v, v)$  — петель, а также одновременно двух пар, одинаковых как упорядоченные множества (однако в  $E$  могут одновременно входить пары  $(v, w)$  и  $(w, v)$ , которые представляют собой разные упорядоченные 2-подмножества).

На рис. 5 изображены ориентированные графы. Орграф, изображенный на рис. 5, а, задается на 4-множестве  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  совокупностью дуг  $E = \{(v_1, v_2),$

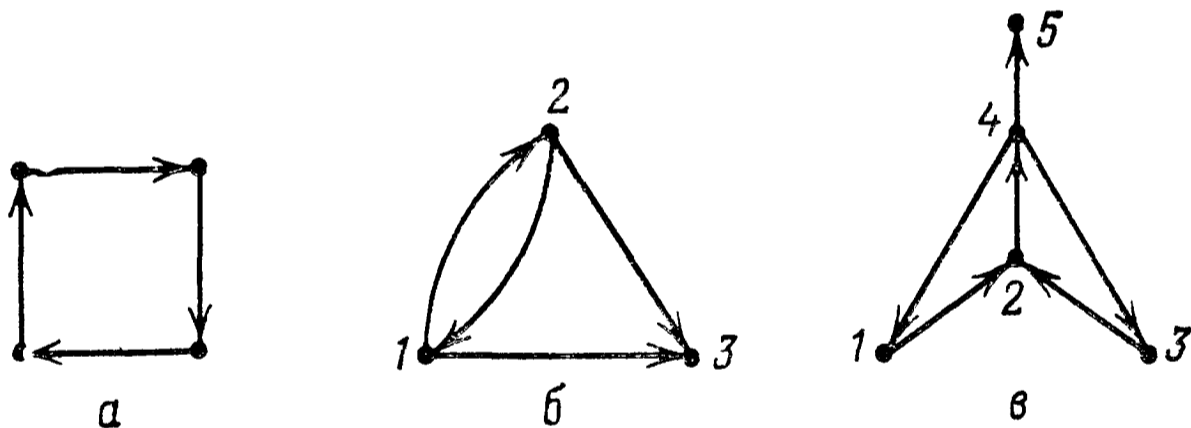


Рис. 5

$(v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_1)\}$ ; орграф, изображенный на рис. 5, б, задается упорядоченными 2-подмножествами  $(1, 2), (2, 1), (2, 3), (1, 3)$  3-множества  $Z_3$  (между вершинами 1 и 2 проходят две противоположно направленные дуги); орграф, изображенный на рис. 5, в, определяется совокупностью  $E = \{(1, 2), (1, 4), (2, 4), (3, 2), (4, 3), (4, 5)\}$  упорядоченных 2-подмножеств  $Z_5$ .

Для каждой вершины  $v_i$  ориентированного графа  $G$  определяются два числа:  $od(v_i)$ , равное числу дуг, исходящих из  $v_i$ , и  $id(v_i)$ , равное числу дуг, входящих в  $v_i$ . Они называются соответственно *полустепенью исхода* и *полустепенью захода*. Например, для графа, изображенного на рис. 5, а, как полустепени исхода, так и полусте-

пени захода каждой из вершин равны 1. В графе, изображенном на рис. 5, б,  $od(1) = od(2) = 2$ ,  $od(3) = 0$ ,  $id(1) = id(2) = 1$ ,  $id(3) = 2$ . В графе, изображенном на рис. 5, в,  $od(1) = od(2) = od(3) = 1$ ,  $od(4) = 3$ ,  $od(5) = 0$ ,  $id(1) = id(3) = id(4) = id(5) = 1$ ,  $id(2) = 2$ .

Ориентированный граф не является, вообще говоря, конфигурацией в смысле нашего исходного определения. Совокупности упорядоченных подмножеств конечного множества можно рассматривать как некоторое обобщение понятия конфигурации. Матрицы инцидентности для орграфов не рассматриваются. Напротив, матрица смежности является одним из основных объектов, связанных с орграфами.

Рассмотрим ориентированный граф  $G$  с  $n$  вершинами  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Пусть  $A(G) = [a_{ij}]$  —  $(0, 1)$ -матрица порядка  $n$ , определенная следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если в } G \text{ есть дуга } (v_i, v_j), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Матрицу  $A(G)$  назовем *матрицей смежности* для ориентированного графа  $G$ . Найдем матрицы смежности для орграфов, изображенных на рис. 5:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.4)$$

Отметим некоторые очевидные свойства матриц смежности  $A(G)$  орграфов  $G$  (для их иллюстрации могут служить матрицы из (6.4)). Ясно, например, что в  $i$ -й строке  $A(G)$  имеется  $od(v_i)$  единиц (т. е. столько, сколько дуг выходит из  $v_i$ ), а в  $j$ -м столбце —  $id(v_j)$  единиц (т. е. столько, сколько входит дуг в  $v_j$ ). На главной диагонали  $A(G)$  должны стоять нули. Матрица  $A(G)$  в противоположность матрице смежности обычного графа не обязана быть симметрической: она обладает этим свойством тогда и только тогда, когда любые две разные вершины орграфа либо не смежны, либо соединены двумя противоположно направленными дугами. Легко видеть также, что общее число единиц в  $A(G)$  равно числу дуг в орграфе  $G$ .

Отметим, что по любой  $(0, 1)$ -матрице  $A$  порядка  $n$  с нулями на главной диагонали можно построить граф  $G$  на  $n$  вершинах, для которого  $A$  будет его матрицей смеж-

ности  $A(G)$ . Для этого берем множество каких-либо элементов  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  в качестве множества вершин  $G$  и проводим дугу с началом в  $v_i$  и концом в  $v_j$  во всех тех случаях, когда в  $A$  имеем  $a_{ij} \neq 0$ . Так же, как для обычных графов, можно определить изоморфизм ориентированных графов.

Пусть заданы орграф  $G_1$  на множестве вершин  $V_1$  и орграф  $G_2$  на множестве вершин  $V_2$ . *Изоморфизмом*  $G_1$  и  $G_2$  называется такое взаимно однозначное отображение  $\varphi$  множества  $V_1$  на  $V_2$ , что если  $(v, w)$  — дуга в  $G_1$ , то  $(\varphi(v), \varphi(w))$  — дуга в  $G_2$ , и, напротив, если  $(x, y)$  — дуга в  $G_2$ , то  $(v, w)$  — дуга в  $G_1$  для  $v, w$  со свойством  $\varphi(v) = x, \varphi(w) = y$ .

*Маршрутом* в ориентированном графе  $G$  называется последовательность его вершин  $(v_0, v_1, \dots, v_r)$ , если  $(v_{i-1}, v_i)$  — дуги графа  $G$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ). Число  $r$  называется *длиной* маршрута. Замкнутый маршрут (т. е. при  $v_r = v_0$ ) длины  $r > 1$ , для которого все вершины, кроме первой и последней, различны, называется *контуром*. Граф, изображенный на рис. 5, а, дает пример контура длины 4. Ясно, что все контуры одинаковой длины изоморфны между собой. Как и в случае обычных графов, ориентированные графы определяются своими матрицами смежности с точностью до изоморфизма.

## ПЕРЕЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ И (0, 1)-МАТРИЦЫ

### § 7. Перманенты (0, 1)-матриц

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые известные комбинаторные задачи и способы их решения с помощью перманентов (0, 1)-матриц.

**Системы различных представителей.** Пусть на некотором предприятии имеется  $n$  свободных рабочих мест и  $n$  работников, желающих занять эти места. Предположим, что каждое место может быть без ущерба для производства занято какими-либо  $k$  работниками, а, с другой стороны, каждый работник способен занять какие-либо  $k$  мест. Спрашивается, можно ли распределить работников по этим местам с учетом интересов производства, и если да, то сколькими способами это можно сделать?

Сформулируем эту задачу в терминах (0, 1)-матриц. Перенумеруем работников и рабочие места числами от 1 до  $n$ . Через  $X_i$  обозначим множество работников, которые способны работать на месте  $i$ . Рассмотрим далее следующую (0, 1)-матрицу  $A_n = [a_{ij}]$  порядка  $n$ :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-й работник может работать на месте } i, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Ясно, что матрица  $A_n$  есть не что иное, как матрица инцидентности для конфигурации  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  на множестве  $Z_n$ . Она имеет  $k$  единиц в каждой строке и каждом столбце.

Пусть теперь  $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$  — произвольная конфигурация на  $n$ -множестве  $S$ . Назовем *системой различных представителей* (с. р. п.) для  $\mathcal{S}$  такую последовательность  $(s_1, s_2, \dots, s_m)$ , что  $s_i \in S_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), и все эти элементы попарно различны между собой.

Предположим, что поставленная нами задача имеет решение. Тогда, очевидно, у конфигурации  $\{X_1, X_2, \dots$

$\dots, X_n\}$  есть с. р. п.; обратно, любая с. р. п. для  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  дает решение задачи. Таким образом, решений задачи имеется столько, сколько можно выбрать с. р. п. для конфигурации  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ .

Посмотрим теперь, как с. р. п. связаны с матрицами инцидентности. Пусть  $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$  — конфигурация на  $n$ -множестве  $S$ . Если  $\mathcal{S}$  имеет с. р. п., то ясно, что  $m \leq n$ . Таким образом, для матрицы инцидентности  $A = [a_{ij}]$  конфигурации  $\mathcal{S}$  можно определить  $\text{per } A$  (см. § 3). Этот перманент положителен, если найдется такая  $m$ -выборка без повторений  $\sigma$  из  $n$  номеров столбцов, что  $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} \dots a_{m\sigma(m)} \neq 0$ , а в противном случае  $\text{per } A = 0$ . Но ясно, что если  $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} \dots a_{m\sigma(m)} \neq 0$ , то соответствующие элементы  $s_{\sigma(1)}, s_{\sigma(2)}, \dots, s_{\sigma(m)}$  образуют с. р. п. для конфигурации  $\mathcal{S}$ , так как они попарно различны между собой и  $s_{\sigma(i)} \in S_i$  (по построению матрицы инцидентности). Далее,  $\text{per } A$  равен, очевидно, числу таких ненулевых произведений  $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} \dots a_{m\sigma(m)}$ .

Итак, мы доказали следующее утверждение.

**Теорема 7.1.** *Количество с. р. п. для конфигурации  $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$  на  $n$ -множестве  $S$ , где  $m \leq n$ , равно перманенту ее матрицы инцидентности.*

Возвратимся к нашей исходной задаче. По теореме 7.1 ее решение найдется в том и только том случае, когда  $\text{per } A_n \neq 0$  для матрицы инцидентности  $A_n = [a_{ij}]$  конфигурации  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ . В свою очередь последнее условие выполняется тогда и только тогда, когда имеется такая подстановка  $\sigma$  на  $Z_n$ , что  $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} \neq 0$ . Совокупность мест  $(1, \sigma(1)), (2, \sigma(2)), \dots, (n, \sigma(n))$ , для которой выполнено это условие, называется *положительной диагональю*  $(0, 1)$ -матрицы  $A$ . Итак, для решения задачи нам нужно выяснить, существует ли положительная диагональ в  $(0, 1)$ -матрице  $A$  с  $k$  единицами в каждой строке и каждом столбце. Перманент матрицы даст нам число решений.

**Условие положительности диагонали квадратной  $(0, 1)$ -матрицы.** Выведем критерий равенства нулю всех диагоналей квадратной матрицы. Его невыполнение будет условием существования в матрице положительной диагонали.

Отметим предварительно два свойства перманентов квадратных матриц. Для матрицы  $A$  размера  $m \times n$  через  $A(\alpha|\beta)$ , где  $\alpha \subset Z_m$ ,  $\beta \subset Z_n$ , будем обозначать подматрицу  $A$ , полученную из нее вычеркиванием строк с номерами из  $\alpha$  и столбцов с номерами из  $\beta$ .



1) Для перманента матрицы  $A$  размера  $m \times n$  при любом  $i$  справедливо

$$\text{per } A = \sum_{j=1}^n a_{ij} \text{per } A(i | j). \quad (7.1)$$

Эта формула совершенно аналогична соотношению (3.9) для определителей, и так же называется *разложением перманента по  $i$ -й строке*.

2) Пусть матрица  $A$  размера  $m \times n$  с  $m \leq n$  имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ O & D \end{bmatrix}, \quad (7.2)$$

где  $B, D$  — подматрицы, у которых число строк не превосходит числа столбцов,  $O$  — нулевая подматрица. Тогда

$$\text{per } A = \text{per } B \cdot \text{per } D.$$

Равенства (7.1), (7.2) непосредственно следуют из определения перманента.

**Теорема 7.2.** Пусть  $A = [a_{ij}]$  —  $(0, 1)$ -матрица порядка  $n$ . Для того чтобы каждая ее диагональ содержала 0, необходимо и достаточно, чтобы в  $A$  существовала подматрица из нулей такого размера  $s \times t$ , что  $s + t = n + 1$ .

**Доказательство.** **Достаточность.** Пусть такая нулевая подматрица в  $A$  имеется. Поскольку перманент не зависит от произвольных перестановок строк и столбцов (см. § 3), то для удобства можно предположить, что эта подматрица расположена в левом нижнем углу, т. е. что

$$A = \underset{s}{\left[ \begin{array}{cc} B & C \\ O & D \end{array} \right]}_{\underbrace{\quad}_{t}}.$$

Таким образом, размер подматрицы  $B$  есть  $(n - s) \times t$ . Любая диагональ матрицы должна содержать по одному элементу из первых  $t$  столбцов. Поэтому, если мы ищем положительную диагональ, то элементы этих столбцов должны принадлежать попарно различным строкам с номерами  $1, 2, \dots, n - s$ . Однако  $n - s = t - 1 < t$ , и этому условию удовлетворить нельзя, т. е. положительной диагонали нет.

**Необходимость.** Доказательство проводим по индукции. Пусть  $\text{per } A = 0$ . При  $n = 1$  утверждение очевидно, так как  $A = [0]$ . Пусть оно доказано для всех

матриц порядков, меньших  $n$ . При нулевой матрице  $A$  порядка  $n$  утверждение также очевидно. Пусть теперь в  $A$  есть элемент  $a_{ij} \neq 1$ . Запишем тогда разложение  $\text{per } A$  по  $i$ -й строке (см. (7.1)):

$$\text{per } A = \sum_{j=1}^n a_{ij} \text{per } A(i|j) = 0.$$

Так как  $a_{ij} \neq 1$ , то  $\text{per } A(i|j) = 0$ . Но  $A(i|j)$  есть матрица порядка  $n-1$ , и для нее, по предположению индукции, наше утверждение доказано, т. е. в ней найдется такая нулевая подматрица размера  $s_1 \times t_1$ , что  $s_1 + t_1 = n - 1 + 1 = n$ .

Переставим строки и столбцы  $A$  так, чтобы эта нулевая подматрица оказалась в левом нижнем углу. При этом приходим к матрице  $B$  с тем же перманентом, что и у  $A$ :

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} C & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} s_1 \\ \underbrace{O}_{t_1} \end{matrix} & \begin{bmatrix} C & E \\ O & D \end{bmatrix} \end{matrix},$$

где  $O$  — нулевая матрица размера  $s_1 \times t_1$ ,  $s_1 + t_1 = n$ ,  $C$  — матрица размера  $(n - s_1) \times t_1$ ,  $D$  — матрица размера  $s_1 \times (n - t_1)$ . Следовательно,  $C$ ,  $D$  — квадратные матрицы соответственно порядков  $t_1$ ,  $s_1$ . Так как  $\text{per } B = \text{per } A = 0$ , из (7.2) получаем, что

$$\text{per } B = \text{per } C \cdot \text{per } D = 0,$$

т. е. либо  $\text{per } C = 0$ , либо  $\text{per } D = 0$ . Без ограничения общности можем предположить, что  $\text{per } C = 0$ . Тогда, по предположению индукции, в  $C$  найдется нулевая подматрица размера  $u \times v$  с  $u + v = t_1 + 1$ . Пусть она расположена в строках  $B$  с номерами  $i_1, i_2, \dots, i_u$  и столбцах с номерами  $j_1, j_2, \dots, j_v$ . Рассмотрим теперь подматрицу  $B[i_1, i_2, \dots, i_u, t_1 + 1, t_1 + 2, \dots, n | j_1, j_2, \dots, j_v]$  (обозначение см. в § 1). Это — нулевая подматрица размера  $(u + n - t_1) \times v$ , где  $u + n - t_1 + v = n + 1$ . Итак, мы обнаружили в  $B$  нулевую подматрицу размера  $s \times t$  с  $s + t = n + 1$ . Так как  $A$  отличается от  $B$  лишь порядком записи строк и столбцов, то такая же подматрица найдется и в  $A$ .

**Положительность перманента матрицы из  $\mathfrak{A}(k, n)$ .** Применим полученное нами условие равенства нулю перманента к задаче о распределении работников по рабочим местам, рассмотренной в начале параграфа. Обозначим через  $\mathfrak{A}(k, n)$  совокупность  $(0, 1)$ -матриц порядка  $n$

с  $k$  единицами в каждой строке и каждом столбце. Матрица инцидентности  $A_n$ , построенная выше для решения нашей задачи, есть матрица из  $\mathfrak{A}(k, n)$ .

**Теорема 7.3.** *Перманент любой матрицы из  $\mathfrak{A}(k, n)$  положителен.*

**Доказательство.** Предположим от противного, что  $A \in \mathfrak{A}(k, n)$  и  $\text{per } A = 0$ . Тогда по теореме 7.2 существуют такие перестановки строк и столбцов и соответствующие им матрицы подстановки  $P$  и  $Q$ , что

$$P^T A Q = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix},$$

где в левом нижнем углу стоит нулевая матрица размера  $s \times t$  с  $s + t = n + 1$ . Подсчитаем теперь число единиц в матрицах  $B$  и  $D$ . Так как  $A \in \mathfrak{A}(k, n)$ , то в каждом столбце  $B$  и в каждой строке  $D$  имеется в точности по  $k$  единиц. Всего же в  $A$  по условию  $nk$  единиц, поэтому  $nk \geq tk + sk = (t + s)k$ . Таким образом,  $n \geq t + s$ , что невозможно, так как  $s + t = n + 1$ . Полученное противоречие доказывает теорему.

Возвращаясь к исходной задаче, мы видим, что по теореме 7.3  $\text{per } A_n > 0$ , так как  $A_n \in \mathfrak{A}(k, n)$ . Следовательно, матрица имеет положительную диагональ, конфигурация  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  обладает системой различных представителей и требуемое назначение работников всегда возможно. Более трудным оказывается вопрос о том, сколькими способами это можно сделать. К нему мы вернемся в § 8. А сейчас перейдем к другим задачам на перечисление.

**Задача о беспорядках.** Предположим, что в очередном туре первенства республики по футболу  $n$  матчей должны состояться в  $n$  городах. Эти матчи будут обслуживать  $n$  главных судей, проживающих в тех же городах, но все из разных городов. Спрашивается, сколькими способами можно осуществить такое назначение судей на матчи, чтобы никакой судья не судил матч в своем городе? Эта и подобные ей задачи называются в комбинаторике *задачами о встречах*.

Найдем математическую формулировку этой задачи. Если города перенумеровать числами от 1 до  $n$  и каждому судье присвоить номер того города, где он проживает, то любое назначение судей можно рассматривать как подстановку  $\sigma$  на множестве  $Z_n$ . Нужные нам подстановки выделяются, очевидно, требованием  $\sigma(i) \neq i$  для любого  $i = 1, 2, \dots, n$ , т. е. число в нижней строке под-

становки  $\sigma$  в ее каноническом представлении обязательно отличается от верхнего. Такие подстановки называются *беспорядками*. Нас, следовательно, интересует число беспорядков степени  $n$ .

Известно, что число всех подстановок степени  $n$  равно  $n!$ . Это число получается из рассмотрения перманента матрицы  $J_n$  (см. § 3). Вычтем из  $J_n$  единичную матрицу  $I_n$  порядка  $n$ . Приходим к матрице  $D_n = J_n - I_n$ :

$$D_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Любой положительной диагонали этой матрицы соответствует некоторый беспорядок, и, напротив, каждому беспорядку степени  $n$  соответствует некоторая положительная диагональ  $D_n$ . Таким образом, число  $r_n$  беспорядков степени  $n$  равно  $\text{per } D_n$ .

Для нахождения этого числа разложим  $\text{per } D_n$  по первой строке (см. (7.1)):

$$\text{per } D_n = \sum_{j=2}^n \text{per } D_n(1|j). \quad (7.3)$$

Рассмотрим квадратную матрицу  $D_n(1|j)$  порядка  $n-1$ . При любом  $j \geq 2$  она имеет строку из единиц и диагональ с  $n-2$  нулями. Например,

$$D_5(1|2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Не изменяя величины перманента, можно строку из единиц сделать первой. Слагаемые перманента матрицы  $D_n(1|j) = [d_{ij}]$  разобьем на две группы: а)  $d_{1\sigma(1)} = d_{11}$ ; б)  $d_{1\sigma(1)} \neq d_{11}$ . Ясно, что сумма слагаемых первой группы дает  $D_{n-2}$ . Любое слагаемое второй группы представляет собой произведение, которое не зависит от  $d_{11}$ , т. е. слагаемые второй группы в сумме дают столько единиц, сколько имеется положительных диагоналей в матрице  $D_{n-1}$ , т. е. число, равное  $\text{per } D_{n-1}$ . Итак, мы получили, что

$$\text{per } D_n(1|j) = \text{per } D_{n-1} + \text{per } D_{n-2} \quad (7.4)$$

для любого  $j \geq 2$ , и по (7.3)

$$\text{per } D_n = (n-1) (\text{per } D_{n-1} + \text{per } D_{n-2}). \quad (7.5)$$

Имеем  $\text{per } D_1 = 0$ ,  $\text{per } D_2 = 1$ . Далее,  $D_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  
 $\text{per } D_3 = 2$ . Ничто не мешает нам предположить, что

$$\begin{aligned} r_n = \text{per } D_n &= n! \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{1}{i!} = \\ &= n! \left( 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right). \end{aligned} \quad (7.6)$$

Докажем эту формулу индукцией по  $n$ . Мы проверили ее для  $n = 1, 2, 3$ ; предположим, что она справедлива для беспорядков всех степеней, меньших  $n$ . Тогда по (7.5) получаем

$$\begin{aligned} \text{per } D_n &= \\ &= (n-1) \left[ (n-1)! \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \frac{1}{i!} + (n-2)! \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i \frac{1}{i!} \right] = \\ &= (n-1) \left[ (n-2)! n \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i \frac{1}{i!} + (n-1)! (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} \right] = \\ &= n! \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i \frac{1}{i!} + n! (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} + \\ &\quad + (n-1)! (-1)^n \frac{1}{(n-1)!} = n! \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{1}{i!}. \end{aligned}$$

Таким образом, формула (7.6) доказана. Мы получили тем самым следующий результат.

**Теорема 7.4.** Число беспорядков  $r_n$  степени  $n$  выражается формулой (7.6).

Приведем еще несколько значений чисел беспорядков, которые находим по (7.6):  $r_4 = 9$ ,  $r_5 = 44$ ,  $r_6 = 265$ . Дальше вычисления становятся все более громоздкими, но можно заметить, что выражение в скобках в (7.6) с ростом  $n$  делается сколь угодно близким к числу  $e^{-1}$ , поэтому справедлива приближенная формула:  $r_n \approx n! e^{-1}$ .

**Несколько результатов о перечислении.** Прежде чем перейти к следующей комбинаторной задаче, докажем несколько теорем перечислительного характера, которые понадобятся в дальнейшем. Некоторые из них представляют сами по себе значительный интерес.

Пусть нам даны  $N$  предметов, которые могут обладать  $k$  заданными свойствами  $P_1, P_2, \dots, P_k$ . Обозначим через  $N_{i_1 i_2 \dots i_r}$  для  $1 \leq r \leq k$  число предметов, обладающих свойствами  $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_r}$  (но, возможно, и другими).

**Теорема 7.5.** Число  $N_0$  предметов, не обладающих ни одним из свойств  $P_1, P_2, \dots, P_k$ , представимо в виде

$$N_0 = N - \sum_{i=1}^k N_i + \sum_{i_1 < i_2} N_{i_1 i_2} - \sum_{i_1 < i_2 < i_3} N_{i_1 i_2 i_3} + \dots + (-1)^k N_{12\dots k}, \quad (7.7)$$

где суммирование по  $i_1 < i_2 < \dots < i_r$  означает, что берутся слагаемые со всеми индексами, удовлетворяющими этому условию.

**Доказательство.** Предположим, что мы составляем список предметов, имеющих какое-либо из свойств  $P_1, P_2, \dots, P_k$ , и хотим, чтобы каждый из этих предметов появился в этом списке в точности один раз. Поступаем при этом так: записываем  $N_1$  предметов, имеющих свойство  $P_1$ , затем  $N_2$  предметов со свойством  $P_2, \dots, N_k$  пред-

метов со свойством  $P_k$ , всего  $\sum_{i=1}^k N_i$  предметов; и все эти

предметы пометим знаком  $+$ . Затем выписываем  $N_{12}$  предметов, обладающих свойствами  $P_1$  и  $P_2$ ,  $N_{13}$  предметов со свойствами  $P_1$  и  $P_3, \dots, N_{k-1, k}$  предметов со свойствами  $P_{k-1}$  и  $P_k$ , всего  $\sum_{i_1 < i_2} N_{i_1 i_2}$  предметов; и все пред-

меты, записанные на этом втором шаге, помечаем знаком  $-$ . Поступаем дальше таким же образом: на 3-м шаге выписываем  $\sum_{i_1 < i_2 < i_3} N_{i_1 i_2 i_3}$  предметов, имеющих 3 свойства,

со знаком  $+$ ,  $\dots$ , на  $k$ -м шаге  $- N_{12\dots k}$  предметов, имеющих  $k$  свойств, со знаком  $(-1)^{k-1}$ . Затем просматриваем список и вычеркиваем пары одинаковых предметов, снабженных противоположными знаками. Покажем, что таким способом мы действительно придем к желаемому списку.

Пусть некоторый предмет имеет в точности  $r$  из свойств  $P_1, P_2, \dots, P_k$ . Тогда он будет записан лишь на каждом из первых  $r$  шагов. При этом на шаге  $s$  он встретится столько раз, сколькими наборами из  $s$  различных свойств он обладает, т. е.  $\binom{r}{s}$  раз. На нечетных шагах он помечался  $+$ , на четных  $-$ .

Таким образом, в окончательном списке этот предмет останется в количестве, равном  $\sum_{i=1}^r (-1)^{i-1} \binom{r}{i} = \binom{r}{1} - \binom{r}{2} + \dots + (-1)^{r-1} \binom{r}{r}$ . По формуле бинома это число равно  $1 - (1 - 1)^r = 1$ , т. е. составленный окончательный список содержит каждый предмет, обладающий хотя бы одним из свойств  $P_1, P_2, \dots, P_k$ , в точности один раз, и всего таких предметов

$$N_k = \sum_{i=1}^k N_i - \sum_{i_1 < i_2} N_{i_1 i_2} + \dots + (-1)^{k-1} N_{12\dots k}.$$

Следовательно, число предметов, не имеющих свойств  $P_1, P_2, \dots, P_k$ , равно  $N - N_k$ , т. е. приходим к формуле (7.7).

Утверждение теоремы выражает известный принцип включения — исключения — одно из основных средств перечислительной комбинаторики.

**Лемма 7.6.** *Справедливы следующие два тождества для биномиальных коэффициентов при любых целых неотрицательных числах  $k, n$ , где  $k \leq n$  ( $\binom{n}{a}$  при  $a < 0$  формально полагаем равным нулю):*

$$\text{а) } \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k};$$

$$\text{б) } \binom{n-k+1}{k} - \binom{n-k-1}{k-2} = \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k}.$$

**Доказательство.** Докажем б). По определению

$$\binom{n-k+1}{k} = \frac{(n-k+1)(n-k)\dots(n-2k+2)}{k!},$$

$$\binom{n-k-1}{k-2} = \frac{(n-k-1)(n-k-2)\dots(n-2k+2)}{(k-2)!}.$$

Следовательно,

$$\binom{n-k+1}{k} - \binom{n-k-1}{k-2} =$$

$$= \frac{(n-k-1)(n-k-2)\dots(n-2k+2)}{(k-2)!} \times$$

$$\times \left( \frac{(n-k+1)(n-k)}{k(k-1)} - 1 \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(n-k-1)(n-k-2)\dots(n-2k+2)}{(k-2)!} \cdot \frac{n(n-2k+1)}{k(k-1)} = \\
&= \frac{n}{n-k} \cdot \frac{(n-k)(n-k-1)\dots(n-2k+1)}{k!} = \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k}.
\end{aligned}$$

Утверждение а) доказывается аналогично.

**Теорема 7.7.** Пусть даны  $n$  предметов, перенумерованных числами  $1, 2, \dots, n$ . Число способов такого выбора каких-либо  $k$  из этих предметов, чтобы в полученном наборе не было предметов с соседними номерами, равно  $\binom{n-k+1}{k}$ .

**Доказательство.** Обозначим искомое число через  $c(n, k)$ . Разделим наши наборы на два типа по следующему признаку: содержит набор  $n$ -й предмет или нет. Число наборов первого типа равно  $c(n-2, k-1)$ , так как остальные предметы могут составлять набор рассматриваемого вида из  $k-1$  предметов, в который не должен входить  $n-1$ -й предмет. Число наборов второго типа равно  $c(n-1, k)$ . Итак,

$$c(n, k) = c(n-1, k) + c(n-2, k-1). \quad (7.8)$$

Очевидно, что  $c(n, 1) = n$  для любого  $n$ .

Предположим теперь по индукции, что теорема справедлива для любого числа предметов, меньшего  $n$ . Тогда  $c(n-1, k) = \binom{n-k}{k}$ ,  $c(n-2, k-1) = \binom{n-k}{k-1}$ . Из (7.8)

следует, что  $c(n, k)$  должно равняться сумме этих чисел. Применяя утверждение а) леммы 7.6, получаем утверждение теоремы.

**Теорема 7.8.** Пусть  $n$  предметов, перенумерованных числами  $1, 2, \dots, n$ , расположены в порядке их номеров по окружности. Тогда число возможностей такого выбора  $k$  из них, что в наборе не окажется соседних предметов, равно  $\frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k}$ .

**Доказательство.** Очевидно, что из наборов, рассмотренных в теореме 7.7, нужно лишь исключить те, в которых встречаются одновременно  $1$ -й и  $n$ -й предметы. Ясно, что таких наборов будет  $c(n-4, k-2)$ , т. е. по теореме 7.7  $\binom{n-k-1}{k-2}$ . Применяя утверждение б) леммы 7.6, приходим к утверждению теоремы.

**Задача о супружеских парах.** Рассмотрим еще одну комбинаторную задачу, связанную с перманентами



$(0, 1)$ -матриц. Пусть за круглым столом нужно разместить  $n$  супружеских пар таким образом, чтобы мужчины чередовались с женщинами и ни один муж не сидел рядом со своей женой. Задача о числе таких размещений называется *задачей о супружеских парах*. Как и в задаче о беспорядках, нахождение этого числа можно связать с вычислением перманента  $(0, 1)$ -матрицы.

Прежде всего дадим задаче чисто математическую формулировку. Посмотрим сначала, сколькими способами можно рассадить жен, которые по условию не должны сидеть рядом. Ясно, что число таких способов равно  $2n!$ . Полагая эти способы равноценными, фиксируем один из них и фактически будем искать число способов размещения мужей, если жены уже заняли свои места. Это число обозначим через  $u_n$ . Перенумеруем числами от 1 до  $n$  занятые места и тот же номер  $i$  присвоим незанятому месту, расположенному, допустим, справа от места  $i$ . Как легко теперь заметить, задача о нахождении числа  $u_n$  эквивалентна задаче о числе всех таких подстановок  $\sigma$  степени  $n$ , что  $\sigma(i) \neq i, i+1$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ),  $\sigma(n) \neq n, 1$ , так как все такие подстановки взаимно однозначно соответствуют всем возможным способам размещения. Скажем, при  $n = 5$  подстановка

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

приводит к нужному размещению, а подстановка

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

нет, так как  $\tau(5) = 1$ .

Аналогия с задачей о беспорядках подсказывает, как связать  $u_n$  с величиной некоторого перманента. Действительно, рассмотрим матрицу

$$M_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ясно, что  $u_n$  равно  $\text{per } M_n$ , так как ненулевые диагонали  $M_n$  находятся во взаимно однозначном соответствии с описанным выше множеством подстановок. Пусть  $S_n$  — матрица подстановки, соответствующей циклу  $(1, 2, \dots$

...,  $n$ ). Тогда, очевидно,  $u_n = \text{per } M_n = \text{per } (J_n - I_n - C_n)$ . Пусть, например,  $n = 4$ . Тогда

$$M_4 = J_4 - I_4 - C_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

и, производя разложение по первой строке (см. (7.1)), получаем

$$u_4 = \text{per} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2.$$

Подстановки, дающие нужное размещение, — это (1 3) (2 4) и (1 4 3 2). Всего способов искомого размещения четырех пар  $2 \cdot 4! \cdot u_4 = 96$ .

Мы не будем в общем виде непосредственно вычислять  $\text{per } M_n$ . Найдем его значение косвенным путем, используя теоремы 7.5, 7.8.

**Теорема 7.9.** Число  $r_n$  размещений в задаче о супружеских парах находится по формуле  $r_n = 2n!u_n$ , где

$$u_n = \sum_{r=0}^{2n} (-1)^r \frac{2n}{2n-r} \binom{2n-r}{r} (n-r)!. \quad (7.9)$$

**Доказательство.** Рассмотрим  $2n$  свойств подстановок  $\sigma$  степени  $n$ . Пусть  $P_1: \sigma(1) = 1$ ;  $P_2: \sigma(1) = 2$ ;  $P_3: \sigma(2) = 2$ ;  $P_4: \sigma(2) = 3$ ; ...;  $P_{2n-1}: \sigma(n) = n$ ;  $P_{2n}: \sigma(n) = 1$ . Каково число подстановок, имеющих  $r$  из этих свойств? Ясно, что если эти свойства несовместимы, то число таких подстановок равно нулю, а если они совместимы, то  $r$  мест в нижнем ряду подстановки оказываются фиксированными, зато остальные могут быть какими угодно, т. е. таких подстановок  $(n-r)!$ . Заметим, что несовместимы лишь пары «соседних» свойств  $P_i, P_{i+1}$  ( $i = 1, 2, \dots, 2n-1$ ) и  $P_n, P_1$ . Применяя теорему 7.8, получаем, что имеется  $\frac{2n}{2n-r} \binom{2n-r}{r}$  наборов из  $r$  совместимых свойств.

Нас фактически интересует число подстановок, для которых ни одно из свойств  $P_1, P_2, \dots, P_{2n}$  не выполняется, т. е. возникает ситуация, в которой можно применить принцип включения — исключения. Числа  $N_{i_1 i_2 \dots i_r}$  (в обозначениях теоремы 7.5) равны нулю, если свойства  $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_r}$  несовместимы, и  $(n-r)!$ , если

они совместимы. Таким образом, в нашем случае

$$\sum_{i_1 < i_2 \dots < i_r} N_{i_1 i_2 \dots i_r} = \frac{2n}{2n-r} \binom{2n-r}{r} (n-r)!,$$

$$r = 1, 2, \dots, 2n.$$

Общее число «предметов» (в нашем случае — подстановок степени  $n$ ) равно  $n!$ , число свойств равно  $2n$ . Подставляя найденные значения в формулу (7.7), получаем утверждение теоремы.

*Следствие.* Перманент матрицы  $M_n = J_n - I_n - C_n$  находится по формуле (7.9).

## § 8. Границы для перманентов

Рассматривая в предыдущем параграфе задачу о назначениях  $n$  работников на  $n$  рабочих мест, мы видели, что она имеет решение. Однако легко представить такую ситуацию, что не все в принципе возможные назначения являются на самом деле равноценными. Чтобы иметь более свободный выбор и учесть различные дополнительные факторы, связанные с рациональной организацией производства, хорошо бы получить побольше различных вариантов назначений. Поэтому в подобных задачах интересно знать количество решений, чтобы лучше оценить перспективы наиболее приемлемого выбора.

Как мы установили в § 7, адекватными математическими формулировками нашей задачи являются:

а) нахождение условий существования и числа систем различных представителей для конфигураций на конечном множестве;

б) вычисление перманента  $(0, 1)$ -матрицы.

Мы уже замечали, что вычисление перманента — задача весьма трудная. Поэтому представляет интерес получение для перманентов границ, в которых они могут находиться, — нижних и верхних. В этом параграфе мы укажем несколько таких границ для перманентов прямоугольных  $(0, 1)$ -матриц. Напомним, что задача о системах различных представителей формулировалась для систем подмножеств с произвольным числом членов. Такие задачи встречаются часто, чем и вызван интерес к вычислению и оценкам для перманентов прямоугольных  $(0, 1)$ -матриц, представляющих собой матрицы инцидентности конфигураций, которые возникают в этих задачах.

**Матрица  $A_n$  и матрицы подстановки.** Вначале познакомимся ближе со строением матриц класса  $\mathfrak{A}(k, n)$ , к которому относится матрица инцидентности  $A_n$  для задачи о назначениях (см. § 7). Покажем, что ее можно представить в виде суммы матриц подстановки.

**Теорема 8.1.** *Для матрицы  $A \in \mathfrak{A}(k, n)$  всегда существует представление*

$$A = \sum_{j=1}^k P_j, \quad (8.1)$$

где  $P_1, P_2, \dots, P_k$  — матрицы подстановки.

**Доказательство.** Матрица  $A \in \mathfrak{A}(1, n)$  есть матрица подстановки. Используем далее индукцию по  $k$ . По теореме 7.3 в матрице  $A \in \mathfrak{A}(k, n)$  можно всегда найти положительную диагональ  $(1, \sigma(1)), (2, \sigma(2)), \dots, (n, \sigma(n))$ , где  $\sigma$  — некоторая подстановка степени  $n$ . Пусть  $P_1$  — матрица подстановки с единицами на этой положительной диагонали и нулями на всех остальных. Тогда  $A - P_1 \in \mathfrak{A}(k-1, n)$ ; по предположению индукции существует  $k-1$  таких матриц подстановки  $P_2, P_3, \dots, P_k$ , что  $A - P_1 = \sum_{j=2}^k P_j$ ; следовательно,  $A = \sum_{j=1}^k P_j$ .

Уже из этой теоремы можно заключить, что решение задачи о назначениях при  $k > 1$  не единственно; более того, решения существуют при любом из  $k$  возможных назначений какого-либо конкретного работника — они даются положительными диагоналями матрицы инцидентности  $A_n$ , соответствующими  $k$  различным матрицам подстановки  $P_1, P_2, \dots, P_k$ .

**Равенство нулю перманента прямоугольной  $(0, 1)$ -матрицы.** Теорема 7.2 дает критерий равенства нулю перманента  $(0, 1)$ -матрицы порядка  $n$ . Ее легко обобщить на матрицы размера  $m \times n$  с  $m < n$ .

**Теорема 8.2.** *Пусть  $A$  —  $(0, 1)$ -матрица размера  $m \times n$  с  $m \leq n$ . Тогда  $\text{per } A = 0$  в том и только том случае, когда  $A$  содержит нулевую подматрицу размера  $s \times t$  с  $s + t = n + 1$ .*

**Доказательство.** При  $m = n$  это в точности утверждение теоремы 7.2. Пусть  $m < n$ . С помощью  $A$  образуем квадратную матрицу порядка  $n$ :

$$B = \begin{bmatrix} A \\ J_{n-m, n} \end{bmatrix}. \quad (8.2)$$

Вычислим ее перманент. Возьмем произвольную положи-

тельную диагональ в  $A$  и соответствующую ей неупорядоченную  $m$ -выборку  $\sigma$  без повторений из множества  $Z_n$ . Эту выборку можно рассматривать как частичную подстановку на  $Z_n$  с  $m$  «занятыми» и  $n - m$  «свободными» местами в нижней строке канонической записи подстановки. Ясно, что произвольным способом располагая числа  $m + 1, m + 2, \dots, n$  на свободных местах, можно получить в точности  $(n - m)!$  положительных диагоналей  $B$ , которые в первых  $m$  строках совпадут со взятой положительной диагональю  $A$ . Итак,

$$\operatorname{per} B = (n - m)! \operatorname{per} A. \quad (8.3)$$

По теореме 7.2  $\operatorname{per} B$  равен нулю тогда и только тогда, когда в  $B$  найдется подматрица из нулей размера  $s \times t$ , где  $s + t = n + 1$ . В силу (8.2), (8.3) это же условие справедливо для  $A$ .

**Теорема 8.3.** Пусть  $A$  —  $(0, 1)$ -матрица размера  $m \times n$  и число единиц в каждой ее строке не меньше чем  $m$ . Тогда  $\operatorname{per} A > 0$ .

**Доказательство.** Найдем положительную диагональ в матрице  $A$ . Предположим, что нам уже удалось выбрать  $r$  единиц на местах  $(1, \sigma(1)), (2, \sigma(2)), \dots, (r, \sigma(r))$ , где  $\sigma$  —  $r$ -выборка без повторений из  $Z_n$  ( $1 \leq r < m$ ). Тогда по условию в  $r + 1$ -й строке  $A$  всегда найдется единица, не принадлежащая столбцам с номерами  $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(r)$ . Номер столбца, где она находится, обозначим  $\sigma(r + 1)$  и получаем тем самым  $r + 1$ -выборку без повторений. Ясно, что таким путем шаг за шагом построим положительную диагональ матрицы  $A$ .

**Оценка снизу перманента  $(0, 1)$ -матрицы.** Сейчас докажем теорему о перманентах  $(0, 1)$ -матриц, из которой будет следовать оценка снизу для числа с. р. п. в конфигурации и, в частности, числа решений задачи о назначениях.

**Теорема 8.4.** Пусть  $A = [a_{ij}]$  —  $(0, 1)$ -матрица размера  $m \times n$  с  $m \leq n$ , с числом единиц в каждой строке, не меньшим  $k$ . Если  $k \geq m$ , то

$$\operatorname{per} A \geq k! / (k - m)!$$

Если  $k < m$ ,  $\operatorname{per} A > 0$ , то

$$\operatorname{per} A \geq k!$$

**Доказательство.** Применим индукцию по числу строк  $A$ . Если  $k \geq m$ , то по теореме 8.3  $\operatorname{per} A > 0$ ; при  $k < m$  это обеспечивается условием теоремы, поэтому счи-

таем, что  $\text{per } A > 0$ . Очевидно, что  $\text{per } A \geq k = k!/(k-1)!$  при  $m = 1$ , т. е. теорема справедлива.

Пусть теперь  $m > 1$ , и предположим, что теорема доказана для всех матриц с числом строк, меньшим  $m$ . Так как  $\text{per } A > 0$ , то по теореме 7.2 в любой подматрице, состоящей из  $r$  строк матрицы  $A$ , не может быть больше  $n - r$  столбцов из нулей.

Предположим сначала, что для некоторого  $r$  ( $1 \leq r < m$ ) в  $A$  существует подматрица размера  $r \times n$ , в которой имеется  $n - r$  нулевых столбцов. Перестановками строк и столбцов матрицы  $A$  разместим их в левом нижнем углу. Другими словами, умножим  $A$  слева и справа на подходящие матрицы подстановки  $P^T$  и  $Q$ , чтобы выполнялось соотношение

$$P^T A Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} r \\ \underbrace{\quad}_{n-r} \end{matrix} \{ & \begin{matrix} O & D \end{matrix} \end{matrix}. \quad (8.4)$$

По условию в каждой строке матрицы  $D$  размера  $r \times r$  имеется не менее  $k$  единиц, где  $k \leq r$ . С другой стороны, по (7.2)

$$\text{per } A = \text{per } (P^T A Q) = \text{per } B \cdot \text{per } D > 0;$$

следовательно,  $\text{per } B > 0$ ,  $\text{per } D > 0$ . Тем самым, по предположению индукции, к  $D$  можно применить утверждение теоремы:  $\text{per } D \geq k!$ . Поэтому  $\text{per } A = \text{per } B \cdot \text{per } D \geq \text{per } B \cdot k! \geq k!$ .

Пусть теперь  $A$  не может быть приведена к виду (8.4), т. е. каждая ее подматрица размера  $r \times n$  ( $1 \leq r \leq m - 1$ ) содержит не больше  $n - r - 1$  нулевых столбцов. Запишем разложение  $A$  по первой строке (см. (7.1)):

$$\text{per } A = \sum_{j=1}^n a_{1j} \text{per } A(1|j). \quad (8.5)$$

Покажем, что  $\text{per } A(1|j) > 0$  для любого номера  $j$ .

Если бы этот перманент был равен нулю для какого-либо  $j$ , то по теореме 8.2 в  $A(1|j)$  для какого-нибудь  $r$  ( $1 \leq r < m$ ) нашлась бы нулевая подматрица размера  $r \times t$  с  $r + t = n - 1 + 1 = n$ , т. е. с  $n - r$  нулевыми столбцами, что невозможно, так как мы предполагаем, что такой подматрицы нет даже в самой  $A$ .

Каждая строка  $A(1|j)$  содержит не менее  $k$  единиц, и, по предположению индукции, теперь получаем

$$\text{per } A(1|j) \geq \begin{cases} (k-1)!, & k-1 < m-1, \\ (k-1)!/(k-m)!, & k-1 \geq m-1. \end{cases} \quad (8.6)$$

Но неравенство  $k - 1 < m - 1$  равносильно  $k < m$ , а  $(k - 1) \geq (m - 1)$  равносильно  $k \geq m$ . Поэтому при  $k < m$  из (8.5), (8.6) получаем

$$\text{per } A \geq \sum_{j=1}^n a_{1j} (k - 1)! = (k - 1)! \sum_{j=1}^n a_{1j} \geq (k - 1)! k = k!,$$

так как в строке  $A$  не меньше  $k$  единиц.

Совершенно аналогично при  $k \geq m$

$$\text{per } A \geq \sum_{j=1}^n a_{1j} \frac{(k - 1)!}{(k - m)!} = \frac{(k - 1)!}{(k - m)!} \sum_{j=1}^n a_{1j} \geq \frac{k!}{(k - m)!}.$$

Теорема доказана.

Ясно, что для квадратной матрицы  $A$  с не менее чем  $k$  единицами в каждой строке и положительным перманентом теорема 8.4 означает, что  $\text{per } A \geq k!$ . Если взять матрицу инцидентности  $A_n$  для задачи о назначениях, то она имеет в каждой строке  $k$  единиц и  $\text{per } A_n > 0$  (теорема 7.3). Следовательно, для нее выполнены условия теоремы 8.4, а это значит, что назначения можно произвести не менее чем  $k!$  различными способами.

Полученная в теореме 8.4 оценка имеет один существенный недостаток, который сказывается, например, в следующем: для квадратной  $(0, 1)$ -матрицы  $A$  с не менее чем  $k$  единицами в каждой строке теорема дает неравенство  $\text{per } A \geq k!$ , но лишь при том условии, если мы уже знаем, что  $\text{per } A > 0$ . Иначе обстоит дело в нескольких других оценках перманента снизу. Некоторые из них, относящиеся к квадратным  $(0, 1)$ -матрицам, мы сейчас приведем без доказательства.

**Теорема 8.5.** *Если  $A$  — квадратная  $(0, 1)$ -матрица порядка  $n$  с суммами элементов по строкам, равными  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , то*

$$\text{per } A \geq \prod_{i=1}^n \{r_i + i - n\}, \quad (8.7)$$

где  $\{r_i + i - n\}$  равно наибольшему из чисел 0 и  $r_i + i - n$ .

Теорема несложно доказывается индукцией по  $n$ . Известно также условие, при котором в (8.7) достигается равенство.

Оценка (8.7) полезна лишь для  $(0, 1)$ -матриц с большим числом единиц, а именно таких, для которых перестановками строк и столбцов можно добиться, чтобы в  $i$ -й строке было не менее  $n - i + 1$  единиц. В самом

деле, если для какого-либо  $i$  в  $i$ -й строке матрицы  $A$  имеется не более  $n - i$  единиц (например, в первой хотя бы один нуль), то (8.7) обращается в тривиальное утверждение:  $\text{per } A \geq 0$ .

Нахождение содержательных оценок для перманентов  $(0, 1)$ -матриц трудно еще и потому, что величина перманента зависит не только от таких легко обозримых параметров, как суммы по строкам или столбцам или количества единиц в матрице, но также в большой степени от расположения единиц. Например, матрица  $A$  порядка  $n$  может иметь  $n^2 - n$  единиц и всего лишь  $n$  нулей и тем не менее у нее будет нулевой перманент, если все нули находятся, например, в одном столбце. Поэтому ряд оценок перманента учитывает особенности расположения нулей в  $(0, 1)$ -матрице.

Назовем  $(0, 1)$ -матрицу порядка  $n$  *вполне неразложимой*, если никакими перестановками строк и столбцов ее нельзя привести к виду

$$\begin{bmatrix} B & C \\ O & D \end{bmatrix},$$

где  $O$  — нулевая подматрица размера  $s \times t$  с  $s + t = n$ .

**Теорема 8.6** [9]. Пусть  $A$  — вполне неразложимая  $(0, 1)$ -матрица порядка  $n$ . Тогда

$$\text{per } A \geq s(A) - 2n + 2, \quad (8.8)$$

где  $s(A)$  — число единиц в  $A$ .

Покажем, что оценка снизу по этой теореме может быть значительно лучше, чем по теореме 8.4. Пусть, например,  $A$  —  $(0, 1)$ -матрица порядка  $n \geq 4$  с  $n - 2$  нулями:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ясно, что  $A$  вполне неразложима, так как содержащаяся в ней нулевая подматрица имеет размер  $1 \times (n - 2)$  и  $1 + n - 2 = n - 1 < n$ . Тогда из (8.8) следует, что  $\text{per } A \geq n(n - 1) + 2 - 2n + 2 = n^2 - 3n + 4 > n^2 - 3n + 2 = (n - 1)(n - 2)$ , в то время как по теореме 8.4 мы можем лишь утверждать, что  $\text{per } A \geq 2! = 2$ .

Заметим, однако, что разлагая  $\text{per } A$  по последней строке, мы получаем  $\text{per } A = 2(n - 1)!$ , и как раз это чис-



ло дает оценка (8.7), которая на сей раз оказывается наилучшей. Это показывает, что лишь в каждом конкретном случае можно говорить о преимуществе той или иной оценки перманента, «самой лучшей» оценки не существует.

**Оценка перманента  $(0, 1)$ -матрицы сверху.** Пусть  $A$  —  $(0, 1)$ -матрица порядка  $n$  и суммы ее элементов по строкам равны  $r_1, r_2, \dots, r_n$ . Выведем оценку  $\text{per } A$  сверху, зависящую от этих сумм. Предварительно, полагая формально  $0^0 = 1$ , докажем следующую лемму.

**Лемма 8.7.** Пусть  $A = [a_{ij}]$  —  $(0, 1)$ -матрица порядка  $n$ ,  $S$  — множество всех таких подстановок степени  $n$ , что диагональ  $(1, \sigma(1)), (2, \sigma(2)), \dots, (n, \sigma(n))$  в  $A$  положительна при  $\sigma \in S$ . Тогда

$$\prod_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ a_{ij}=1}}^n \text{per } A(i|j)^{\text{per } A(i|j)} = \prod_{\sigma \in S} \prod_{i=1}^n \text{per } A(i|\sigma(i)), \quad (8.9)$$

$$\prod_{i=1}^n r_i^{\text{per } A} = \prod_{\sigma \in S} \prod_{i=1}^n r_i. \quad (8.10)$$

**Доказательство.** Подсчитаем одинаковые множители справа и слева в (8.9). Ясно, что справа могут появиться лишь множители вида  $\text{per } A(i|j)$  при  $a_{ij} = 1$ , так как  $a_{i\sigma(i)} = 1$  по определению  $\sigma$ . Заметим, что число положительных диагоналей, проходящих через заданное место  $(i, j)$  равно  $\text{per } A(i|j)$ . Справа для каждой пары  $(i, j)$  с  $a_{ij} = 1$  появляется столько сомножителей вида  $\text{per } A(i|j)$ , сколько положительных диагоналей проходит через  $(i, j)$ , т. е. справа возникает множитель  $\text{per } A(i|j)^{\text{per } A(i|j)}$  (случай  $\text{per } A(i|j) = 0$  не исключается, так как мы условились, что  $0^0 = 1$ ). Сомножителей, соответствующих элементам  $a_{ij} = 0$ , справа не будет, так как через такое место  $(i, j)$  заведомо не проходит положительная диагональ. Мы доказали (8.9).

Число положительных диагоналей в  $A$  равно  $\text{per } A$ , поэтому каждое  $r_i$  дает множитель  $r_i^{\text{per } A}$  в правой части (8.10), т. е. правая часть совпадает с левой, и лемма доказана.

**Теорема 8.8.** Для  $(0, 1)$ -матрицы  $A = [a_{ij}]$  порядка  $n$  с суммами элементов по строкам, равными  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , справедлива оценка

$$\text{per } A \leq \prod_{i=1}^n (r_i!)^{1/r_i}. \quad (8.11)$$

Доказательство\*). Его будем проводить методом индукции по  $n$ . Для  $n = 1$  утверждение теоремы очевидно. Предположим теперь, что она справедлива для всех  $(0, 1)$ -матриц порядков, меньших  $n$ . Запишем разложение перманента по  $i$ -й строке:  $\text{per } A = \sum_{j=1}^n a_{ij} \text{per } A(i|j)$ .

В каждой такой сумме не больше чем  $r_i$  ненулевых членов. Тогда

$$(\text{per } A)^{\text{per } A} = \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} \text{per } A(i|j) \right)^{\sum_{j=1}^n a_{ij} \text{per } A(i|j)}.$$

Из курса математического анализа известно, что если  $m_1, m_2, \dots, m_r$  — целые (и даже действительные) неотрицательные числа, то

$$\left( \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_r}{r} \right)^{m_1 + m_2 + \dots + m_r} \leq$$

$$\leq m_1^{m_1} m_2^{m_2} \dots m_r^{m_r}. \text{ Поэтому}$$

$$(\text{per } A)^{n \text{ per } A} =$$

$$\begin{aligned} &= \prod_{i=1}^n \text{per } A^{\text{per } A} = \prod_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} \text{per } A(i|j) \right)^{\sum_{j=1}^n a_{ij} \text{per } A(i|j)} = \\ &= \prod_{i=1}^n r_i^{\text{per } A} \left( \frac{1}{r_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} \text{per } A(i|j) \right)^{\sum_{j=1}^n a_{ij} \text{per } A(i|j)} \leq \\ &\leq \prod_{i=1}^n r_i^{\text{per } A} \prod_{\substack{j=1 \\ a_{ij}=1}}^n \text{per } A(i|j)^{\text{per } A(i|j)}. \end{aligned}$$

Теперь воспользуемся леммой 8.7, заменяя сомножители в правой части последнего неравенства правыми частями (8.9), (8.10):

$$(\text{per } A)^{n \text{ per } A} \leq \prod_{\sigma \in S} \left( \prod_{i=1}^n r_i \right) \left( \prod_{i=1}^n \text{per } A(i|\sigma(i)) \right). \quad (8.12)$$

Каждая матрица  $A(i|\sigma(i))$  есть матрица порядка  $n - 1$ , и к ней можно применить предположение индукции.

---

\*) Это и другие доказательства, отмеченные знаком \*, можно при первом чтении пропустить.

Следовательно,

$$\prod_{i=1}^n \text{per } A(i | \sigma(i)) \leq \prod_{i=1}^n \left( \prod_{\substack{k \neq i \\ a_{k, \sigma(i)} = 0}} (r_k!)^{1/r_k} \right) \left( \prod_{\substack{k \neq i \\ a_{k, \sigma(i)} = 1}} ((r_k - 1)!)^{1/(r_k - 1)} \right).$$

Подсчитаем общее число сомножителей в правой части виде  $(r_k!)^{1/r_k}$  и  $((r_k - 1)!)^{1/(r_k - 1)}$ . Так как  $\sigma$  — подстановка, определяющая положительную диагональ, то  $a_{k, \sigma(k)} = 1$  для любого  $k = 1, 2, \dots, n$ . Когда  $i$  изменяется от 1 до  $n$ , не включая  $k$ , то  $(k, \sigma(i))$  пробегает все места  $k$ -й строки, кроме  $(k, \sigma(k))$ , и всякий раз при этом от  $k$ -й строки появляется в правой части сомножитель первого вида, если  $a_{k, \sigma(i)} = 0$ , и второго, если  $a_{k, \sigma(i)} = 1$ . Таким образом, сомножителей первого вида оказывается  $n - r_k$ , а второго —  $r_k - 1$  (так как  $a_{k, \sigma(k)} = 1$ ). Итак, для любой  $\sigma$

$$\prod_{i=1}^n \text{per } A(i | \sigma(i)) \leq \prod_{k=1}^n (r_k!)^{(n-r_k)/r_k} ((r_k - 1)!)^{(r_k-1)/(r_k-1)}.$$

Подставляя правую часть этого неравенства в (8.12), получаем

$$\begin{aligned} (\text{per } A)^{n \text{ per } A} &\leq \prod_{\sigma \in S} \left[ \left( \prod_{i=1}^n r_i \right) \left[ \prod_{k=1}^n (r_k!)^{(n-r_k)/r_k} (r_k - 1)! \right] \right] = \\ &= \prod_{\sigma \in S} \prod_{i=1}^n (r_i!)^{n/r_i} = \prod_{i=1}^n ((r_i!)^{1/r_i})^{n \text{ per } A} \end{aligned}$$

(так как внутреннее произведение не зависит от  $\sigma$ , а число положительных диагоналей равно  $\text{per } A$ ); отсюда получается утверждение теоремы.

Оценка сверху, данная теоремой 8.8, достижима, т. е. существуют  $(0, 1)$ -матрицы со значением перманента, равным правой части (8.11). Возьмем матрицу  $A$  порядка  $kt$ , у которой на главной диагонали стоят  $t$  блоков  $J_k$ , а на остальных местах — нули:

$$A = \begin{bmatrix} J_k & & & 0 \\ & J_k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_k \end{bmatrix}.$$

Для  $A$ , например, при  $m = 2$  имеем  $r_1 = r_2 = \dots = r_{2k} = k$ ,  
 $\text{per } A = \text{per } J_k \text{ per } J_k = (k!)^2 = \prod_{i=1}^{2k} (k!)^{1/k}$ .

**Дважды стохастические матрицы. Проблема Ван дер Вардена.** Матрица  $A = [a_{ij}]$  порядка  $n$ , элементы которой — действительные неотрицательные числа, называется *стохастической*, если  $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$  для всех  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Если, кроме того,  $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$  для всех  $j = 1, 2, \dots, n$ , то  $A$  называется *дважды стохастической*.

Стохастические и дважды стохастические матрицы используются в теории вероятностей. Они имеют также различные комбинаторные применения. Теория дважды стохастических матриц связана с теорией целочисленных, в частности,  $(0, 1)$ -матриц. Пусть, например,  $(0, 1)$ -матрица  $A = [a_{ij}]$  порядка  $n$  имеет  $k$  единиц в каждой строке и каждом столбце, т. е.  $A \in \mathfrak{A}(k, n)$ . Рассмотрим матрицу  $A^* = [a_{ij}/k]$ . Легко проверить, что  $A^*$  — дважды стохастическая матрица.

С перманентами таких матриц связана одна из самых знаменитых комбинаторных задач, приковывавшая более полувека внимание математиков. Она была известна как *проблема Ван дер Вардена* по имени математика, поставившего ее в 1926 г.:

*Доказать, что для любой дважды стохастической матрицы  $A$  порядка  $n$ :*

а) справедливо неравенство

$$\text{per } A \geq n!/n^n; \quad (8.13)$$

б) равенство в (8.13) достигается лишь для матрицы  $J(1/n)$ , все элементы которой равны  $1/n$ .

Эта проблема была положительно решена в 1980 г. советскими математиками (см. [4, 9]).

Отметим, что из (8.13) легко получается оценка снизу для перманента  $(0, 1)$ -матриц класса  $\mathfrak{A}(k, n)$ .

**Теорема 8.9.** *Для матрицы  $A \in \mathfrak{A}(k, n)$  при  $k < n$  справедлива оценка  $\text{per } A > n!(k/n)^n$ .*

**Доказательство.** Построим по  $A = [a_{ij}]$  матрицу  $A^* = [a_{ij}/k]$  как указано выше. Матрица  $A^*$  дважды стохастическая, но  $A^* \neq J(1/n)$ , так как  $k < n$ . Поэтому из (8.13) и утверждения б) следует, что  $\text{per } A^* > n^n/n!$ . Но  $(1/k^n)\text{per } A = \text{per } A^*$ , и теорема доказана.

## ВОПРОСЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ КОМБИНАТОРНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ И (0, 1)-МАТРИЦЫ

### § 9. (0, 1)-матрицы и существование уравновешенных неполных блок-схем

Вопросы существования и построения уравновешенных неполных блок-схем или  $(b, v, r, k, \lambda)$ -конфигураций, о которых шла речь в гл. 2, принадлежат к самым сложным и красивым задачам комбинаторной математики. Несмотря на все усилия, до сих пор не удалось найти такие необходимые и достаточные условия существования блок-схем, которые можно было бы проверять без труда, т. е., как принято говорить, эффективные критерии существования. Для симметричных схем известны лишь удобно проверяемые необходимые условия — они настолько сильны, что, возможно, являются также достаточными. Во всяком случае не найдено ни одного примера, который бы исключал такую возможность. Об этих необходимых условиях и будет идти речь в данном параграфе.

**Основное уравнение для матриц инцидентности блок-схем.** Матрицы инцидентности, введенные в § 4, являются одним из эффективных средств для изучения блок-схем. Напомним, что *матрица инцидентности*  $(b, v, r, k, \lambda)$ -конфигурации есть матрица  $A = [a_{ij}]$  размера  $b \times v$ , где  $a_{ij} = 1$ , если элемент  $v_j$  принадлежит блоку  $B_i$ , и  $a_{ij} = 0$  в противном случае ( $i = 1, 2, \dots, b, j = 1, 2, \dots, v$ ).

**Теорема 9.1.** *Матрица инцидентности  $A$  уравновешенной неполной блок-схемы с параметрами  $b, v, r, k, \lambda$  удовлетворяет матричным уравнениям*

$$A^T A = B = \begin{bmatrix} r & \lambda & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & r & \lambda & \dots & \lambda \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda & \lambda & \lambda & \dots & r \end{bmatrix} = (r - \lambda) I_v + \lambda J_v, \quad (9.1)$$

$$A J_{v1} = k J_{b1}. \quad (9.2)$$

Обратно, если  $(0,1)$ -матрица  $A$  порядка  $v$  удовлетворяет уравнениям (9.1), (9.2), то существует уравновешенная неполная блок-схема с параметрами  $b, v, r, k, \lambda$  и матрицей инцидентности  $A$ .

**Доказательство.** Так как  $A$  — матрица размера  $b \times v$ ,  $A^T$  — матрица размера  $v \times b$ , то  $B = [b_{ij}]$  — матрица порядка  $v$ . По правилам умножения матриц  $b_{ij} = \sum_{l=1}^b a_{il}^T a_{lj}$ , где через  $a_{il}^T$  обозначается элемент на месте  $(i, l)$  в матрице  $A^T$ . Таким образом,  $a_{il}^T = a_{li}$ , и мы видим, что  $b_{ij}$  равен скалярному произведению  $\sum_{l=1}^b a_{li} a_{lj}$   $i$ -го и  $j$ -го вектор-столбцов матрицы  $A$ . При  $i = j$  это скалярное произведение всегда равно  $r$  — числу появлений элемента в блоках; при  $i \neq j$  оно равно числу появлений в блоках некоторой пары различных элементов, т. е. числу  $\lambda$ . Таким образом, по главной диагонали в матрице  $B$  стоит число  $r$ , а любой элемент вне главной диагонали равен  $\lambda$ , т. е. получаем (9.1).

Далее, матрица  $AJ_{v1}$  имеет размер  $b \times 1$ , т. е. представляет собой вектор-столбец, компоненты которого равны суммам элементов по строкам  $A$ , т. е. числу единиц в строках. Но каждый блок содержит в точности  $k$  элементов, поэтому все компоненты этого вектора равны  $k$ .

Обратно, пусть  $(0,1)$ -матрица  $A$  размера  $b \times v$  удовлетворяет уравнениям (9.1), (9.2). Посмотрим, каковы свойства конфигурации, для которой  $A$  служит матрицей инцидентности. Эта конфигурация, очевидно, состоит из  $b$  подмножеств (блоков) некоторого множества из  $v$  элементов. Далее, (9.2) показывает, что каждый из блоков содержит в точности  $k$  элементов. Наконец, из (9.1) следует, что каждый элемент появляется в точности в  $r$  блоках, а каждая пара различных элементов — в  $\lambda$  блоках. Итак, конфигурация, определяемая  $A$ , есть блок-схема с параметрами  $b, v, r, k, \lambda$ .

Уравнение (9.1) называется *основным уравнением* для матрицы инцидентности блок-схемы.

**Неравенство Фишера.** Из уравнения (9.1) вытекают различные следствия. Мы получим сейчас следующее фундаментальное свойство блок-схем.

**Теорема 9.2 (неравенство Фишера).** В уравновешенной неполной блок-схеме с параметрами  $b, v, r, k, \lambda$ , где  $r > \lambda$ , всегда выполняется неравенство  $b \geq v$ , т. е. число блоков не меньше числа элементов.

**Доказательство.** Вычислим определитель  $\Delta(B)$  матрицы  $B$  из (9.1). Для этого: а) вычтем первую строку  $B$  из всех остальных; б) прибавим к первому столбцу по порядку второй, потом третий, ...,  $v$ -й столбцы. Как было показано в § 3, определитель матрицы  $B$  при этом не изменится. В результате произведенных действий мы приходим к треугольной матрице

$$B' = \begin{bmatrix} r + \lambda(v-1) & \lambda & \lambda & \dots & \lambda \\ 0 & r - \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & r - \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r - \lambda \end{bmatrix}.$$

Ее определитель равен произведению элементов, расположенных по главной диагонали (см. § 3), т. е.

$$\Delta(B) = \Delta(B') = (r + \lambda(v-1))(r - \lambda)^{v-1}. \quad (9.3)$$

Так как  $r > \lambda$ ,  $\Delta(B) \neq 0$ , т. е. матрица  $B$  невырождена.

Предположим теперь от противного, что  $b < v$ . Дополним тогда матрицу  $A$  до квадратной матрицы  $A' = \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}$  порядка  $v$ , приписав снизу  $v - b$  строк из нулей. Ясно, что тогда  $A'^T A' = B$ , так как все скалярные произведения пар вектор-столбцов у  $A'$  и  $A$  совпадают. Но тогда, учитывая теоремы 3.1, 3.4, имеем

$$\Delta(B) = \Delta(A'^T A') = \Delta(A'^T) \Delta(A') = \Delta(A')^2 = 0,$$

так как по теореме 3.2 у матрицы с нулевой строкой определитель равен нулю. Полученное противоречие доказывает теорему.

Ограничение  $r > \lambda$  в теореме нельзя считать существенным. Действительно, пусть  $r = \lambda$ . Тогда любые два различных элемента блок-схемы могут появляться только вместе, т. е. вся блок-схема состоит из  $r$  одинаковых блоков, содержащих каждый все элементы множества. Такие блок-схемы не представляют ни малейшего интереса, так что мы всегда в дальнейшем предполагаем, что  $r > \lambda$ .

Ясно, что из неравенства  $b \geq v$  и равенства  $bk = vr$  (см. (5.2)), которые всегда выполняются для блок-схемы, вытекает неравенство  $r \geq k$ . Крайний случай неравенства Фишера составляет равенство  $b = v$  (и тогда  $r = k$ ), которое приводит к симметричным блок-схемам.

**Соотношения для симметричных блок-схем.** Для симметричных блок-схем соотношения (9.1), (9.2) можно

записать в следующем виде:

$$A^T A = B = \begin{bmatrix} k & \lambda & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & k & \lambda & \dots & \lambda \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda & \lambda & \lambda & \dots & k \end{bmatrix} = (k - \lambda) I + \lambda J, \quad (9.4)$$

$$AJ = kJ, \quad (9.5)$$

где  $I = I_v$ ,  $J = J_v$ . Ясно, что (9.5), так же как и (9.2), выражает лишь тот факт, что каждая строка  $A$  содержит  $k$  единиц. Однако ввиду того, что каждый столбец  $A$  теперь содержит также  $k = r$  единиц, справедливо и соотношение  $JA = kJ$ . Более того, имеет место

*Теорема 9.3. Для симметричной блок-схемы с матрицей инцидентности  $A$  наряду с соотношениями (9.4), (9.5) выполняются соотношения*

$$AA^T = B = (k - \lambda)I + \lambda J, \quad (9.6)$$

$$JA = kJ. \quad (9.7)$$

*Доказательство.* Мы только что заметили, что (9.7) действительно выполняется. Выведем теперь (9.6) из (9.4), (9.5) и (9.7). Для этого вспомним, что при умножении матрицы на число все ее элементы умножаются на это число. Поэтому, если  $q$  — число, то: 1)  $qA = Aq$ , 2) при  $q \neq 0$  из  $C = Aq$  следует, что  $q^{-1}C = A$ . Заметим теперь, что  $\Delta(B) = \Delta(A^T A) = \Delta(A^T) \Delta(A) = \Delta(A)^2 = (k + \lambda(v - 1))(k - \lambda)^{v-1}$  (см. (9.3)). Так как  $k = r > \lambda$ ,  $\Delta(B) \neq 0$ , то  $\Delta(A) \neq 0$ , т. е.  $A$  невырождена, и для нее существует обратная матрица  $A^{-1}$ . Умножим обе части (9.7) на  $A^{-1}$ :  $J = kJA^{-1}$ ; следовательно,  $k^{-1}J = JA^{-1}$ . Далее,

$$A^T = A^T I = A^T (AA^{-1}) = (A^T A) A^{-1}$$

и из (9.4) получается, что

$$\begin{aligned} A^T &= ((k - \lambda)I + \lambda J) A^{-1} = \\ &= (k - \lambda)A^{-1} + \lambda JA^{-1} = (k - \lambda)A^{-1} + \lambda k^{-1}J. \end{aligned} \quad (9.8)$$

Умножим теперь  $A$  на крайнюю левую и крайнюю правую матрицы в (9.8). Получаем

$$AA^T = (k - \lambda)AA^{-1} + \lambda k^{-1}AJ.$$

Так как по (9.5)  $AJ = kJ$ , приходим к (9.6).

Отметим, что фактически справедливо более сильное утверждение, чем теорема 9.3, доказываемое аналогично. Пусть  $A$  — невырожденная числовая матрица порядка  $v$ ,



для которой выполнено либо (9.4), либо (9.6), а также либо (9.5), либо (9.7). Тогда для  $A$  справедливы все четыре соотношения (9.4) — (9.7). Кроме того,  $v, k, \lambda$  удовлетворяют соотношению  $k(k-1) = \lambda(v-1)$  (доказательство см. в [22]).

Основным следствием теоремы 9.3 является тот факт, что в симметричной блок-схеме с параметрами  $v, k, \lambda$  любые два различных блока имеют в точности  $\lambda$  общих элементов: об этом говорит соотношение (9.6). Действительно, элемент матрицы  $AA^T$ , стоящий на месте  $(i, j)$ , есть скалярное произведение  $i$ -й и  $j$ -й вектор-строк матрицы  $A$ ; при  $i \neq j$  оно равно числу общих элементов  $i$ -го и  $j$ -го блоков, и (9.6) показывает, что оно равно  $\lambda$ . Тем самым оправданы построения остаточной и производной блок-схем, описанные в § 5.

**Двойственная блок-схема.** Теорема 9.3 показывает фактически, что если  $A$  — матрица инцидентности симметричной блок-схемы с параметрами  $v, k, \lambda$ , то и транспонированная матрица  $A^T$  — матрица инцидентности некоторой симметричной блок-схемы с теми же параметрами. Это подсказывает еще один способ получения новых блок-схем из уже известных.

Перенумеруем блоки исходной симметричной блок-схемы:  $B_0, B_1, \dots, B_{v-1}$  и ее элементы  $a_0, a_1, \dots, a_{v-1}$ . Введем новые элементы  $b_0, b_1, \dots, b_{v-1}$ . Строим теперь блок-схему на множестве  $\{b_0, b_1, \dots, b_{v-1}\}$  следующим образом: блок  $A_i$  ( $i = 0, 1, \dots, v-1$ ) составляем из всех тех элементов  $b_j$ , для которых  $a_i \in B_j$ . Ясно, что матрица инцидентности такой конфигурации есть  $A^T$ , следовательно, по теоремам 9.1, 9.3 полученная конфигурация есть симметричная блок-схема с теми же параметрами, что и исходная. Возникает вопрос о связи построенной таким образом блок-схемы с исходной: быть может, мы не получаем таким способом ничего нового?

Рассмотрим следующий пример. Возьмем симметричную блок-схему  $\mathcal{D}$  с параметрами  $b = v = 15, r = k = 7, \lambda = 3$ :

$$\begin{array}{ll} B_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}, & B_5 = \{0, 5, 6, 7, 8, 13, 14\}, \\ B_1 = \{0, 1, 2, 7, 8, 9, 10\}, & B_6 = \{0, 5, 6, 9, 10, 11, 12\}, \\ B_2 = \{0, 1, 2, 11, 12, 13, 14\}, & B_7 = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 12\}, \\ B_3 = \{0, 3, 4, 7, 8, 11, 12\}, & B_8 = \{1, 3, 6, 7, 10, 12, 14\}, \\ B_4 = \{0, 3, 4, 9, 10, 13, 14\}, & B_9 = \{1, 4, 5, 8, 10, 11, 14\}, \end{array}$$

$$\begin{aligned}
B_{10} &= \{1, 4, 6, 8, 9, 12, 13\}, & B_{13} &= \{2, 4, 5, 7, 9, 12, 14\}, \\
B_{11} &= \{2, 3, 5, 8, 10, 12, 13\}, & B_{14} &= \{2, 4, 6, 7, 10, 11, 13\}. \\
B_{12} &= \{2, 3, 6, 8, 9, 11, 14\},
\end{aligned}$$

Введем новые элементы  $b_0, b_1, \dots, b_{14}$  и напомним двойственную к  $\mathcal{D}$  схему  $\mathcal{D}'$ :

$$\begin{aligned}
A_0 &= \{b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}, & A_8 &= \{b_1, b_3, b_5, b_9, b_{10}, b_{11}, b_{12}\}, \\
A_1 &= \{b_0, b_1, b_2, b_7, b_8, b_9, b_{10}\}, & A_9 &= \{b_1, b_4, b_6, b_7, b_{10}, b_{12}, b_{13}\}, \\
A_2 &= \{b_0, b_1, b_2, b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{14}\}, & A_{10} &= \{b_1, b_4, b_6, b_8, b_9, b_{11}, b_{14}\}, \\
A_3 &= \{b_0, b_3, b_4, b_7, b_8, b_{11}, b_{12}\}, & A_{11} &= \{b_2, b_3, b_6, b_7, b_9, b_{12}, b_{14}\}, \\
A_4 &= \{b_0, b_3, b_4, b_9, b_{10}, b_{13}, b_{14}\}, & A_{12} &= \{b_2, b_3, b_6, b_9, b_{10}, b_{11}, b_{13}\}, \\
A_5 &= \{b_0, b_5, b_6, b_7, b_9, b_{11}, b_{13}\}, & A_{13} &= \{b_2, b_4, b_5, b_7, b_{10}, b_{11}, b_{14}\}, \\
A_6 &= \{b_0, b_5, b_6, b_8, b_{10}, b_{12}, b_{14}\}, & A_{14} &= \{b_2, b_4, b_5, b_8, b_9, b_{12}, b_{13}\}. \\
A_7 &= \{b_1, b_3, b_5, b_7, b_8, b_{13}, b_{14}\},
\end{aligned}$$

Посмотрим, какие тройки элементов входят в три различных блока в блок-схеме  $\mathcal{D}$ . Это: 0, 1, 2; 0, 3, 4; 0, 5, 6; 0, 7, 8; 0, 9, 10; 0, 11, 12; 0, 13, 14 и никаких других троек, входящих в три блока, нет. Все эти тройки содержат общий элемент 0. В  $\mathcal{D}'$  такими тройками являются  $b_0, b_1, b_2$ ;  $b_0, b_3, b_4$ ;  $b_0, b_5, b_6$ ;  $b_1, b_3, b_5$ ;  $b_1, b_4, b_6$ ;  $b_2, b_3, b_6$ ;  $b_2, b_4, b_5$  и только они. Однако эти 3-множества не обладают общим элементом, поэтому при любой нумерации элементов и блоков  $\mathcal{D}'$  мы не сможем из нее получить блок-схему  $\mathcal{D}$ , т. е.  $\mathcal{D}'$  и  $\mathcal{D}$  — не изоморфные конфигурации. Этот пример показывает, что, переходя от данной симметричной блок-схемы к двойственной, мы получаем, вообще говоря, новую блок-схему.

**Необходимые условия существования симметричных блок-схем.** Соотношения (9.1), (9.2) (а для симметричных блок-схем — (9.4), (9.5)) дают по теореме 9.1 необходимое и достаточное условие существования блок-схемы с параметрами  $b, v, r, k, \lambda$ . Однако это условие никак нельзя признать эффективным, так как решение подобных матричных уравнений при сколь-нибудь значительных размерах матриц лежит вне пределов возможностей современных вычислительных устройств.

Одной из наиболее знаменитых теорем в комбинаторной математике является теорема Брука — Райзера — Човла, дающая легко проверяемое необходимое условие существования симметричных блок-схем.

**Теорема 9.4** (Брука — Райзера — Човла). *Если существует симметричная уравновешенная неполная блок-схема с параметрами  $v, k, \lambda$ , то:*

а) *при  $v$  четном  $k - \lambda$  есть квадрат;*

б) *при  $v$  нечетном уравнение  $z^2 = (k - \lambda)x^2 + (-1)^{(v-1)/2}\lambda y^2$  имеет решение в целых числах, не равных одновременно нулю.*

**Доказательство.** Ограничимся случаем четного  $v$ . Пусть существует симметричная блок-схема с параметрами  $v, k, \lambda$  и  $A$  — ее матрица инцидентности. Как было доказано,  $\Delta(A^T A) = \Delta(B) = (k + \lambda(v - 1))(k - \lambda)^{v-1}$  (см. (9.3)). С другой стороны,  $\Delta(B) = \Delta(A)^2$ . Далее,  $\lambda(v - 1) = k(k - 1)$  (см. (5.3)), поэтому в нашем случае  $\lambda(v - 1) = k(k - 1)$ , т. е.  $\Delta(A)^2 = k^2(k - \lambda)^{v-1}$ , откуда следует, что  $(k - \lambda)^{v-1} = (\Delta(A)/k)^2$ . Но так как  $v$  четно, то  $(k - \lambda)^{v-1}$  может быть квадратом лишь в том случае, когда  $k - \lambda$  — квадрат. Мы получили утверждение а) теоремы. Доказательство утверждения б) сложнее (см. [12]).

Приведем теперь примеры применения этой теоремы. Рассмотрим некоторые совокупности чисел  $b, v, r, k, \lambda$ , для которых выполняются необходимые условия (5.2), (5.3) существования блок-схем (в случае симметричных блок-схем они сводятся к одному  $\lambda(v - 1) = k(k - 1)$ ), так что блок-схемы с такими параметрами могут существовать.

Пусть, например,  $v = 46, k = 10, \lambda = 2$ . Соотношение  $\lambda(v - 1) = k(k - 1)$  выполняется. Однако  $k - \lambda = 8$  не является квадратом, поэтому симметричной блок-схемы с такими параметрами не существует.

Возьмем другое множество параметров:  $v = 43, k = 7, \lambda = 1$ . И для этих чисел соотношение  $\lambda(v - 1) = k(k - 1)$  справедливо. Так как  $v$  нечетно, рассмотрим теперь уравнение из условия б) теоремы 9.4:  $z^2 = 6x^2 + (-1)^{21}y^2 = 6x^2 - y^2$ , или

$$y^2 + z^2 = 6x^2. \quad (9.9)$$

Покажем, что решения в целых числах, отличного от  $x = y = z = 0$ , у этого уравнения нет. Действительно, если бы такое решение  $x = a, y = b, z = c$  было, то  $b^2 + c^2$  делилось бы на 3, т. е.  $b^2 + c^2 \equiv 0 \pmod{3}$  (см. § 5). Любое целое число  $m$ , не делящееся на 3, можно записать в виде  $m = 3t \pm 1$ . Ясно, что  $m^2 = 9t^2 \pm 6t + 1 \equiv 1 \pmod{3}$ . Поэтому квадрат всякого целого числа сравним по модулю 3 с 0, если оно делится на 3, или 1, если оно на 3

не делится. Отсюда следует, что сумма квадратов может быть сравнима с 0 по модулю 3 (т. е. делится на 3), только если оба этих числа делятся на 3. Таким образом, если  $(a, b, c)$  есть решение уравнения (9.9), то  $b$  и  $c$  оба делятся на 3, стало быть, число  $b^2 + c^2$  делится на четную степень 3. Однако число  $ba^2$  делится лишь на нечетную степень 3, если  $a \neq 0$ . Итак,  $a = 0$ . Но тогда  $b = c = 0$ , т. е. мы пришли к противоречию. Следовательно, уравнение (9.9) не может иметь решения в целых числах, отличного от  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ , и по теореме 9.4 симметричной блок-схемы с параметрами  $v = 43$ ,  $k = 7$ ,  $\lambda = 1$  не существует.

Теорема 9.4 применяется также к вопросу о существовании несимметричных блок-схем. Для этого используется понятие остаточной схемы, определенной в § 5. Справедлив следующий результат [22]:

*Пусть числа  $v_1, k_1, \lambda_1$  удовлетворяют соотношению  $k_1(k_1 - 1) = \lambda_1(v_1 - 1)$  и существует блок-схема  $\mathcal{D}$  с параметрами  $v = v_1 - k_1$ ,  $b = v_1 - 1$ ,  $r = k_1$ ,  $k = k_1 - 1$ ,  $\lambda = \lambda_1$ , причем  $\lambda = 1$  или 2. Тогда существует симметричная блок-схема  $\mathcal{D}_1$  с параметрами  $v_1, k_1, \lambda_1$ , из которой  $\mathcal{D}$  получается как остаточная схема.*

Для  $\lambda = 1$  докажем этот результат в следующем параграфе. Возьмем множество параметров  $v = 36$ ,  $b = 42$ ,  $r = 7$ ,  $k = 6$ ,  $\lambda = 1$ . Ясно, что  $bk = vr$ ,  $\lambda(v - 1) = r(k - 1)$ , т. е. необходимые условия (5.2), (5.3) для существования блок-схемы с этими параметрами выполняются. Однако если бы такая блок-схема существовала, то по только что упомянутой теореме существовала бы также симметричная блок-схема с параметрами  $v_1 = b + 1 = 43$ ,  $k_1 = k + \lambda = 7$ ,  $\lambda_1 = \lambda = 1$  (очевидно, что  $k_1(k_1 - 1) = \lambda_1(v_1 - 1)$ ). Но мы в последнем примере убедились, что такой блок-схемы нет. Значит, нет также блок-схемы с нашими исходными параметрами.

Теорема Брука — Райзера — Човла дает наиболее сильное условие существования блок-схем. До сих пор не найдено, как мы уже упоминали в начале параграфа, ни одного примера такого множества параметров  $v, k, \lambda$ , чтобы выполнялись условия  $\lambda(v - 1) = k(k - 1)$  и условия этой теоремы, а при этом было бы доказано, что симметричной блок-схемы с этими параметрами не существует. Для многих значений параметров существование блок-схем остается под сомнением. Самым интригующим из таких случаев является, пожалуй, вопрос о существовании конечной проективной плоскости (см. § 5)

порядка 10, т. е. симметричной блок-схемы с параметрами  $v = 111$ ,  $k = 11$ ,  $\lambda = 1$ . Легко убедиться, что условие (5.3) и условие б) теоремы 9.4 для этих параметров выполняются. Однако несмотря на значительные усилия многих математиков, не удается ни построить такую плоскость, ни доказать, что она не существует.

## § 10. Блок-схемы с $\lambda = 1$

Уравновешенные неполные блок-схемы с  $\lambda = 1$  обладают многими привлекательными свойствами и встречаются во многих комбинаторных исследованиях. Внимание к ним обусловлено, прежде всего, тем, что целый ряд классических комбинаторных объектов либо представляют собой блок-схемы с  $\lambda = 1$ , либо тесно связаны с ними. Таковы, например, системы троек Штейнера или плоские разностные множества (циклические проективные плоскости), о которых будет идти речь в этом параграфе. С другой стороны, блок-схема с  $\lambda = 1$  обладает свойством «первичности», т. е. несводимости к другим объектам: в самом деле, многие блок-схемы с  $\lambda > 1$  могут быть построены из них простым «дублированием». Действительно, пусть дана уравновешенная неполная блок-схема с параметрами  $b, v, r, k, \lambda$ . Если взять каждый ее блок  $t$  раз, то придем, очевидно, к блок-схеме с параметрами  $tb, v, tr, k, t\lambda$ , т. е. существование блок-схемы с параметром  $t\lambda$  гарантировано существованием блок-схемы с параметром  $\lambda$ . Заметим, впрочем, что иногда случается и по-другому: блок-схему с таким, например, «удвоенным» множеством параметров  $2b, v, 2r, k, 2\lambda$  построить удастся, в то время как блок-схемы с параметрами  $b, v, r, k, \lambda$  не существует.

**Некоторые общие свойства.** Мы показали в § 9, что пересечение любых двух различных блоков в симметричной блок-схеме содержит в точности  $\lambda$  элементов. В блок-схемах с  $\lambda = 1$  на число элементов в пересечениях двух блоков также накладываются сильные ограничения.

**Лемма 10.1.** *Матрица инцидентности  $A$  блок-схемы с  $\lambda = 1$  не содержит подматриц вида  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ .*

**Доказательство.** Действительно, пусть бы такая подматрица обнаружилась на пересечении строк  $A$  с номерами  $i$  и  $k$  и столбцов с номерами  $j$  и  $l$ . Это бы означало, что пара различных элементов  $\{a_j, a_l\}$  множества,

на котором определена блок-схема, входит в два различных блока  $B_i$  и  $B_k$ . Но это невозможно ввиду  $\lambda = 1$ .

**Теорема 10.2.** *В любой блок-схеме с  $\lambda = 1$  два различных блока либо не пересекаются, либо их пересечение состоит из одного элемента.*

**Доказательство.** Оно следует непосредственно из леммы 10.1. Действительно, если  $B_i, B_k$  — два различных блока и  $|B_i \cap B_k| > 1$ , то в  $i$ -й и  $k$ -й строках матрицы инцидентности  $A$  нашей блок-схемы найдется под-

матрица вида  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ , что невозможно ввиду леммы 10.1.

Для блок-схемы с  $\lambda = 1$  соотношение (5.3) запишется в виде  $v - 1 = r(k - 1)$ . Если такая блок-схема симметрична, т. е.  $b = v, r = k$ , то  $v = k^2 - k + 1 = (k - 1)^2 + (k - 1) + 1$ . Обозначим  $k - 1$  через  $n$ . Тогда  $v = n^2 + n + 1, k = n + 1$ . Таким образом, симметричная блок-схема с  $\lambda = 1, k \geq 3$  — это конечная проективная плоскость порядка  $n = k - 1$  (см. § 5).

**Разрешимые блок-схемы. Аффинные плоскости.** Пусть на  $v$ -множестве  $S$  задана блок-схема  $\mathcal{D}$  с параметрами  $b, v, r, k, \lambda$ . Предположим, что множество  $\mathcal{B}$  ее блоков можно каким-либо образом разбить на  $r$  семейств  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_r$  так, чтобы: а) блоки каждого из семейств содержали по одному разу все элементы множества  $S$ ; б) блоки в каждом из  $\mathcal{B}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) попарно не пересекались. Если такое разбиение множества блоков возможно, то  $\mathcal{D}$  называется *разрешимой* блок-схемой, а само разбиение — ее *разрешением*.

Ясно, что в разрешимой блок-схеме  $b$  должно делиться на  $r$ , а  $v$  — на  $k$ . Разрешимые блок-схемы представляют самостоятельный интерес в теории комбинаторных конфигураций. Непересекающиеся блоки в блок-схеме называются *параллельными* ввиду довольно далеко идущей аналогии с параллельными прямыми в геометрии. В этих терминах свойство б) из определения разрешимой блок-схемы означает, что множество блоков  $\mathcal{B}$  можно в такой блок-схеме разбить на  $r$  семейств параллельных блоков.

Сразу возникает естественный вопрос: а существуют ли разрешимые блок-схемы? Ответом на него может послужить построение примеров таких блок-схем.

**Теорема 10.3.** *Блок-схема  $\mathcal{A}$  с параметрами  $b = n^2 + n, v = n^2, r = n + 1, k = n, \lambda = 1$  разрешима.*

**Доказательство.** Его получим, исследуя матрицу инцидентности  $A$  блок-схемы  $\mathcal{A}$ .





ных блоков. Продолжая аналогично, строим далее семейства  $\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4, \dots, \mathcal{B}_{n+1}$ .

После доказательства теоремы 10.3 нам остался лишь один шаг, чтобы убедиться в существовании разрешимых блок-схем с  $\lambda = 1$ . Возьмем конечную проективную плоскость  $\mathcal{P}$  порядка  $n$ . Это — симметричная блок-схема с параметрами  $\bar{v} = n^2 + n + 1$ ,  $\bar{k} = n + 1$ ,  $\bar{\lambda} = 1$ . Если теперь образовать остаточную блок-схему для  $\mathcal{P}$  (см. § 5), то мы придем к блок-схеме с параметрами  $b = n^2 + n$ ,  $v = n^2$ ,  $r = n + 1$ ,  $k = n$ ,  $\lambda = 1$ , т. е. к блок-схеме, удовлетворяющей условию теоремы 10.3. В § 5 мы приводили пример конечной проективной плоскости порядка 3 (см. (5.10)).

Возьмем в этой блок-схеме  $\mathcal{P}$  блок  $\{0, 1, 3, 9\}$  и удалим его и все входящие в него элементы. Получившаяся остаточная схема  $\mathcal{P}^*$  задана на множестве  $\{2, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12\}$  и имеет параметры  $b = 12$ ,  $v = 9$ ,  $r = 4$ ,  $k = 3$ ,  $\lambda = 1$ . Напишем ее разрешение:

$\mathcal{B}_1$	$\mathcal{B}_2$	$\mathcal{B}_3$	$\mathcal{B}_4$
{2, 4, 10},	{2, 5, 11},	{2, 6, 7},	{2, 8, 12},
{5, 6, 8},	{4, 6, 12},	{4, 8, 11},	{4, 5, 7},
{7, 11, 12},	{7, 8, 10},	{5, 10, 12},	{6, 10, 11}.

Тем самым искомый пример разрешимой блок-схемы получен.

Известно, что конечные проективные плоскости порядка  $n$  существуют для любого  $n$ , равного степени простого числа. Остаточные схемы для этих плоскостей, очевидно, также существуют и будут, как мы показали, разрешимыми блок-схемами. Блок-схемы с параметрами из условия теоремы 10.3 по аналогии с геометрией называются *конечными аффинными плоскостями*.

**Вложение конечной аффинной плоскости в проективную.** В геометрии хорошо известен способ получения проективной плоскости из аффинной (евклидовой) плоскости. К аффинной плоскости «присоединяют» еще одну прямую; каждая точка этой «бесконечно удаленной» прямой считается точкой пересечения пучка параллельных прямых евклидовой плоскости, имеющих одинаковое направление. Покажем, что применение этого же способа к конечной аффинной плоскости приводит к конечной проективной плоскости.



**Теорема 10.4.** Если  $\mathcal{A}$  — блок-схема с параметрами  $b = n^2 + n$ ,  $v = n^2$ ,  $r = n + 1$ ,  $k = n$ ,  $\lambda = 1$ , то существует симметричная блок-схема  $\mathcal{P}$  с параметрами  $\bar{v} = n^2 + n + 1$ ,  $\bar{k} = n + 1$ ,  $\bar{\lambda} = 1$ , для которой  $\mathcal{A}$  — остаточная схема.

**Доказательство.** По теореме 10.3  $\mathcal{A}$  разрешима. Возьмем ее разрешение  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_{n+1}$  и представим матрицу инцидентности  $A$  блок-схемы  $\mathcal{A}$ , например, в следующем виде:

$$A = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1 & \begin{bmatrix} 11\dots 1 & & & 0 \\ & 11\dots 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 11\dots 1 \end{bmatrix} \\ \mathcal{B}_2 & \begin{bmatrix} \dots & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \\ \dots & \\ \mathcal{B}_{n+1} & \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Здесь  $A$  разделена на  $n + 1$  отсеков, каждый из которых соответствует одному из семейств параллельных блоков; скалярное произведение любой пары различных вектор-строк внутри каждого из отсеков равно нулю.

Рассмотрим теперь  $(0, 1)$ -матрицу  $\bar{A}$  порядка  $n^2 + n + 1$ , окаймляющую  $A$ :

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} & & & & & \\ & \dots & & & & \\ & & \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} & & & \\ & & & \dots & & \\ & & & & \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} & \\ & & & & & \dots \\ & & & & & & \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \\ & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \\ & & & & & & & & & \dots \\ \mathcal{B}_{n^2+n+1} & 00\dots\dots\dots 0 & | & 11\dots\dots\dots 1 & & & & & & & \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \left. \begin{matrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{matrix} \right\} n \\ \left. \begin{matrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{matrix} \right\} n \\ \left. \begin{matrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{matrix} \right\} n \end{matrix} \quad (10.2)$$

Какая конфигурация соответствует  $\bar{A}$ ? Она состоит из  $n^2 + n + 1$  блоков на множестве из  $n^2 + n + 1$  элементов: к  $n^2$  «старым» элементам  $a_1, a_2, \dots, a_{n^2}$ , на которых задана  $\mathcal{A}$ , добавлено  $n + 1$  «новых» элементов  $a_{n^2+1}, a_{n^2+2}, \dots, a_{n^2+n+1}$ , к  $n^2 + n$  блокам  $B_1, B_2, \dots, B_{n^2+n}$

схемы  $\mathcal{A}$  добавлен блок  $B_{n^2+n+1}$ . Каждый элемент входит в  $n+1$  блок, и каждый блок состоит из  $n+1$  элементов.

Покажем, наконец, что любая пара различных элементов встретится в точности один раз в блоках конфигурации. Для новых элементов это видно из (10.2), для старых — следует из строения  $A$  как матрицы инцидентности блок-схемы с  $\lambda = 1$ . Если же взять пару, состоящую из старого и нового элементов, то выполнение этого свойства обеспечивается тем, что в блоках каждого из отсеков  $A$  любой из старых элементов появляется в точности один раз. Таким образом, мы показали, что  $\bar{A}$  есть матрица инцидентности симметричной блок-схемы с параметрами  $\bar{v} = n^2 + n + 1$ ,  $\bar{k} = n + 1$ ,  $\bar{\lambda} = 1$ . Теорема доказана.

Тем самым мы доказали относящуюся к  $\lambda = 1$  часть утверждения о вложении блок-схемы с параметрами остаточной схемы в симметричную блок-схему, сформулированного в § 9.

Одним из наиболее существенных следствий теоремы 10.4 для теории блок-схем является равносильность задачи о существовании для проективных и для аффинных конечных плоскостей: если существует одна, то существует и другая. Это помогло решить ряд вопросов о существовании и строении блок-схем.

**Еще о разностных множествах.** В гл. 2 мы видели, что каждое  $(v, k, \lambda)$ -разностное множество порождает симметричную уравновешенную блок-схему с параметрами  $v, k, \lambda$ , матрица инцидентности которой может быть представлена как циркулянт. Покажем, что, напротив, с помощью любой симметричной блок-схемы  $\mathcal{D}$ , у которой матрица инцидентности — циркулянт, можно получить  $(v, k, \lambda)$ -разностное множество.

Действительно, мы можем элементы  $v$ -множества, на котором задана блок-схема, отождествить с вычетами  $0, 1, \dots, v-1$  по модулю  $v$ , образующими систему минимальных представителей  $R_v$  классов вычетов по модулю  $v$ . Представим затем матрицу инцидентности блок-схемы  $\mathcal{D}$  в виде циркулянта  $C$  порядка  $v$ , у которого каждая строка получается из соседней сверху циклическим сдвигом вправо на один шаг (а первая — таким же образом из  $v$ -й строки). Тогда блоки  $\mathcal{D}$  можно записать в виде  $B = B_0 = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ ,  $B_1, B_2, \dots, B_{v-1}$ , где  $B_i \equiv B_{i-1} + 1 \equiv B_{i-2} + 2 \equiv \dots \equiv B_0 + i \equiv \{a_1 + i, a_2 + i, \dots, a_k + i\} \pmod{v}$ .

Покажем, что  $B$  есть совершенное разностное множество. Действительно, пусть  $a, b$  — два различных элемента из  $R_v$ , т. е.  $a - b \not\equiv 0 \pmod{v}$ . Они встречаются вместе в точности  $\lambda$  раз в блоках  $\mathcal{D}$ , поэтому система уравнений

$$a \equiv x + i \pmod{v}, \quad b \equiv y + i \pmod{v} \quad (10.3)$$

имеет в точности  $\lambda$  решений  $(x, y, i)$ , где  $x, y \in B, i \in R_v$ . Вычтем второе уравнение из первого:

$$a - b \equiv x - y \pmod{v}. \quad (10.4)$$

Каждое решение (10.3) приводит к решению  $(x, y)$  сравнения (10.4). Но и обратно, если  $(x, y)$ , где  $x, y \in B$ , — решение (10.4), то, полагая  $i \equiv a - x \equiv b - y \pmod{v}$  ( $i \in R_v$ ), приходим к решению  $(x, y, i)$  системы (10.3). Итак, (10.4) имеет в точности  $\lambda$  решений  $(x, y)$ , где  $x, y \in B$ . Так как любой ненулевой вычет может быть представлен по модулю  $v$  как  $a - b$ , где  $a, b \in R_v, a \neq b$ , то  $B$  есть  $(v, k, \lambda)$ -разностное множество. Очевидно, что все остальные блоки  $\mathcal{D}$  — также разностные множества.

Таким образом, доказана

**Теорема 10.5.**  $(v, k, \lambda)$ -разностное множество эквивалентно симметричной блок-схеме с параметрами  $v, k, \lambda$ , матрица инцидентности которой может быть представлена в виде циркулянтной матрицы.

Ясно, что из  $(v, k, \lambda)$ -разностных множеств с  $\lambda = 1$  (такие разностные множества называются *плоскими*) мы получаем конечные проективные плоскости порядка  $n = k - 1$ . Такие конечные плоскости обладают одним важным свойством: существует взаимно однозначное соответствие их точек (получаемое с помощью прибавления 1 по модулю  $v = n^2 + n + 1$  к элементам  $R_v$ ), при котором прямые (т. е. блоки) циклически переставляются между собой. В связи с этим конечные проективные плоскости, происходящие описанным способом от разностных множеств с  $\lambda = 1$ , называются *циклическими*. Уже знакомые нам конечные проективные плоскости порядков 2, 3 (см. (4.2), (5.10)) циклические, так как их матрицы инцидентности нетрудно записать в виде циркулянта.

Приведем еще пример. Пусть  $v = 4^2 + 4 + 1 = 21$ . Легко видеть, что множество  $D = \{0, 1, 4, 14, 16\}$  вычетов по модулю 21 есть разностное множество с  $\lambda = 1$ . Если построить по  $D$  симметричную блок-схему с параметрами  $v = 21, k = 5, \lambda = 1$ , то получим циклическую проективную плоскость порядка 4.

**Автоморфизмы конфигураций.** Множители разностных множеств. Автоморфизм конфигурации, заданной системой подмножеств  $\mathcal{P} = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$  множества  $S$ , мы определили в § 6 как взаимно однозначное соответствие  $\alpha$  элементов множества  $S$ , при котором возникает взаимно однозначное соответствие между подмножествами, составляющими конфигурацию.

Приведем пример автоморфизма блок-схемы. Пусть существует  $(v, n+1, 1)$ -разностное множество  $D$ ,  $v = n^2 + n + 1$ . Как мы только что отметили, соответствие  $\alpha: i \rightarrow i+1 \pmod{v}$  представляет собой подстановку на множестве  $R_v$ , при которой все блоки (прямые)  $B_0, B_1, \dots, B_{v-1}$  циклической проективной плоскости  $\mathcal{P}$  циклически переставляются между собой:

$$\alpha(B_i) = B_{i+1} \quad i = 0, 1, \dots, v-2, \quad \alpha(B_{v-1}) = B_0,$$

т. е.  $\alpha$  — автоморфизм  $\mathcal{P}$ . Ясно, что соответствие  $i \rightarrow i + \rho \pmod{v}$  для любого  $\rho \in R_v$  также есть автоморфизм циклической проективной плоскости.

*Группой* называется множество элементов, на котором задана *бинарная операция* (называемая обычно *умножением* или *сложением*), обладающая следующими свойствами: а) ассоциативностью, б) существованием единицы, в) существованием обратного для любого элемента множества. Группу образуют все действительные числа относительно сложения (единицей служит число 0, обратным для  $a$  — число  $-a$ ): все ненулевые действительные (а также все ненулевые рациональные) числа относительно умножения (единица — число 1, обратный для  $a$  — число  $1/a$ ). Все автоморфизмы любой конфигурации также образуют группу относительно операции, заключающейся в их последовательном действии (*суперпозиции*). Единицей здесь служит тождественный автоморфизм (единичная подстановка на элементах множества), обратным для каждого автоморфизма  $\alpha$  — автоморфизм  $\alpha^{-1}$  (подстановка на элементах множества, у которой верхняя и нижняя строки подстановки  $\alpha$  поменялись местами).

Очевидно, что группа автоморфизмов циклической проективной плоскости  $\mathcal{P}$  содержит  $v$  автоморфизмов вида  $i \rightarrow i + \rho \pmod{v}$  ( $\rho = 0, 1, \dots, v-1$ ). Интересно, однако, что эти автоморфизмы обычно не исчерпывают всей группы автоморфизмов  $\mathcal{P}$ . Назовем *множителем*  $(v, k, \lambda)$ -разностного множества  $D = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$

$$\begin{aligned} \text{число } t, \text{ взаимно простое с } v, \text{ обладающее свойством} \\ tD = \{a_1t, a_2t, \dots, a_kt\} \equiv \{a_1 + \rho, a_2 + \rho, \dots, a_k + \rho\} \equiv \\ \equiv D + \rho \pmod{v} \end{aligned} \quad (10.5)$$

для некоторого  $\rho \in R_v$ .

Легко видеть, что умножение на число  $t$ , взаимно простое с  $v$ , можно представить как взаимно однозначное соответствие на множестве  $R_v$ : берем для каждого  $i \in R_v$  число из  $R_v$ , сравнимое с  $it$  по модулю  $v$ . Из  $it \equiv jt \pmod{v}$  ( $i, j \in R_v$ ) следует, что  $t(i - j) \equiv 0 \pmod{v}$ . Отсюда ввиду взаимной простоты  $t$  и  $v$  заключаем, что  $i - j$  делится на  $v$ , что может быть лишь при  $i = j$ , т. е. соответствие действительно взаимно однозначно.

Покажем, что это умножение, если удовлетворяется (10.5), приводит к автоморфизму циклической проективной плоскости  $\mathcal{P}$ , порождаемой  $D$ . Действительно,  $t(D + i) = tD + ti = D + (\rho + ti)$  — блок  $\mathcal{P}$  для любого  $i = 0, 1, \dots, v - 1$  ( $\rho + ti$  заменяется на сравнимый с ним элемент из  $R_v$ ). Если теперь  $t(D + i) \equiv t(D + j) \pmod{v}$  для некоторых  $i, j \in R_v$ , то  $t(i - j) \equiv 0 \pmod{v}$ ,  $i \equiv j \pmod{v}$  и  $i = j$ , т. е. соответствие между блоками взаимно однозначно. Множители разностных множеств играют большую роль в вопросах их построения.

Доказано, что любой простой делитель  $p$  числа  $k - \lambda$  есть множитель  $(v, k, \lambda)$ -разностного множества, если  $p > \lambda$  (см. [12]). В частности, любой простой делитель порядка  $n$  циклической проективной плоскости есть множитель порождающего ее разностного множества. Так, при  $n = 3$   $D = \{0, 1, 3, 9\}$  есть разностное множество, порождающее циклическую проективную плоскость порядка 3. Для нее  $v = n^2 + n + 1 = 13$ ,  $3D = \{0, 3, 9, 27\} \equiv \{0, 1, 3, 9\} \pmod{13}$ , т. е. 3 — множитель  $D$ . Точно так же для разностного множества  $D = \{0, 1, 4, 14, 16\}$ , связанного с плоскостью порядка 4 на 21 элементе, справедливо  $2D = \{0, 2, 8, 28, 32\} \equiv \{0, 2, 7, 8, 11\} \equiv D + 7 \pmod{21}$ , т. е. 2 есть множитель  $D$ .

**Системы троек Штейнера.** Уравновешенная неполная блок-схема с  $k = 3$ ,  $\lambda = 1$ , заданная на множестве из  $v$  элементов, называется *системой троек Штейнера*. Число  $v$  называется *порядком* системы троек Штейнера. Такие конфигурации — одни из наиболее простых для изучения. Необходимые условия (5.2), (5.3) для систем троек Штейнера обычно записываются в виде

$$v - 1 \equiv 0 \pmod{2}, \quad (10.6)$$

$$v(v - 1)/2 \equiv 0 \pmod{3}. \quad (10.7)$$

Таким образом, в силу (10.6)  $v$  должно быть нечетным. Из трех возможных видов нечетных чисел  $v = 6t + 1$ ,  $v = 6t + 3$ ,  $v = 6t + 5$  числа первого и второго вида удовлетворяют (10.7), а числа третьего вида не удовлетворяют:  $(6t + 5)(3t + 2) \equiv 10 \not\equiv 0 \pmod{3}$ . Поэтому необходимым условием существования системы троек Штейнера является

$$v \equiv 1, 3 \pmod{6}. \quad (10.8)$$

Параметры системы троек Штейнера:  $b = v(v - 1)/6$ ,  $v$ ,  $r = (v - 1)/2$ ,  $k = 3$ ,  $\lambda = 1$ .

Приведем примеры. При  $v = 3$  система троек Штейнера — это  $\{1, 2, 3\}$ . При  $v = 7$  системой троек Штейнера является блок-схема (4.2) — конечная проективная плоскость порядка 2. При  $v = 9$ :

$$\begin{aligned} &\{1, 2, 3\}, \quad \{1, 7, 9\}, \quad \{2, 7, 8\}, \quad \{3, 6, 9\}, \\ &\{1, 4, 5\}, \quad \{2, 4, 9\}, \quad \{3, 4, 8\}, \quad \{4, 6, 7\}, \\ &\{1, 6, 8\}, \quad \{2, 5, 6\}, \quad \{3, 5, 7\}, \quad \{5, 8, 9\}. \end{aligned}$$

Один из наиболее интересных результатов о рассматриваемых конфигурациях: необходимое условие (10.8) также достаточно для существования систем троек Штейнера, т. е. эти системы троек существуют для всех порядков  $v$ , если только  $v - 1$  или  $v - 3$  делится на 6. Этот результат доказывается широко применяемым в подобных комбинаторных проблемах методом, называемым *методом рекурсивного построения*. Он заключается в задании правил, по которым из известных комбинаторных конфигураций на множествах с малым числом элементов получаются соответствующие конфигурации на множествах с большим числом элементов.

Скажем, что система троек Штейнера порядка  $v$  содержит *подсистему троек Штейнера* порядка  $v' < v$ , если можно выделить такое  $v'$ -подмножество  $v$ -множества, на котором определена конфигурация, что некоторая часть ее блоков образует систему троек Штейнера на этом  $v'$ -подмножестве. В терминах матриц инцидентности это означает, что если  $A$  — матрица инцидентности размера  $[v(v - 1)/6] \times v$  исходной системы, то ее можно записать в виде

$$A = \begin{bmatrix} A' & O \\ X & Y \end{bmatrix}, \quad (10.9)$$

где  $A'$  — матрица инцидентности размера  $[v'(v' - 1)/6] \times v'$  системы троек Штейнера на некотором  $v'$ -подмно-

жестве исходного  $v$ -множества,  $O$  — нулевая подматрица. Ясно, что скалярное произведение любых двух различных вектор-столбцов матрицы  $A'$  равно 1; то же самое справедливо для  $Y$ . Скалярное произведение двух различных вектор-столбцов матрицы  $X$  равно 0 (по лемме 10.1).

Рекурсивный метод построения систем троек Штейнера имеет в своей основе следующую теорему.

**Теорема 10.6.** *Если существует система троек Штейнера порядка  $v_1$  и система троек Штейнера порядка  $v_2$ , содержащая подсистему порядка  $v_3$  (или если  $v_3 = 1$ ), то можно построить систему троек Штейнера порядка  $v = v_3 + v_1(v_2 - v_3)$ , содержащую  $v_1$  подсистем порядка  $v_2$  и по одной подсистеме соответственно порядков  $v_1$  и  $v_3$ .*

**Доказательство.** Построим матрицу инцидентности искомой конфигурации. При этом будем соблюдать следующие условия: а) число единиц в каждой строке равно 3; б) скалярное произведение любых двух вектор-столбцов равно 1. Обозначим  $s = v_2 - v_3$ . Элементы множества  $S$ , на котором задана система троек Штейнера порядка  $v_2$ , обозначим через  $a_1, a_2, \dots, a_{v_3}$   $b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1s}$ ; при  $v_3 > 1$  полагаем, что матрица инцидентности  $A$  этой системы записана в виде (10.9). Введем еще  $v_1 - 1$   $s$ -множеств элементов:  $\{b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2s}\}, \dots, \{b_{v_1 1}, b_{v_1 2}, \dots, b_{v_1 s}\}$ .

Пусть теперь  $v_3 > 1$ . Для этих  $v_3 + v_1(v_2 - v_3)$  элементов рассмотрим конфигурацию с матрицей инцидентности следующего вида:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a_1 a_2 \dots a_{v_3} & b_{11} b_{12} \dots b_{1s} & b_{21} b_{22} \dots b_{2s} & \dots & b_{v_1 1} b_{v_1 2} \dots b_{v_1 s} \\ \hline A' & O & O & \dots & O \\ \hline X & Y & O & \dots & O \\ \hline X & O & Y & \dots & O \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline X & O & O & \dots & Y \\ \hline O & & & Z & \end{bmatrix}, \quad (10.10)$$

где  $O$  — нулевая подматрица.

Подматрицу  $Z$  в (10.10) строим следующим образом. Определяем на множестве  $Z_{v_1}$  систему троек Штейнера порядка  $v_1$ . Для каждой тройки  $\{j, k, r\}$  из этой системы



в  $Z$  включаем все строки, имеющие 3 единицы в столбцах, соответствующих элементам  $b_{jx}, b_{ky}, b_{rz}$ , где  $x, y, z$  — любые индексы, для которых  $x + y + z \equiv 0 \pmod{s}$ .

Покажем, что  $\bar{A}$  — матрица инцидентности системы троек Штейнера порядка  $v_3 + v_1(v_2 - v_3)$ . Проверим свойства а), б). Каждая строка  $\bar{A}$  содержит три единицы. Скалярное произведение для пар различных столбцов первой группы равно 1, поскольку таково оно в  $A'$ , а в матрице  $X$  оно равно 0. Скалярное произведение пар различных столбцов, взятых оба от каждой из  $v_1$  последующих групп, также равно 1, так как в  $Y$  оно равно 1, а  $Z$  по построению содержит не более одной единицы в каждом из отрезков строк величины  $s$ , принадлежащих столбцам одной группы. Возьмем теперь любые два столбца, соответствующие элементам 1-й и какой-либо из последующих групп. Их скалярное произведение равно 1, так как таково оно в матрице  $A$ .

Пусть, наконец, взяты любые два столбца, соответствующие элементам  $b_{jx}$  и  $b_{ky}$  двух разных групп. В системе троек Штейнера порядка  $v_1$  имеется (единственная) тройка  $\{j, k, r\}$ , содержащая  $j$  и  $k$ . Тогда по построению в  $Z$  найдется единственная тройка, содержащая единицы в столбцах, соответствующих  $b_{jx}$  и  $b_{ky}$ : ее третья единица находится в столбце, соответствующем элементу  $b_{rz}$ , где  $z$  определяется из условия  $z \equiv -(x + y) \pmod{s}$ . Таким образом, при  $v_3 > 1$   $\bar{A}$  — действительно искомая матрица инцидентности. Она содержит в качестве подсистем систему троек Штейнера порядка  $v_3$  (на элементах  $a_1, a_2, \dots, a_{v_3}$ ),  $v_1$  систем порядка  $v_2$  (на элементах  $a_1, a_2, \dots, a_{v_3}, b_{11}, b_{12}, \dots, b_{j_s}, j = 1, 2, \dots, v_1$ ), систему порядка  $v_1$  (на элементах  $b_{1s}, b_{2s}, \dots, b_{v_1s}$ ).

При  $v_3 = 1$  матрицу инцидентности  $A$  системы троек Штейнера порядка  $v_2$  запишем в виде  $A = (x|Y)$ , где  $x$  — вектор-столбец, соответствующий произвольному элементу  $a_1$ . Далее строим матрицу с  $1 + v_1(v_2 - 1)$  столбцами:

$$\bar{A} = \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c} x & Y & 0 & \dots & 0 \\ \hline x & 0 & Y & \dots & 0 \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline x & 0 & 0 & \dots & Y \\ \hline 0 & & & Z & \end{array} \right],$$



где подматрица  $Z$  определяется в точности так же, как в случае  $v_3 > 1$ . Так же устанавливается, что  $\bar{A}$  — матрица инцидентности для системы троек Штейнера порядка  $1 + v_1(v_2 - 1)$ , содержащая  $v_1$  подсистем порядка  $v_2$  и одну подсистему порядка  $v_1$ . Теорема доказана.

Приведем пример, показывающий применение данной теоремы. Мы видели, что существуют системы троек Штейнера порядков  $v_1 = 7$ ,  $v_2 = 9$ . Ясно, что любая система содержит подсистему порядка  $v_3 = 3$  (состоящую из одной тройки). Тогда по теореме 10.6 существуют системы троек Штейнера: а) порядка  $3 + 7(9 - 3) = 45$ ; б) порядка  $1 + 7(9 - 1) = 57$ .

С использованием теоремы 10.6, исходя из систем троек Штейнера порядков 3, 7, 9, 13, был доказан упомянутый выше результат.

**Теорема 10.7 [22].** *Если  $v = 6t + 1$  или  $v = 6t + 3$ , то существует система троек Штейнера порядка  $v$ .*

**Системы троек Киркмана.** Разрешимая система троек Штейнера называется *системой троек Киркмана*. В середине XIX в. была поставлена следующая задача, известная как *задача Киркмана о школьницах*. Требуется составить расписание ежедневных прогулок для 15 школьниц при следующих условиях:

а) девушки должны гулять группами по трое;

б) в течение 7 дней каждая должна в точности один раз попасть в одну группу с каждой из остальных.

В математической формулировке эти условия, очевидно, приводят к требованию построения системы троек Штейнера на множестве из 15 элементов; более того, каждая из ежедневных пяти групп есть не что иное, как семейство параллельных блоков конфигурации. Таким образом, задача Киркмана о школьницах сводится к задаче построения разрешимой системы троек Штейнера с параметрами  $v = 15$ ,  $b = 35$ ,  $r = 7$ ,  $k = 3$ ,  $\lambda = 1$ .

Приведем решение задачи (представим себе, что девушкам присвоены номера от 0 до 14):

{0, 7, 14},	{1, 8, 14},	{2, 9, 14},	{3, 10, 14},
{1, 2, 4},	{2, 3, 5},	{3, 4, 6},	{0, 4, 5},
{3, 9, 12},	{4, 10, 13},	{5, 7, 11},	{6, 8, 12},
{5, 8, 13},	{6, 7, 9},	{0, 8, 10},	{1, 9, 11},
{6, 10, 11},	{0, 11, 12},	{1, 12, 13},	{2, 7, 13},

{4, 11, 14},	{5, 12, 14},	{6, 13, 14},
{1, 5, 6},	{0, 2, 6},	{0, 1, 3},
{0, 9, 13},	{1, 7, 10},	{2, 8, 11},
{2, 10, 12},	{3, 11, 13},	{4, 7, 12},
{3, 7, 8},	{4, 8, 9},	{5, 9, 10}.

Задачу о существовании системы троек Киркмана можно, конечно, ставить для произвольного порядка  $v$ . Мы отмечали в начале параграфа, что в разрешимой блок-схеме  $b$  делится на  $r$ , а  $v$  на  $k$ . Поэтому для разрешимости системы троек Штейнера необходимо, чтобы  $v$  делилось на 3, т. е. чтобы  $v \equiv 3 \pmod{6}$ . Доказательство достаточности этого условия существования системы троек Киркмана долго оставалось нерешенной проблемой комбинаторной математики.

## § 11. Условия существования конфигураций общего вида

В этом параграфе мы рассмотрим конфигурации более общего вида, чем блок-схемы, и выведем условия их существования, рассматривая матрицы инцидентности. Признаком уравновешенных неполных блок-схем является одинаковая частота появления пар элементов при одинаковой величине блоков; отсюда вытекает также одинаковость числа появлений каждого элемента в блоках. Эти условия на конфигурацию, конечно, являются ограничительными. Однако все конфигурации, сколько-нибудь интересные в теоретическом или прикладном отношении, обязательно подчиняются тем или иным ограничениям. Сейчас мы обсудим вопросы существования конфигураций при некоторых видах ограничений.

**Конфигурации с условиями на величины подмножеств и числа появлений элементов.** Ограничения такого типа — одни из наиболее распространенных условий на конфигурации, представляющие собой в известной степени обобщение условий для блок-схем.

Рассмотрим  $n$ -множество  $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  и на нем семейства  $\mathcal{P} = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ , состоящие из  $m$  подмножеств  $X$ , от которых требуем:

а) число элементов в них удовлетворяет условию  $|X_i| = r_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ );

б) элемент  $a_j \in X$  встречается в подмножествах из  $\mathcal{P}$  в точности  $s_j$  раз, где  $r_1, r_2, \dots, r_m, s_1, s_2, \dots, s_n$  — заданные целые неотрицательные числа.

Изучим вопрос о существовании конфигураций  $\mathcal{P}$  со свойствами а), б). Напомним (см. § 1), что для матрицы  $A = [a_{ij}]$  размера  $m \times n$  вектором строчных сумм называется вектор  $R = (r_1, r_2, \dots, r_m)$ , где  $r_i$  — сумма элементов в  $i$ -й строке  $A$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), и вектором столбцевых сумм  $A$  называется вектор  $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ , где  $s_j$  — сумма элементов в  $j$ -м столбце  $A$  ( $j = 1, \dots, n$ ).

Ясно, что для заданных целочисленных векторов  $R$  и  $S$  матрица инцидентности  $A$  конфигурации  $\mathcal{P}$ , удовлетворяющей условиям а), б), есть  $(0, 1)$ -матрица с вектором строчных сумм  $R$  и вектором столбцевых сумм  $S$ . Обратно, любая  $(0, 1)$ -матрица  $A$  размера  $m \times n$  с вектором строчных сумм  $R$  и вектором столбцевых сумм  $S$  приводит к конфигурации подмножеств  $\mathcal{P}$  с условиями а), б).

*Классом Райзера*  $\mathfrak{A}(R, S; m, n)$  (или просто  $\mathfrak{A}(R, S)$ ) назовем совокупность  $(0, 1)$ -матриц размера  $m \times n$ , для которых вектор строчных сумм равен  $R$ , а вектор столбцевых сумм —  $S$ . Примером класса Райзера является рассматривавшийся в гл. 3 класс  $\mathfrak{A}(k, n)$   $(0, 1)$ -матриц порядка  $n$ , у которых все строчные и столбцевые суммы равны  $k$ . Ясно, что существование конфигураций с условиями а), б) равносильно непустоте класса  $\mathfrak{A}(R, S)$ , где  $R = (r_1, r_2, \dots, r_m)$ ,  $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ .

**Максимальная матрица.** Пусть  $R = (r_1, r_2, \dots, r_m)$  —  $m$ -мерный вектор, компоненты которого — целые числа, удовлетворяющие условию  $0 \leq r_i \leq n$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ). Среди всех  $(0, 1)$ -матриц размера  $m \times n$  с вектором строчных сумм  $R$  выделяется единственная матрица, у которой для каждого  $i = 1, 2, \dots, m$  единицы в  $i$ -й строке занимают первые  $r_i$  мест. Такая матрица называется *максимальной матрицей* размера  $m \times n$  для данного вектора строчных сумм  $R$ . Пусть, например,  $R = (4, 3, 3, 2, 2)$ . Тогда максимальная матрица размера  $5 \times 4$  для  $R$  есть

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Максимальная матрица обладает, очевидно, следующим

свойством: ее вектор столбцевых сумм  $\bar{S} = (\bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_n)$  монотонен, т. е.  $\bar{s}_1 \geq \bar{s}_2 \geq \dots \geq \bar{s}_n$ .

Нас будет интересовать вопрос о непустоте классов Райзера  $\mathfrak{A}(R, S)$ . Заметим, что достаточно при этом ограничиться лишь случаем, когда оба вектора  $R$  и  $S$  монотонны. В самом деле, в любой  $(0, 1)$ -матрице  $A$  можно сначала переставить строки так, чтобы вектор ее строчных сумм стал монотонным (при этом вектор ее столбцевых сумм не изменится). Затем переставим столбцы в порядке неубывания столбцевых сумм (при этом вектор строчных сумм не изменится). Обозначим преобразованные векторы строчных и столбцевых сумм соответственно через  $R'$  и  $S'$ ; оба они монотонны. Если мы докажем непустоту класса Райзера  $\mathfrak{A}(R', S')$ , т. е. построим матрицу  $A'$  с монотонными векторами  $R'$  и  $S'$ , то, переставив в обратном порядке столбцы и строки  $A'$ , придем к матрице  $A$ , принадлежащей исходному классу, в котором векторы  $R$  и  $S$  не обязаны быть монотонными.

Пусть заданы два  $n$ -мерных вектора  $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$   $S^* = (s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*)$ , компоненты которых — целые неотрицательные числа. Скажем, что  $S^*$  мажорирует  $S$ , если выполняются условия

$$s_1 + s_2 + \dots + s_j \leq s_1^* + s_2^* + \dots + s_j^*, \quad j = 1, 2, \dots, n - 1, \quad (11.1)$$

$$s_1 + s_2 + \dots + s_n = s_1^* + s_2^* + \dots + s_n^*; \quad (11.2)$$

мажорирование векторов обозначается как  $S < S^*$ . Пусть класс  $\mathfrak{A}(R, S; m, n)$  непуст. образуем максимальную матрицу  $\bar{A}$  размера  $m \times n$  для вектора  $R$ ; обозначим ее вектор столбцевых сумм через  $\bar{S} = (\bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_n)$ . Ясно, что для компонент векторов  $S$  и  $\bar{S}$  выполняются условия (11.1), (11.2), т. е.  $S < \bar{S}$ .

Заметим, что условие (11.1) при выполнении (11.2) равносильно условию

$$s_j^* + s_{j+1}^* + \dots + s_n^* \leq s_j + s_{j+1} + \dots + s_n, \quad j = 2, 3, \dots, n; \quad (11.3)$$

в этом можно убедиться, вычитая из (11.2) неравенство (11.1) для каждого  $j = 1, 2, \dots, n - 1$ . Таким образом,  $S^*$  мажорирует  $S$ , если выполнены либо условия (11.1), (11.2), либо условия (11.2), (11.3).

### Условие непустоты класса Райзера.

**Теорема 11.1.** Пусть  $R = (r_1, r_2, \dots, r_m)$ ,  $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$  — два вектора с целыми неотрицательными компонентами,  $\bar{A}$  — максимальная матрица размера  $m \times n$  для вектора строчных сумм  $R$ . Если  $\bar{S}$  — вектор столбцевых сумм матрицы  $\bar{A}$ , то класс  $\mathfrak{A}(R, S; m, n)$  непуст тогда и только тогда, когда  $S < \bar{S}$ .

**Доказательство.** Как мы заметили выше, достаточно доказать теорему для случая, когда  $R$  и  $S$  монотонны, что и будем предполагать.

**Необходимость.** Пусть класс  $\mathfrak{A}(R, S)$  непуст, т. е. содержит некоторую  $(0, 1)$ -матрицу  $A$ . Эту матрицу можно представить себе полученной из  $\bar{A}$  переносом вправо единиц в ее строках. Таким образом, для любого  $i = 1, 2, \dots, n - 1$

$$s_1 + s_2 + \dots + s_i \leq \bar{s}_1 + \bar{s}_2 + \dots + \bar{s}_i.$$

Кроме того,

$$s_1 + s_2 + \dots + s_n = r_1 + r_2 + \dots + r_m = \bar{s}_1 + \bar{s}_2 + \dots + \bar{s}_n$$

(по определению  $\bar{A}$ ). Итак, (11.1), (11.2) выполнены и  $S < \bar{S}$ .

**Достаточность\*.** Пусть теперь  $S < \bar{S}$ . Дадим способ построения матрицы  $A$  класса  $\mathfrak{A}(R, S)$  из  $\bar{A}$ . Предположим по индукции, что теорема доказана для всех матриц с числом столбцов, меньшим  $n$ . Из (11.3) следует, что  $\bar{s}_n \leq s_n$ , а из (11.1) и монотонности  $S$ , что  $\bar{s}_1 \geq s_1 \geq \dots \geq s_n$ . Поэтому можно взять в  $\bar{A}$   $s_n$  строк с наибольшими строчными суммами и переместить крайние правые единицы этих строк в  $n$ -й столбец. Условимся при этом, что если нужно выбирать среди строк с одинаковыми строчными суммами, то единицы берем из самых нижних строк. В результате приходим к матрице вида  $(\bar{A}_{n-1} \vdots A_1)$ . Здесь  $A_1$  — вектор-столбец с  $s_n$  единицами, а  $\bar{A}_{n-1}$  — матрица размера  $m \times (n - 1)$  с монотонным (в силу нашего условия) вектором строчных сумм. Очевидно, что  $\bar{A}_{n-1}$  — максимальная матрица размера  $m \times (n - 1)$  для некоторого монотонного вектора строчных сумм. Обозначим через  $E = (e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$  вектор столбцевых сумм  $\bar{A}_{n-1}$ . Ясно из построения, что  $E$  монотонен, т. е.  $e_1 \geq e_2 \geq \dots \geq e_{n-1}$ .

Покажем теперь, что  $S_{n-1} = (s_1, s_2, \dots, s_{n-1}) < E$ . Для этого посмотрим внимательно на матрицы  $\bar{A}_{n-1}$  и  $\bar{S}$ , в частности выясним связь между компонентами векторов

$\bar{S}$  и  $E$ . Единицы в  $\bar{A}$  расположены единым массивом, и если очертить границу этого массива, то ввиду монотонности  $\bar{S}$  ограничивающая линия будет подниматься слева направо, образуя «зубцы», в тех местах, где соседние компоненты вектора  $\bar{S}$  не равны между собой (рис. 6).

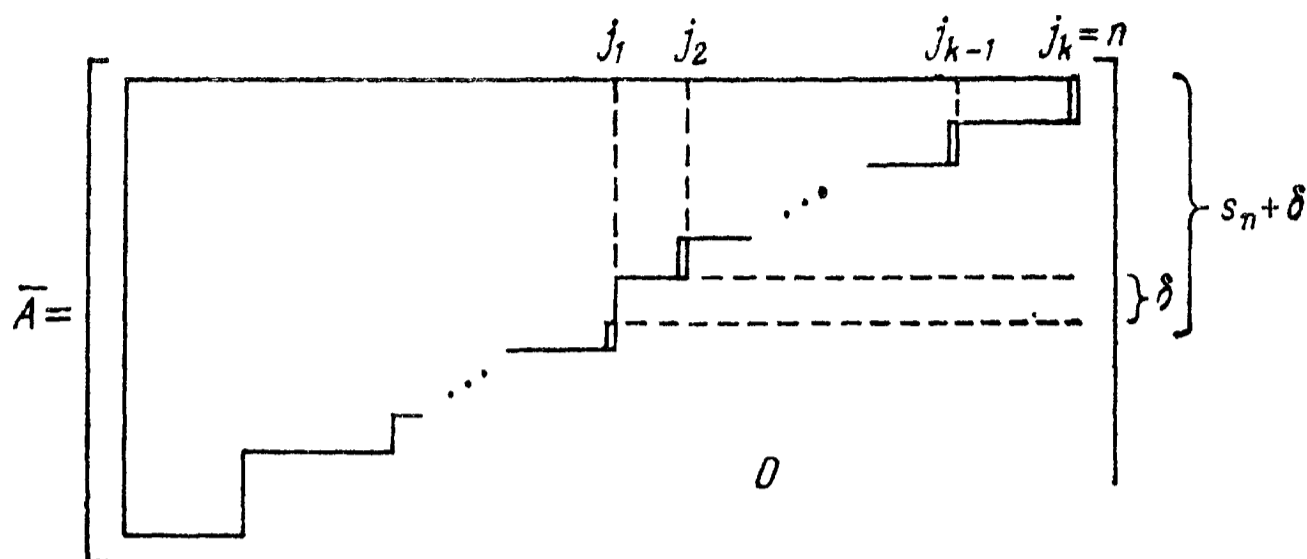


Рис. 6

На этом рисунке двойными вертикальными чертами показаны места расположения тех единиц, которые следует переместить в  $n$ -й столбец для образования вектор-столбца  $A_1$ . Через  $j_1$  обозначен номер крайнего левого столбца, из которого берутся единицы для  $A_1$ . Места «зубцов», начиная с  $j_1$ , обозначены через  $j_1, j_2, \dots, j_k = n$ . Таким образом, в промежутках от  $j_t + 1$  до  $j_{t+1}$  величины компонент  $\bar{S}$  равны между собой:

$$\bar{s}_{j_t+1} = \bar{s}_{j_t+2} = \dots = \bar{s}_{j_{t+1}}, \quad t = 1, 2, \dots, k - 1. \quad (11.4)$$

Величина  $\bar{s}_{j_1} - s_n$  обозначена через  $\delta$ , т. е.

$$s_n = \bar{s}_{j_1} - \delta, \quad (11.5)$$

где  $0 \leq \delta \leq \bar{s}_{j_1} - \bar{s}_{j_1+1}$ . Далее,

$$e_j = \bar{s}_j, \quad j \neq j_1, j_2, \dots, j_{k-1}. \quad (11.6)$$

Наконец,

$$e_{j_t} = \begin{cases} \bar{s}_{j_{t+1}}, & t = 2, 3, \dots, k - 1, \\ \bar{s}_{j_2} + \delta, & t = 1. \end{cases} \quad (11.7)$$

Так как матрица  $(\bar{A}_{n-1} \mid A_1)$  содержит столько же единиц, сколько их в  $\bar{A}$ , то  $e_1 + e_2 + \dots + e_{n-1} + s_n = \bar{s}_1 + \bar{s}_2 + \dots + \bar{s}_n = s_1 + s_2 + \dots + s_n$ . Отсюда  $e_1 + e_2 + \dots + e_{n-1} = s_1 + s_2 + \dots + s_{n-1}$ , т. е. для компонент  $E$  и  $S_{n-1}$  выполняется условие (11.2).

Чтобы установить соотношение  $S_{n-1} < E$ , достаточно показать, что справедливо также (11.3), т. е. что

$$e_j + e_{j+1} + \dots + e_{n-1} \leq s_j + s_{j+1} + \dots + s_{n-1}, \\ j = 2, 3, \dots, n-1.$$

Рассмотрим отдельно два случая.

а)  $j_1 < j \leq n-1$ . В этом случае найдется такое  $t \geq 1$ , что  $j_t < j \leq j_{t+1}$ . Так как по (11.7)  $e_{j_t} = \bar{s}_{j_{t+1}}$  при  $t > 1$ , а для остальных индексов по (11.6)  $e_j = \bar{s}_j$ , получаем

$$e_j + e_{j+1} + \dots + e_{n-1} = \bar{s}_j + \bar{s}_{j+1} + \dots + \bar{s}_{j_t-1} + \\ + \bar{s}_{j_t+1} + \dots + \bar{s}_n$$

( $j_k = n$ , см. рис. 6). Но в отрезке между «зубцами» величины компонент равны между собой (см. (11.4)), поэтому

$$\bar{s}_j + \bar{s}_{j+1} + \dots + \bar{s}_{j_t-1} = \bar{s}_{j+1} + \bar{s}_{j+2} + \dots + \bar{s}_{j_t},$$

т. е.

$$e_j + e_{j+1} + \dots + e_{n-1} = \bar{s}_{j+1} + \bar{s}_{j+2} + \dots + \bar{s}_n. \quad (11.8)$$

По условию  $S < \bar{S}$ , т. е. ввиду (11.3)  $\bar{s}_{j+1} + \bar{s}_{j+2} + \dots + \bar{s}_n \leq s_{j+1} + s_{j+2} + \dots + s_n$ . Но в силу монотонности  $S$

$$s_{j+1} + s_{j+2} + \dots + s_n \leq s_j + s_{j+1} + \dots + s_{n-1}.$$

Заменяя правую часть (11.8) на  $s_j + s_{j+1} + \dots + s_{n-1}$ , приходим к требуемому неравенству.

б)  $1 \leq j \leq j_1$ . Вновь по (11.6), (11.7) получим

$$e_j + e_{j+1} + \dots + e_{n-1} = \\ = \bar{s}_j + \bar{s}_{j+1} + \dots + \bar{s}_{j_1-1} + \delta + \bar{s}_{j_1+1} + \dots + \bar{s}_n \quad (11.9)$$

(при  $j = j_1$  первых  $j_1 - j$  слагаемых не будет). Так как  $\delta = \bar{s}_{j_1} - s_n$  (см. (11.5)) и  $S < \bar{S}$ , из (11.9) получаем

$$e_j + e_{j+1} + \dots + e_{n-1} = \\ = \bar{s}_j + \bar{s}_{j+1} + \dots + \bar{s}_{j_1-1} + \bar{s}_{j_1} + \bar{s}_{j_1+1} + \dots + \bar{s}_n - s_n \leq \\ \leq s_j + s_{j+1} + \dots + s_n - s_n = s_j + s_{j+1} + \dots + s_{n-1}, \quad (11.10)$$

т. е. вновь получаем неравенство (11.3) для компонент  $S_{n-1}$  и  $E$ .

Таким образом, мы показали, что  $S_{n-1} < E$ . Следовательно, по предположению индукции, мы можем из мо-

потонной максимальной матрицы  $\bar{A}_{n-1}$  построить  $(0, 1)$ -матрицу  $A_{n-1}$  размера  $m \times (n - 1)$  со столбцовыми суммами  $s_1, s_2, \dots, s_{n-1}$  и тем же вектором строчных сумм, что и у  $\bar{A}_{n-1}$ . Но тогда матрица  $A = (A_{n-1} \vdots A_1)$  имеет вектор столбцовых сумм  $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$  и вектор строчных сумм  $R = (r_1, r_2, \dots, r_m)$ . Итак,  $A \in \mathfrak{A}(R, S; m, n)$ , и теорема доказана.

Проиллюстрируем на примере описанный в данной теореме процесс построения матрицы  $A \in \mathfrak{A}(R, S)$  из максимальной матрицы  $\bar{A} \in \mathfrak{A}(R, \bar{S})$  при  $S < \bar{S}$ . Пусть  $R = (4, 3, 3, 2, 2)$ ,  $S = (4, 4, 2, 2, 2)$ . Тогда

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

и  $\bar{S} = (5, 5, 3, 1, 0)$ . Очевидно,  $S < \bar{S}$ . Процесс построения  $A \in \mathfrak{A}(R, S)$  из  $\bar{A}$  протекает так, как показано ниже:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \\ \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \vdots & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & \vdots & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Приведем другой пример. Пусть  $R = (4, 4, 2, 1, 1)$ ,  $S = (4, 4, 3, 1)$ . Матрица  $\bar{A}$  размера  $5 \times 4$  для  $R$  имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

т. е.  $\bar{S} = (5, 3, 2, 2)$ . Но  $\bar{S}$  не мажорирует  $S$ , и по теореме 11.1 класс  $\mathfrak{A}(R, S)$  пуст.

**Классы матриц с одинаковыми строчными и одинаковыми столбцовыми суммами.** В гл. 3 мы рассматривали класс  $\mathfrak{A}(k, n)$   $(0, 1)$ -матриц порядка  $n$  с  $k$  единицами в каждой строке и каждом столбце. Рассмотрим теперь не-



которое обобщение класса  $\mathfrak{A}(k, n)$ . Пусть  $(0, 1)$ -матрица  $A$  размера  $m \times n$  имеет  $k$  единиц в каждой строке и  $l$  единиц в каждом столбце. Для такой матрицы  $m$ -мерный вектор строчных сумм имеет вид  $(k, k, \dots, k)$ , а  $n$ -мерный вектор столбцевых сумм —  $(l, l, \dots, l)$ . Соответствующий класс Райзера  $(0, 1)$ -матриц, куда входит  $A$ , обозначим через  $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(k, l; m, n)$ . Так как для  $A \in \mathfrak{A}$  должно выполняться соотношение  $km = ln$ , необходимым условием непустоты класса  $\mathfrak{A}$  будет следующее соотношение между числом строк и числом столбцов:  $m = ln/k$ . Поэтому такой класс иногда будем обозначать просто как  $\mathfrak{A}(k, l, n)$ , имея в виду, что число строк определяется из написанного соотношения. При каких  $k, l, n$  класс  $\mathfrak{A}$  непуст? Составим для вектора  $(k, k, \dots, k)$  максимальную границу  $\bar{A}$  размера  $m \times n$ , где  $m = ln/k$ . Она имеет вид

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix};$$

в ней  $k$  столбцов из  $m$  единиц каждый и  $n - k$  столбцов нулей. Так как  $l \leq m$ , вектор столбцевых сумм  $\bar{A}$  мажорирует вектор  $(l, l, \dots, l)$ , и по теореме 11.1 получаем, что класс  $\mathfrak{A}(k, l; m, n)$  непуст для любых  $k \leq m, l \leq n$ , если  $m = ln/k$  — целое число.

**Конфигурации, имеющие систему различных представителей.** Другим интересным условием на конфигурацию является требование существования системы различных представителей для входящих в нее подмножеств (см. § 7). Как было показано, это равносильно тому, чтобы перманент матрицы инцидентности конфигурации был отличен от нуля, или, что то же самое, в матрице имелась положительная диагональ (см. § 7).

Для  $(0, 1)$ -матрицы размера  $m \times n$  *граничным рангом* называется наибольшая величина ее квадратной подматрицы, имеющей положительную диагональ. Обозначим через  $\rho = \rho(A)$  граничный ранг  $(0, 1)$ -матрицы  $A$ . Очевидно, что  $\text{per } A \neq 0$  для матрицы  $A$  размера  $m \times n$  с  $m \leq n$  тогда и только тогда, когда  $\rho(A) = m$ . Сейчас укажем способ, позволяющий облегчить нахождение граничного ранга и, в частности, проверку существования системы различных представителей у заданной конфигурации. Назовем *линией* в матрице ее строку или столбец.

**Теорема 11.2.** Пусть  $A$  —  $(0, 1)$ -матрица размера  $m \times n$ . Тогда минимальное число линий, содержащих

все единицы, имеющиеся в  $A$ , равно ее граничному рангу.

Доказательство. Обозначим через  $\rho'$  минимальное число линий, содержащих все единицы  $A$ . Возьмем  $\rho(A)$  единиц, лежащих на положительной диагонали некоторой подматрицы  $A$ . Ясно, что никакие две из них не могут лежать на одной линии. Таким образом,  $\rho' \geq \rho$ .

Докажем теперь обратное неравенство, используя результаты гл. 3 о перманентах  $(0, 1)$ -матриц. Пусть в  $A$  имеется  $e$  строк и  $f$  столбцов, содержащих все ее единицы,  $e + f = \rho'$ . Переставим эти строки и столбцы на первые места. При таких перестановках величины  $\rho$  и  $\rho'$ , очевидно, измениться не могут. Приходим, таким образом, к матрице

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & O \end{bmatrix},$$

где  $A_1$  — размера  $e \times f$ ,  $A_2$  —  $e \times (n - f)$ ,  $A_3$  —  $(n - e) \times f$  и в правом нижнем углу стоит, очевидно, нулевая подматрица размера  $(n - e) \times (n - f)$  (все единицы содержатся теперь в  $e$  первых строках и  $f$  столбцах); матрицы  $A_2$  или  $A_3$  могут, конечно, отсутствовать. Так как, очевидно,  $e + f \leq n$ , то для матриц  $A_2$  и  $A_3^T$  определен перманент.

Покажем, что  $\text{рег } A_2$  и  $\text{рег } A_3^T$  отличны от нуля. Действительно, пусть  $\text{рег } A_2 = 0$ . Тогда по теореме 8.2 в  $A_2$  найдется нулевая подматрица размера  $e_1 \times g$ , где

$$e_1 + g = e + n - f + 1, \quad (11.11)$$

которую, не ограничивая общности, можно представить расположенной в правом нижнем углу:

$$\left[ \begin{array}{cc} & \overbrace{\hspace{2cm}}^g \\ & \boxed{\begin{array}{cc} A_2' & A_2'' \\ A_2''' & O \end{array}} \\ A_1 & \left. \vphantom{\boxed{\begin{array}{cc} A_2' & A_2'' \\ A_2''' & O \end{array}}} \right\} e - e_1 \\ & \\ A_3 & O \end{array} \right] \quad (11.12)$$

Возьмем теперь  $e - e_1$  первых строк и  $n - g$  первых столбцов матрицы (11.12). Ясно, что они содержат все

ее единицы. С другой стороны,  $e - e_1 + n - g < e + f$ , поскольку из (11.11) следует, что  $n - g - e_1 = f - e - 1 < f$ . Мы получили противоречие с минимальностью числа  $\rho' = e + f$ . Таким образом,  $\text{reg } A_2 > 0$  и  $\rho(A_2) = e$ .

Точно так же, рассматривая транспонированную матрицу  $A_3^T$  и применяя к ней ту же теорему 8.2, можно показать, что  $\text{reg } A_3^T \neq 0$ , и, следовательно,  $\rho(A_3) = f$ . Ясно, что  $\rho(A) \geq \rho(A_2) + \rho(A_3) = e + f = \rho'(A)$ . Итак,  $\rho = \rho'$ , и теорема доказана.

Данной теоремой вопрос о граничном ранге, конечно, не решается окончательно, так как установление минимальности какого-либо числа линий, содержащих все единицы  $(0, 1)$ -матрицы, — задача также непростая. Часто рассматривают граничные ранги для совокупности всех матриц, составляющих некоторый класс Райзера  $\mathfrak{A}(R, S)$ . Число  $\bar{\rho} = \max \rho(A)$ , где максимум берется по всем матрицам  $A$  класса  $\mathfrak{A}(R, S)$ , называется *максимальным граничным рангом* этого класса. Величина  $\bar{\rho}$  дает оценку сверху граничных рангов матриц этого класса. Для  $\bar{\rho}$  найдено выражение в явном виде через компоненты векторов  $R$  и  $S$  в случае, если все они положительны.

**Теорема 11.3 [12].** Пусть  $R = (r_1, r_2, \dots, r_m)$ ,  $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$  — целочисленные векторы, для которых  $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_m > 0$ ,  $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n > 0$ ,  $\mathfrak{A}(R, S)$  — соответствующий непустой класс Райзера  $(0, 1)$ -матриц. Тогда

$$\bar{\rho} = \min_{i,j} (t_{ij} + i + j), \quad (11.13)$$

где

$$t_{ij} = ij + (r_{i+1} + r_{i+2} + \dots + r_m) - (s_1 + s_2 + \dots + s_j), \\ i = 0, 1, \dots, m; \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (11.14)$$

В силу этой теоремы нахождение максимального граничного ранга  $\bar{\rho}$  класса  $\mathfrak{A}(R, S)$  сводится просто к вычислению  $(m+1)(n+1)$  чисел вида (11.14).

**Латинские прямоугольники.** Прямоугольная таблица размера  $r \times s$ , составленная из чисел  $1, 2, \dots, n$  таким образом, что никакое из этих чисел не появляется дважды в одной строке или одном столбце, называется *латинским прямоугольником* размера  $r \times s$  на числах  $1, 2, \dots, n$ . При  $r = s = n$  такая таблица называется *латинским квадратом* порядка  $n$ . Ясно, что строки латинского прямоугольника представляют собой  $s$ -выборки без повторения,

а столбцы —  $r$ -выборки без повторения из множества  $Z_n$  (см. § 3). В латинском квадрате как строки, так и столбцы представляют собой  $n$  перестановок  $1, 2, \dots, n$ .

Например, в (11.15), а) — в) — латинские прямоугольники соответственно размеров  $3 \times 6$  на  $Z_6$ ,  $4 \times 4$  на  $Z_5$ ,  $3 \times n$  на  $Z_n$ ; г) — латинский квадрат порядка 4:

$$\begin{array}{ll}
 \text{а)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}, & \text{б)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \\
 \text{в)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 3 & 4 & \dots & n-2 \end{bmatrix}, & \text{г)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{array} \tag{11.15}$$

Латинские прямоугольники и квадраты представляют собой весьма распространенный комбинаторный объект, так как обладают очень интересными свойствами. Они широко применяются также при планировании экспериментов. С первого взгляда латинские прямоугольники не имеют отношения к конфигурациям подмножеств, которые мы изучаем. Но это не так. Покажем сейчас, что они связаны с конфигурациями определенного вида и  $(0, 1)$ -матрицами классов Райзера  $\mathcal{A}(k, n)$ .

**Теорема 11.4.** Пусть  $r, n$  — целые положительные числа и  $r \leq n$ . Всякому латинскому прямоугольнику размера  $r \times n$  на множестве  $Z_n$  можно поставить в соответствие конфигурацию  $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ , состоящую из  $r$ -подмножеств  $Z_n$ , в которой каждый из элементов  $1, 2, \dots, n$  встречается в точности  $r$  раз.

Обратно, такой конфигурации  $\mathcal{S}$  соответствует некоторое непустое множество латинских прямоугольников на  $Z_n$  размера  $r \times n$ .

**Доказательство.** Пусть  $L$  — латинский прямоугольник размера  $r \times n$  на элементах  $Z_n$ . Тогда числа, стоящие в его  $j$ -м столбце, образуют  $r$ -подмножество  $S_j$  множества  $Z_n$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ). Построим матрицу инцидентности для конфигурации  $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ . Это будет  $(0, 1)$ -матрица  $A$  порядка  $n$  с  $r$  элементами в каждой строке. Каждый элемент  $Z_n$  по определению латинского прямоугольника может появляться в столбцах  $L$  не более  $r$  раз (иначе нашлась бы строка, в которой этот элемент встретился бы дважды). Но общее число всех элементов в  $L$  равно  $rn$ , поэтому каждый элемент  $Z_n$  появляется в столбцах в точности  $r$  раз. Следовательно,

$A$  содержит в каждом столбце в точности  $r$  единиц. Итак,  $\mathcal{S}$  — такая конфигурация, о которой идет речь в условиях теоремы.

Пусть теперь  $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$  — конфигурация из  $n$   $r$ -подмножеств  $Z_n$  таких, что каждый элемент  $Z_n$  появляется в подмножествах конфигурации в точности  $r$  раз. Рассмотрим матрицу инцидентности  $A$  для  $\mathcal{S}$ . В  $A$  каждая строка и каждый столбец содержит в точности  $r$  единиц, т. е.  $A \in \mathfrak{A}(r, n)$ . В гл. 3 (теорема 8.1) было показано, что для  $A$  из этого класса можно найти  $r$  таких матриц подстановки  $P_1, P_2, \dots, P_r$ , что  $A = P_1 + P_2 + \dots + P_r$ . Возьмем теперь прямоугольную таблицу размера  $r \times n$ . Для каждого  $i = 1, 2, \dots, r$  в  $i$ -й строке таблицы выпишем номера столбцов, в которых по порядку стоят единицы 1-й, 2-й, ...,  $n$ -й строк матрицы  $P_i$ . Ясно, что тогда получим латинский прямоугольник размера  $r \times n$  на элементах  $Z_n$ , так как в каждой строке стоит некоторая перестановка чисел  $1, 2, \dots, n$ , а в каждом столбце — некоторая  $r$ -выборка без повторения из  $Z_n$ . Фактически в столбцах стоят элементы подмножеств  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , размещенные так, чтобы в строке прямоугольника никакой элемент не встретился бы два раза. Теорема доказана.

Приведем пример. Пусть  $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$  — конфигурация 3-подмножеств на  $Z_4: \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 4\}$ . Тогда

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Строим по  $A$  латинский прямоугольник размера  $3 \times 4$ , как описано в доказательстве теоремы 11.4:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Из доказательства теоремы 11.4 видно, что по латинскому прямоугольнику  $L$  размера  $r \times n$  на  $Z_n$  можно непосредственно построить матрицу  $A \in \mathfrak{A}(r, n)$ , не рассматривая конфигурацию  $\mathcal{S}$ , а просто записывая сумму матриц подстановки  $P_1, P_2, \dots, P_r$ , порождаемых стро-

ками  $L$ . Однако обратное соответствие не однозначно, так как не однозначно разложение матрицы в сумму матриц подстановки. Поэтому матриц класса  $\mathfrak{A}(r, n)$  меньше, чем латинских прямоугольников размера  $r \times n$ . Это явление становится особенно заметным в случае латинских квадратов.

В самом деле, каждый латинский квадрат порядка  $n$  может быть получен с помощью некоторого разложения одной-единственной матрицы  $J_n$  на сумму  $n$  матриц подстановки. Например, помимо приведенного в (11.15, г) латинского квадрата порядка 4, можно выписать еще такие квадраты:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (11.16)$$

Легко убедиться, что все квадраты из (11.16) и квадрат (11.15, г) соответствуют различным разложениям матрицы  $J_4$  на сумму четырех матриц подстановки.

**Расширение латинских прямоугольников.** Пусть задан латинский прямоугольник размера  $r \times s$  на элементах  $Z_n$  ( $r, s \leq n$ ). Когда его можно расширить до латинского прямоугольника большего размера? Этот вопрос представляет интерес, в частности, при перечислении латинских прямоугольников.

**Теорема 11.5.** *Любой латинский прямоугольник  $L$  размера  $r \times n$  на  $Z_n$  может быть расширен до латинского квадрата порядка  $n$ .*

**Доказательство.** Пусть  $r < n$ . Прямоугольнику  $L$  можно, как показано при доказательстве теоремы 11.4, поставить в соответствие  $(0, 1)$ -матрицу  $A \in \mathfrak{A}(r, n)$ . С другой стороны, мы заметили, что строки  $L$  соответствуют матрицам  $P_1, P_2, \dots, P_r$  из некоторого разложения  $A = P_1 + P_2 + \dots + P_r$ . Теперь ясно, что  $J_n - A \in \mathfrak{A}(n - r, n)$ . По теореме 8.1  $J_n - A = P_{r+1} + P_{r+2} + \dots + P_n$  для некоторых матриц подстановки  $P_{r+1}, P_{r+2}, \dots, P_n$ . Но тогда  $J_n = P_1 + P_2 + \dots + P_r + P_{r+1} + \dots + P_n$  — разложение  $J_n$  на сумму  $n$  матриц подстановки. Если теперь, как в теореме 11.4, построить квадратную таблицу, записывая в  $i$ -й ее строке по порядку номера столбцов, в которых находятся единицы 1-й, 2-й, ...,  $n$ -й строк матрицы  $P_i$ , то придем к латинскому квадрату порядка  $n$ , первые  $n$  строк которого образуют прямоугольник  $L$ . Теорема доказана.

Несколько сложнее решается вопрос о расширении латинского прямоугольника размера  $r \times s$  при  $s < n$ . Установим предварительно один вспомогательный результат, представляющий собой обобщение теоремы 8.1.

Назовем  $t$ -подстановкой  $n$ -множества  $X$ , где  $t \leq n$ , взаимно однозначное отображение  $Z_m \rightarrow X$  (в гл. 1, 3 при  $X = Z_n$  в том же значении употребляется термин «упорядоченная  $t$ -выборка без повторения»). Например,  $\sigma: Z_3 \rightarrow Z_5$ , где  $\sigma(1) = 3$ ,  $\sigma(2) = 5$ ,  $\sigma(3) = 1$ , есть 3-подстановка множества  $Z_5$ . Ясно, что  $t$ -подстановку при  $t = n$  можно рассматривать просто как подстановку на элементах  $X$ .

Матрица  $t$ -подстановки определяется как  $(0,1)$ -матрица  $P$  размера  $t \times n$ , у которой в каждой строке имеется только одна единица и никакие две единицы не лежат в одном столбце. Ясно, что для каждой  $t$ -подстановки  $\sigma$   $n$ -множества  $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  можно определить матрицу  $t$ -подстановки  $P = [p_{ij}]$ :  $p_{ij} = 1$  тогда и только тогда, когда  $\sigma(i) = a_j$ . Обратно, по любой матрице  $t$ -подстановки  $P = [p_{ij}]$  размера  $t \times n$  можно определить  $t$ -подстановку  $\sigma$  множества  $Z_n$ :  $\sigma(i) = j$ , если  $j$  — номер того столбца, где находится единица  $i$ -й строки матрицы  $P$ . Например, написанному выше отображению  $\sigma: Z_3 \rightarrow Z_5$  соответствует матрица

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что если дана матрица подстановки  $P$  порядка  $n$ , то любые ее  $t$  строк образуют матрицу  $t$ -подстановки.

**Теорема 11.6.** Пусть дана  $(0, 1)$ -матрица размера  $t \times n$  и  $t < n$ . Если вектор строчных сумм  $A$  есть  $R = (r, r, \dots, r)$ , а для компонент вектора столбцевых сумм  $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$  выполняются условия

$$0 \leq r - s_i \leq n - t, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (11.17)$$

то существуют такие  $r$  матриц  $t$ -подстановки  $P_1, P_2, \dots, P_r$  размера  $t \times n$ , что  $A = P_1 + P_2 + \dots + P_r$ .

**Доказательство.** Рассмотрим  $n - t$ -мерный вектор  $R' = (r, r, \dots, r)$  и  $n$ -мерный вектор  $S' = (r - s_1, r - s_2, \dots, r - s_n)$ . Для  $R'$  максимальная матрица размера  $(n - t) \times n$  имеет в качестве вектора столбцевых сумм  $\bar{S}'$   $n$ -мерный вектор  $(n - t, n - t, \dots, n - t, 0, 0, \dots, 0)$ , у которого первые  $r$  компонент равны  $n - t$ ,



Из условия (11.17) вытекает, что  $S' < \bar{S}'$ . Следовательно, по теореме 11.1 класс  $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(R', S')$  непуст.

Возьмем какую-либо матрицу  $A' \in \mathfrak{A}$  и запишем ее под матрицей  $A$ . Очевидно, что теперь  $A_1 = \begin{bmatrix} A \\ A' \end{bmatrix} \in \mathfrak{A}(r, n)$ . По теореме 8.1 найдется разложение  $A = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_r$ , где  $Q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) — матрицы подстановки. Если в каждой из них взять первые  $m$  строк, то, как мы заметили, получающиеся подматрицы  $P_i$  суть матрицы  $m$ -подстановки размера  $m \times n$ . С другой стороны, очевидно,  $A = P_1 + P_2 + \dots + P_r$ .

**Теорема 11.7.** Пусть  $L$  — латинский прямоугольник размера  $r \times s$  на числах  $1, 2, \dots, n$ . Обозначим через  $N(i)$  число появлений элемента  $i$  в  $L$ . Такой латинский прямоугольник можно расширить до латинского квадрата порядка  $n$  в том и только том случае, когда

$$N(i) \geq r + s - n, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (11.18)$$

**Доказательство.** **Необходимость.** Обозначим через  $T_k$  множество всех элементов  $Z_n$ , не появляющихся в  $k$ -й строке  $L$ . Каждое такое  $T_k$  состоит из  $n - s$  элементов  $Z_n$ . Обозначим через  $M(i)$  число появлений  $i$  в подмножествах  $T_1, T_2, \dots, T_r$ . Если данный латинский прямоугольник можно расширить до латинского квадрата, то, очевидно,  $M(i) \leq n - s$ . Ясно, что  $N(i) + M(i) = r$ . Поэтому  $N(i) = r - M(i) \geq r + s - n$ , т. е. должно выполняться (11.18).

**Достаточность.** Пусть условие (11.18) выполнено. Образует матрицу инцидентности  $A$  для конфигурации  $\{T_1, T_2, \dots, T_r\}$  на  $Z_n$ . Матрица  $A$  есть  $(0, 1)$ -матрица размера  $r \times n$ ; ее вектор строчных сумм есть  $(n - s, n - s, \dots, n - s)$ , а вектор столбцевых сумм —  $(M(1), M(2), \dots, M(n))$ . Заметим, что в  $k$ -й строке  $A$  единицы стоят лишь в столбцах с такими номерами, которые не входят в  $k$ -ю строку прямоугольника  $L$  ( $k = 1, 2, \dots, r$ ). Так как  $M(i) = r - N(i)$ , в силу (11.18) справедливы соотношения  $0 \leq n - s - M(i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Ввиду того, что  $L$  — латинский прямоугольник,  $N(i) = r - M(i) \leq s$ , или  $s + M(i) \geq r$ . Отсюда следует, что

$$0 \leq n - s - M(i) \leq n - r,$$

т. е. для матрицы  $A$  выполнены условия теоремы 11.6. Таким образом, существуют такие  $n - s$  матриц  $r$ -подстановки  $P_1, P_2, \dots, P_{n-s}$ , что  $A = P_1 + P_2 + \dots + P_{n-s}$ .



Обозначим через  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-s}$   $r$ -подстановки  $Z_n$ , соответствующие матрицам  $P_1, P_2, \dots, P_{n-s}$ . Пусть  $\sigma$  — одна из этих  $r$ -подстановок и  $P = [p_{kj}]$  — ее матрица:

$$p_{kj} = \begin{cases} 1, & j = \sigma(k), \\ 0, & j \neq \sigma(k), \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, r.$$

Тогда  $X = \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(r)\}$  есть  $r$ -подмножество  $Z_n$ , причем по отмеченному выше свойству матрицы  $A$   $\sigma(k)$  — число, не встречающееся в  $k$ -й строке прямоугольника  $L$ . Построим такие  $r$ -подмножества  $X_j = \{\sigma_j(1), \sigma_j(2), \dots, \sigma_j(r)\}$  для каждой  $P_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n-s$ ). Если к  $L$  приписать  $n-s$  столбцов, образованных написанными по порядку сверху вниз элементами множеств  $X_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n-s$ ), то, очевидно, получим латинский прямоугольник размера  $r \times n$  на элементах  $1, 2, \dots, n$ , содержащий  $L$ :

$$\left[ \begin{array}{c} \left[ L \right] \begin{array}{cccc} \sigma_1(1) & \sigma_2(1) & \dots & \sigma_{n-s}(1) \\ \sigma_1(2) & \sigma_2(2) & \dots & \sigma_{n-s}(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_1(r) & \sigma_2(r) & \dots & \sigma_{n-s}(r) \end{array} \end{array} \right]. \quad (11.19)$$

Действительно, в (11.19) все элементы в столбцах попарно различны, а  $(\sigma_1(k), \sigma_2(k), \dots, \sigma_{n-s}(k))$  при любом  $k = 1, 2, \dots, r$  — строчка, состоящая из попарно различных элементов, не встречающихся в  $k$ -й строке  $L$ . По теореме 11.5 любой латинский прямоугольник размера  $r \times n$  можно расширить до латинского квадрата порядка  $n$ . Теорема доказана.

Пользуясь той связью между латинскими прямоугольниками, с одной стороны, и конфигурациями и  $(0, 1)$ -матрицами, с другой стороны, которая устанавливается теоремой 11.4, можно без труда сформулировать утверждения, равнозначные теоремам 11.5, 11.7, о расширении конфигураций и пополнении  $(0, 1)$ -матриц соответствующих типов.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ  
И (0, 1)-МАТРИЦЫ

## § 12. Задачи о покрытии и глубина (0, 1)-матриц

**Задача о покрытии.** Предположим, что формируется коллектив работников для выполнения какого-либо специального задания, скажем экспедиции с научными целями. Для успешного проведения экспедиции нужны люди, обладающие определенными качествами (знаниями, навыками, опытом работы и т. п.). Число этих качеств обозначим  $n$ . Пусть отобрано какое-то количество (скажем  $m$ ) кандидатов, каждый из которых обладает некоторыми из нужных качеств, а все они в совокупности удовлетворяют всем  $n$  требуемым условиям. Однако по ряду обстоятельств число участников предстоящей экспедиции строго ограничено. Спрашивается, как отобрать минимальное число участников среди  $m$  кандидатов, чтобы обеспечить успешную работу экспедиции? Каково это минимальное число? Более схематично подобную задачу можно сформулировать так.

Пусть имеется  $m$  предметов, каждый из которых обладает некоторым числом признаков из заданного множества  $n$  признаков, а в совокупности эти  $m$  предметов обладают всеми  $n$  признаками. Как выбрать наименьшее число предметов, которые в совокупности обладали бы всеми  $n$  признаками? Каково это число?

Мы, очевидно, имеем здесь дело с типичной комбинаторной задачей о выборе (см. § 4). Задачи такого рода называются *задачами о покрытии* и принадлежат к одним из наиболее распространенных комбинаторных экстремальных задач. Они встречаются, например, в разных разделах математической экономики, при рассмотрении транспортных потоков, при построении сетей связи. Любопытного применения одного вида задач о покрытии в повседневной жизни мы коснемся в § 14.

**(0, 1)-матрицы в задачах о покрытии.** Дадим задаче о покрытии чисто математическую формулировку. Пусть

на множестве  $X$  из  $n$  элементов задана конфигурация  $\mathcal{P} = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ , подмножества которой обладают дополнительным свойством:  $\bigcup_{i=1}^m S_i = X$ ; скажем, что тогда  $S_1, S_2, \dots, S_m$  покрывают  $X$ . Как описать такие конфигурации  $\mathcal{P}' = \{S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_r}\}$ , состоящие из минимального числа  $r$  подмножеств, входящих в  $\mathcal{P}$ , для которых это свойство сохраняется, т. е.  $\bigcup_{k=1}^r S_{i_k} = X$ ? Как найти число  $r$ ? Число  $r$  для заданной конфигурации  $\mathcal{P}$  называется *мощностью покрытия*.

Рассмотрим матрицу инцидентности  $A$  для конфигурации  $\mathcal{P} = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ , состоящей из подмножеств, покрывающих  $n$ -множество  $X$ . Если подмножества  $S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_r}$  покрывают  $X$ , то ясно, что соответствующие им строки в  $A$  образуют подматрицу размера  $r \times n$ , все столбцевые суммы которой положительны. В § 4 мы называли минимальное число строк  $(0, 1)$ -матрицы  $A$  с таким свойством столбцевых сумм *глубиной*  $A$ ; глубина обозначалась через  $\varepsilon(A)$ . Итак, мощность покрытия для конфигурации  $\mathcal{P} = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$  с  $\bigcup_{i=1}^m S_i = X$  равна глубине  $\varepsilon(A)$  ее матрицы инцидентности. В этом и следующем параграфах мы изучим функцию  $\varepsilon(A)$ .

Наряду с задачей о покрытии для конфигурации  $\mathcal{P} = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$  можно поставить другую экстремальную задачу. Если элемент  $x$  входит в какое-либо подмножество из  $\mathcal{P}$ , то скажем, что  $x$  его *представляет*. Каково минимальное число  $s$  элементов  $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_s}$ , которые в совокупности представляют все подмножества  $S_1, S_2, \dots, S_m$ , т. е. для каждого  $S_i$  найдется некоторый элемент  $x_{j_i}$ , принадлежащий  $S_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ )? Подмножество  $\{x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_s}\} \subset X$  называется в этом случае *минимальной системой представителей* для конфигурации  $\mathcal{P}$ .

Вновь рассматривая матрицу инцидентности  $A$ , убеждаемся, что число элементов в минимальной системе представителей равно такому минимальному числу  $s$  столбцов в  $A$ , что в образованной ими подматрице размера  $m \times s$  все строчные суммы положительны. Это число  $s$  мы называли в § 4 *шириной*  $(0, 1)$ -матрицы  $A$ . Ширина матрицы  $A$  равна числу  $\varepsilon(A^T)$ , поэтому задачи о глубине и ширине  $(0, 1)$ -матриц (а также, конечно, задачи о мощности

покрытия и о числе элементов в минимальной системе представителей) тесно связаны между собой.

**Максимальная и минимальная глубина совокупности  $(0, 1)$ -матриц.** При решении задачи о глубине  $(0, 1)$ -матрицы  $A$  обычно рассматривают совместно с другими  $(0, 1)$ -матрицами того же размера, взятыми из некоторого множества  $\mathfrak{A}$ , например из класса Райзера  $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(R, S; M, N)$ , которому принадлежит  $A$ . На языке конфигураций это означает, что мы ограничиваем мощности подмножеств конфигураций и числа вхождений элементов (см. § 11).

Среди всех матриц из  $\mathfrak{A}$  есть матрицы, на которых функция глубины достигает своего максимума, а также такие, для которых глубина минимальна; этот максимум мы обозначим через  $\bar{\varepsilon}(\mathfrak{A})$ , а минимум — через  $\tilde{\varepsilon}(\mathfrak{A})$ . Для любой матрицы  $A \in \mathfrak{A}$  тогда справедливо  $\tilde{\varepsilon}(\mathfrak{A}) \leq \varepsilon(A) \leq \bar{\varepsilon}(\mathfrak{A})$ .

Для заданных целых чисел  $m, n, M, N$  обозначим через  $\mathfrak{A}(\leq m, \geq n; M, N)$  совокупность всех  $(0, 1)$ -матриц размера  $M \times N$  со строчными суммами, не превосходящими  $m$ , и столбцевыми суммами, не меньшими  $n$ . Это обозначение аналогично обозначению  $\mathfrak{A}(m, n; M, N)$  для класса Райзера, состоящего из матриц размера  $M \times N$ , у которых каждая строчная сумма равна  $m$ , а каждая столбцевая сумма равна  $n$  (см. § 11). Следует подчеркнуть, что множество  $\mathfrak{A}(\leq m, \geq n; M, N)$  значительно шире, чем класс Райзера.

Через  $\mathfrak{A}(\leq m, n; M, N)$  обозначим совокупность матриц размера  $M \times N$ , у которых все строчные суммы не превосходят  $m$ , а все столбцевые равны  $n$ . Напомним, что через  $\mathfrak{A}(n, N)$  обозначается класс  $(0, 1)$ -матриц порядка  $N$  с  $n$  единицами в каждой строке и каждом столбце. Максимальные глубины для  $\mathfrak{A}(n, N)$ ,  $\mathfrak{A}(m, n; M, N)$ ,  $\mathfrak{A}(\leq m, n; M, N)$  и  $\mathfrak{A}(\leq m, \geq n; M, N)$  обозначаем соответственно через  $\bar{\varepsilon}(n, N)$ ,  $\bar{\varepsilon}(m, n; M, N)$ ,  $\bar{\varepsilon}(\leq m, n; M, N)$  и  $\bar{\varepsilon}(\leq m, \geq n; M, N)$ .

Как мы уже отмечали, вычисление глубины  $(0, 1)$ -матрицы — задача не простая. Интересны поэтому оценки глубины матрицы  $A$ , т. е., в частности, значения  $\tilde{\varepsilon}(\mathfrak{A})$ ,  $\bar{\varepsilon}(\mathfrak{A})$ , если  $A \in \mathfrak{A}$ . Если вопрос о  $\tilde{\varepsilon}(\mathfrak{A})$  оказался не слишком сложным и был довольно скоро разрешен, то изучение функции  $\bar{\varepsilon}(\mathfrak{A})$ , даже если  $\mathfrak{A}$  — класс Райзера, представляет собой очень не легкую проблему. Это не удивительно, так как она связана с рядом весьма трудных

вопросов комбинаторики, имеющих принципиальный характер. Приведем один пример.

**Максимальная глубина и проблема существования конечных проективных плоскостей.** В § 9 мы упоминали о до сих пор не решенной проблеме существования конечных проективных плоскостей. Покажем, что она связана с задачей о максимальной глубине некоторых классов  $(0, 1)$ -матриц. А именно, справедлива

**Теорема 12.1.** Пусть  $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(n^2, n^2 + n + 1)$  — класс Райзера  $(0, 1)$ -матриц порядка  $v = n^2 + n + 1$ . Если  $\varepsilon(A) = 3$  для некоторой матрицы  $A \in \mathfrak{A}$ , то  $J_v - A$  есть матрица инцидентности проективной плоскости порядка  $n$ . Для всех остальных матриц  $A$  из  $\mathfrak{A}$   $\varepsilon(A) = 2$ .

**Доказательство.** Рассмотрим матрицу  $AA^T = B = [b_{ij}]$  для  $A = [a_{ij}] \in \mathfrak{A}$ . Элемент  $b_{ik}$  есть скалярное произведение  $i$ -й и  $k$ -й вектор-строк  $A$ :  $b_{ik} = \sum_{j=1}^v a_{ij}a_{kj}$ . Так как

$A \in \mathfrak{A}$ , все элементы на главной диагонали в  $B$  равны  $n^2$ .

Найдем среднее арифметическое всех элементов  $B$ , не лежащих на главной диагонали (всего таких элементов  $(n^2 + n + 1)(n^2 + n)$ ):

$$\lambda = \frac{1}{(n^2 + n + 1)(n^2 + n)} \left[ \sum_{i,k=1}^v \left( \sum_{j=1}^v a_{ij}a_{kj} \right) - n^2(n^2 + n + 1) \right].$$

Изменяем порядок суммирования:

$$\begin{aligned} \sum_{i,k,j=1}^v a_{ij}a_{kj} &= \sum_{j,i,k=1}^v a_{ij}a_{kj} = \sum_{i,j=1}^v a_{ij} \left( \sum_{k=1}^v a_{kj} \right) = \\ &= \sum_{j,i=1}^v n^2 a_{ij} = n^2 \sum_{j=1}^v \left( \sum_{i=1}^v a_{ij} \right) = n^2 \sum_{j=1}^v n^2 = n^4(n^2 + n + 1). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lambda = \frac{n^4 - n^2}{n^2 + n} = n(n - 1).$$

Предположим, что  $b_{ik} = n(n - 1)$  для всех  $i, k$  при  $i \neq k$ . Тогда, какие бы две строки  $A$  мы ни взяли, в образованной ими подматрице размера  $2 \times v$  будет  $n^2 - n$  столбцов  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  и по  $n$  столбцов видов  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  и  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ; следовательно, один столбец вида  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Таким образом, любая подматрица размера  $2 \times v$  матрицы  $A$  содержит один нулевой столбец. Поэтому ясно, что  $\varepsilon(A) = 3$ .

Образуем теперь матрицу  $\hat{A} = J_v - A$ . Очевидно, что любая строка и любой столбец  $\hat{A}$  имеют по  $n + 1$  единиц, а в любой паре строк найдется в точности один столбец вида  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ . По теореме 9.1  $\hat{A}$  есть матрица инцидентности проективной плоскости порядка  $n$ .

Пусть теперь не все  $b_{ik}$  при  $i \neq k$  равны среднему значению  $\lambda = n^2 - n$ . Тогда в  $A$  найдется пара строк, скажем  $i$ -я и  $k$ -я строки, для которых  $b_{ik} = \lambda' < n^2 - n$ . Из очевидного соотношения  $n^2 + (n^2 - \lambda') \leq n^2 + n + 1$  заключаем, что  $n^2 - n - 1 \leq \lambda' < n^2 - n$ , т. е.  $\lambda' = n^2 - n - 1$ . Но отсюда вытекает, что подматрица размера  $2 \times v$ , образованная  $i$ -й и  $k$ -й строками  $A$ , не имеет нулевого столбца. Таким образом, все ее столбцевые суммы положительны, т. е.  $\varepsilon(A) = 2$ . С другой стороны, в этом случае скалярное произведение  $i$ -й и  $k$ -й вектор-строк в  $\hat{A} = J_v - A$  равно нулю, т. е.  $\hat{A}$  не есть матрица инцидентности конечной проективной плоскости. Теорема доказана.

Из полученного результата следует, что максимальная глубина  $\bar{\varepsilon}(n^2, n^2 + n + 1)$  класса матриц  $\mathfrak{A}(n^2, n^2 + n + 1)$  равна 3, если существует конечная проективная плоскость порядка  $n$ , и равна 2, если плоскости такого порядка нет.

**Верхняя граница глубины матрицы в общем случае.** Каждая  $(0, 1)$ -матрица  $A$  размера  $M \times N$  содержится в некоторой совокупности  $(0, 1)$ -матриц вида  $\mathfrak{A}(\leq m, \geq n; M, N)$ : можно положить  $m = \max_{i=1,2,\dots,M} r_i$  и  $n = \min_{j=1,2,\dots,N} s_j$ , где  $r_1, r_2, \dots, r_M, s_1, s_2, \dots, s_N$  — соответственно ее строчные и столбцевые суммы. Ясно, что задачи о покрытии приводят обязательно к матрицам с  $\min_{j=1,2,\dots,N} s_j \geq 1$ . С другой стороны, при  $n \geq 1$  и  $m = \max_{i=1,2,\dots,M} r_i = 1$  имеем  $\varepsilon(A) = N$ , т. е. задача о глубине матрицы решается просто, все матрицы совокупности  $\mathfrak{A}(\leq 1, \geq n; M, N)$  имеют глубину, равную числу столбцов  $N$ . Будем рассматривать поэтому множества матриц  $\mathfrak{A}(\leq m, \geq n; M, N)$  с  $m \geq 2$ . Наша цель — вывести оценку сверху для максимальной глубины  $(0, 1)$ -матриц из совокупности  $\mathfrak{A}(\leq m, \geq n; M, N)$ . Докажем предварительно несколько лемм.

**Лемма 12.2.** Пусть  $\mu$  — максимальное число попарно ортогональных строк с  $t$  единицами в строке  $A$  из  $\mathfrak{A}(\leq m, \geq n; M, N)$ . Справедливо соотношение

$$\mu \geq \frac{nN - (m - 1)M}{mn - m + 1}. \quad (12.1)$$

**Доказательство.** Для удобства расположим эти  $\mu$  строк на первых  $\mu$  местах и переставим также столбцы  $A$  так, чтобы на первых местах оказались  $t\mu$  столбцов с единицами в этих строках. Придем таким образом к матрице

$$\mu \left\{ \begin{array}{c|c} & \overbrace{\hspace{2cm}}^{N-t\mu} \\ \hline B & O \\ \hline * & C \end{array} \right. , \quad (12.2)$$

где  $B$  — матрица размера  $\mu \times t\mu$ ,  $O$  — нулевая матрица размера  $\mu \times (N - t\mu)$ . Заметим, что в матрице  $C$  любая строка содержит не более  $t - 1$  единиц, иначе число  $\mu$  не было бы максимальным; с другой стороны, в каждом ее столбце по условию не меньше  $n$  единиц. Поэтому  $n(N - t\mu) \leq s(C) \leq (t - 1)(M - \mu)$ , где  $s(C)$  — число единиц в  $C$ . Отсюда следует (12.1).

Пусть  $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$ , где  $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}(\leq t, \geq n; M, N)$ ,  $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}(\leq t, n; M, N)$ ,  $\mathfrak{A}_3 = \mathfrak{A}(t, n; M, N)$ .

**Лемма 12.3.** Для  $A \in \mathfrak{A}$  справедливо неравенство

$$\varepsilon(A) \leq \mu + \bar{\varepsilon}(\mathfrak{B}), \quad (12.3)$$

где  $\mu$  — максимальное число попарно ортогональных строк с суммой  $t$  в  $A$ ,  $\mathfrak{B}$  — множество  $(0, 1)$ -матриц  $\mathfrak{A}(\leq t - 1, \geq n; M - \mu, N - t\mu)$  при  $A \in \mathfrak{A}_1$ ,  $(0, 1)$ -матриц  $\mathfrak{A}(\leq t - 1, n; M - \mu, N - M\mu)$  при  $A \in \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$ .

Рассматривая матрицу (12.2), в которой подматрица принадлежит соответственно  $\mathfrak{A}(\leq t - 1, \geq n; M - \mu, N - t\mu)$  или  $\mathfrak{A}(\leq t - 1, n; M - \mu, N - t\mu)$ , непосредственно получаем доказательство.

**Лемма 12.4.** Пусть  $t = 2$ ,  $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$ . Тогда

$$\bar{\varepsilon}(\mathfrak{A}) = N - \bar{\mu},$$

где  $\bar{\mu}$  — минимальное значение среди максимальных чисел попарно ортогональных строк с суммой 2 в матрицах из  $\mathfrak{A}$ .

**Доказательство.** Пусть  $A \in \mathfrak{A}$ . Возьмем в  $A$  максимальное число  $\mu$  попарно ортогональных строк с сум-

мой 2 и приведем ее к виду (12.2). Тогда каждая строка в  $C$  содержит не более одной единицы. Но, как мы уже отмечали, глубина каждой такой матрицы равна числу столбцов. Таким образом, по лемме 12.3

$$\varepsilon(A) \leq \mu + N - 2\mu = N - \mu. \quad (12.4)$$

Возьмем теперь  $\varepsilon(A)$  таких строк, что все столбцевые суммы в образованной ими подматрице положительны. Пусть среди них имеется самое большее  $\mu'$  попарно ортогональных строк с суммой 2. Ясно, что тогда  $\varepsilon(A) - \mu' = N - 2\mu'$ , так как по максимальнойности  $\mu'$  каждая из  $\varepsilon(A) - \mu'$  строк может «покрывать» лишь один из  $N - 2\mu'$  столбцов, не покрытых  $\mu'$  попарно ортогональными строками с двумя единицами в строке. Так как  $\mu' \leq \mu$ , то  $\varepsilon(A) = N - \mu' \geq N - \mu$ . Вместе с (12.4) это дает  $\varepsilon(A) = N - \mu$ . Отсюда ясно, что максимальную глубину будет иметь матрица, у которой значение  $\mu$  минимально, т. е. равно  $\underline{\mu}$ . Лемма доказана.

Пусть теперь

$$C(m, n) = \frac{(m-1)! (n-1)^{m-1}}{(2n-1)(3n-2) \dots [mn - (m-1)]} \quad (12.5)$$

есть числовая последовательность, зависящая от двух целых положительных чисел  $m$  и  $n$ , где  $m \geq 2$ .

**Теорема 12.5.** Пусть  $m, n, M, N$  — целые положительные числа,  $2 \leq m \leq M$ ,  $1 \leq n \leq N$ ,  $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\leq m, \geq n; M, N)$  — непустая совокупность  $(0,1)$ -матриц размера  $M \times N$ , у которых строчные суммы не превосходят  $m$ , а столбцевые суммы не меньше  $n$ . Для максимальной глубины  $\mathfrak{A}$  справедлива оценка

$$\bar{\varepsilon}(\mathfrak{A}) \leq M \{1 - (m - N/M)C(m, n)\}, \quad (12.6)$$

где  $C(m, n)$  — числа из (12.5).

**Доказательство.** Его будем проводить индукцией по  $m$ . Пусть  $m = 2$  и класс  $\mathfrak{A}(\leq 2, \geq n; M, N)$  непуст. Из леммы 12.2 при  $m = 2$  следует, что

$$\bar{\mu} \geq \frac{nN - M}{2n - 1}.$$

Тогда по лемме 12.4

$$\bar{\varepsilon}(\leq 2, \geq n; M, N) = N - \bar{\mu} \leq N - \frac{nN - M}{2n - 1} = \frac{(n-1)N + M}{2n - 1}.$$

С другой стороны, правая часть (12.6) при  $m = 2$  есть

$$M \left\{ 1 - \left( 2 - \frac{N}{M} \right) \frac{n-1}{2n-1} \right\},$$



так как  $C(2, n) = (n - 1) / (2n - 1)$ ; раскрывая скобки, находим, что она также равна  $\frac{(n - 1)N + M}{2n - 1}$ . Таким образом, при  $m = 2$  теорема справедлива.

Предположим теперь по индукции, что она справедлива для всех непустых  $\mathfrak{A}(\leq r, \geq n; M, N)$  при  $2 \leq r < m$  и любых  $n, M, N$ . Преобразуем матрицу  $A$  из  $\mathfrak{A}(\leq m, \geq n; M, N)$  к виду (12.2). Тогда  $C \in \mathfrak{A}(\leq m - 1, \geq n; M - \mu, N - t\mu)$ . По предположению индукции

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}(\leq m - 1, \geq n; M - \mu, N - t\mu) &\leq \\ &\leq (M - \mu) \left\{ 1 - \left( m - 1 - \frac{N - t\mu}{M - \mu} \right) C(m - 1, n) \right\}. \end{aligned}$$

Тогда по лемме 12.3

$$\begin{aligned} \varepsilon(A) &\leq \mu + (M - \mu) \left\{ 1 - \left( m - 1 - \frac{N - t\mu}{M - \mu} \right) C(m - 1, n) \right\} = \\ &= M - [(M - \mu)(m - 1) - (N - t\mu)] C(m - 1, n). \end{aligned}$$

Оценим снизу выражение в квадратных скобках, используя (12.1):

$$\begin{aligned} (M - \mu)(m - 1) - (N - t\mu) &= M(m - 1) - \mu(m - 1) - \\ &- N + t\mu = M(m - 1) - N + \mu \geq M(m - 1) - N + \\ &+ \frac{nN - (m - 1)M}{mn - m + 1} = M(m - 1) - \\ &- \frac{N(n - 1)(m - 1) + (m - 1)M}{mn - m + 1} = \frac{(mM - N)(m - 1)(n - 1)}{mn - m + 1}. \end{aligned}$$

Но, очевидно,

$$C(m - 1, n) \frac{(m - 1)(n - 1)}{mn - m + 1} = C(m, n),$$

поэтому

$$\varepsilon(A) \leq M - (mM - N)C(m, n) = M\{1 - (m - N/M)C(m, n)\}.$$

Таким образом, глубина любой матрицы из  $\mathfrak{A}$  не превосходит правой части (12.6); следовательно, то же справедливо и для максимальной глубины  $\bar{\varepsilon}(\mathfrak{A})$ .

**Несколько замечаний в связи с общей оценкой глубины матрицы.** Отметим, что правая часть (12.6) служит верхней границей для максимальной глубины классов Райзера  $\mathfrak{A}(m, n; M, N)$ , так как  $\mathfrak{A}(m, n; M, N) \subset \subset \mathfrak{A}(\leq m, \geq n; M, N)$ . В частности, для класса  $\mathfrak{A}(n, N)$

(т. е.  $\mathfrak{A}(m, n; M, N)$  с  $M = N$ ,  $m = n$ ) получаем, что

$$\bar{\varepsilon}(n, N) \leq \left( 1 - \frac{(n-1)!(n-1)^n}{(2n-1)(3n-2)\dots(n^2-n+1)} \right) N. \quad (12.7)$$

Выражение в скобках в (12.7) даже в этом частном случае есть довольно сложная функция от  $n$ . Чтобы составить более ясное представление о максимальной глубине, можно, как это обычно делается, исследовать поведение правой части (12.7) при неограниченном росте величин  $n$  и  $N$ , иными словами, ее асимптотическое поведение при  $n, N \rightarrow \infty$ .

Несложный анализ показывает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{(n-1)!(n-1)^n}{(2n-1)(3n-2)\dots(n^2-n+1)} \right) / \frac{\ln n}{n} = 1.$$

Отсюда следует, что для всех достаточно больших  $n$ ,  $N$  при  $n \leq N$

$$\frac{\bar{\varepsilon}(n, N)}{N} \leq \frac{\ln n}{n}.$$

Аналогичную асимптотическую оценку правой части (12.6) можно получить и в общем случае.

Другим естественно возникающим вопросом в связи с теоремой 12.5 является вопрос о степени точности оценки (12.6). Имеется ряд аргументов в пользу того, что эта оценка достаточно точна. В первую очередь это проведенные исследования асимптотического поведения максимальной глубины. Далее обнаружены классы матриц, для которых эта оценка достижима.

Рассмотрим класс Райзера  $\mathfrak{A}(m, 2; M, N)$ . В § 11 мы убедились, что этот класс непуст для любого  $m$ , если только выполняется условие  $2N = mM$ . Подставляя в (12.6)  $n = 2$  и используя это условие, получаем, что

$$\bar{\varepsilon}(m, 2; M, N) \leq \frac{2N}{m+1}. \quad (12.8)$$

В гл. 6 будет показано, что здесь фактически имеет место равенство, а именно, что  $\bar{\varepsilon}(m, 2; M, N) = \left[ \frac{2N}{m+1} \right]$ , где  $[x]$  — целая часть  $x$ .

### § 13. Глубина матриц классов $\mathfrak{A}(m, n; M, N)$

Матрицы с одинаковыми строчными и одинаковыми столбцовыми суммами нам уже встречались. Изучим теперь вопрос о максимальной глубине классов таких  $(0, 1)$ -матриц главным образом при малых значениях  $m$  или  $n$ , поскольку в общем случае о ней мало что известно помимо оценок (12.6), (12.7). Однако и эти частные случаи весьма интересны, если учесть, что, например, классам  $\mathfrak{A}(3, (v-1)/2; v(v-1)/6, v)$  при  $v \equiv 1, 3 \pmod{6}$  принадлежат матрицы инцидентности систем троек Штейнера, а классам  $\mathfrak{A}(2, n; M, N)$  — матрицы инцидентности регулярных (однородных) графов степени  $n$  на  $N$  вершинах.

Максимальная глубина классов  $\mathfrak{A}(2, n, N)$  при  $n$  четном. Естественно предположить, что оценка (12.6), установленная для широких совокупностей  $\mathfrak{A}(0, 1)$ -матриц, может быть улучшена, если перейти от  $\mathfrak{A}$  к более узкому классу матриц. Более скрупулезный анализ строения матриц ряда таких классов действительно позволяет уточнить оценку глубины. Проведем для матриц из  $\mathfrak{A}(\leq 2, n; M, N)$  одно дополнительное построение, которое не только позволит изучить максимальную глубину  $\varepsilon(2, n; M, N)$ , но и окажется полезным в других случаях.

Для  $(0, 1)$ -матриц класса Райзера  $\mathfrak{A}(2, n; M, N)$  справедливо  $2M = nN$ ; поэтому будем обозначать класс  $\mathfrak{A}(2, n; M, N)$  более кратко:  $\mathfrak{A}(2, n, N)$  (т. е. любая матрица из  $\mathfrak{A}(2, n, N)$  имеет  $M = nN/2$  строк). С помощью леммы 12.4 максимальная глубина  $\varepsilon(2, n, N)$  класса  $\mathfrak{A}(2, n, N)$  выражается через минимальное значение  $\mu$  максимального числа  $\mu$  попарно ортогональных строк в матрице  $A \in \mathfrak{A}(2, n, N)$ .

Обратимся вновь к представлению  $(0, 1)$ -матрицы в виде (12.2), предполагая, что  $A$  имеет по  $n$  единиц в каждом столбце и не более двух единиц в каждой строке, т. е.

$$A \in \mathfrak{A}(\leq 2, n; M, N).$$

В этом случае  $B$  — матрица размера  $\mu \times 2\mu$ ,  $C$  — матрица размера  $(M - \mu) \times (N - 2\mu)$  с  $n$  единицами в каждом столбце. Переставим теперь  $M - \mu$  нижних строк  $A$  так, чтобы единицы каждого из  $N - 2\mu$  столбцов подматрицы  $C$  оказались расположенными подряд (в соседних стро-

ках). Приходим, таким образом, к матрице вида

$$\begin{array}{c}
 c_1 c_2 \dots c_{N-2\mu} \\
 \left[ \begin{array}{c|c}
 \begin{array}{ccc}
 11 & & B \\
 11 & \dots & \\
 & & 11
 \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ 0
 \end{array} \\
 \hline
 & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \\
 \hline
 & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \\
 \hline
 & \dots \\
 \hline
 & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} D_2 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \end{array}
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \tag{13.1}$$

В (13.1) выделены  $N - 2\mu$  горизонтальных полос  $C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(N-2\mu)}$  по числу столбцов матрицы  $C$ ; каждая полоса состоит из  $n$  строк, имеющих единицы в одном и том же столбце этой подматрицы. Строки подматрицы  $B$  обозначим через  $l_1, l_2, \dots, l_\mu$ , последние  $N - 2\mu$  столбцов матрицы — через  $c_1, c_2, \dots, c_{N-2\mu}$ . Если какой-либо столбец  $s$  содержит единицы некоторой строки  $l$ , то скажем, что  $s$  принадлежит  $l$ . В нашем случае столбцы, принадлежащие строке  $l$  из  $B$ , обозначаем  $c^1(l)$  и  $c^2(l)$ .

Назовем строку  $l$  из  $B$  строкой типа  $T_j$ , если в подматрице  $D_2$  имеется в точности  $j$  единиц в столбцах  $c^1(l), c^2(l)$ . Существуют две возможности: 1) оба столбца  $c^1(l)$  и  $c^2(l)$  имеют единицы в подматрице  $D_1$ ; 2) по крайней мере один из них не содержит единиц в  $D_1$ . В соответствии с этими возможностями мы будем строку  $l$  из  $B$  называть  $T_j^{(1)}$ -строкой или  $T_j^{(2)}$ -строкой (или просто  $T^{(1)}$ -строкой и  $T^{(2)}$ -строкой, если величина  $j$  для нас не существенна). Столбец, принадлежащий строке  $l$  из  $B$ , называем *длинным*, если он не имеет единиц в  $D_1$ , и *коротким* в противном случае. Ясно, что у  $T^{(1)}$ -строки оба столбца короткие, а у  $T^{(2)}$ -строки хотя бы один длинный. Докажем несколько лемм.

**Лемма 13.1.** Пусть  $l$  —  $T^{(1)}$ -строка из  $B$ . Тогда все единицы столбцов  $c^1(l), c^2(l)$ , принадлежащие  $D_1$ , сосредоточены в одной и той же полосе  $C^{(j)}$  ( $1 \leq j \leq N - 2\mu$ ).

**Доказательство.** Пусть, напротив, найдутся два таких различных числа  $j_1$  и  $j_2$ , что  $c^1(l)$  содержит единицы в  $C^{(j_1)}$ , а  $c^2(l)$  — в  $C^{(j_2)}$ . Возьмем строки  $l'$  и  $l''$  соответственно из  $C^{(j_1)}$  и  $C^{(j_2)}$ , которым принадлежат  $c^1(l)$  и  $c^2(l)$ . Ясно, что  $l'$  и  $l''$  ортогональны, а также ортогональны всем строкам  $l_1, l_2, \dots, l_\mu$ , кроме  $l$ . Взяв множество строк  $(\{l_1, l_2, \dots, l_\mu\} - \{l\}) \cup \{l', l''\}$ , приходим к множеству из  $\mu + 1$  попарно ортогональных строк. Но это противоречит максимальнойности числа  $\mu$ .

**Лемма 13.2.** Пусть  $A \in \mathfrak{A}(\leq 2, n; M, N)$ . Каждая строка  $l$  из  $B$  имеет тип  $T_j$ , где  $n - 2 \leq j \leq 2n - 2$ . Если  $l$  — типа  $T_{n-2}$ , то она есть  $T^{(1)}$ -строка.

**Доказательство.** Пусть  $l$  имеет тип  $T_j$  и  $j \leq n - 2$ . Тогда  $c^1(l)$  и  $c^2(l)$  имеют в совокупности не меньше  $2(n - 1) - (n - 2) = n$  единиц в  $D_1$ . Но каждый из них может иметь не больше  $n - 1$  единиц в  $D_1$ , поэтому  $l$  —  $T^{(1)}$ -строка. Если бы при этом было  $j < n - 2$ , то  $c^1(l)$  и  $c^2(l)$  имели бы не меньше  $n + 1$  единиц в  $D_1$ . Но столько единиц не уместится в одной полосе. Получаем противоречие с леммой 13.1, и наша лемма доказана.

Из леммы 13.2, в частности, следует, что при  $n \geq 3$  подматрица  $D_2$  непременно присутствует при представлении  $A$  в виде (13.1).

**Теорема 13.3.** Для любого  $n \leq N$

$$\bar{\epsilon}(2, n, N) \leq \left\lfloor \frac{2}{3} N \right\rfloor.$$

При  $n$  четном

$$\bar{\epsilon}(2, n, N) = \left\lfloor \frac{2}{3} N \right\rfloor$$

( $[x]$  — целая часть  $x$ ).

**Доказательство.** Сначала докажем первое утверждение. Обозначим через  $\langle x \rangle$  наименьшее целое число, не меньшее числа  $x$ . Очевидно, что если  $\alpha$  — число из отрезка  $[0, 1]$ , то  $N - [\alpha N] = \langle (1 - \alpha)N \rangle$ . Действительно,  $[\alpha N] = \alpha N - \beta$ , где  $0 \leq \beta < 1$ . Тогда  $\langle (1 - \alpha)N \rangle = \langle N - \alpha N \rangle = \langle N - [\alpha N] - \beta \rangle$ . Но  $N - [\alpha N] - 1 < N - [\alpha N] - \beta \leq N - [\alpha N]$ , поэтому  $\langle N - [\alpha N] - \beta \rangle = N - [\alpha N]$ . Тем самым в силу леммы 12.4 достаточно показать, что  $\mu \geq \langle N/3 \rangle$ .

Предположим, от противного, что  $\mu < N/3$ . Подсчитаем число единиц в  $D_2$ . Оно, очевидно, равно  $2\mu(n - 1) -$

$-n(N - 2\mu)$ . Каждая строчная сумма в  $D_2$  равна 2, поэтому эти единицы располагаются в  $\mu(n - 1) - (n/2) \times \times (N - 2\mu) = (2n - 1)\mu - nN/2$  строках. Так как мы предположили, что  $N > 3\mu$ , это число строк меньше, чем

$$(2n - 1)\mu - \frac{3n\mu}{2} = \frac{\mu(n - 2)}{2}.$$

Но, с другой стороны, по лемме 13.2 каждая из  $\mu$  строк имеет тип  $T_j$  с  $j \geq n - 2$ . Тем самым общее число единиц в  $D_2$  не меньше  $\mu(n - 2)$ , а число строк не меньше  $\mu(n - 2)/2$ . Полученное противоречие показывает, что  $\mu \geq \langle N/3 \rangle$ , и, следовательно,  $\bar{\varepsilon} \leq [(2/3)N]$ .

Предположим теперь, что  $n$  четно. Чтобы установить равенство  $\bar{\varepsilon} = [(2/3)N]$ , достаточно для каждого четного  $n$  и любого  $N$  построить матрицу  $A \in \mathfrak{A}(2, n, N)$  с  $\varepsilon(A) = [(2/3)N]$ . Определим для четного  $n$  матрицу  $A_n$  размера  $(3n/2) \times 3$ , которую записываем в виде (13.1):

$$A_n = \left[ \begin{array}{cc|c} \hline 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & \cdot \\ \hline 0 & 1 & \cdot \\ 0 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \right];$$

здесь  $D_2$  — подматрица из единиц с  $(n - 2)/2$  строками. Ясно, что  $\varepsilon(A_n) = 2$  для любого  $n$ .

Пусть  $N \equiv 0 \pmod{3}$ . Составим матрицу  $A$  из  $N/3$  диагональных блоков вида  $A_n$ . Если  $N \equiv 1 \pmod{3}$ , то пусть  $A$  состоит из  $(N - 4)/3$  диагональных блоков  $A_n$  и двух — вида  $J_{n2}$ . Наконец, при  $N \equiv 2 \pmod{3}$  пусть в  $A$  вдоль главной диагонали стоят  $(N - 2)/3$  блока  $A_n$  и один блок  $J_{n2}$ . На все остальные места в  $A$  поставим нули. Очевидно, что во всех случаях  $A \in \mathfrak{A}(2, n, N)$ . Ясно также, что глубина  $A$  равна сумме глубин всех составляющих ее блоков.

Покажем, что  $\varepsilon(A) = [(2/3)N]$ . Это совершенно очевидно при  $N \equiv 0 \pmod{3}$ , так как тогда  $[(2/3)N] = 2N/3$ . Пусть  $N \equiv 1 \pmod{3}$ . Тогда  $N = 3t + 1$  и  $[(2/3)N] =$

$= [(6t + 2)/3] = [2t + 2/3] = 2t$ . Так как  $\varepsilon(A_n) = 2$ ,  $\varepsilon(J_{n2}) = 1$ , в этом случае  $\varepsilon(A) = 2(N - 4)/3 + 2 = 2(N - 1)/3 = 2t$ . Точно так же при  $N \equiv 2 \pmod{3}$ ,  $N = 3t + 2$  имеем  $[(2/3)N] = 2t + 1$  и  $\varepsilon(A) = 2(N - 2)/3 + 1 = 2t + 1$ .

Максимальная глубина классов  $\mathfrak{A}(2, n, N)$  при  $n$  нечетном. Случай нечетного  $n$  сложнее. Известна лишь верхняя граница для  $\bar{\varepsilon}(2, n, N)$ , более точная, чем в теореме 13.3. Получим такую границу. Для этого подробнее рассмотрим представления матрицы  $A \in \mathfrak{A}(\leq 2, n; M, N)$  в виде (13.1). Из леммы 13.2 следует, что если матрица  $A$  из  $\mathfrak{A}(\leq 2, n; M, N)$  представлена в виде (13.1), то для  $s(D_2)$  — числа единиц в матрице  $D_2$  — справедливо

$$s(D_2) \geq \mu(n - 2), \quad (13.2)$$

где  $\mu$  — максимальное число попарно ортогональных строк в  $A$ . Покажем, что в случае нечетного  $n$  это неравенство можно усилить.

Назовем строки  $l$  и  $l'$  подматрицы  $B$  матрицы из (13.1)  $v$ -связанными, если в  $D^{(2)}$  существуют  $v > 0$  строк  $t$  со свойством  $(l, t) = (l', t) = 1$ . Если столбец  $s$  и строка  $t$  имеют общую единицу, то скажем, что  $t$  проходит через  $s$ .

Лемма 13.4. Пусть строка  $l$  типа  $T_{n-2}$   $v$ -связана с какой-либо строкой  $l'$  из  $B$  типа  $T_k$  с  $k \leq 2n - 3$ . Тогда  $l' - T^{(2)}$ -строка, и каждая из  $v$  связующих строк проходит через короткий столбец, принадлежащий  $l$ .

Доказательство. Так как  $k < 2n - 2$ , то хотя бы один из столбцов  $s^1(l')$ ,  $s^2(l')$  короткий, скажем  $s^1(l')$ . Допустим, что имеется связующая строка  $t$  с единицами в столбцах  $s^2(l)$  и  $s^2(l')$ . По лемме 13.1 все  $n$  единиц столбцов  $s^1(l)$ ,  $s^2(l)$ , входящие в  $D_1$ , лежат в одной полосе, скажем  $C^{(j)}$ , причем в этой полосе, конечно, есть единицы обоих столбцов. Так как столбец  $s^1(l')$  короткий, он имеет единицу в  $D_1$ . Пусть она входит в полосу  $C^{(j')}$ . Ясно, что  $j' \neq j$ , так как каждая строка  $A$  имеет не более двух единиц. Возьмем строку  $t_1$  из полосы  $C^{(j)}$ , проходящую через  $s^1(l)$ , и строку  $t'_1$  из  $C^{(j')}$ , проходящую через  $s^1(l')$ . Строки  $t, t_1, t'_1$  попарно ортогональны; они также ортогональны любой строке из  $B$ , кроме строк  $l$  и  $l'$ . Итак, строки  $(\{l_1, l_2, \dots, l_\mu\} - \{l, l'\}) \cup \{t, t_1, t'_1\}$  образуют систему из  $\mu + 1$  попарно ортогональных строк с суммой 2. Это противоречит максимальнойности  $\mu$ . Таким

образом, каждая связующая строка должна проходить через короткий столбец  $l'$ , а другой столбец при этом должен быть длинным.

Следствие. Если строка  $l'$   $v$ -связана со строкой  $l$  типа  $T_{n-2}$ , то  $l' - T_k^{(2)}$ -строка с  $k \geq v + n - 1$ .

Доказательство. Действительно,  $n - 2 \leq k \leq 2n - 2$  по лемме 13.2. Если  $l'$  имеет тип  $T_{2n-2}$ , то утверждение очевидно, так как в нашем случае  $v \leq n - 2$ , а любая строка типа  $T_{2n-2}$  есть, конечно,  $T^{(2)}$ -строка. При  $k \leq 2n - 3$  по утверждению леммы  $l'$  есть  $T^{(2)}$ -строка и в  $D_2$  находятся все  $n - 1$  единиц ее длинного столбца, а также не менее  $v$  единиц короткого столбца.

Лемма 13.5. Если в матрице  $A \in \mathfrak{A}(\leq 2, n; M, N)$ , где  $n$  нечетно, существует система из  $\mu$  попарно ортогональных строк с суммой 2, то в ней найдется такая же система, не содержащая строк типа  $T_{n-2}$ .

Доказательство. Пусть в представлении вида (13.1)  $B$  содержит строку  $l$  типа  $T_{n-2}$ . Все единицы столбцов  $c^1(l)$  и  $c^2(l)$ , принадлежащие  $D_1$ , по лемме 13.1 входят в одну полосу, которую обозначим  $C^{(j)}$ . Обозначим через  $c$  столбец из единиц в этой полосе. Не нарушая общности, можем предположить, что  $c^1(l)$  имеет единицы в строках  $t_1, t_2, \dots, t_r$ , а  $c^2(l)$  — в строках  $t_{r+1}, t_{r+2}, \dots, t_n$  полосы  $C^{(j)}$ , где  $r \geq (n - 1)/2 + 1$ . Строки в  $D_2$ , имеющие единицы в столбце  $c^2(l)$ , обозначим через  $t'_1, t'_2, \dots, t'_{r-1}$ . Например, при  $n = 5, r = 3$  матрица  $A$  будет иметь вид

$$A = C^{(j)} \begin{array}{c} \begin{array}{c} c^1(l) \quad c^2(l) \end{array} \\ \begin{array}{c} l \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ t'_1 \\ t'_2 \end{array} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \\ \hline 1 & & \\ 1 & & \\ 1 & & \\ & 1 & \\ & 1 & \\ \hline 1 & 1 & \\ & 1 & \end{array} \right] \begin{array}{c} c \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \end{array} \end{array} \quad (13.3)$$

Произведем следующие преобразования в матрице  $A$ : 1) поменяем местами столбцы  $c$  и  $c^2(l)$ ; 2) поменяем местами строки  $l$  и  $t_r$ ; 3) поменяем местами строки  $t_1, t_2, \dots, t_{r-1}$  и  $t'_1, t'_2, \dots, t'_{r-1}$ . В результате: а) на месте строки  $l$  вновь будет такая же строка из двух единиц подряд; б) на месте столбца  $c$  вновь будет такой же



столбец из  $n$  единиц подряд; в) принадлежащие новой строке столбцы имеют теперь в  $D_2$ , как легко заметить, не менее  $2(r-1) \geq n-1$  единиц, т. е. новая строка  $l$  имеет тип  $T_k$  с  $k \geq n-1$ .

Остается лишь заметить, что при этом не могут появиться новые строки типа  $T_{n-2}$ . Действительно, помимо  $c^1(l)$ ,  $c^2(l)$  и с произведенные преобразования матрицы могут затрагивать лишь столбцы, принадлежащие строкам, связанным с  $l$ . Пусть некоторая строка  $l'$   $v$ -связана с  $l$ . Тогда  $l'$  по следствию леммы 13.4 есть  $T_k^{(2)}$ -строка с  $k \geq v+n-1$ . В результате преобразований из  $D_2$  могут «уйти» в  $D_1$  самое большее  $v$  единиц из столбцов, принадлежащих  $l'$ . Поэтому  $l'$  становится строкой типа  $T_{k'}$  с  $k' \geq k-v \geq n-1$ . Таким образом, новые строки типа  $T_{n-2}$  появиться не могут, и мы пришли к системе из  $\mu$  попарно ортогональных строк с суммой 2, у которых строк типа  $T_{n-2}$  стало на единицу меньше. Поступая точно так же с остальными строками типа  $T_{n-2}$ , приходим к системе, о которой говорится в утверждении леммы.

Итак, в любой матрице  $A \in \mathfrak{A}(\leq 2, n; M, N)$  при нечетном  $n$ , имеющей самое большее  $\mu$  попарно ортогональных строк с суммой 2, можно так выбрать подматрицу  $B$  в представлении (13.1), чтобы

$$s(D_2) \geq \mu(n-1). \quad (13.4)$$

Далее предполагаем, что при нечетном  $n$  подматрица  $B$  в (13.1) выбрана именно таким образом.

**Лемма 13.6.** Пусть задана матрица  $A \in \mathfrak{A}(\leq 2, n; M, N)$ . При четном  $n$  в  $A$  найдется не менее  $\frac{2}{3n}(nN - M)$ , а при  $n$  нечетном — не менее  $\frac{2}{3n-1}(nN - M)$  попарно ортогональных строк с суммой 2.

**Доказательство.** Приводим  $A$  к виду (13.1). Число строк в матрице  $D_2$  равно  $M - \mu - n(N - 2\mu)$ ; следовательно,

$$s(D_2) \leq 2[\mu(2n-1) - (nN - M)]. \quad (13.5)$$

Пусть  $n$  четно; допустим, от противного, что

$$\mu < \frac{2}{3n}(nN - M).$$

Тогда  $nN - M > \frac{3n}{2}\mu$ , и из (13.5) следует, что  $s(D_2) < (n-2)\mu$ . Но это противоречит (13.2).

Для нечетного  $n$  допустим от противного, что

$$\mu < \frac{2}{3n-1} (nN - M),$$

или  $nN - M > \frac{3n-1}{2} \mu$ ; из (13.5) получаем, что  $s(D_2) < \mu(n-1)$ . Но это противоречит (13.4).

**Теорема 13.7.** Пусть  $n$  нечетно. Тогда

$$\bar{\varepsilon}(2, n; M, N) \leq \left\lfloor \frac{2n-1}{3n-1} N \right\rfloor.$$

**Доказательство.** Для матриц класса  $\mathfrak{A}(2, n; M, N)$  имеем  $M = nN/2$ . По лемме 12.4  $\bar{\varepsilon}(2, n; M, N) = N - \bar{\mu}$ , где  $\bar{\mu}$  — минимальное среди максимально возможных чисел  $\mu$  попарно ортогональных строк с суммой 2 в матрице из  $\mathfrak{A}(2, n; M, N)$ . Но лемма 13.6 утверждает, что  $\bar{\mu} \geq \frac{2}{3n-1} (nN - M)$ . Отсюда получаем  $\bar{\varepsilon}(2, n; M, N) \leq \frac{2n-1}{3n-1} N$ .

**Максимальная глубина классов  $\mathfrak{A}(3, n, N)$  и  $\mathfrak{A}(4, n, N)$  при произвольном  $n$ .** Полученная в лемме 13.6 оценка снизу величины максимально возможного числа попарно ортогональных строк с двумя единицами в матрице из  $\mathfrak{A}(\leq 2, n; M, N)$  позволяет лучше оценить максимальную глубину классов  $\mathfrak{A}(t, n; M, N)$  также при  $t > 2$ . Покажем это, получив оценки для таких классов с  $t = 3, 4$ .

Вначале приведем один результат общего характера. Рассмотрим  $(0, 1)$ -матрицу  $A$  с не более чем  $t$  единицами в каждой строке. Преобразуем ее к виду (12.2), где  $B$  состоит из  $\mu = \mu_m$  попарно ортогональных строк с суммой  $t$ , а в матрице  $C$  число единиц в каждой строке не превосходит  $t-1$ . Обозначим  $C = A_{m-1}$  и возьмем в этой матрице максимально возможное число строк с суммой  $t-1$ . Пусть оно равно  $\mu_{m-1}$ . Не изменяя первых  $\mu_m$  строк, можно так переставить строки и столбцы  $A$ , образующие  $A_{m-1}$ , чтобы новая матрица также имела вид (12.2):

$$A = A_m = \left[ \begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline & 0 \\ & A_{m-2} \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline & 0 \\ & A_{m-2} \end{array}} \right\} A_{m-1}. \quad (13.6)$$

Аналогично, в подматрице  $A_i$  матрицы  $A$ , где  $i = m, m-1, \dots$ , у которой в каждой строке не больше  $i$  единиц, берем максимально возможное число  $\mu_i$  попарно ортогональных строк с  $i$  единицами в строке, переставляем строки  $A$  так, чтобы эти строки и находящиеся в них единицы оказались на первых местах, и получающуюся в правом нижнем углу матрицу со строчными суммами, не превосходящими  $i-1$ , обозначаем  $A_{i-1}$ . При этом может случиться, что в матрице  $A_i$  не окажется строк с  $i$  единицами. Тогда полагаем  $\mu_i = 0$  и  $A_{i-1} = A_i$ . Легко видеть, что размер матрицы  $A_i$  равен

$$\left(N - \sum_{k=i+1}^m \mu_k\right) \times \left(N - \sum_{k=i+1}^m k\mu_k\right),$$

$$i = m-1, m-2, \dots, 1. \quad (13.7)$$

В результате такого построения мы приходим, наконец, к матрице  $A_1$  со строчными суммами, не превышающими 1. Ясно, что ее глубина равна числу столбцов, т. е. по (13.7)

$$\varepsilon(A_1) = \mu_1 = N - (m\mu_m + (m-1)\mu_{m-1} + \dots + 2\mu_2). \quad (13.8)$$

С другой стороны, очевидно, что  $\varepsilon(A) \leq \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_m$ . Выражая  $\mu_1$  из (13.8), получаем

$$\varepsilon(A) \leq N - \sum_{i=2}^m (i-1)\mu_i.$$

Нами доказана

**Теорема 13.8.** *Если  $A$  — любая матрица с не более чем  $t$  единицами в каждой строке, то*

$$\varepsilon(A) \leq N - \sum_{i=2}^m (i-1)\mu_i, \quad (13.9)$$

где  $\mu_i$  — максимально возможное число попарно ортогональных строк с суммой  $i$  в матрице  $A_i$  ( $i = 2, 3, \dots, m$ ).

Теперь перейдем к рассмотрению классов Райзера  $\mathfrak{A}(3, n, N)$  и  $\mathfrak{A}(4, n, N)$  при произвольном  $n$ . Напомним, что для числа  $M$  строк в матрицах первого из них справедливо соотношение  $M = nN/3$ , а для второго —  $M = nN/4$ . По теореме 13.8 при  $m = 3$  получаем

$$\bar{\varepsilon}(3, n, N) \leq N - (\mu_2 + 2\mu_3), \quad (13.10)$$

при  $m = 4$  получаем

$$\bar{\varepsilon}(4, n, N) \leq N - (\mu_2 + 2\mu_3 + 3\mu_4). \quad (13.11)$$

Теорема 13.9. Для классов  $\mathfrak{A}(m, n, N)$  с  $m = 3, 4$  справедливы следующие оценки максимальной глубины:

$$\bar{\varepsilon}(3, n, N) \leq \begin{cases} \left\lceil \frac{5n-4}{3(3n-2)} N \right\rceil, & n \text{ четно,} \\ \left\lceil \frac{5n-3}{3(3n-1)} N \right\rceil, & n \text{ нечетно;} \end{cases} \quad (13.12)$$

$$\bar{\varepsilon}(4, n, N) \leq$$

$$\leq \begin{cases} \left( 1 - \frac{(5n-3)^2 - 1}{4(3n-2)(4n-3)} \right) N, & n \text{ четно,} \\ \left( 1 - \frac{(5n-2)^2 + n - 4}{4(3n-1)(4n-3)} \right) N, & n \text{ нечетно.} \end{cases} \quad (13.14)$$

$$\leq \begin{cases} \left( 1 - \frac{(5n-2)^2 + n - 4}{4(3n-1)(4n-3)} \right) N, & n \text{ четно,} \\ \left( 1 - \frac{(5n-3)^2 - 1}{4(3n-2)(4n-3)} \right) N, & n \text{ нечетно.} \end{cases} \quad (13.15)$$

Доказательство\*. Для получения искомой верхней границы при  $m = 3$  нам нужно ввиду (13.10) оценить снизу величину  $\mu_2 + 2\mu_3$ , а при  $m = 4$  ввиду (13.11) — величину  $\mu_2 + 2\mu_3 + 3\mu_4$ .

а)  $m = 3$ . Рассмотрим представление матрицы  $A \in \mathfrak{A}(3, n, N)$  в виде (13.6). Подматрица  $A_{m-1} = A_2$  имеет размер  $M' \times N'$ , где  $M' = M - \mu_3 = nN/3 - \mu_3$ ,  $N' = N - 3\mu_3$ . Имеем

$$nN' - M' = \frac{2nN}{3} - (3n-1)\mu_3. \quad (13.16)$$

При  $n$  четном по лемме 13.6

$$\mu_2 \geq \frac{2}{3n} (nN' - M') = \frac{4N}{9} - \frac{6n-2}{3n} \mu_3.$$

Но по лемме 12.2  $\mu_3 \geq \frac{nN}{3(3n-2)}$ ; следовательно,

$$\mu_2 + 2\mu_3 \geq \frac{4N}{9} - \frac{6n-2}{3n} \mu_3 + 2\mu_3 = \frac{4N}{9} + \frac{2}{3n} \mu_3 \geq \frac{2}{3} \frac{2n-1}{3n-2} N,$$

$$\bar{\varepsilon}(3, n, N) \leq N - (\mu_2 + 2\mu_3) \leq \frac{5n-4}{9n-6} N,$$

т. е. получаем (13.12).

При  $n$  нечетном по лемме 13.6

$$\mu_2 \geq \frac{2}{3n-1} (nN' - M') = \frac{4nN}{3(3n-1)} - 2\mu_3$$

(учитывая (13.16)). Следовательно,

$$\bar{\varepsilon}(3, n, N) \leq N - (\mu_2 + 2\mu_3) \leq N - \frac{4nN}{3(3n-1)} = \frac{5n-3}{3(3n-1)} N,$$

т. е. получаем (13.13).

б)  $m = 4$ . Вновь представим  $A \in \mathfrak{A}(4, n, N)$  в виде (13.6). Матрица  $A_{m-2} = A_2$  в этом случае имеет размер  $M' \times N'$ , где  $M' = \frac{nN}{4} - \mu_3 - \mu_4$ ,  $N' = N - 4\mu_4 - 3\mu_3$ . Имеем

$$nN' - M' = \frac{3nN}{4} - (3n - 1)\mu_3 - (4n - 1)\mu_4. \quad (13.17)$$

При нечетном  $n$ , пользуясь леммой 13.6, получаем аналогично п. а), что

$$\mu_2 \geq \frac{2}{3n - 1} (nN' - M') = \frac{3nN}{2(3n - 1)} - \frac{8n - 2}{3n - 1} \mu_4 - 2\mu_3. \quad (13.18)$$

К матрице  $A$  применяем лемму 12.2 и получаем

$$\mu_4 \geq \frac{nN}{4(4n - 3)}. \quad (13.19)$$

Из (13.18), (13.19) теперь следует, что

$$\begin{aligned} 3\mu_4 + 2\mu_3 + \mu_2 &\geq 3\mu_4 - \frac{8n - 2}{3n - 1} \mu_4 + \frac{3nN}{2(3n - 1)} \geq \\ &\geq \frac{n - 1}{3n - 1} \frac{nN}{4(4n - 3)} + \frac{3nN}{2(3n - 1)} = \frac{25n^2 - 19n}{4(3n - 1)(4n - 3)} N; \end{aligned}$$

это дает (13.15).

Пусть, наконец,  $n$  четно. Применим к матрице  $A_{m-1} = A_3$  размера  $(nN/4 - \mu_4) \times (N - 4\mu_4)$  лемму 12.2. Получаем

$$\mu_3 \geq \frac{nN/2 - (4n - 2)\mu_4}{3n - 2}. \quad (13.20)$$

По лемме 13.6, принимая во внимание (13.17), совершенно аналогично предыдущему приходим к оценке

$$3\mu_4 + 2\mu_3 + \mu_4 \geq \frac{N}{2} + \frac{n + 2}{3n} \mu_4 + \frac{2}{3n} \mu_3. \quad (13.21)$$

Отсюда, оценивая сначала  $\mu_3$  по (13.20), а затем  $\mu_4$  по (13.19), выводим, что правая часть (13.21) не меньше чем

$$\frac{25n^2 - 30n + 8}{4(3n - 2)(4n - 3)} N;$$

это дает (13.14).

Максимальная глубина классов  $\mathfrak{A}(3, n, N)$  и  $\mathfrak{A}(4, n, N)$  при небольших значениях  $n$ . Интересно рассмотреть, что дают оценки (13.12) — (13.15) при небольших значениях  $n$ .

Пусть, например,  $n = 2$ . Тогда из (13.12) получаем, что  $\bar{\varepsilon}(3, 2, N) \leq [N/2]$ , а из (13.14), что  $\bar{\varepsilon}(4, 2, N) \leq$

$\leq [2N/5]$ , т. е. те же границы, что и по теореме 12.2 (см. (12.8)). Это не удивительно, так как в гл. 6 мы увидим, что эти границы — на самом деле точные значения максимальной глубины соответствующих классов.

Пусть теперь  $n = 3$ . Тогда из (13.13) следует, что

$$\bar{\varepsilon}(3, 3, N) = \bar{\varepsilon}(3, N) \leq [N/2]. \quad (13.22)$$

Покажем, что правая часть (13.22) есть фактически точное значение максимальной глубины класса Райзера  $\mathfrak{A}(3, N)$ , т. е. установим, что для каждого значения  $N$  существует  $(0, 1)$ -матрица  $A$  из  $\mathfrak{A}(3, N)$ , глубина которой равна  $[N/2]$ . На самом деле имеет место более общий факт.

**Теорема 13.10.** *Для любых  $n \geq 3$  и  $N$  справедлива следующая оценка снизу:*

$$\bar{\varepsilon}(3, n, N) \geq [N/2],$$

если класс  $\mathfrak{A}(3, n, N)$  непуст.

**Доказательство.** Для любой матрицы  $A \in \mathfrak{A}(3, n, 3)$ , очевидно,  $\varepsilon(A) = 1$ . Если  $A$  принадлежит классу  $\mathfrak{A}(3, n, 4)$ , то  $\varepsilon(A) = 2$ , если только класс непуст. Покажем далее, что если непуст класс  $\mathfrak{A}(3, n, 5)$ , то  $\varepsilon(A) = 2$  для всякой матрицы  $A$  из этого класса. Действительно, число строк  $M$  в такой матрице равно  $5n/3$ .

Покажем, что если  $l$  — любая строка  $A$ , то можно найти другую строку  $l'$  с  $(l, l') = 1$ . Пусть это не так, т. е.  $(l, l') \geq 2$  для любой строки  $l' \neq l$ . Возьмем в  $A$  два столбца  $c$  и  $d$ , не содержащие единиц в строке  $l$ . Ясно, что  $(c, d) = 0$ , так как если бы нашлась строка  $l'$  с единицами в  $c$  и  $d$ , то ввиду  $(l, l') \geq 2$  она имела бы не меньше 4 единиц. Но тогда  $M \geq 2n + 1 > 5n/3$ , получили противоречие. Для любой матрицы класса  $\mathfrak{A}(3, n, 6)$  аналогично можно убедиться, что в ней есть две строки  $l$  и  $l'$  с  $(l, l') = 1$ , откуда следует, что глубина каждой такой матрицы не больше 3, т. е.  $\bar{\varepsilon}(3, n, 6) \leq 3$ .

Построим теперь для любого  $n$  матрицу  $C_n \in \mathfrak{A}(3, n, 6)$ , в которой нет ортогональных строк и для которой поэтому  $\varepsilon(C_n) = 3$ . Определим матрицы

$$C_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Любые две строки в этих матрицах не ортогональны, поэтому  $\varepsilon(C_4) = \varepsilon(C_6) = 3$ . В матрице из  $\mathfrak{A}(6, n, 6)$  размера  $M \times 6$  должно быть  $M = 2n$ , т. е. четное число строк. Полагаем

при  $n$  четном

$$C_n = \begin{bmatrix} C_4 \\ C_4 \\ \dots \\ C_4 \end{bmatrix},$$

при  $n$  нечетном

$$C_n = \begin{bmatrix} C_6 \\ C_4 \\ \dots \\ C_4 \end{bmatrix}.$$

Тогда  $\varepsilon(C_n) = 3$ .

Пусть теперь  $D_n^{(i)}$  — любая матрица из  $\mathfrak{A}(3, n, i)$ ,  $i = 3, 4, 5$ ,

$$D_n^{(6)} = C_n \in \mathfrak{A}(3, n, 6), \quad D_n^{(7)} = \begin{bmatrix} D_n^{(3)} & O \\ O & D_n^{(4)} \end{bmatrix} \in \mathfrak{A}(3, n, 7),$$

$$D_n^{(8)} = \begin{bmatrix} D_n^{(4)} & O \\ O & D_n^{(4)} \end{bmatrix} \in \mathfrak{A}(3, n, 8),$$

$$D_n^{(k+6)} = \begin{bmatrix} D_n^{(k)} & O \\ O & C_n \end{bmatrix} \in \mathfrak{A}(3, n, k+6), \quad k = 3, 4, \dots$$

Посмотрим, какова глубина построенных матриц:

$$\varepsilon(D_n^{(3)}) = 1 = [3/2], \quad \varepsilon(D_n^{(4)}) = \varepsilon(D_n^{(5)}) = 2 = [4/2] = [5/2],$$

$$\varepsilon(D_n^{(6)}) = \varepsilon(D_n^{(7)}) = 3 = [6/2] = [7/2], \quad \varepsilon(D_n^{(8)}) = 4 = [8/2].$$

Предположим теперь, что  $\varepsilon(D_n^{(k)}) = [k/2]$  при  $3 \leq k < k_0$ . Тогда

$$\varepsilon(D_n^{(k_0)}) = \varepsilon(D_n^{(k_0-6)}) + 3 = [(k_0 - 6)/2] + 3 =$$

$$= [k_0/2 - 3] + 3 = [k_0/2] - 3 + 3 = [k_0/2].$$

Теорема доказана.

Из данной теоремы и неравенства (13.22) получаем следующий результат.

**Теорема 13.11.**  $\bar{\varepsilon}(3, N) = [N/2]$  при любом  $N$ .

Интересное следствие из теоремы 13.9 получается также для глубины класса Райзера  $\mathfrak{A}(4, 3, N)$ . По (13.15)

$$\bar{\varepsilon}(4, 3, N) \leq \frac{5}{12} N = \frac{5}{9} M \quad (13.23)$$

(так как  $4M = 3N$ ). Покажем, что и здесь фактически имеет место равенство.

Рассмотрим следующие  $(0, 1)$ -матрицы:

а)  $J_{34}$ ;

$$б) B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$в) C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

где  $B \in \mathfrak{A}(4, 3, 8)$ ,  $C \in \mathfrak{A}(3, 4, 9)$ . Глубина  $B$  равна 3. В самом деле, любое ее покрытие должно содержать одну из первых трех и одну из последних трех строк. Однако любая составленная таким образом подматрица  $B$  размера  $2 \times 8$  содержит столбец  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Поэтому  $\varepsilon(B) = 3$ .

Матрица  $C$ , как легко убедиться, есть матрица инцидентности конечной аффинной плоскости  $\mathcal{A}$  порядка 3 (см. § 10), заданной на 9 точках 12 прямыми:  $\{1, 2, 3\}$ ,  $\{1, 4, 7\}$ ,  $\{1, 5, 9\}$ ,  $\{1, 6, 8\}$ ,  $\{2, 4, 9\}$ ,  $\{2, 5, 8\}$ ,  $\{2, 6, 7\}$ ,  $\{3, 4, 8\}$ ,  $\{3, 5, 7\}$ ,  $\{3, 6, 9\}$ ,  $\{4, 5, 6\}$ ,  $\{7, 8, 9\}$ .

Найдем ширину матрицы  $C$ , т. е. такое минимальное число столбцов, что все строчные суммы в образованной ими подматрице положительны. Она равна, очевидно, минимальному числу таких точек, что каждая прямая в  $\mathcal{A}$  проходит через одну из них. На прямой в  $\mathcal{A}$  находится 3 точки, а через каждую точку проходит по 4 прямых. Рассматривая рис. 7 убеждаемся, что через всякие 4 точки  $P_1, P_2, P_3, P_4$  плоскости  $\mathcal{A}$  всего проходит либо 11 (рис. 7, а), либо 10 (рис. 7, б) прямых. Но в  $\mathcal{A}$  всего 12 прямых. Следовательно, минимальная система представителей для множества всех прямых в  $\mathcal{A}$  состоит из 5 точек, т. е. ширина  $(0, 1)$ -матрицы  $C$  равна 5. Матрица  $C^T$



принадлежит  $\mathfrak{A}(4, 3, 12)$ , и  $\varepsilon(C^T) = 5$ , так как глубина  $(0, 1)$ -матрицы совпадает с шириной транспонированной матрицы. Итак,  $\varepsilon(J_{34}) = 1$ ,  $\varepsilon(B) = 3$ ,  $\varepsilon(C^T) = 5$ .

Число строк  $M$  матрицы из  $\mathfrak{A}(4, 3, N)$  должно делиться на 3, т. е.  $M$  имеет вид  $9t$ ,  $9t + 3$  или  $9t + 6$ . Если  $M = 9t$ , возьмем матрицу  $A$  размера  $M \times N$ , составленную из  $t$  расположенных по диагонали блоков  $C$ , при  $M = 9t + 3$  расставим так же  $t$  блоков  $C$  и блок  $J_{43}$ , при

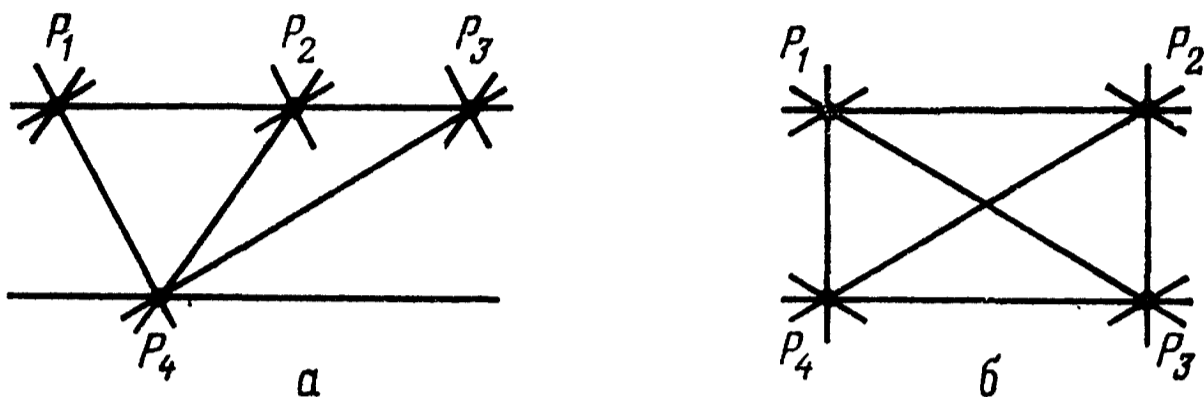


Рис. 7

$M = 9t + 6$  расставим  $t$  блоков  $C$  и блок  $B$ ; на остальные места в  $A$  поставим нули. Ясно, что  $A \in \mathfrak{A}(4, 3, N)$  и соответственно  $\varepsilon(A) = 5t, 5t + 1, 5t + 3$ . Но, с другой стороны, без труда проверяем, что  $[5(9t + 6)/9] = [5t + 10/3] = 5t + 3$  при  $M = 9t + 6$ , а в других случаях  $[5M/9] = 5t, 5t + 1$ . Итак, нами доказана

**Теорема 13.12.**  $\bar{\varepsilon}(4, 3, N) = [5M/9] = [5N/12]$ .

Пусть, наконец,  $n = 4$ . Из (13.14) находим, что

$$\bar{\varepsilon}(4, N) \leq 29N/65. \quad (13.24)$$

Это соотношение позволит нам получить в гл. 6 результат, касающийся оценки одной из важных структурных констант для регулярного степени 3 (кубического) графа.

## § 14. Покрытие $l$ -подмножеств $k$ -подмножествами.

### Игра «Спортлото»

**Минимальные покрывающие системы. Проблема Турана.** Пусть  $S$  — некоторое  $n$ -множество,  $k, l$  — два целых числа,  $0 < l \leq k < n$ . Рассмотрим семейства  $\mathcal{P}_n^{(k)}$  и  $\mathcal{P}_n^{(l)}$  всех соответственно  $k$ - и  $l$ -подмножеств множества  $S$ . Число членов в  $\mathcal{P}_n^{(k)}$  равно  $\binom{n}{k}$ . Поставим следующие экстремальные задачи:

а) Найти систему  $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_m\}$  подмножеств с минимальным числом  $m$  членов, состоящую из таких  $k$ -подмножеств множества  $S$ , что для любого  $A$  из  $\mathcal{P}_n^{(l)}$  найдется  $B_i \in \mathcal{B}$ , содержащее  $A$ .

б) Найти систему  $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_t\}$  подмножеств с минимальным числом  $t$  членов, состоящую из таких  $l$ -подмножеств, что для любого  $B$  из  $\mathcal{P}_n^{(k)}$  найдется  $A_i \in \mathcal{A}$ , содержащееся в  $B$ .

Задача а) представляет собой, очевидно, некоторую задачу о покрытии. Задачу б) естественно трактовать как задачу о нахождении минимальной системы представителей, если считать, что  $l$ -подмножество представляет любое содержащее его  $k$ -подмножество.

Перенумеруем члены  $\mathcal{P}_n^{(k)}$  и  $\mathcal{P}_n^{(l)}$ , расположив их по определенному правилу, например, в таком порядке, в каком располагаются слова в словаре (он называется *лексикографическим порядком*).

Установив порядок расположения подмножеств в семействах  $\mathcal{P}_n^{(k)}$  и  $\mathcal{P}_n^{(l)}$ , можно рассмотреть матрицу инцидентности  $A = A(n, k, l) = [a_{ij}]$  размера  $\binom{n}{k} \times \binom{n}{l}$ , где  $a_{ij} = 1$ , если  $A_j \subset B_i$  для  $A_j \in \mathcal{P}_n^{(l)}$ ,  $B_i \in \mathcal{P}_n^{(k)}$ , и  $a_{ij} = 0$  в противном случае. Тогда ясно, что минимальное число  $t$  из задачи а) равно глубине  $\epsilon(A(n, k, l))$   $(0, 1)$ -матрицы  $A(n, k, l)$ . Это число обозначается через  $M(n, k, l)$ . Соответствующую систему  $\mathcal{B}$  при заданных  $n, k, l$  назовем *минимальной  $(n, k, l)$ -покрывающей системой*. Минимальное число  $t$  из задачи б) равно ширине  $A(n, k, l)$ . Это число называется *числом Турана* и обозначается  $T(n, k, l)$ .

Рассмотрим пример. Пусть  $n = 5, k = 3, l = 2$ . Любое 3-множество содержит три 2-подмножества, а каждое 2-подмножество 5-множества содержится в трех 3-подмножествах. Поэтому матрица инцидентности  $A(5, 3, 2)$  есть матрица из класса Райзера  $\mathfrak{A}(3, 10)$ . Если принять лексикографическое упорядочение подмножеств в семействах  $\mathcal{P}_5^{(3)}$  и  $\mathcal{P}_5^{(2)}$ , то  $A(5, 3, 2)$  запишется в виде

$$A = A(5, 3, 2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (14.1)$$

Взяв строки с номерами 1, 2, 3, 10, убеждаемся, что  $M(5, 3, 2) = \varepsilon(A) = 4$ . Соответствующую минимальную  $(5, 3, 2)$ -покрывающую систему образуют подмножества

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{3, 4, 5\}. \quad (14.2)$$

Заметим, что по теореме 13.9  $\bar{\varepsilon}(3, 10) = 5$ ; следовательно,  $\varepsilon(A)$  не совпадает с максимальной глубиной класса  $\mathfrak{A}(3, 10)$ . Точно так же, взяв столбцы с номерами 1, 8, 9, 10, видим, что  $T(5, 3, 2) = 4$ .

В общем случае задача определения чисел  $M(n, k, l)$  и  $T(n, k, l)$  трудна, даже при конкретных значениях  $k, l$ . Она известна в комбинаторной математике как *проблема Турана*.

Покажем, как связаны между собой числа  $M(n, k, l)$  и числа Турана. Если  $A \in \mathcal{P}_n^{(l)}$ ,  $B \in \mathcal{P}_n^{(k)}$ , то  $A \subset B$  равносильно тому, что  $S - B \subset S - A$ . Пусть теперь  $\mathfrak{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_m\}$  — система  $k$ -подмножеств с тем свойством, что для любого  $A \in \mathcal{P}_n^{(l)}$  найдется  $B_i \in \mathfrak{B}$ , для которого  $A \subset B_i$ . Тогда ясно, что  $\bar{\mathfrak{B}} = \{S - B_1, S - B_2, \dots, S - B_m\}$  есть система  $n - k$ -подмножеств, обладающая тем свойством, что для любого  $n - l$ -подмножества  $\bar{A}$  найдется  $S - B_i$  из  $\bar{\mathfrak{B}}$ , для которого  $S - B_i \subset \bar{A}$ ; если дано  $\bar{A}$ , то возьмем такое  $B_i$ , что  $S - \bar{A} \subset B_i$ . Итак, доказана

**Теорема 14.1.**  $T(n, n - l, n - k) = M(n, k, l)$ .

Разберем несколько частных случаев рассматриваемой задачи.

**Покрывание пар элементов тройками.** Конфигурацию 3-подмножеств  $n$ -множества  $S$  с тем свойством, что каждая пара различных элементов содержится в каком-либо из подмножеств конфигурации, будем кратко обозначать через  $n$ -СТПП (система троек, покрывающих пары в  $n$ -множестве). Если  $n \equiv 1, 3 \pmod{6}$ , то, как известно (см. теорему 10.7), существует система троек Штейнера на множестве из  $n$  элементов. Она, очевидно, есть минимальная  $(n, 3, 2)$ -покрывающая система, так как тогда каждая пара различных элементов содержится в точности в одной тройке. Отсюда, конечно, следует, что  $M(n, 3, 2) = n(n - 1)/6$  при  $n \equiv 1, 3 \pmod{6}$ , так как из стольких блоков состоит система троек Штейнера на  $n$ -множестве (см. § 10).

Пусть  $\mathfrak{B}$  —  $n$ -СТПП с минимальным числом членов, заданная на  $Z_n$ , и  $\alpha(i)$  — число подмножеств  $\mathfrak{B}$ , содер-

жащих  $i = 1, 2, \dots, n$ . Тогда

$$\sum_{i=1}^n \alpha(i) = 3|\mathcal{B}|, \quad (14.3)$$

где  $|\mathcal{B}|$  — число членов в  $\mathcal{B}$ . Так как любой  $i$  встречается в подмножествах  $\mathcal{B}$  со всеми остальными элементами  $S$ , то  $\alpha(i) \geq \langle (n-1)/2 \rangle$ , или, равносильно,  $\alpha(i) \geq [n/2]$ . Из (14.3) получаем, что

$$M(n, 3, 2) = |\mathcal{B}| \geq \frac{n}{3} \left[ \frac{n}{2} \right]. \quad (14.4)$$

Правая часть (14.4) — не обязательно целое число. Полагаем

$$\varphi(n) = \left\langle \frac{n}{3} \left[ \frac{n}{2} \right] \right\rangle.$$

Тогда (14.4) уточняется:

$$M(n, 3, 2) \geq \varphi(n). \quad (14.5)$$

Легко показать, что

$$\varphi(n) = \begin{cases} n^2/6, & n \equiv 0 \pmod{6}, \\ n(n-1)/6, & n \equiv 1, 3 \pmod{6}, \\ (n^2+2)/6, & n \equiv 2, 4 \pmod{6}, \\ (n^2-n+4)/6, & n \equiv 5 \pmod{6}. \end{cases} \quad (14.6)$$

Докажем, что в (14.5) фактически имеет место знак равенства.

Пусть  $A_1, A_2, A_3$  — попарно непересекающиеся  $n$ -множества. Назовем  $\mathcal{Z}$ -покровом для  $(A_1, A_2, A_3)$  такое множество  $\mathcal{K}$  троек  $(x, y, z)$ , где  $x \in A_1, y \in A_2, z \in A_3$ , что любая пара элементов из двух разных множеств встречается в точности один раз в какой-либо тройке из  $\mathcal{K}$ .

*Лемма 14.2. Если  $n$  — целое положительное число,  $A, B, C$  — попарно непересекающиеся  $n$ -множества, то существует  $\mathcal{Z}$ -покров  $\mathcal{K}$  для  $(A, B, C)$ , содержащий любую наперед заданную тройку  $(a, b, c)$ , где  $a \in A, b \in B, c \in C$ .*

*Доказательство.* Пусть  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ,  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ ,  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ , где  $a = a_1, b = b_1, c = c_1$ . Через  $\mathcal{K}$  обозначим множество всех троек  $(a_i, b_j, c_k)$ , для которых  $k \equiv i + j - 1 \pmod{n}$  ( $1 \leq i, j, k \leq n$ ). Ясно, что  $\mathcal{K}$  есть  $\mathcal{Z}$ -покров, содержащий  $(a, b, c)$ , так как любые два из трех элементов  $a_i, b_j, c_k$  однозначно определяют третий.

Следствие. Каждый 3-покров состоит из  $n^2$  троек.

Заметим, что 3-покров при данном  $n$ , как это видно по доказательству леммы 14.2, фактически соответствует латинскому квадрату порядка  $n$  (в доказательстве, по существу, строится такой квадрат, у которого каждая строка получается из соседней сверху циклическим сдвигом на один шаг).

Лемма 14.3. Пусть  $A, B, C$  — попарно непересекающиеся  $n$ -множества,  $p$  — такое целое число, что  $0 < p \leq \leq n/2$ . Пусть  $A^*, B^*, C^*$  —  $p$ -подмножества соответственно множеств  $A, B, C$  и  $\mathcal{K}^*$  — 3-покров для  $(A^*, B^*, C^*)$ . Тогда существует такой 3-покров  $\mathcal{K}$  для  $(A, B, C)$ , что  $\mathcal{K}^* \subset \mathcal{K}$ .

Доказательство. Пусть  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ,  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ ,  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ . Можем предположить, что  $A^* = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ ,  $B^* = \{b_1, b_2, \dots, b_p\}$ ,  $C^* = \{c_1, c_2, \dots, c_p\}$ . Если  $1 \leq i, j \leq p$ , обозначим через  $m_{ij}^*$  то единственное число  $k$ , для которого  $(a_i, b_j, c_k) \in \mathcal{K}^*$ . Так как  $1 \leq m_{ij}^* \leq p$  и в тройке  $(i, j, m_{ij}^*)$  любые два элемента однозначно определяют третий, квадратная таблица, составленная из чисел  $m_{ij}^*$ , есть латинский квадрат  $L^*$  порядка  $p$ . Если через  $N(i)$  обозначить число появлений в  $L^*$  элемента  $i$ , то соотношение  $N(i) \leq p + p - n$  заведомо выполняется, так как по условию  $2p - n \leq \leq 0$ . Поэтому по теореме 11.7  $L^*$  можно расширить до латинского квадрата  $L = [m_{ij}]$  порядка  $n$ . Полагая теперь  $\mathcal{K} = \{(a_i, b_j, c_{m_{ij}})\}$ , где  $1 \leq i, j \leq n$ , получаем искомый 3-покров для  $(A, B, C)$ . Лемма доказана.

Рассмотрим следующее свойство покрывающих множеств:  $n$ -СТПП  $\mathcal{B}$ , заданная на множестве  $S$ , содержит конфигурацию из 4 троек:

$$\{a, b, x\}, \{a, b, y\}, \{a, b, z\}, \{x, y, z\}, \quad (14.7)$$

$a, b, x, y, z \in S$ . При  $n = 5$  такова, например,  $n$ -СТПП, указанная в (14.2). Для  $n = 11$  такой системой будет

$$\begin{aligned} &\{1, 2, 3\}, \{1, 6, 7\}, \{2, 7, 10\}, \{3, 8, 11\}, \{5, 6, 9\}, \\ &\{1, 2, 4\}, \{1, 8, 9\}, \{2, 9, 11\}, \{4, 6, 11\}, \{5, 7, 11\}, \\ &\{1, 2, 5\}, \{1, 10, 11\}, \{3, 6, 10\}, \{4, 7, 8\}, \{5, 8, 10\}; \\ &\{3, 4, 5\}, \{2, 6, 8\}, \{3, 7, 9\}, \{4, 9, 10\}, \end{aligned} \quad (14.8)$$

здесь 4 тройки в левом столбце имеют вид (14.7).

Назовем  $n$ -СТПП *допустимой*, если: а) она содержит  $\varphi(n)$  троек; б) при  $n \equiv 5 \pmod{6}$  в ней найдется конфигурация из 4 троек вида (14.7). Примером допустимой 11-СТПП служит (14.8): число троек в ней равно 19, что совпадает с  $\varphi(11)$  — правой частью (14.6) при  $n = 11$ .

**Теорема 14.4.** *Если  $n \geq 3$  — целое положительное число, то существует допустимая  $n$ -СТПП.*

**Доказательство.** При  $n \equiv 1, 3 \pmod{6}$  существует система троек Штейнера порядка  $n$ . Она, как мы отмечали, есть  $n$ -СТПП и состоит из  $\varphi(n) = n(n-1)/6$  троек, т. е. является допустимой. Разберем остальные случаи. Применяем метод математической индукции. При  $n = 3, 4, 5$  легко убедиться в существовании допустимой  $n$ -СТПП. Предположим теперь, что допустимая  $n$ -СТПП существует для всех множеств с числом элементов, меньшим  $n$ .

а)  $n \equiv 0 \pmod{6}$ . Пусть  $\mathcal{B}_1$  — допустимая  $n-1$ -СТПП. Можем считать, что в ней имеются тройки  $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{3, 4, 5\}$ . Удалим из  $\mathcal{B}_1$   $\{1, 2, 3\}$  и присоединим к ней  $n/2$  троек  $\{1, 3, n\}, \{2, 3, n\}, \{4, 5, n\}, \dots, \{n-2, n-1, n\}$ . Полученная система  $\mathcal{B}$  есть  $n$ -СТПП; она содержит

$$\begin{aligned} \varphi(n-1) - 1 + \frac{n}{2} &= \frac{(n-1)^2 - (n-1) + 4}{6} - 1 + \frac{n}{2} = \\ &= \frac{n^2}{6} = \varphi(n) \end{aligned}$$

членов, т. е. она допустима.

б)  $n \equiv 2, 4 \pmod{6}$ . Если  $\mathcal{B}_1$  — допустимая  $n-1$ -СТПП, то добавим к ней тройки  $\{1, 3, n\}, \{2, 3, n\}, \{4, 5, n\}, \dots, \{n-2, n-1, n\}$ . Полученная система  $\mathcal{B}$ , очевидно, есть  $n$ -СТПП и состоит из

$$\varphi(n-1) + \frac{n}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{6} + \frac{n}{2} = \frac{n^2 + 2}{6} = \varphi(n)$$

членов, т. е. допустима.

в)  $n \equiv 5 \pmod{6}$ . Каждое такое число  $n$  можно представить в виде  $n = 6t + 5$ , где  $t$  — целое неотрицательное число. Полагая  $2t = s - 3$ , получаем представление  $n = 3s - 4$ , где  $s$  — целое нечетное число,  $s > 1$ . Далее предполагаем, что  $s > 5$ , так как выше мы убедились в существовании допустимых  $n$ -СТПП при  $n = 5, 11$  (см. (14.2), (14.8)). Всякое нечетное целое число  $s$  до-

пускает одно из представлений вида  $s = 6h + 1$ ,  $6h + 3$ ,  $6h + 5$ . Разберем отдельно два подслучая.

$v_1)$   $s = 6h + 1$ ,  $6h + 3$ . Определим три  $s - 2$ -подмножества множества  $Z_n$ :

$$\begin{aligned} X_1 &= \{1, 2, \dots, s - 2\}, & X_2 &= \{s - 1, s, \dots, 2s - 4\}, \\ X_3 &= \{2s - 3, 2s - 2, \dots, 3s - 6\}. \end{aligned} \quad (14.9)$$

По лемме 14.2 для  $(X_1, X_2, X_3)$  существует 3-покров  $\mathcal{K}$ , содержащий тройку  $\{1, s - 1, 2s - 3\}$ . Полагаем

$$Y_i = X_i \cup \{3s - 5, 3s - 4\}. \quad (14.10)$$

По предположению индукции допустимые  $s$ -СТПП существуют. Выпишем их для каждого из  $s$ -подмножеств  $Y_i$ , обозначив через  $\mathcal{B}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Каждая из  $\mathcal{B}_i$  состоит из  $\varphi(s) = s(s - 1)/6$  троек. Заметим, что построение допустимой СТПП можно, конечно, начать с любой заданной тройки. Поэтому, не ограничивая общности, считаем, что  $\{1, 3s - 5, 3s - 4\} \in \mathcal{B}_1$ ,  $\{s - 1, 3s - 5, 3s - 4\} \in \mathcal{B}_2$ ,  $\{2s - 3, 3s - 5, 3s - 4\} \in \mathcal{B}_3$ . Пусть теперь  $\mathcal{B} = \mathcal{K} \cup \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3$ . Легко видеть, что  $\mathcal{B}$  есть  $n$ -СТПП. Число троек в  $\mathcal{B}$  равно

$$(s - 2)^2 + \frac{3s(s - 1)}{6} = \frac{3s^2 - 9s + 8}{2} = \frac{n^2 - n + 4}{6} = \varphi(n).$$

Так как  $\mathcal{B}$  содержит тройки  $\{1, 3s - 5, 3s - 4\}$ ,  $\{s - 1, 3s - 5, 3s - 4\}$ ,  $\{2s - 3, 3s - 5, 3s - 4\}$ ,  $\{1, s - 1, 2s - 3\}$ , она — допустимая  $n$ -СТПП.

$v_2)$   $s = 6h + 5$ . Возьмем  $X_1, X_2, X_3$  как в (14.9) и  $Y_1, Y_2, Y_3$  как в (14.10). По предположению индукции на каждом из  $Y_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) можно построить  $s$ -СТПП  $\mathcal{B}_i$ , содержащую конфигурацию троек  $\mathcal{B}_i$  вида (14.7). Перенумеровывая в случае необходимости элементы в  $Y_i$ , мы можем считать, что эти конфигурации образованы следующими тройками:

$$\mathcal{B}_1^0 = \{1, 2, 3\}, \{1, 3s - 5, 3s - 4\}, \{2, 3s - 5, 3s - 4\}, \\ \{3, 3s - 5, 3s - 4\},$$

$$\mathcal{B}_2^0 = \{s - 1, s, s + 1\}, \{s - 1, 3s - 5, 3s - 4\}, \\ \{s, 3s - 5, 3s - 4\}, \{s + 1, 3s - 5, 3s - 4\},$$

$$\mathcal{B}_3^0 = \{2s - 3, 2s - 2, 2s - 1\}, \{2s - 3, 3s - 5, 3s - 4\}, \\ \{2s - 2, 3s - 5, 3s - 4\}, \{2s - 1, 3s - 5, 3s - 4\}.$$

Образуем множество  $U = \{1, 2, 3, s-1, s, s+1, 2s-3, 2s-2, 2s-1, 3s-5, 3s-4\}$  из 11 элементов и выпишем для него допустимую  $n$ -СТПП  $\mathcal{B}^0$ . Далее возьмем 3-покров  $\mathcal{K}^0$  для  $(\{1, 2, 3\}, \{s-1, s, s+1\}, \{2s-3, 2s-2, 2s-1\})$  и расширим его, воспользовавшись леммой 14.3 до 3-покрова  $\mathcal{K}$  для  $(X_1, X_2, X_3)$ . Определим теперь систему троек

$$\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_1^0) \cup (\mathcal{B}_2 - \mathcal{B}_2^0) \cup (\mathcal{B}_3 - \mathcal{B}_3^0) \cup \mathcal{B}^0 \cup (\mathcal{K} - \mathcal{K}^0).$$

Рассматривая последовательно все возможные пары элементов из  $S$ , убеждаемся, что  $\mathcal{B}$  есть  $n$ -СТПП. Число членов  $\mathcal{B}$  равно

$$\begin{aligned} 3 \left[ \frac{s^2 - s + 4}{6} - 4 \right] + [(s-2)^2 - 9] + 19 &= \\ &= \frac{3s^2 - 9s + 8}{2} = \frac{n^2 - n + 4}{6} = \varphi(n). \end{aligned}$$

Так как  $\mathcal{B} \supset \mathcal{B}^0$ , а  $\mathcal{B}^0$  содержит конфигурацию вида (14.7),  $\mathcal{B}$  — допустимая  $n$ -СТПП.

Еще о числах  $M(n, k, l)$ . Для общего случая приведем некоторые оценки  $M(n, k, l)$ .

**Теорема 14.5.**  $M(n, k, l) \geq \frac{n}{k} M(n-1, k-1, l-1)$ .

**Доказательство.** Пусть  $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_M\}$  — минимальная  $(n, k, l)$ -покрывающая система, построенная на множестве  $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ . Аналогично тому, что мы делали для блок-схем в § 5, подсчитаем двояким путем число вхождений элементов в подмножества  $\mathcal{B}$ . С одной стороны, число появлений всех элементов равно  $kM(n, k, l)$ . С другой стороны, пусть элемент  $a_i \in S$  появляется в  $N = N(i)$  подмножествах  $B_{j_1}, B_{j_2}, \dots, B_{j_N}$ . В этих  $k$ -подмножествах  $a_i$  должен встретиться вместе с любым  $l-1$ -подмножеством множества  $S - \{a_i\}$ . Поэтому система  $\{B_{j_1} - \{a_i\}, B_{j_2} - \{a_i\}, \dots, B_{j_N} - \{a_i\}\}$  содержит все  $l-1$ -подмножества этого множества. Итак,  $N(i) \geq M(n-1, k-1, l-1)$ . Поэтому ясно, что

$$kM(n, k, l) = \sum_{i=1}^n N(i) \geq nM(n-1, k-1, l-1),$$

откуда следует утверждение теоремы.

**С л е д с т в и е.**

$$M(n_1, k_1, l) \geq \left\langle \frac{n}{k} \left\langle \frac{n-1}{k-1} \left\langle \dots \left\langle \frac{n-(l-1)}{k-(l-1)} \right\rangle \dots \right\rangle \right\rangle.$$



**Доказательство.** Заметим, что  $M(n, k, 1) = \langle n/k \rangle$  для любого  $k \geq 1$ . Отсюда, используя утверждение теоремы, индукцией по  $l$  получаем требуемое неравенство.

Нижняя граница, даваемая теоремой 14.5, достижима: например, при  $k = 3, l = 2$  имеем  $M(n-1, k-1, l-1) = \langle (n-1)/2 \rangle = [n/2]$ , т. е.  $M(n, 3, 2) \geq (n/3)[n/2]$ ; теорема 14.4 показывает, что если правая часть — целое число, то фактически имеет место равенство.

Установим теперь верхнюю границу для  $M(n, k, l)$ .

**Теорема 14.6.**  $M(n, k, l) \leq M(n-1, k, l) + M(n-1, k-1, l-1)$ .

**Доказательство.** На  $n-1$ -множестве  $S$  возьмем минимальную  $(n-1, k, l)$ -покрывающую  $\mathcal{B}_1$  и минимальную  $(n-1, k-1, l-1)$ -покрывающую систему  $\mathcal{B}_2$ . Добавим к  $S$  еще один элемент  $\infty$ . Образует систему  $k$ -подмножеств  $\mathcal{B}_3$ , присоединив  $\infty$  к каждому из подмножеств в  $\mathcal{B}_2$ . Тогда  $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_3$  покрывает любое  $l$ -подмножество  $T$  из  $S \cup \{\infty\}$ , так как  $T$  содержится в одном из членов  $\mathcal{B}_3$ , если  $\infty \in T$ , и в одном из членов  $\mathcal{B}_1$  в противном случае. Число подмножеств  $M(n-1, k, l) + M(n-1, k-1, l-1)$  в конфигурации  $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_3$  не может быть поэтому меньше, чем  $M(n, k, l)$ . Теорема доказана.

Доказательство теоремы 14.4 дает иллюстрацию методов, применяемых обычно для построения минимальных покрывающих систем. Подобными методами были получены значения  $M(n, k, l)$  еще в ряде случаев. Приведем некоторые из них.

а)  $M(n, 4, 2) = \left\langle \frac{n}{4} \left\langle \frac{n-1}{3} \right\rangle \right\rangle$  для любого  $n$ , исключая  $n = 7, 9, 10, 19$ . В этих случаях  $M(7, 4, 2) = 5, M(9, 4, 2) = 8, M(10, 4, 2) = 9, M(19, 4, 2) = 31$ .

б)  $M(n, 4, 3) = \frac{n(n-1)(n-2)}{24}$ , если  $n \equiv 2, 4 \pmod{6}$ ,  
и  $\left\langle \frac{n}{4} \left\langle \frac{n-1}{3} \left\langle \frac{n-2}{2} \right\rangle \right\rangle \right\rangle$ , если  $n \equiv 3, 5 \pmod{6}$ ; кроме того,  $M(n, 4, 3) = n(n^2 - 3n + 6)/24$  при  $n = 2^m \cdot 6, m = 0, 1, \dots$

Известны также оценки и некоторые точные значения  $M(n, k, 2)$  при достаточно малом значении  $n/k$ .

**О числах Турана.** Скажем, что система  $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_l\}$   $l$ -подмножеств  $n$ -множества  $S$  обладает свойством Турана  $T_{n, k, l}$ , если любое  $B \in \mathcal{P}_n^{(k)}$  содержит не-

который член  $\mathcal{A}$  и  $t = T(n, k, l)$ . Числа Турана  $T(n, k, l)$  известны при  $l = 2$ :

$$T(n, k, 2) = mn - \frac{m(m+1)}{2}(k-1),$$

где  $m = [n/(k-1)]$ . Они найдены при  $1 < n/(k-1) \leq l/(l-1)$  (в этом случае  $T(n, k, l) = n - k + 1$ ), а также при  $l/(l-1) \leq n/(k-1) \leq \langle 3l/2 \rangle / \langle 3l/2 - 2 \rangle$ .

В последнее время был основательно исследован случай  $l = 3$ . Было доказано (см. [17]), что

$$T(n, k, 3) \leq \binom{m}{2} n - \binom{m+1}{3} (k-1), \quad \frac{m}{2} \leq \frac{n}{k-1} \leq \frac{m+1}{2}. \quad (14.11)$$

Установлено, что в (14.11) имеет место равенство при  $1 \leq n/(k-1) \leq 2$ , а  $T(n, k, 3) = 4n - 6(k-1)$  при  $2 \leq n/(k-1) \leq 9/4$ ,  $n \neq (9k-10)/4$  ( $T(n, k, 3) = 4n - 6(k-1) + 2$  при  $n = (9k-10)/4$ ).

Найдено еще несколько частных значений:  $T(11, 6, 3) = 16$ ,  $T(10, 7, 4) = 10$ ,  $T(9, 6, 4) = 12$ ,  $T(12, 6, 3) = 22$ ,  $T(11, 8, 4) = 8$ ,  $T(10, 6, 4) = 20$ .

Приведем примеры систем со свойством Турана. Пусть  $n = 8$ ,  $k = 6$ ,  $l = 4$ . Рассмотрим конфигурацию  $\mathcal{A}_0$

$$\begin{aligned} &\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 5, 7\}, \{3, 4, 5, 7\}, \\ &\{1, 2, 6, 8\}, \{3, 5, 6, 8\}, \{4, 6, 7, 9\}. \end{aligned} \quad (14.12)$$

Добавим к  $\mathcal{A}_0$  четверки

$$\begin{aligned} &\{1, 3, 6, 9\}, \{2, 4, 6, 9\}, \{3, 4, 8, 9\}, \\ &\{1, 5, 8, 9\}, \{2, 7, 8, 9\}, \{5, 6, 7, 9\}, \end{aligned} \quad (14.13)$$

а к полученной конфигурации  $\mathcal{A}_1$  — четверки

$$\begin{aligned} &\{1, 3, 5, 10\}, \{2, 3, 8, 10\}, \{3, 7, 9, 10\}, \\ &\{1, 4, 8, 10\}, \{2, 4, 7, 10\}, \{4, 5, 9, 10\}. \end{aligned} \quad (14.14)$$

$$\{1, 6, 7, 10\}, \{2, 5, 6, 10\},$$

Конфигурацию, составленную из четверок (14.12) — (14.14), обозначим теперь  $\mathcal{A}_2$ . Легко показать, что  $\mathcal{A}_1$  обладает свойством  $T_{9,6,4}$ , а  $\mathcal{A}_2$  — свойством  $T_{10,6,4}$ .

При изучении и построении систем со свойством Турана часто используются блок-схемы. Покажем, например, что  $T(13, 5, 3) \leq 52$ . Возьмем конечную проективную плоскость  $\mathcal{P}$  порядка  $n = 3$ , которая представляет

собой симметричную блок-схему с параметрами  $v = n^2 + n + 1 = 13$ ,  $k = n + 1 = 4$ ,  $\lambda = 1$ . Рассмотрим тройки коллинеарных (т. е. лежащих на одной прямой) точек из  $\mathcal{P}$ .

Легко показать, что любая пятерка точек содержит три коллинеарные точки. Допустим, это не так. Тогда возьмем в плоскости  $\mathcal{P}$  такой выпуклый пятиугольник  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  и соединим прямыми каждую пару его вершин (рис. 8).

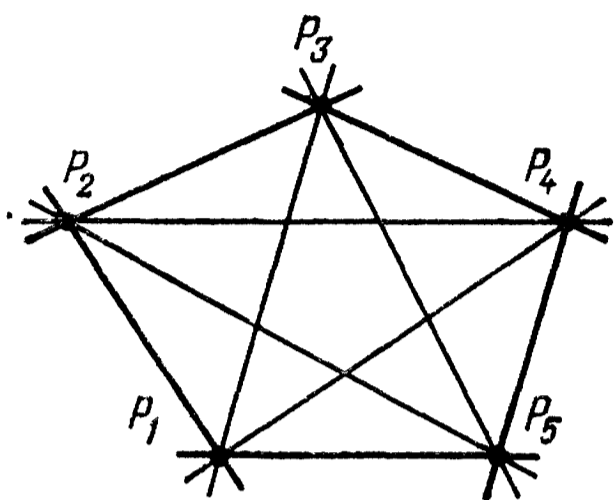


Рис. 8

В каждой точке  $\mathcal{P}$  должны сходиться в точности 4 прямые. Но, с другой стороны, любые две точки конечной проективной плоскости можно соединить прямой. Таким образом, на рис. 8 показаны все прямые  $\mathcal{P}$ . Однако их там всего 10, хотя в  $\mathcal{P}$  должно быть 13 прямых. Полученное противоречие показывает, что среди любых 5 точек конечной проективной плоскости порядка 3 найдутся три коллинеарные точки.

От каждой прямой получается  $\binom{4}{3} = 4$  тройки точек. Поэтому существуют такие  $13 \cdot 4 = 52$  тройки чисел, что в каждой пятерке, составленной из чисел  $1, 2, \dots, 13$ , найдется хотя бы одна тройка. Такую систему  $\mathcal{A}$  троек можно получить, взяв, например, четверку  $\{1, 3, 9, 13\}$ , затем все ее 3-подмножества  $B_0^{(1)}, B_0^{(2)}, B_0^{(3)}, B_0^{(4)}$  и образуя затем блоки  $B_0^{(i)} + j \pmod{13}$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, 4, j = 0, 1, \dots, 12$ ).

Игра «Спортлото» как задача о покрытии. Подробное исследование систем для игры в «Спортлото» и тем более вопросы оптимальной стратегии в этой игре выходят за рамки нашей книги. Следует лишь подчеркнуть, что заведомо беспроигрышной системы игры в лотерею не может существовать. Самое большее, в чем может помочь система, — это несколько увеличить вероятность выигрыша и несколько уменьшить расходы.

Игра «Спортлото» получила в последнее время широкое распространение. Она существует в двух вариантах. В первом из них предлагается угадать 6 из первых 49 натуральных чисел, во втором — 5 из 36. Играющий заполняет карточки, на каждой из которых отмечает по две шестерки (пятерки) чисел. Карточка выигрывает,

158

если в какой-либо из отмеченных шестерок (пятерок) окажется не меньше трех чисел из выпавшей в данном тираже шестерки (пятерки). Чем больше угадано чисел, тем выигрыш крупнее. Ясно, что перед нами типичная задача о покрытии.

Действительно, пусть, например, мы желаем во что бы то ни стало обеспечить себе отгадывание четверки чисел в очередном тираже игры «6 из 49» при минимальных затратах. Тогда нужно, очевидно, взять минимальную  $(49, 6, 4)$ -покрывающую систему  $\mathcal{B}$  на  $Z_{49}$  и заполнить  $\langle M(49, 6, 4)/2 \rangle$  карточек шестерками из  $\mathcal{B}$ . Какая бы шестерка ни выпала теперь в тираже, в ней окажется какая-либо четверка чисел из  $\mathcal{B}$ .

Однако минимальные  $(n, k, l)$ -покрывающие системы при  $k = 5, 6, l > 2, n = 36, 49$  не известны. Но даже если бы они были известны, то число элементов в них (как показывает, например, теорема 14.5 и ее следствие) настолько велико, что игра с их помощью была бы заведомо невыгодной. Тем не менее очевидно, что бессмысленно заполнять наобум сколько-нибудь значительное число карточек. Поэтому возникает задача построения разумной системы заполнения, и такие системы действительно были предложены.

В своем большинстве они основаны на том соображении, что если ограничиться сравнительно небольшим множеством чисел, то задача полного покрытия шестерками или пятерками троек или четверок не представляется уже столь безнадежной, не говоря о частичном покрытии.

Системы заполнения карточек, публикуемые в печати, обычно представляют собой конфигурации  $\mathcal{B}$  из  $6$ -( $5$ -) подмножеств на  $Z_n$ , где  $n$  берется в районе  $10$ , а каждое из чисел  $Z_n$  встречается в  $\mathcal{B}$  одинаковое число раз (иногда — «почти» одинаковое число). Ясно, что матрицы инцидентности таких конфигураций принадлежат классу Райзера  $\mathcal{A}(6, r, n)$ , ( $\mathcal{A}(5, r, n)$ ), где число  $m$  строк (т. е. удвоенное число карточек) равно  $rn/6$  ( $rn/5$ ). Такие системы обеспечивают одинаковую встречаемость в  $\mathcal{B}$  каждого из  $n$  чисел.

В гл. 3, 4 мы изучали классы Райзера  $\mathcal{A}(m, n, N)$  и  $\mathcal{A}(n, N)$ ; в частности, для  $\mathcal{A}(n, N)$  был дан индуктивный способ построения матриц из этого класса. Пользуясь этими результатами, можно построить различные системы заполнения со свойством одинаковой встречаемости чисел.

Особенный интерес представляют такие системы, которые обладают тем или иным свойством минимального покрытия. Например, была рекомендована такая система для игры «6 из 49» (Сов. спорт, 1984, 6 сент.):

$$\begin{aligned} &\{1, 2, 3, 7, 10, 11\}, \quad \{1, 3, 5, 8, 9, 11\}, \quad \{2, 4, 5, 9, 10, 11\}, \\ &\{1, 2, 4, 7, 8, 9\}, \quad \{1, 4, 5, 6, 7, 11\}, \quad \{3, 4, 5, 7, 8, 10\}, \\ &\{1, 2, 5, 6, 8, 10\}, \quad \{2, 3, 4, 6, 8, 11\}, \quad \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}. \\ &\{1, 3, 4, 6, 9, 10\}, \quad \{2, 3, 5, 6, 7, 9\}, \end{aligned}$$

Матрица инцидентности для этой конфигурации, в чем легко убедиться, принадлежит классу Райзера  $\mathcal{A}(6, 11)$ , т. е. каждое число встречается в подмножествах в точности 6 раз. Эта конфигурация обладает важным свойством: она представляет собой минимальную  $(11, 6, 3)$ -покрывающую систему на  $Z_{11}$ . Действительно, непосредственно проверяется, что все тройки покрыты ее подмножествами: с другой стороны, по следствию теоремы

$$14.5 \quad M(11, 6, 3) \geq \left\langle \frac{11}{6} \left\langle \frac{10}{5} \left\langle \frac{9}{4} \right\rangle \right\rangle \right\rangle = 11. \text{ Таким образом, эта система гарантирует отгадывание хотя бы трех чисел, если выпадет шестерка, в которой не менее трех чисел окажутся в пределах от 1 до 11. В той же газете указана минимальная } (8, 6, 5)\text{-покрывающая система на } Z_8,$$

которая гарантирует отгадывание пяти чисел в том редком случае, когда выпадает шестерка, в которой не менее пяти чисел окажутся в пределах от 1 до 8.

В связи с системами для «Спортлото» следует заметить, что блок-схемы обеспечивают не только одинаковую встречаемость элементов в блоках, но также одинаковую встречаемость пар различных элементов (а тактические конфигурации — даже  $t$ -подмножеств при  $t > 2$ ). Хорошие статистические свойства блок-схем делают их перспективными для построения систем заполнения карточек. Можно представить себе систему для игры «5 из 36», основанную на заполнении карточек блоками конечной проективной плоскости порядка 4, скажем множествами вида  $B_0 + i$  ( $i = 0, 1, \dots, 20$ ), где  $B_0 = \{3, 6, 7, 12, 14\}$  (сложение производится по модулю 21). Или систему для игры «6 из 49» с заполнением карточек блоками конечной проективной плоскости порядка 5, скажем множествами вида  $B_0 + i$  ( $i = 0, 1, \dots, 30$ ), где  $B_0 = \{1, 5, 11, 24, 25, 27\}$  (сложение — по модулю 31). Правда, число карточек при этом довольно велико — соответственно 11 и 16.

## § 15. О спектре графа

Среди разнообразных применений (0,1)-матриц к теории графов первое место занимают спектры графов, связанные с их матрицами смежности. Мы дадим лишь понятие о спектре графа.

**Характеристический многочлен.** Пусть  $A = [a_{ij}]$  — матрица порядка  $n$ . *Характеристическим многочленом*  $P_A(\lambda)$  матрицы  $A$  называется определитель  $\Delta(\lambda I - A)$  матрицы  $\lambda I - A$ , где  $I = I_n$  — единичная матрица порядка  $n$ ,  $\lambda$  — неизвестная. Обратим внимание на то, что до сих пор мы рассматривали лишь матрицы с числовыми элементами, в то время как элементы  $\lambda I - A$  — многочлены от неизвестной, которую мы обозначили через  $\lambda$  (как это принято в линейной алгебре). Например, пусть  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ . Это матрица порядка 2; ее характеристический многочлен есть

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \Delta \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{bmatrix} = \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}). \end{aligned}$$

Из формулы для определителя (см. § 3), очевидно, следует, что  $P_A(\lambda)$  есть многочлен степени  $n$  от  $\lambda$  со старшим коэффициентом 1. Его коэффициент при  $\lambda^{n-1}$  равен сумме элементов по главной диагонали  $A$ , взятой

с обратным знаком, т. е. числу  $-\sum_{i=1}^n a_{ii}$ . Нетрудно заме-

тить, что свободный член  $P_A(\lambda)$  есть  $(-1)^n \Delta(A)$ . Действительно,  $P_A(0) = \Delta(-A)$ , и если каждую строку  $A$  умножить на  $-1$ , то получим  $\Delta(-A) = (-1)^n \Delta(A)$ . Корни характеристического многочлена  $P_A(\lambda)$  матрицы  $A$  называются ее *собственными значениями*.

**Спектр графа.** Пусть  $G$  — граф, обыкновенный или ориентированный,  $A$  — его матрица смежности (см. § 6).

Характеристический многочлен  $P_A(\lambda)$  матрицы смежности называется *характеристическим многочленом графа*. Он обозначается через  $P_G(\lambda)$ . Если граф задан на множестве из  $n$  вершин, то  $P_G(\lambda)$  — многочлен степени  $n$ :

$$P_G(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n.$$

Совокупность  $n$  собственных значений матрицы смежности, т. е. корней  $P_G(\lambda)$ , называется *спектром графа  $G$* .

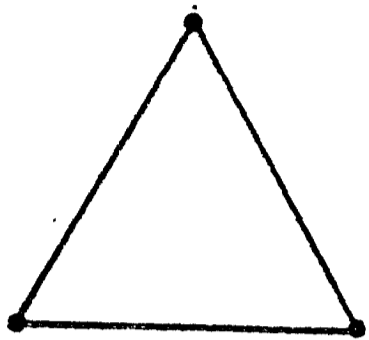


Рис. 9

Для неориентированного графа матрица смежности — симметрическая матрица. Из линейной алгебры известно, что собственные значения симметрической матрицы — действительные числа, так что спектр неориентированного графа

можно представить в виде некоторой последовательности  $n$  действительных чисел  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ .

Приведем спектр графа в одном простом случае. Пусть граф  $G$  — треугольник (рис. 9). Его матрица

смежности  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ . Тогда

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{bmatrix},$$

$$P_G(\lambda) = \Delta(\lambda I - A) = \lambda^3 - 3\lambda - 2.$$

Корни  $P_G(\lambda)$  есть  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ , и спектр графа составляет последовательность чисел  $2 \geq -1 \geq -1$ .

Как мы отмечали в § 6, матрица смежности  $A$  определена для графа  $G$  не однозначно, но с точностью до подстановки на множестве его вершин (т. е. до их нумерации). Как переход к другой матрице смежности отражается на характеристическом многочлене и спектре графа? При подстановке  $Q$  на вершинах графа  $G$  мы переходим от  $A$  к другой матрице смежности  $Q^{-1}AQ$ , где  $Q$  — соответствующая матрица подстановки. Тогда  $P_{Q^{-1}AQ}(\lambda) = \Delta(\lambda I - Q^{-1}AQ)$ . Но по теоремам об определителях из § 3

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda I - Q^{-1}AQ) &= \Delta(Q^{-1}\lambda IQ - Q^{-1}AQ) = \\ &= \Delta[Q^{-1}(\lambda I - A)Q] = \Delta(Q^{-1})\Delta(\lambda I - A)\Delta(Q) = \\ &= \Delta(\lambda I - A) = P_A(\lambda), \end{aligned}$$

т. е.  $P_{Q^{-1}AQ}(\lambda) = P_A(\lambda)$ . Тем самым доказана



**Теорема 15.1.** *Характеристический многочлен графа  $G$  не зависит от выбора его матрицы смежности  $A$ .*

В § 6 мы видели, что матрицы смежности двух изоморфных графов совпадают с точностью до одинаковой перестановки  $Q$  их строк и столбцов. Теорема 15.1, таким образом, показывает, что характеристические многочлены у изоморфных графов одинаковы. Иными словами, характеристический многочлен и, конечно, спектр графа представляют собой инварианты относительно изоморфизма графов. Именно по этой причине спектры графов представляют интерес. Они получили широкое распространение в тех областях науки, где применяются графы. Особенно большое значение приобрели спектры графов в химии; там они успешно применяются для изучения структуры и молекулярных свойств некоторых веществ, в частности ненасыщенных углеводородов, где спектры некоторых графов характеризуют энергетические уровни электронов в молекуле.

**Теорема о коэффициентах.** Особенности структуры графа отражаются в свойствах его характеристического многочлена и спектра. Содержательную комбинаторную интерпретацию имеет каждый коэффициент характеристического многочлена. Это показывает утверждение, к доказательству которого мы переходим.

*Подграфом* графа (орграфа)  $G = G(V, E)$  с множеством вершин  $V$  и множеством ребер (дуг)  $E$  называется граф  $G'(V', E')$ , если  $V' \subset V$ ,  $E' \subset E$ . *Линейным ориентированным графом* называется орграф, в котором степени исхода и захода вершины равны единице, т. е. он состоит из контуров (см. § 6). Число контуров в линейном ориентированном графе называется *числом его компонент*.

**Теорема 15.2.** *Пусть  $G$  — ориентированный граф с  $n$  вершинами и матрицей смежности  $A$ , и пусть  $P_G(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$  — характеристический многочлен орграфа  $G$ . Тогда*

$$a_i = \sum_{L \in \mathcal{L}_i} (-1)^{p(L)}, \quad i = 2, 3, \dots, n,$$

где  $\mathcal{L}_i$  — множество всех линейных ориентированных подграфов графа  $G$  с точно  $i$  вершинами,  $p(L)$  — число компонент  $L$ .

**Доказательство.** Его проведем лишь для  $i = n$ . Рассмотрим свободный член  $a_n$  многочлена  $P_G(\lambda)$ . Мы



видели, что  $a_n = (-1)^n \Delta(A)$ . По формуле для определителя

$$a_n = \sum_{\sigma \in \Sigma} (-1)^{\text{sgn}(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}, \quad (15.1)$$

где суммирование проводится по всем подстановкам  $\sigma$  степени  $n$  и  $\text{sgn}(\sigma) = 1$  для четной подстановки,  $\text{sgn}(\sigma) = -1$  для нечетной подстановки. Ясно, что  $S_\sigma = (-1)^{\text{sgn}(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} \neq 0$  в том и только том случае, когда в графе  $G$  имеются все дуги  $(1, \sigma(1))$ ,  $(2, \sigma(2))$ , ...,  $(n, \sigma(n))$ .

Рассмотрим разложение подстановки  $\sigma$  на произведение попарно непересекающихся циклов:  $\sigma = \zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_k$ . Если  $\zeta = (i_1 i_2 \dots i_r)$  — некоторый цикл из этого разложения, то  $i_{t+1} = \sigma(i_t)$  ( $t = 1, 2, \dots, r-1$ ),  $i_1 = \sigma(i_r)$ . Поэтому очевидно, что при  $S_\sigma \neq 0$  циклам  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$  соответствует некоторая совокупность непересекающихся контуров, охватывающая все  $n$  вершин  $G$ .

Обратно, для любого линейного неориентированного подграфа  $L$  на  $n$  вершинах с числом компонент  $p(L) = k$  найдется такая подстановка  $\sigma$  степени  $n$ , что  $S_\sigma \neq 0$ . Эта подстановка разлагается в произведение  $k$  независимых циклов, каждый из которых соответствует какому-либо контуру подграфа  $L$ . Четность  $\sigma$  определяется ее декрементом  $\rho(\sigma) = n - k$ , т. е.  $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{\rho(\sigma)} = (-1)^{n-k} = (-1)^{n+k}$ . Таким образом,  $(-1)^{\text{sgn}(\sigma)} = (-1)^n (-1)^{n+k} = (-1)^k = (-1)^{p(L)}$ . Тем самым мы показали, что ненулевые члены суммы (15.1) взаимно однозначно соответствуют линейным ориентированным подграфам на  $n$  вершинах графа  $G$  и

$$a_n = \sum_{\sigma} S_\sigma = \sum_{L \in \mathcal{L}_n^*} (-1)^{p(L)}.$$

Утверждение теоремы для  $a_n$  доказано. Аналогично, но несколько сложнее получаются утверждения о величине других коэффициентов  $P_G(\lambda)$ .

Доказанная теорема показывает, в частности, что при  $a_n = 0$  в орграфе  $G$  либо нет линейных ориентированных подграфов с  $n$  вершинами, либо имеется одинаковое число таких подграфов соответственно с четным и нечетным числом компонент.

Утверждение, аналогичное теореме 15.2, справедливо также для неориентированных графов.

**Некоторые свойства спектров.** Теория спектров графов чрезвычайно богата результатами (см. [23]). Более

подробное ее изложение потребовало бы ряда дополнительных определений, а также некоторых сведений из линейной алгебры. Мы приведем здесь без доказательства лишь немногие результаты, касающиеся спектров неориентированных графов.

Предполагаем, что  $G$  — неориентированный граф с  $n$  вершинами,  $m$  ребрами и  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  — его спектр.

1)  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 0$ .

2) Число ребер связано со спектром формулой  $m =$   
 $= \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^2}{2}$ .

3) Если  $G$  содержит по крайней мере одно ребро, то

$$1 \leq \lambda_1 \leq n - 1, \quad (15.2)$$

$$-\lambda_1 \leq \lambda_n \leq -1. \quad (15.3)$$

Граф называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить маршрутом. Для связного графа нижняя граница в (15.2) заменяется на  $2 \cos(\pi/(n+1))$ .

4) Спектр простого цикла  $C_n$  на  $n$  вершинах состоит из чисел  $2 \cos(2\pi i/n)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ); его характеристический многочлен есть

$$P_{C_n}(\lambda) = 2 \cos(n \arccos(\lambda/2)) - 2,$$

где

$$\cos(n \arccos x) = T_n(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} 2^{n-2k-1} x^{n-2k}$$

есть многочлен Чебышева первого рода.

5) Полный граф  $K_n$  — это граф на  $n$  вершинах, каждая пара различных вершин которого соединена ребром. Например, треугольник — это полный граф на трех вершинах. Справедливо

$$P_{K_n}(\lambda) = (\lambda - n + 1)(\lambda + 1)^{n-1},$$

т. е.  $\lambda_1 = n - 1, \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_n = -1$ .

6) Если  $\lambda_1 > \sqrt{m}$ , то  $G$  содержит по крайней мере один треугольник.

7) *Диаметром* связного графа называется наибольшее расстояние между двумя его вершинами, где расстояние понимается как длина кратчайшего маршрута, соединяющего вершины. Если связный граф  $G$  имеет в точности  $q$  различных собственных значений, его диаметр  $D$  удовлетворяет неравенству  $D \leq q - 1$ .

## § 16. Оценки некоторых структурных констант графов

В этом параграфе мы рассмотрим другие полезные применения  $(0, 1)$ -матриц к теории графов, основанные на результатах гл. 5 о глубине  $(0, 1)$ -матриц.

**Числа покрытия.** При изучении графов, особенно в прикладных целях, оказываются интересными разнообразные характеристики взаимного расположения его ребер и вершин. Взаимосвязь расположения вершин и ребер находит свое выражение в целом ряде числовых параметров, которые обычно называют *структурными константами* графов. Эти величины реализуют тот или иной экстремум; отсюда понятна их родственность таким характеристикам, как глубина и ширина  $(0, 1)$ -матриц.

*Вершинным покрытием* графа  $G$  называется такое множество его вершин, что любое ребро графа инцидентно некоторой вершине из этого множества. *Числом вершинного покрытия*, обозначаемым  $\alpha_0(G)$ , называется наименьшее число вершин в вершинном покрытии графа  $G$ . *Реберным покрытием* графа  $G$  называется такое множество его ребер, что любая вершина графа инцидентна некоторому ребру из этого множества. *Числом реберного покрытия*, обозначаемым  $\alpha_1(G)$ , называется наименьшее число ребер в реберном покрытии графа  $G$ .

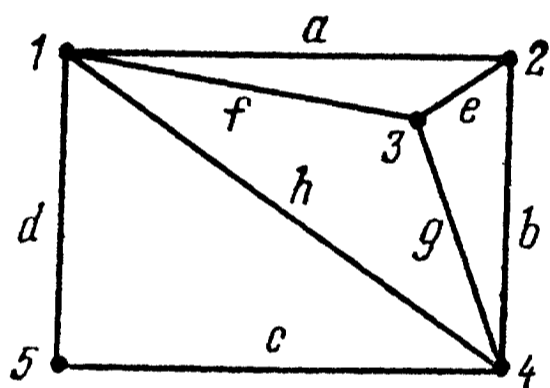


Рис. 10

Рассмотрим пример. Для графа  $G$  с 5 вершинами и 8 ребрами, изображенного на рис. 10, вершины 1, 3, 4 образуют, как легко заметить, вершинное покрытие с наименьшим числом элементов, т. е.  $\alpha_0(G) = 3$ . Также очевидно, что множество ребер  $\{c, d, e\}$  дает реберное покрытие графа с наименьшим числом ребер, т. е.  $\alpha_1(G)$  также равно 3.

Пусть  $G$  — граф с  $N$  вершинами и  $M$  ребрами. Рассмотрим матрицу инцидентности  $B$  графа  $G$ . Непосредственно из определения чисел реберного и вершинного покрытий получается, что глубина  $\varepsilon(B)$  матрицы  $B$  равна  $\alpha_1(G)$ , а ее ширина  $\varepsilon(B^T)$  равна  $\alpha_0(G)$ . Таким образом, к изучению структурных констант  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$  применимы оценки сверху максимальной глубины, которые мы получили в гл. 5.

**Оценки для числа реберного покрытия.** Рассмотрим сначала реберное покрытие. Каждая строка матрицы инцидентности графа содержит в точности две единицы. Пусть каждая вершина графа  $G$  имеет степень не меньше  $n$ , т. е. в ней сходится не менее  $n$  ребер, и  $n \geq 2$ . Тогда из теоремы 12.5 следует

**Теорема 16.1.** Пусть  $G$  — граф с  $M$  ребрами и  $N$  вершинами. Предположим, что степень каждой вершины  $G$  не меньше  $n$ . Тогда

$$\alpha_1(G) \leq \frac{M + N(n-1)}{2n-1}. \quad (16.1)$$

В случае регулярного графа степени  $n$  оценку (16.1) можно усилить, воспользовавшись теоремами 13.3, 13.7.

**Теорема 16.2.** Пусть  $G$  — регулярный граф степени  $n$  с  $M$  ребрами и  $N$  вершинами. Тогда, если  $n$  четно, то

$$\alpha_1(G) \leq \left\lceil \frac{2}{3} N \right\rceil; \quad (16.2)$$

если  $n$  нечетно, то

$$\alpha_1(G) \leq \left\lceil \frac{2n-1}{3n-1} N \right\rceil. \quad (16.3)$$

Отметим, что любое множество треугольников на плоскости без общих вершин дает пример графа, в котором верхняя граница (16.2) достигается.

**Оценки для числа вершинного покрытия.** Перейдем теперь к вершинным покрытиям. Если граф  $G$  имеет  $M$  ребер,  $N$  вершин и степень каждой вершины не больше  $n$ , то матрица  $B^T$ , где  $B$  — матрица инцидентности для  $G$ , есть матрица из совокупности  $\mathfrak{A}(\leq n, 2; N, M)$ . Подставляя теперь в правую часть неравенства (12.6)  $N$  вместо  $M$ ,  $M$  вместо  $N$ ,  $n$  вместо  $m$  и 2 вместо  $n$ , после несложных вычислений приходим к следующему результату.

**Теорема 16.3.** Пусть  $G$  — граф с  $M$  ребрами и  $N$  вершинами. Предположим, что степень каждой вершины не превосходит  $n$ . Тогда

$$\alpha_0(G) \leq \frac{2M}{n(n+1)} + \frac{n-1}{n+1} N. \quad (16.4)$$

Если  $G$  — регулярный граф степени  $n$ , то  $2M = nN$ , и (16.4) упрощается:

$$\alpha_0(G) \leq \left\lceil \frac{2M}{n+1} \right\rceil. \quad (16.5)$$

Покажем, что верхняя граница (16.5) достижима. К этому результату мы придем, установив предварительно точное значение максимальной глубины класса Райзера  $\mathfrak{A}(m, 2, N)$ .

**Теорема 16.4.**  $\bar{\varepsilon}(m, 2, N) = [2N/(m+1)]$  для любого непустого класса  $\mathfrak{A}(m, 2, N)$ .

**Доказательство.** Из теоремы 12.5 следует, что  $\bar{\varepsilon}(m, 2, N) \leq [2N/(m+1)]$ . Остается доказать, что для любого  $N$ , при котором класс  $\mathfrak{A}(m, 2, N)$  не пуст, в нем найдется матрица  $A$  с  $\varepsilon(A) = [2N/(m+1)]$ . Как мы видели в § 11, для непустоты класса с  $\mathfrak{A}(m, n, N)$  необходимо и достаточно, чтобы  $m|nN$ . Тогда число строк в матрице этого класса равно  $nN/m$ . Отсюда следует, что если класс  $\mathfrak{A}(m, 2, N)$  не пуст, то  $m|N$  при нечетном  $m$  и  $m/2|N$  при  $m$  четном.

1. Заметим сначала, что  $\varepsilon(A) = M - 1$  для матрицы  $A \in \mathfrak{A}(m, 2, N)$  размера  $M \times N$ , в которой скалярное произведение любой пары строк отлично от нуля. Действительно, в любой подматрице такой матрицы размера  $(M-1) \times N$  все столбцовые суммы положительны. С другой стороны, если выбросить любые две строки, то в оставшейся матрице размера  $(M-2) \times N$  будет, очевидно, нулевой столбец, так как скалярное произведение любой пары строк положительно, а в каждом столбце матрицы имеется всего 2 единицы.

2. Предположим теперь, что для любого класса  $\mathfrak{A}(m, 2, N)$  при  $N \leq m(m+1)/2$  (т. е. при  $M \leq m+1$ ) построены матрицы  $A_t$  с  $t$  строками, для которых  $\varepsilon(A_t) = t - 1$ , где  $t = 2N/m$  — любое целое число в отрезке от 2 до  $m+1$  при четном  $m$  и любое четное число из этого отрезка при  $m$  нечетном.

Покажем, что тогда справедливо утверждение теоремы. Действительно, пусть

$$N = \frac{m(m+1)}{2} q + r, \quad (16.6)$$

где  $0 \leq r < m(m+1)/2$ , и класс  $\mathfrak{A}(m, 2, N)$  не пуст. Тогда  $m/2|N$ , если  $m$  четно, и  $m|N$ , если  $m$  нечетно. Из (16.6) следует, что если  $r > 0$ , то  $r$  соответственно кратно  $m/2$  или  $m$ . Определим целое число  $t = 2r/m$ ,  $t \geq 1$ . При  $r \geq m$ , т. е. при  $t > 1$ , класс  $\mathfrak{A}(m, 2, r)$  не пуст и в нем, как мы предположили, есть матрица  $A_t$  размера  $t \times r$  с  $\varepsilon(A_t) = t - 1$ .

Построим теперь матрицу  $B \in \mathfrak{A}(m, 2, N)$  размера  $(2N/m) \times N$ : при  $t > 1$  по диагонали расположим сначала

ла  $q$  матриц  $A_{m+1}$  размера  $(m+1) \times (m(m+1)/2)$  и далее матрицу  $A_t$ ; если же  $t=1$ , то так же расположим  $q-1$  матриц  $A_{m+1}$ , а затем матрицы  $A_m$  и  $A_2$ , на остальные места поставим нули. Глубина матрицы  $B$  равна, как легко видеть,  $qm+t-1$ . С другой стороны,  $[2N/(m+1)] = [qm + 2r/(m+1)] = qm + [2r/(m+1)]$ . По ввиду того, что  $r < m(m+1)/2$ , имеем  $t-1 < [2r/(m+1)] < t$ , и потому  $[2r/(m+1)] = t-1$ , т. е.  $\varepsilon(B) = qm + t - 1 = [2N/(m+1)]$ .

3. Укажем теперь способ построения матрицы  $A_t$  непустого класса  $\mathfrak{A}(m, 2, N)$  при любом  $m$  с числом строк  $t$ , не превосходящим  $m+1$ , у которой скалярные произведения любых двух строк отличны от нуля. Ясно, что при этом  $t$  должно быть четным, если  $m$  нечетно.

Определим матрицу  $B_{tk}$  размера  $t \times k$  ( $k < t$ ), в которой первые  $k$  строк образуют единичную матрицу  $I_k$ ,  $k+1$ -я строка состоит из единиц, остальные строки нулевые. Например,

$$B_{43} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Составим затем матрицу  $A_t^* = (B_{t,t-1} \mid B_{t,t-2} \mid \dots \mid B_{t1})$  из матриц  $B_{t,t-1}, B_{t,t-2}, \dots, B_{t1}$ . Она принадлежит классу  $\mathfrak{A}(t-1, 2, t(t-1)/2)$ , так как в ней всего  $1+2+\dots+\dots+t-1 = t(t-1)/2$  столбцов, а все строчные суммы равны  $t-1$ . Например, при  $t=4$

$$A_4^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Легко видеть, что скалярные произведения любых двух строк этой матрицы отличны от нуля. Если теперь  $t = m+1$ , то в качестве  $A_t$  возьмем  $A_t^*$ . При  $t < m+1$  класс  $\mathfrak{A}(m-t+1, 2, t(m-t+1)/2)$  непуст и состоит из матриц с числом строк  $t$ . Если  $C_t$  — любая матрица этого класса, то, очевидно,  $(A_t^*, C_t) \in \mathfrak{A}(m, 2, mt/2)$ , и эту матрицу можно взять в качестве  $A_t$ . Теорема доказана.

Заметим, что эта теорема указывает классы  $(0,1)$ -матриц, для которых общая оценка сверху максимальной

глубины в теореме 12.5 достижима: это — все непустые классы Райзера  $\mathfrak{A}(m, 2, N)$ .

Из теоремы 16.4 следует достижимость верхней границы в (16.5). Действительно, пусть, например, число  $N$  четно и кратно  $n(n+1)/2$ . Возьмем, как в доказательстве теоремы, матрицу  $C$  класса  $\mathfrak{A}(n, 2, nN/2)$  с  $N$  строками, составленную из диагональных блоков  $A_{n+1} = A_{n+1}^*$ . В матрице  $A_{n+1}$ , как легко заметить, нет двух одинаковых столбцов, следовательно, их не будет и в  $C$ . Тогда  $C^T$  есть матрица класса  $\mathfrak{A}(2, n, N)$  с  $M = nN/2$  строками, которые все попарно различны. Поэтому  $C^T$  можно представить как матрицу инцидентности регулярного графа  $G$  степени  $n$  на  $N$  вершинах с  $M$  ребрами. Число  $\alpha_0(G)$  есть ширина матрицы  $C^T$ , т. е. оно равно  $\varepsilon((C^T)^T) = \varepsilon(C)$ . Как мы установили в ходе доказательства теоремы 16.4,  $\varepsilon(C) = [2M/(n+1)]$ .

Итак, справедлива

**Теорема 16.5.** *Для однородного графа  $G$  степени  $n$  с  $M$  ребрами и  $N$  вершинами*

$$\alpha_0(G) \leq \left[ \frac{2M}{n+1} \right]. \quad (16.7)$$

*Эта верхняя граница достижима.*

Из этой теоремы следует, например, что для однородного степени 3 (кубического) графа  $G$  с  $M$  ребрами  $\alpha_0(G) \leq [M/2]$ . Отметим, что для произвольного графа с  $M$  ребрами можно лишь утверждать, что  $\alpha_0(G) \leq M$ .

**Число доминирования.** Пусть  $G$  — граф (орграф) без изолированных вершин. *Доминирующим множеством* называется такое подмножество  $D$  множества вершин  $V$  графа  $G$ , что для любой вершины  $v \in V - D$  найдется ребро (дуга)  $(u, v)$  с началом в вершине  $u$  из  $D$ . Наименьшее число  $\delta(G)$  вершин, составляющих доминирующее множество, называется *числом доминирования* графа  $G$ . Иногда доминирующее множество называется *внешне устойчивым множеством*, а число доминирования — *числом внешней устойчивости*.

Приведем примеры. Для орграфа  $G$ , изображенного на рис. 11, а, доминирующим будет, например, множество вершин  $\{1, 6\}$ , т. е. справедливо  $\delta(G) = 2$ . Для простого цикла  $C_8$ , изображенного на рис. 11, б, любое доминирующее множество должно содержать не менее 3 вершин таких, как, например,  $\{1, 4, 7\}$ , т. е.  $\delta(C_8) = 3$ .

Рассмотрим матрицу смежности  $A$  графа (орграфа)  $G$  на  $N$  вершинах. Если взять такую совокупность из

$\varepsilon(A)$  строк, что образованная ими подматрица имеет положительные столбцовые суммы, то соответствующее этим строкам множество вершин графа будет, очевидно, доминирующим множеством. Поэтому  $\delta(G) \leq \varepsilon(A)$ . Из этого замечания и теоремы 12.5 следует

**Теорема 16.6.** Пусть  $G$  — граф (орграф) без изолированных вершин и  $N$  — число его вершин. Если  $G$  — орграф, то обозначим через  $m$  максимум его полустепеней исхода, а через  $n$  — минимум полустепеней захода.

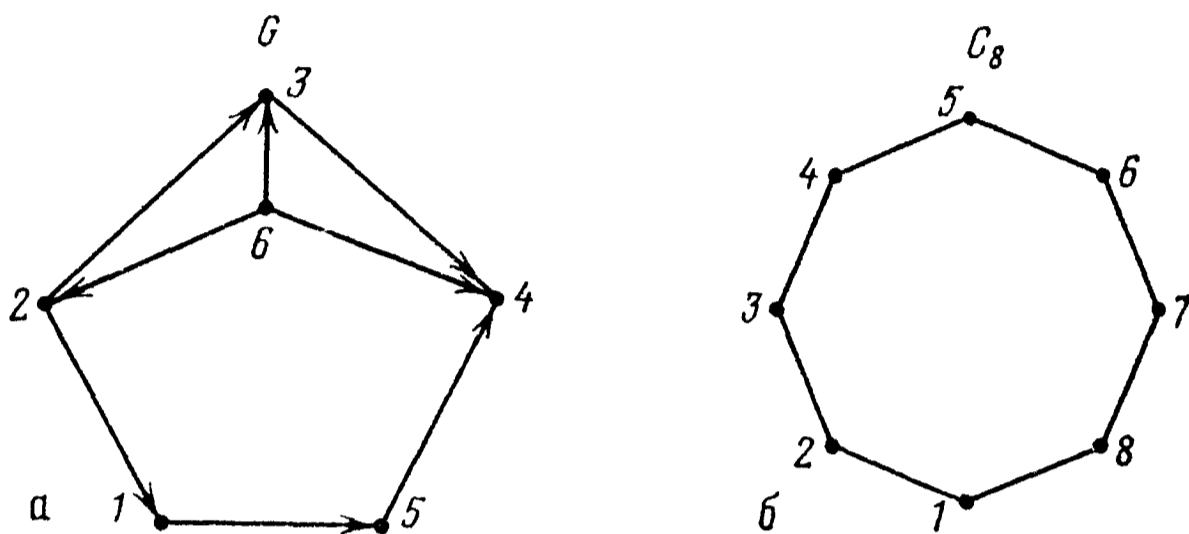


Рис. 11

Если  $G$  — граф, то пусть  $m$  и  $n$  будут соответственно максимальной и минимальной степенями вершины. Тогда справедливо неравенство

$$\delta(G) \leq \left( 1 - (m-1) \frac{(m-1)!(n-1)^{m-1}}{(2n-1)(3n-2)\dots(mn-m+1)} \right) N. \quad (16.8)$$

Для регулярных графов  $m = n$  и  $n$  равно степени регулярности. Если  $n = 3, 4$ , то можно, воспользовавшись более точными оценками, которые дает теорема 13.9, получить для регулярных графов  $G$  соответственно степени 3 и 4 неравенства  $\delta(G) \leq [N/2]$  и  $\delta(G) \leq [29N/65]$  (см. (13.13), (13.14)). Однако эти неравенства, как мы сейчас покажем, можно улучшить.

**Оценка сверху числа доминирования регулярного графа.** Ясно, что свойство доминирования для вершин похоже на свойство покрытия, если под покрытием одной вершиной  $x$  другой вершины  $y$  подразумевать наличие в графе дуги (ребра)  $(x, y)$ . Если бы, далее, в соответствии с этим определить покрывающее множество и соответствующее число покрытия, то последнее просто совпало бы с глубиной матрицы смежности. Однако условие доминирования представляет собой условие более слабое,



чем условие покрытия, потому что мы как бы полагаем, что всякая вершина доминирует сама над собой. Этим обстоятельством воспользуемся, чтобы уточнить связь числа доминирования с глубиной  $(0,1)$ -матриц.

В  $(0,1)$ -матрице  $A = [a_{ij}]$  размера  $M \times N$  определим доминирующее множество строк  $D = \{r_{i_1}, r_{i_2}, \dots, r_{i_d}\}$  как такое множество, для которого  $\sum_{s=1}^d a_{i_s j} \geq 1$  при  $j \neq i_1, i_2, \dots, i_d$  на отрезке  $[1, N]$ . Покрывающим множеством строк назовем множество  $E = \{r_{k_1}, r_{k_2}, \dots, r_{k_e}\}$  такое, что  $\sum_{s=1}^e a_{k_s j} \geq 1$  при всех  $j = 1, 2, \dots, N$ . Ясно,

что любое покрывающее множество строк будет доминирующим, но не наоборот.

**Теорема 16.7.** Пусть  $A$  — матрица смежности графа (орграфа)  $G$  на  $N$  вершинах  $v_1, v_2, \dots, v_N$ . Тогда  $\delta(G) = \varepsilon(A + I)$ , где  $I = I_N$ .

**Доказательство.** Пусть  $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_d}$  — любое доминирующее множество графа  $G$ . Тогда  $D = \{r_{i_1}, r_{i_2}, \dots, r_{i_d}\}$  — доминирующее множество строк в  $A$ . Так как у графа нет петель, главная диагональ  $A$  состоит из нулей. Возьмем матрицу  $A + I$ . В этой матрице  $D$ , очевидно, будет покрывающим множеством. Таким образом,  $\varepsilon(A + I) \leq \delta(G)$ . Пусть теперь  $k_1, k_2, \dots, k_e$  — номера строк, входящих в какое-либо покрывающее множество для матрицы  $A + I$ . Тогда в матрице  $A$  множество строк с этими номерами будет доминирующим, так как нулевые столбцовые суммы могут появиться лишь в столбцах с номерами  $k_1, k_2, \dots, k_e$ . Если взять вершины  $v_{k_1}, v_{k_2}, \dots, v_{k_e}$ , то они образуют, очевидно, доминирующее множество вершин графа  $G$ . Следовательно,  $\varepsilon(A + I) \geq \delta(G)$ . Итак,  $\delta(G) = \varepsilon(A + I)$ .

Назовем *регулярным* оргграф  $G$ , у которого полустепени исхода и полустепени захода всех вершин одинаковы и равны числу  $n$ , которое назовем *степенью регулярного орграфа*  $G$ .

**Теорема 16.8.** Пусть  $G$  — регулярный граф (орграф) степени  $n$  на  $N$  вершинах,  $A$  — его матрица смежности. Тогда для максимальной глубины класса Райзера  $\mathfrak{A}(n + 1, N)$  справедливо неравенство

$$\delta(G) \leq \bar{\varepsilon}(n + 1, N). \quad (16.9)$$

Для любых  $n, N$ , где  $n < N$ , существует регулярный орграф степени  $n$  на  $N$  вершинах, для которого  $\delta(G) = \bar{\varepsilon}(n+1, N)$ .

**Доказательство.** Так как в нашем случае  $A \in \mathfrak{A}(n, N)$  и  $A$  имеет нулевую главную диагональ, то  $A + I \in \mathfrak{A}(n+1, N)$ ; поэтому  $\varepsilon(A + I) \leq \bar{\varepsilon}(n+1, N)$ . Неравенство (16.9) теперь следует непосредственно из теоремы 16.7.

Пусть, с другой стороны, дана матрица  $C$  класса  $\mathfrak{A}(n+1, N)$ , для которой  $\varepsilon(C) = \bar{\varepsilon}(n+1, N)$ . По теореме 8.1  $C$  можно представить в виде суммы  $P_1 + P_2 + \dots + P_{n+1}$  матриц подстановки. Произведем такую перестановку, например, столбцов  $C$ , чтобы одна из этих матриц подстановки стала матрицей  $I_N$ . У получившейся из  $C$  этой перестановкой матрицы  $C'$ , очевидно,  $\varepsilon(C')$  также равна  $\bar{\varepsilon}(n+1, N)$ . Возьмем теперь  $A = C' - I_N$ . Ясно, что  $A \in \mathfrak{A}(n, N)$  и имеет нулевую главную диагональ. Поэтому существует орграф  $G$  на  $N$  вершинах с матрицей смежности  $A$ , который, очевидно, будет регулярным степени  $n$ . По теореме 16.7  $\delta(G) = \varepsilon(A + I) = \varepsilon(C') = \bar{\varepsilon}(n+1, N)$ . Теорема доказана.

С помощью данной теоремы можно улучшить оценки числа доминирования для регулярных графов, следующие из установленной связи между числом доминирования и глубиной  $(0,1)$ -матриц.

**Теорема 16.9.** Если  $G$  — регулярный граф (орграф) степени  $n$  на  $N$  вершинах, то

$$\delta(G) \leq \left( 1 - \frac{n! n^{n+1}}{(2n+1)(3n+1)\dots(n^2+n+1)} \right) N. \quad (16.10)$$

**Доказательство.** Действительно,  $\delta(G) \leq \bar{\varepsilon}(n+1, N)$ , и (16.10) получается, если в (16.8) заменить  $m$  и  $n$  на  $n+1$ .

Точно так же, применяя теорему 16.8 и оценку (13.14) для максимальной глубины класса Райзера  $\mathfrak{A}(4, N)$ , получаем следующий результат.

**Теорема 16.10.** Пусть  $G$  — кубический граф на  $N$  вершинах. Тогда

$$\delta(G) \leq [29N/65].$$

Например, для кубического графа  $G$  на 11 вершинах находим, что  $\delta(G) \leq 4$ .

Подробнее о доминировании в графах см. [25].

# ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведем ряд задач, решение которых, как нам кажется, может принести пользу тем, кто желает овладеть методами изучения комбинаторных вопросов, затронутых в книге.

## Задачи

### К главе 1

1. Как с помощью умножения матриц получить из

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 24 & 12 \end{bmatrix}$$

матрицы:

$$\text{а) } \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{б) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 12 & 4 \end{bmatrix}?$$

2. Исходя из свойства симметрии для скалярных произведений векторов, показать, что матрицы  $AA^T$  и  $A^T A$  симметрические для любой матрицы  $A$ .

3. Найти цикловое разложение подстановок

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 2 & 5 & 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 5 & 6 & 7 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Определить четность подстановок, заданных цикловым разложением в полной или сокращенной записи:

$$\text{а) } (12) (34) (56) (78); \quad \text{б) } (12345) (67) (8); \\ \text{в) } (124) (35); \quad \text{г) } (123 \dots 2m).$$

5. а) Представить подстановки из задачи 3 с помощью матриц подстановки.

б) Каким подстановкам соответствуют  $(0, 1)$ -матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}?$$

6. С помощью умножения матриц:

а) переставить строки в матрице  $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$  согласно подстановке (123) (т. е. чтобы 1-я строка стала 2-й, 2-я — 3-й и 3-я — 1-й);

б) переставить местами 1-й и 3-й, 2-й и 4-й столбцы в матрице

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

7. Вычислить определители матриц:

а)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ;      б)  $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ ;      в)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ;

г)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ ;      д)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ .

8. Преобразованиями, описанными в § 3, привести к треугольному виду следующие матрицы:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

9. С помощью умножения матриц:

а) прибавить к 3-й строке матрицы  $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 4g \\ d & e & f \end{bmatrix}$  2-ю, умноженную на  $-\frac{1}{2}$ ;

б) вычесть из 2-го столбца матрицы  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  3-й столбец.

3-й столбец.

10. Вычислить с помощью разложения по строке или по столбцу:

а) определители матриц г), д) из задачи 7;

б) определители числовых матриц

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

в) определители матриц с элементами многочленами:

$$C = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & -1 & \lambda \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

11. Вычислить обратные для следующих матриц:

$$\text{а) } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{б) } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{в) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

12. Вычислить перманенты матриц:

$$\text{а) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{б) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

## К главе 2

1. Выписать матрицы инцидентности для конфигураций:  
 а)  $\mathcal{S}_1 = \{\{1, 2, 3, 5\}, \{3, 6\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 4, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{2, 5, 6\}\}$  на  $Z_6$ ; б)  $\mathcal{S}_2 = \{\{3, 4, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 4, 5\}\}$  на  $Z_5$ ; в)  $\mathcal{S}_3 = \{\{a, b, c, e\}, \{a, b, d\}, \{c, d\}, \{c, e\}\}$  на  $S = \{a, b, c, d, e\}$ .

2. Какие конфигурации на  $Z_8$ ,  $Z_5$  и  $Z_9$  имеют матрицы инцидентности:

$$\text{а) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\text{б) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{в) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

соответственно?

Каковы глубина  $\varepsilon$  и ширина  $\delta$  этих матриц?

3. Какие из следующих упорядоченных троек не могут служить параметрами  $(\nu, k, \lambda)$  некоторой 3-конфигурации: а)  $(8, 4, 1)$ ; б)  $(12, 4, 3)$ ; в)  $(17, 5, 1)$ ; г)  $(17, 7, 2)$ ; д)  $(22, 7, 1)$ ?

4. Выписать остаточные схемы для следующих симметричных блок-схем: а) для схемы из (5.15); б) для схемы с параметрами

$v = 16, k = 6, \lambda = 2$ , заданной блоками

$\{1, 2, 3, 4, 8, 12\},$	$\{0, 5, 6, 7, 8, 12\},$
$\{0, 2, 3, 5, 9, 13\},$	$\{1, 4, 6, 7, 9, 13\},$
$\{0, 1, 3, 6, 10, 14\},$	$\{2, 4, 5, 7, 10, 14\},$
$\{0, 1, 2, 7, 11, 15\},$	$\{3, 4, 5, 6, 11, 15\},$
$\{0, 4, 9, 10, 11, 12\},$	$\{0, 4, 8, 13, 14, 15\},$
$\{1, 5, 8, 10, 11, 13\},$	$\{1, 5, 9, 12, 14, 15\},$
$\{2, 6, 8, 9, 11, 14\},$	$\{2, 6, 10, 12, 13, 15\},$
$\{3, 7, 8, 9, 10, 15\},$	$\{3, 7, 11, 12, 13, 14\}.$

5. Пусть  $a \in R_m$ ,  $a$  и  $m$  взаимно просты. Умножим на  $a$  каждый элемент  $c \in R_m$ , и пусть  $ac \equiv b \pmod{m}$ , где  $b \in R_m$ . Доказать, что в результате справа получаются по одному разу все элементы из  $R_m$ . Вывести отсюда, что сравнение  $ax \equiv b \pmod{m}$  для любого  $b \in R_m$  при  $a$ , взаимно простом с  $m$ , имеет единственное решение  $c \in R_m$  (его, следовательно, можно считать частным от деления  $b$  на  $a$  в совокупности  $R_m$ ).

6. Показать, что множество  $\{0, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 15, 16\}$  вычетов по mod 19 есть совершенное разностное множество. Каковы его параметры?

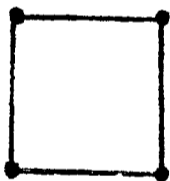
Выписать блоки симметричной блок-схемы, соответствующей этому множеству.

7. Построить матрицы инцидентности для следующих графов  $G$ :

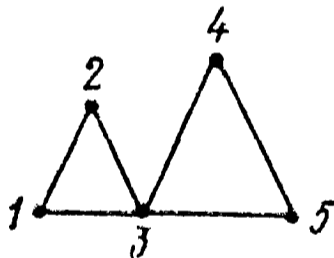
а)  $V(G) = \{v_1, \dots, v_4\}$ ,  $E(G) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}\}$ ;

б)  $V(G) = \{v_1, \dots, v_6\}$ ,  $E(G) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_6\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_6\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_6\}\}$ ;

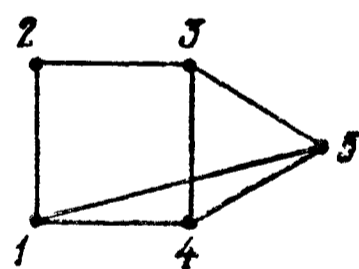
в)



г)



д)



Каковы глубина  $\varepsilon$  и ширина  $\delta$  этих матриц?

8. Построить матрицы смежности для графов из предыдущей задачи. Какова глубина этих матриц?

9. а) Найти матрицы  $A^2 = [a_{ij}^{(2)}]$ ,  $A^3 = [a_{ij}^{(3)}]$  для матрицы смежности графа г) из задачи 7. Сколько путей длины 3 из вершины 4 в вершину 3 в этом графе?

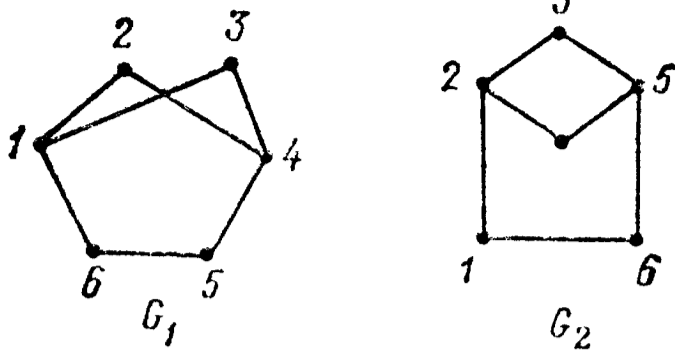
б) Пусть  $A$  — матрица смежности графа д) из задачи 7. Чему равны элементы  $a_{13}^{(2)}$ ,  $a_{42}^{(2)}$ ,  $a_{42}^{(3)}$ ,  $a_{44}^{(3)}$  матриц  $A^2 = [a_{ij}^{(2)}]$  и  $A^3 = [a_{ij}^{(3)}]$ ?

10. Пусть графы  $G_1$ ,  $G_2$  и  $G_3$  на 6 вершинах заданы своими множествами ребер:

$E(G_1) = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}\},$   
 $E(G_2) = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 6\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}\},$   
 $E(G_3) = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}\}.$

Изоморфны ли графы: а)  $G_1$  и  $G_2$ ; б)  $G_1$  и  $G_3$ ?

11. Сколькими способами можно установить изоморфизм графов  $G_1$  и  $G_2$ ?



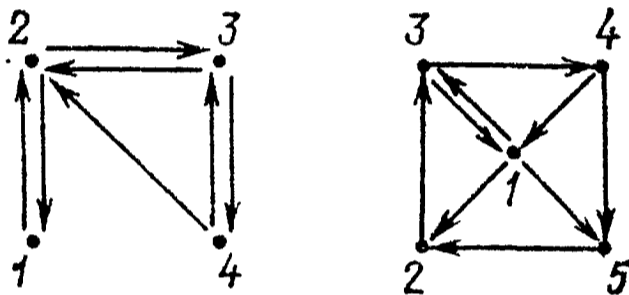
Выписать соответствующие подстановки на множестве вершин.

12. Нарисовать реберный граф  $L(G)$  для графа  $G$  на 6 вершинах, заданного множеством ребер  $E(G) = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}\}$ .

13. Построить матрицы смежности для следующих орграфов  $G$ :  
а)  $G$  задан на 4 вершинах множеством дуг  $E(G) = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 2)\}$ ;

б)

в)



Определить глубину  $\varepsilon$  и ширину  $\delta$  каждой из построенных матриц.

14. Пусть орграфы  $G_1$ ,  $G_2$  и  $G_3$  на 4 вершинах заданы своими множествами дуг:

$$E(G_1) = \{(1, 2), (2, 1), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 3)\},$$

$$E(G_2) = \{(1, 2), (2, 1), (2, 4), (3, 4), (4, 1), (4, 3)\},$$

$$E(G_3) = \{(1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 4), (3, 4), (4, 3)\}.$$

Изоморфны ли графы: а)  $G_1$  и  $G_2$ ; б)  $G_1$  и  $G_3$ ?

### К главе 3

1. Найти системы различных представителей для конфигураций:

а)  $\{1, 2\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}$ ;

б)  $\{1, 2, 4, 5\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ .

Показать, что конфигурация  $\{1, 3, 4, 5\}, \{1, 3\}, \{4, 5\}, \{1, 4\}, \{4\}$  не имеет системы различных представителей.

2. Вычислить перманенты следующих матриц с помощью разложения по строке или столбцу:

$$\text{а) } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{б) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Сколько систем различных представителей имеют конфигурации:

а)  $\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}$ ;

- б)  $\{1, 3, 4\}, \{3, 4\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}$ ;  
 в)  $\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}, \{1, 4\}, \{2, 5\}$ ?

4. Вывести рекуррентное соотношение для числа беспорядков степени  $r$ :

$$r_n = nr_{n-1} + (-1)^n.$$

5. Пусть дано 10 предметов, различающихся размером (4 больших и 6 маленьких), цветом (4 красных и по 3 желтых и голубых) и формой (5 круглых и 5 продолговатых). Сколько среди них будет маленьких продолговатых предметов желтого или голубого цвета, если больших красных имеется 3, больших круглых — 2, красных круглых — 2, больших красных круглых — 1?

6. Вычислить перманент следующей  $(0, 1)$ -матрицы, используя формулы (7.1) и (7.9):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

7. Разложить на сумму матриц подстановки следующие матрицы:

а)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ;      б)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ;      в)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

8. Рассмотрим следующие  $(0, 1)$ -матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

К каким из них применимы оценки перманентов снизу, данные в теоремах 8.4, 8.5 и 8.6 соответственно?

9. Найти нижние границы для перманентов матриц из предыдущей задачи по теоремам 8.4—8.6, 8.9 в тех случаях, когда они применимы. Сравнить полученные результаты.

10. Пусть  $n = 3k$ , где  $k, n$  — натуральные числа,  $A$  — произвольная матрица из  $\mathfrak{A}(k, n)$ . Для каких значений  $k$  справедливо неравенство  $\text{per } A \leq 2 \cdot 10^6$ ?



1. Пусть

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Доказать, что существует блок-схема с параметрами  $v = 6$ ,  $b = 10$ ,  $r = 5$ ,  $k = 3$ ,  $\lambda = 2$  с матрицей инцидентности  $A$ .

2. Пусть  $k, \lambda$  — целые числа,  $k \neq 0$  и  $A$  — невырожденная квадратная числовая матрица, удовлетворяющая соотношениям

$$AA^T = (k - \lambda)I + \lambda J, \quad JA = kJ.$$

Доказать, что тогда для  $A$  выполняются также соотношения

$$A^T A = (k - \lambda)I + \lambda J, \quad AJ = kJ.$$

3. Существуют ли симметричные блок-схемы с параметрами:

а)  $v = 34, k = 12, \lambda = 4$ ;

б)  $v = 92, k = 14, \lambda = 2$ ;

в)  $v = 29, k = 8, \lambda = 2$ ?

4. Существуют ли блок-схемы с параметрами:

а)  $b = 91, v = 78, r = 14, k = 12, \lambda = 2$ ;

б)  $b = 28, v = 21, r = 8, k = 6, \lambda = 2$ ?

5. Существует ли конечная проективная плоскость порядка 6?

6. Как построить блок-схемы с параметрами:

а)  $b = 30, v = 15, r = 14, k = 7, \lambda = 6$ ;

б)  $b = 24, v = 9, r = 8, k = 3, \lambda = 2$ ?

7. Какой вычет из системы  $R_{15}$  нужно добавить к множеству вычетов  $\{0, 1, 2, 4, 5, 8\}$  по модулю 15, чтобы получить  $(15, 7, 3)$ -разностное множество? Выписать матрицу инцидентности симметричной блок-схемы, которую порождает это множество.

8. Если для множителя  $m$   $(v, k, \lambda)$ -разностного множества  $D$  справедливо  $mD \equiv D \pmod{v}$ , то скажем, что  $m$  фиксирует  $D$ . Найдти отличный от 1 множитель, фиксирующий  $(21, 5, 1)$ -разностное множество  $\{0, 1, 4, 14, 16\}$  вычетов по модулю 21.

9. Построить разрешимую блок-схему с параметрами  $b = 20$ ,  $v = 16$ ,  $r = 5$ ,  $k = 4$ ,  $\lambda = 1$ . Выписать ее разрешение.

10. Блок-схема с  $\lambda = 1$  и  $k = 4$  (соответственно  $k = 5$ ) на  $v$ -множестве называется *штейнеровой системой четверок* (*пятерок*). С какими из вычетов по модулю 12 должно быть сравнимо число  $v$ , чтобы могла существовать штейнерова система четверок? Тот же вопрос относительно штейнеровой системы пятерок и вычетов по модулю 20. Каковы при этом необходимые условия существования разрешимой штейнеровой системы четверок (пятерок)?

11. Как исходя из факта существования систем троек Штейнера порядков 9, 13 и 45, можно заключить о существовании системы троек Штейнера порядка 3601?

12. Установить непустоту классов Райзера  $\mathfrak{A}(R, S)$ , где:

а)  $R = (5, 4, 2, 2)$ ,  $S = (3, 3, 3, 3, 1)$ ;

б)  $R = (1, 6, 3, 3)$ ,  $S = (3, 1, 3, 3, 1, 2)$ .

Показать, что класс  $\mathfrak{A}(R, S)$ , где  $R = (1, 6, 7, 1)$ ,  $S = (3, 3, 1, 2, 3, 1, 2)$ , пуст.

13. Найти граничный ранг матриц:

$$\text{а) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{б) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

14. Показать, что максимальный граничный ранг непустого класса Райзера  $\mathfrak{A}(R, S)$ , где  $R = (4, 3, 3, 2, 2)$ ,  $S = (4, 4, 2, 2, 2)$ , равен 5.

15. Пусть  $\mathcal{F} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 2, 5\}\}$  — конфигурация 3-подмножеств на  $Z_5$ . Построить латинский прямоугольник размера  $3 \times 5$ , соответствующий  $\mathcal{F}$ , у которого числа в первой строке и первом столбце расположены в естественном порядке.

16. Пусть задан «частичный» латинский прямоугольник размера  $3 \times 4$  на

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & * & 2 \\ * & 5 & 6 & 3 \end{bmatrix},$$

где места, отмеченные \*, не заняты числами. Сколько существует вариантов расстановки чисел от 1 до 6 на незанятых местах, чтобы можно было расширить  $L$  до латинского квадрата порядка 6?

Выписать в одном из этих вариантов латинский квадрат, получаемый расширением  $L$ .

## К главе 5

1. Найти глубину следующих  $(0, 1)$ -матриц:

$$\text{а) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{б) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Каким классам Райзера принадлежат эти матрицы?

2. Показать, что для любых целых положительных чисел  $n$ ,  $N$ , где  $n < N$ , в классе Райзера  $\mathfrak{A}(n, N)$  существует матрица  $A$  со следующими свойствами:

а) первая строка  $A$  состоит из  $n$  единиц, за которыми следуют  $N - n$  нулей;

б) каждая строка получается из соседней сверху циклическим сдвигом на  $n$  мест вправо.

3. Используя матрицу  $A$  из предыдущей задачи, установить формулу для минимальной глубины класса Райзера  $\mathfrak{A}(n, N)$ :  $\tilde{\alpha}(n, N) = \langle N/n \rangle$ .

4. Какова максимальная глубина класса Райзера  $\mathfrak{A}(36, 43)$ ?

5. Доказать, что для любого  $n > 1$

$$\bar{\varepsilon}(n, n+1) = \bar{\varepsilon}(n, n+2) = 2.$$

6. Доказать, что равенство  $\bar{\varepsilon}(n, n+k) = 2$  справедливо при любых  $k, n$  таких, что  $n > (k-1)^2$ .

7. Показать, что для максимальной глубины совокупности  $(0, 1)$ -матриц  $\mathfrak{A}(\leq 3, \geq n; M, N)$  справедливо неравенство

$$\bar{\varepsilon}(\leq 3, \geq n; M, N) \leq \frac{2(n-1)^2 N + (5n-4)M}{(2n-1)(3n-2)}.$$

8. Пусть  $A$  — матрица класса Райзера  $\mathfrak{A}(2, n, N)$ ,  $n$  нечетно. Показать, что если число строк в  $A$  не меньше, чем  $2(3n-1)$ , то среди них найдется не менее 4 попарно ортогональных строк.

9. Чему равны: а)  $\bar{\varepsilon}(2, 3, 4)$ ; б)  $\bar{\varepsilon}(2, 3, 6)$ ; в)  $\bar{\varepsilon}(2, 5, 6)$ ?

10. Найти глубину следующих  $(0, 1)$ -матриц размера  $12 \times 8$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

11. Пусть  $(0, 1)$ -матрица  $A$  класса  $\mathfrak{A}(2, n, N)$  представлена в виде (13.1), где  $l_1, l_2, \dots, l_\mu$  попарно ортогональны и  $\mu$  — максимально возможное число попарно ортогональных строк. Предположим, что строки  $l, l' \in B$   $v$ -связаны, причем связующая строка подматрицы  $D^{(2)}$  проходит через столбцы  $c^1(l)$  и  $c^1(l')$ . Доказать, что тогда все единицы столбцов  $c^2(l)$  и  $c^2(l')$ , входящие в подматрицу  $D^{(1)}$ , принадлежат одной и той же полосе  $D^{(1)}$ .

12. Пусть матрица  $A$  из  $\mathfrak{A}(2, 3, 8)$  представлена в виде (13.1) и  $\mu < 4$ . Показать, что:

а) каждую из строк можно полагать  $T_2$ -строкой;

б) среди  $l_1, l_2, l_3$  найдется по крайней мере одна  $T^{(2)}$ -строка.

13. С помощью леммы 13.1 и задач 11, 12 показать, что в любой матрице из  $\mathfrak{A}(2, 3, 8)$  найдутся четыре попарно ортогональные строки, и, следовательно,  $\bar{\varepsilon}(2, 3, 8) = 4$ .

14. С помощью теоремы 13.9 доказать, что при любых  $n$  и  $N$

$$\bar{\varepsilon}(4, n, N) \leq \left\lceil \frac{12}{25} N \right\rceil.$$

Выписать верхние границы для  $\bar{\varepsilon}(3, 5, N)$ ,  $\bar{\varepsilon}(3, 6, N)$ ,  $\bar{\varepsilon}(4, 5, N)$ ,  $\bar{\varepsilon}(4, 6, N)$ , вытекающие из теоремы 13.9.

15. Упорядочить лексикографически все 6-мерные  $(0, 1)$ -векторы с четырьмя и двумя нулевыми компонентами соответственно, считая, что единица предшествует нулю. Выписать матрицу  $A(6, 4, 2)$  и найти ее глубину.

16. Найти значения чисел Турана:

а)  $T(n, n-2, n-4)$  при любом  $n$ ;

б)  $T(10, 7, 6)$ ,  $T(13, 10, 9)$ .

17. Найти значения чисел  $M(n, k, l)$ :

а)  $M(n, n-2, n-k)$  при любых  $n$  и  $k < n$ ;

б)  $M(11, 8, 5)$ ,  $M(12, 9, 6)$ .

18. Дана конфигурация  $\mathcal{P}$ :

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $\{1, 2, 3, 6, 7, 9\}$ ,  $\{1, 3, 4, 5, 6, 9\}$ ,  
 $\{1, 2, 3, 4, 7, 8\}$ ,  $\{1, 2, 3, 6, 8, 9\}$ ,  $\{1, 4, 5, 7, 8, 9\}$ ,  
 $\{1, 2, 3, 4, 7, 9\}$ ,  $\{1, 2, 3, 7, 8, 9\}$ ,  $\{1, 4, 6, 7, 8, 9\}$ ,  
 $\{1, 2, 3, 4, 8, 9\}$ ,  $\{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$ ,  $\{1, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ,  
 $\{1, 2, 3, 5, 7, 8\}$ ,  $\{1, 2, 4, 5, 6, 8\}$ ,  $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ,  
 $\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$ ,  $\{1, 2, 4, 5, 6, 9\}$ ,  $\{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ ,  
 $\{1, 2, 3, 5, 8, 9\}$ ,  $\{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ,  $\{2, 3, 4, 5, 6, 9\}$ ,  
 $\{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$ ,  $\{1, 3, 4, 5, 6, 8\}$ ,  $\{2, 4, 5, 7, 8, 9\}$ ,  
 $\{2, 4, 6, 7, 8, 9\}$ ,  
 $\{2, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ,  
 $\{3, 4, 5, 7, 8, 9\}$ ,  
 $\{3, 4, 6, 7, 8, 9\}$ ,  
 $\{3, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ,  
 $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ,

состоящая из 30-ти 6-подмножеств на  $Z_9$ . Показать, что:

а) ее матрица инцидентности принадлежит классу Райзера  $\mathcal{R}(6, 20, 9)$ ;

б) все 5-подмножества из  $Z_9$  покрыты 6-множествами из  $\mathcal{P}$ .

19. Показать, что минимальная  $(9, 6, 5)$ -покрывающая система должна содержать не менее 27-ми 6-подмножеств.

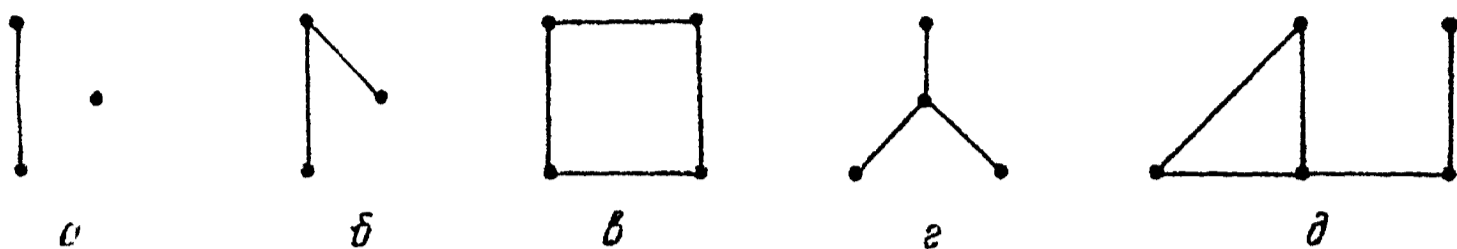
20. В газете «Советский спорт» (1984, 11 окт.) рекомендована следующая система для игры «6 из 49»:

$\{1, 2, 3, 5, 8, 12\}$ ,  $\{1, 4, 8, 9, 10, 12\}$ ,  $\{2, 5, 9, 10, 11, 12\}$ ,  
 $\{1, 2, 3, 7, 9, 10\}$ ,  $\{1, 5, 6, 7, 9, 12\}$ ,  $\{2, 6, 7, 8, 10, 12\}$ ,  
 $\{1, 2, 4, 5, 6, 10\}$ ,  $\{1, 5, 7, 8, 10, 11\}$ ,  $\{3, 4, 5, 7, 10, 12\}$ ,  
 $\{1, 2, 4, 7, 11, 12\}$ ,  $\{2, 3, 4, 6, 9, 12\}$ ,  $\{3, 5, 6, 8, 9, 10\}$ ,  
 $\{1, 2, 6, 8, 9, 11\}$ ,  $\{2, 3, 4, 8, 10, 11\}$ ,  $\{3, 7, 8, 9, 11, 12\}$ ,  
 $\{1, 3, 4, 5, 9, 11\}$ ,  $\{2, 3, 5, 6, 7, 11\}$ ,  $\{4, 5, 6, 8, 11, 12\}$ ,  
 $\{1, 3, 4, 6, 7, 8\}$ ,  $\{2, 4, 5, 7, 8, 9\}$ ,  $\{4, 6, 7, 9, 10, 11\}$ ,  
 $\{1, 3, 6, 10, 11, 12\}$ ,

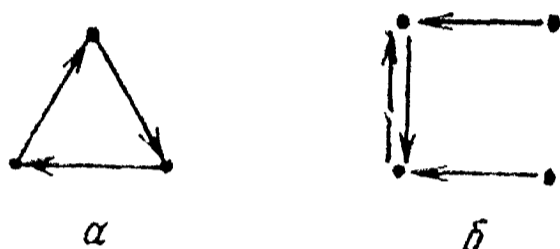
Проверить, что каждая тройка чисел из  $Z_{12}$  встречается в подмножествах этой конфигурации  $\mathcal{P}$  в точности дважды (т. е. обеспечено «двойное» покрытие 3-подмножеств) и что, таким образом,  $\mathcal{P}$  представляет собой 3-конфигурацию на множестве  $Z_{12}$  с параметрами  $v = 12, k = 6, \lambda = 2$ .

### К главе 6

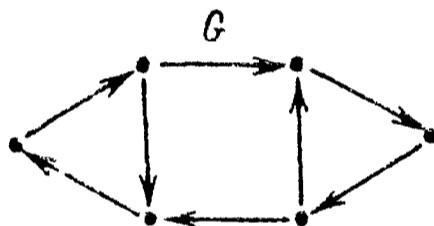
1. Найти характеристические многочлены и спектры графов:



2. Найти характеристические многочлены и спектры орграфов:



3. Пусть задан орграф  $G$  на шести вершинах:

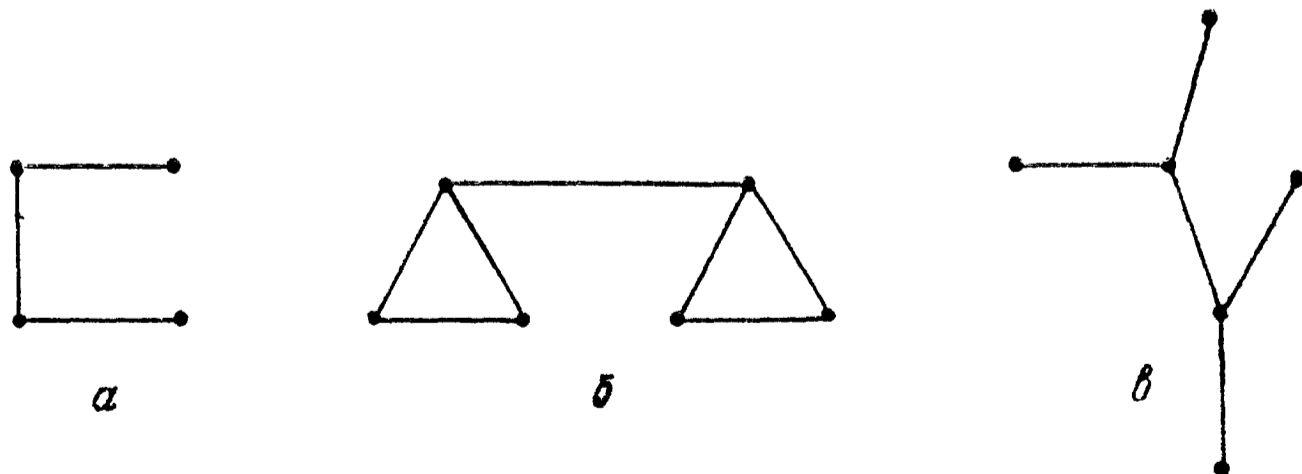


Будет ли 0 его собственным значением?

4. Построить граф  $G$  с характеристическим многочленом

$$P_G(\lambda) = \lambda^4 - 5\lambda^2 - 4\lambda.$$

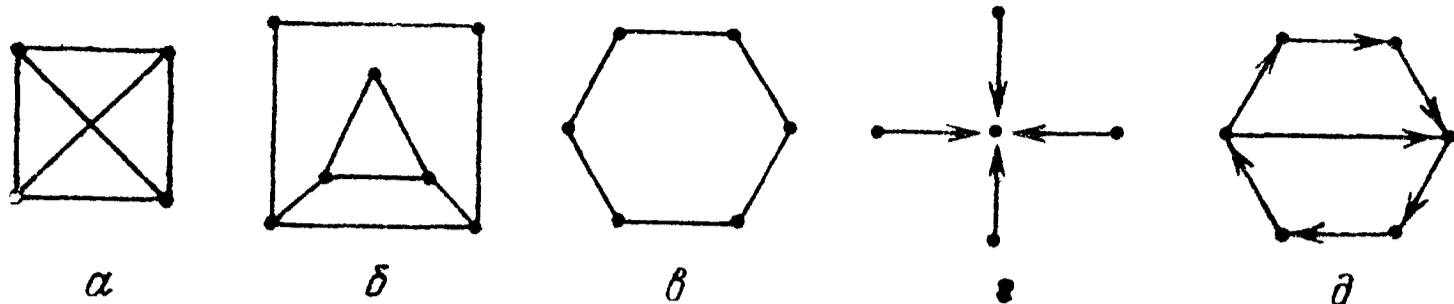
5. Показать, что каждый из графов, изображенных ниже, имеет не менее 4 различных собственных значений.



6. Вершина графа, имеющая степень 1, называется *висячей*. Показать, что для графа  $G$  с  $M$  ребрами и  $N$  вершинами, у которого нет изолированных и висячих вершин, справедливо соотношение  $\alpha_1(G) \leq (M + N)/3$ .

7. Сколько, самое меньшее, элементов должно содержать множество  $E(G)$  ребер регулярного степени 5 графа  $G$ , если  $\alpha_0(G) \geq \geq 10$ ?

8. Найдите доминирующие множества с минимальным числом вершин и число доминирования в следующих графах и орграфах:



9. Нарисовать регулярный степени 3 ориентированный граф  $G$  на 7 вершинах, у которого  $\delta(G) = 3$ .

10. Показать, что в любом регулярном степени 5 графе на 16 вершинах можно выбрать доминирующее множество, состоящее из 5 вершин.

### Ответы к задачам

Гл. 1. 4. а) Четная; в) — г) нечетные. 5. б)  $A$  соответствует (12) (34),  $B$  — (132) (4) (5),  $C$  — (123...n). 7. а) -1; б) 0; в) -9; г) 1; д) -6. 10. б)  $\Delta(A) = -4$ ,  $\Delta(B) = 3$ ; в)  $\Delta(C) =$   
 $= \lambda^4 - 4\lambda^2$ ,  $\Delta(D) = \lambda^4 - 3\lambda^2$ . 11. а)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ; б)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ;

в)  $\begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ . 12. а) 2; б) 6; в) 360.

Гл. 2. 2. а)  $\varepsilon = 2$ ,  $\delta = 1$ ; б)  $\varepsilon = \delta = 3$ ; в)  $\varepsilon = 4$ ,  $\delta = 3$ . 3. Тройка г). 5. Из  $ac_1 \equiv ac_2 \pmod{m}$  следует  $a(c_1 - c_2) \equiv 0 \pmod{m}$ , откуда, ввиду взаимной простоты  $a$  и  $m$ ,  $c_1 \equiv c_2 \pmod{m}$  и, следовательно,  $c_1 = c_2$ . Поэтому все вычеты  $b$  попарно различны и в совокупности составляют все  $R_m$ . 6.  $v = 19$ ,  $k = 9$ ,  $\lambda = 4$ . 7. а)  $\varepsilon = \delta = 2$ ; б)  $\varepsilon = \delta = 3$ ; в)  $\varepsilon$  не определена,  $\delta = 2$ ; г), д)  $\varepsilon = \delta = 3$ . 8. а) 2; б) 3; в) не определена; г) 2; д) 2. 9. а) 5; б)  $a_{13}^{(2)} = 3$ ,  $a_{42}^{(2)} = 2$ ,  $a_{42}^{(3)} = 2$ ,  $a_{41}^{(3)} = 4$ . 10. а) Нет.

В  $G_2$  есть вершина 1, имеющая степень 3, в  $G_1$  такой вершины нет. б) Да. Соответствующая подстановка на  $V(G_1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

11. Четырьмя. Изоморфизм устанавливается каждой из следующих подстановок на  $V(G_1): \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ . 13. а)  $\varepsilon = 3$ ,  $\delta = 2$ ; б)  $\varepsilon = \delta = 2$ ;

в)  $\varepsilon = 2$ ,  $\delta = 3$ . 14. а) Да. Соответствующая подстановка на  $V(G_1): \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ . б) Нет. В  $G_3$  есть вершина 4 с полустепеню захода 3, в  $G_1$  такой вершины нет.

Гл. 3. 2. а) 0; б) 5. 3. а) 24; б) 5; в) 2. 4. Выводится индукцией по  $n$ . 5. 3. 6. 16. 8. Теорема 8.4 — ко всем, теоремы 8.5, 8.6 — к б) и в). 9. Теорема 8.4 дает оценки  $\text{per } A \geq 24$ ,  $\text{per } B \geq 6$ ,  $\text{per } C \geq 6$ ; теорема 8.5 —  $\text{per } B \geq 0$ ,  $\text{per } C \geq 12$ ; теорема 8.6 —  $\text{per } B \geq 8$ ,  $\text{per } C \geq 15$ ; теорема 8.9 —  $\text{per } B \geq 12$ . 10.  $k \leq 5$ .

Гл. 4. 3. Нет. 4. Нет. Они были бы остаточными для блок-схем из задачи 3. 5. Не существует, так как не существует симметричной блок-схемы с параметрами  $v = 43$ ,  $k = 7$ ,  $\lambda = 1$  (см. с. 94—95). 6. а) Существует симметричная блок-схема  $D$  с параметрами  $v = 15$ ,  $k = 7$ ,  $\lambda = 3$  (см. (5.7)). Строим искомую схему, взяв каждый блок  $D$  дважды. б) Берем дважды каждый блок в блок-схеме с параметрами  $b = 12$ ,  $v = 9$ ,  $r = 4$ ,  $k = 3$ ,  $\lambda = 1$ ; последняя — остаточная для конечной проективной плоскости порядка 3. 7. 10. 8.  $m = 4$ . 10. Для четверок  $v \equiv 1,4 \pmod{12}$ ; для пятерок  $v \equiv 1,5 \pmod{20}$ . Необходимые условия разрешимости  $v \equiv 4 \pmod{12}$  и  $v \equiv 5 \pmod{20}$  соответственно. 11. Указание. Из систем троек Штейнера порядков 13 и 9 получить сначала систему троек Штейнера порядка 81, а затем взять ее и систему порядка 45. 13. а)  $\rho = 3$ ; б)  $\rho = 4$ . 16. Существуют три варианта: (1, 4), (4, 2), (4, 4) (на первом месте записано число, которое ставим во 2-ю, а на втором — то, которое ставим в 3-ю строку прямоугольника).

Гл. 5. 1. а) 2,  $\mathfrak{A}(3, 5)$ ; б) 3,  $\mathfrak{A}(4, 9)$ . 2. Пусть  $v = 0$ . н. к.  $(n, N)$ . Если единица первой строки матрицы  $A$  находится в столбце с номером, сравнимым по модулю  $v$  с некоторым числом  $k$ , то при сдвигах она попадает во все  $N/v$  столбцов, в каждый по  $v$  раз, с номерами, сравнимыми с  $k$  по модулю  $v$ . Всего единиц в первой строке, сравнимых с  $k$  по модулю  $v$ , имеется  $n/v$ , поэтому в каждом столбце  $A$  содержится по  $v \cdot n/v = n$  единиц, т. е.  $A \in \mathfrak{A}(n, N)$  и  $\varepsilon(A) = \langle N/n \rangle$ . 3. Очевидно, что  $\tilde{\alpha} \geq (N/n)$ . Равенство достигается для матрицы  $A$ , построенной в задаче 2. 4. 3 (см. задачу 5 к гл. 4). 5. Указание. Оценить число единиц в подматрице матрицы  $A \in \mathfrak{A}(n, n+2)$ , получающейся удалением первой строки матрицы и всех столбцов, через которые она проходит. 6. См. указание к задаче 5. 9. а) 2; б) 3. 10. а), б) 4 (покрытие дают строки с номерами 3, 5, 9, 10 в первом и 3, 4, 7, 10 во втором случаях). 11. Указание. Рассуждаем аналогично доказательству леммы 13.1. 12. Указание. Воспользоваться леммой 13.5. 15.  $\varepsilon(A(6, 4, 2)) = 4$ . 16, 17. Указание. См. теорему 14.1. 19. Указание. См. теорему 14.5.

Гл. 6. 1. а)  $\lambda^3 - \lambda, 1, 0, -1$ ; б)  $\lambda^3 - 2\lambda, \sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}$ ; в)  $\lambda^4 - \lambda^2, 2, 0, 0, -2$ ; г)  $\lambda^4 - 3\lambda^2, \sqrt{3}, 0, 0, -\sqrt{3}$ ; д)  $\lambda^5 - 5\lambda^3 + 4\lambda, 2, 1, 0, -1, -2$ . 2. а)  $\lambda^3 - 1, 1, (-1 \pm i\sqrt{3})/2$ ; б)  $\lambda^4 - \lambda^2, 1, 0, 0, -1$ . 3. Да. 5. Указание. Диаметр каждого из этих графов равен 3. 8. а) 1; б) 3; в) 2; г) 4; д) 3. 9. Указание. Воспользоваться доказательством теоремы 16.8.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И. М. Основы теории чисел.— М.: Наука, 1981.
2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.— М.: Наука, 1967.
3. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики/Под ред. С. В. Яблонского, О. Б. Лупанова.— М.: Наука, 1974.
4. Егорычев Г. П. Доказательство гипотезы ван дер Вардена для перманентов.— Сиб. мат. журн., 1981, 22, № 6, с. 65—71.
5. Комбинаторный анализ. Задачи и упражнения/Под ред. К. А. Рыбникова.— М.: Наука, 1982.
6. Кострикин А. И. Введение в алгебру.— М.: Наука, 1977.
7. Кофман А. Введение в прикладную комбинаторику.— М.: Наука, 1975.
8. Кузюрин Н. Н. Асимптотическое исследование задачи о покрытии.— Пробл. кибернетики, 1980, вып. 37, с. 19—56.
9. Минк Х. Перманенты.— М.: Мир, 1982.
10. Носов В. А., Сачков В. Н., Тараканов В. Е. Комбинаторный анализ (Матричные проблемы, теория выбора).— Итоги науки и техники. ВИНТИ. Сер. Теория вероятностей. Мат. статистика. Теорет. кибернетика, 1981, 18, с. 53—93.
11. Носов В. А., Сачков В. Н., Тараканов В. Е. Комбинаторный анализ (Неотрицательные матрицы, алгоритмические проблемы).— Итоги науки и техники, ВИНТИ. Сер. Теория вероятностей. Мат. статистика. Теорет. кибернетика, 1983, 21, с. 120—178.
12. Райзер Г. Дж. Комбинаторная математика.— М.: Мир, 1966.
13. Рыбников К. А. Введение в комбинаторный анализ.— М.: Изд-во МГУ, 1985.
14. Сапоженко А. А., Асратян А. С., Кузюрин Н. Н. Обзор некоторых результатов по задачам о покрытии.— В кн.: Методы дискретного анализа в решении комбинаторных задач: Сб. тр. ин-та Мат. СО АН СССР, Новосибирск, 1977, вып. 30, с. 46—75.
15. Сачков В. Н. Комбинаторные методы дискретной математики.— М.: Наука, 1977.
16. Сачков В. Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики.— М.: Наука, 1982.
17. Сидоренко А. Ф. О проблеме Турана для 3-графов.— В кн.: Комбинаторный анализ/Под ред. К. А. Рыбникова. Изд-во МГУ, 1983, вып. 6, с. 51—57.
18. Тараканов В. Е. Максимальная глубина произвольных классов  $(0, 1)$ -матриц.— Мат. сб., 1973, 92(134), № 3, с. 472—490.
19. Тараканов В. Е. Комбинаторные задачи на бинарных матрицах.— В кн.: Комбинаторный анализ/Под ред. К. А. Рыбникова. Изд-во МГУ, 1980, вып. 5, с. 4—15.
20. Тараканов В. Е. О глубине  $(0, 1)$ -матриц с одинаковыми строчными и одинаковыми столбцовыми суммами.— Мат. заметки, 1983, 34, № 3, с. 463—476.



21. Харари Ф. Теория графов.— М.: Мир, 1973.
22. Холл М. Комбинаторика.— М.: Мир, 1970.
23. Цветкович Д., Дуб М., Закс Х. Спектры графов. Теория и применение.— Киев: Наукова думка, 1984.
24. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику.— М.: Наука, 1979.
25. Cockayne E. J., Hedetniemi S. T. Towards a theory of domination in graphs.— *Networks*, 1977, 7, p. 247—261.
26. Fort M. K., Hedlund G. A. Minimal coverings of pairs by triples.— *Pacif. J. Math.*, 1958, 8, № 4, p. 709—719.
27. Henderson J. R., Dean R. A. The 1-width of  $(0, 1)$ -matrices having constant row sum 3.— *J. Comb. Theory*, 1974, 16A, № 3, p. 355—370.
28. Henderson J. R., Dean R. A. A general upper bound for 1-widths.— *J. Comb. Theory*, 1975, 18a, № 2, p. 236—238.
29. Kaplansky I. Solution of the «problem des ménages».— *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1943, 49, p. 784—785.

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аutomорфизм конфигурации 59

Беспорядок 71

Блок-схема 41

— двойственная 93

— остаточная 46

— производная 46

— разрешимая 97

— симметричная 43

— уравновешенная неполная 41

— эксперимента 41

Вектор 5, 11

— столбцевых сумм 11, 110

— строчных сумм 11, 110

Вектор-столбец 5

Вектор-строка 5

Вершина графа 53

— — изолированная 54

Вершинное покрытие графа 166

Включения — исключения принцип 73, 74

Внешне устойчивое множество 167

Глубина  $(0, 1)$ -матрицы 39, 126

Граничный ранг 116

Граф 53

— кубический 170

— однородный (регулярный) 57

— ориентированный 63

— помеченный 55

— связный 165

Группа 103

Декремент подстановки 15

Диагональ матрицы 7

— — положительная 67

Диаметр графа 165

Длина маршрута 57

— цикла подстановки 13

Доминирующее множество 170

Дуга орграфа 63

Задача Киркмана о школьницах 108

— о встречах 70

— о минимальной системе представителей 39

— о покрытии 39

Задачи о выборе 36

— перечислительные 36

— существования и построения 36

— экстремальные 36

Изоморфизм конфигураций 59

Инцидентности матрица 37

Инцидентность ребер и вершин графа 54

Класс вычетов по модулю  $m$  49

— Райзера  $(0, 1)$ -матриц 110

Компонента вектора 11

Конечная аффинная плоскость 99

— проективная плоскость 48

— — — циклическая 102

Контур в графе 65

Конфигурация 34

Латинский квадрат 118

— прямоугольник 118

Линейный ориентированный граф 163

Линия в матрице 116

Максимальная матрица 110

Маршрут 57

— в орграфе 65

Матрица 5

— вполне неразложимая 83

— дважды стохастическая 87

— инцидентности 37

— — графа 54

— квадратная 5

— максимальная 110

— невырожденная 30

— обратная 9, 28

— — левая 28

— — правая 28

— перестановки 19

— подстановки 19

— симметрическая 7

— смежности графа 56

— — орграфа 64

— стохастическая 87

— треугольная 24

— циркулянтная 53

—  $m$ -подстановки 122

Минимальная система представителей 126

—  $(n, k, l)$ -покрывающая система 149

Минор матрицы 28

— элемента 28

Множество  $n$ -элементное 34

Множитель разностного множества 103

Мощность покрытия 126

Неравенство Фишера 89

Определитель 21

Орграф 63

— регулярный 172

- Основное уравнение для матрицы  
 инцидентности блок-схемы 88,  
 89  
 Остаточная схема 46
- Параллельность блоков 97  
 Параметры блок-схемы 42  
 Перестановка 12  
 Перманент 31  
 Петля 53  
 Подграф 163  
 Подматрица 6  
 Подстановка 12  
 — нечетная 15  
 — тождественная 12  
 — циклическая 18  
 — четная 15  
 Подстановочная матрица 19  
 Полуостепенность захода 63  
 — исхода 63  
 Порядок конечной проективной  
 плоскости 48  
 — матрицы 6  
 — системы троек Штейнера 104  
 Принцип включения — исключения  
 73, 74  
 Проблема Ван дер Вардена 87  
 — Турана 150  
 Произведение матриц 8  
 Производная схема 46  
 Простой цикл 57
- Различных представителей система  
 66  
 Разложение определителя по столб-  
 цу 29  
 — — строке 29  
 — перманента по строке 68  
 Размерность вектора 11  
 Разностное множество 51  
 — — плоское 102  
 — — циклическое 102  
 Разрешение блок-схемы 97  
 Реберное покрытие графа 166  
 Ребро графа 53  
 — — кратное 54
- Свойство Турана 156  
 Система представителей минималь-  
 ная 126  
 — различных представителей 66  
 — троек Киркмана 108  
 — — Штейнера 104  
 Смежности матрица графа 56  
 Смежные вершины графа 56  
 Собственное значение матрицы 161  
 Совершенное разностное множество  
 51
- Спектр графа 162  
 Степень вершины графа 54  
 — однородного (регулярного) графа  
 57  
 — подстановки 12  
 — регулярного орграфа 172  
 Столбец матрицы 5  
 Столбцевая сумма 11  
 Строка матрицы 5  
 Строчная сумма 11  
 Сумма матриц 7  
 Суперпозиция 103
- Тактическая конфигурация 43  
 Транспозиция 17  
 Транспонирование 6  
 Троек Киркмана система 108  
 — Штейнера система 104
- Упорядоченная  $m$ -выборка без по-  
 вторения 31  
 Уравнение для матрицы инцидент-  
 ности блок-схемы основное 88, 89  
 Уравновешенная неполная блок-  
 схема 41
- Фишера неравенство 89
- Характеристический многочлен 161  
 — — графа 162
- Цикл подстановки 13  
 — простой в графе 57  
 Циклическая проективная плоскость  
 102  
 Цикловая структура подстановки 14  
 Циркулянт 53
- Число вершинного покрытия 166  
 — внешней устойчивости 170  
 — доминирования 170  
 — реберного покрытия 166  
 — сочетаний 34  
 — Турана 150
- Ширина  $(0, 1)$ -матрицы 39  
 Штейнерова система троек 104
- $(b, v, r, k, \lambda)$ -конфигурация 42  
 $m$ -подстановка 122  
 $t$ -конфигурация 43  
 $(0, 1)$ -матрица 5  
 3-покров 151

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3
Глава 1. Матрицы и операции над ними . . . . .	5
§ 1. Что такое матрица? . . . . .	5
§ 2. Подстановки . . . . .	12
§ 3. Определители и перманенты . . . . .	20
Глава 2. Комбинаторные конфигурации . . . . .	34
§ 4. Основные типы комбинаторных задач. Матрицы инцидентности . . . . .	34
§ 5. Блок-схемы . . . . .	40
§ 6. Графы . . . . .	53
Глава 3. Перечислительные задачи и $(0, 1)$ -матрицы . . . . .	66
§ 7. Перманенты $(0, 1)$ -матриц . . . . .	66
§ 8. Границы для перманентов . . . . .	78
Глава 4. Вопросы существования комбинаторных конфигураций и $(0, 1)$ -матрицы . . . . .	88
§ 9. $(0, 1)$ -матрицы и существование уравновешенных неполных блок-схем . . . . .	88
§ 10. Блок-схемы с $\lambda = 1$ . . . . .	96
§ 11. Условия существования конфигураций общего вида . . . . .	109
Глава 5. Экстремальные комбинаторные задачи и $(0, 1)$ -матрицы . . . . .	125
§ 12. Задачи о покрытии и глубина $(0, 1)$ -матриц . . . . .	125
§ 13. Глубина матриц классов $\mathcal{A}(m, n; M, N)$ . . . . .	134
§ 14. Покрытие $l$ -подмножеств $k$ -подмножествами. Игра «Спортлото» . . . . .	148
Глава 6. Графы и $(0, 1)$ -матрицы . . . . .	161
§ 15. О спектре графа . . . . .	161
§ 16. Оценки некоторых структурных констант графов . . . . .	166
Приложение . . . . .	174
Задачи . . . . .	174
Ответы к задачам . . . . .	185
Список литературы . . . . .	187
Предметный указатель . . . . .	189

*Валерий Евгеньевич Тараканов*

**КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ  
И (0, 1)-МАТРИЦЫ**

Редактор *И. В. Викторенкова*

Художественный редактор *Г. М. Коровина*

Технический редактор *Е. В. Морозова*

Корректоры *О. А. Сигал, В. П. Сорокина*

**ИБ № 12233**

Сдано в набор 01.04.85. Подписано к печати 01.11.85. Т-20199. Формат  $84 \times 108^{1/32}$ . Бумага тип. № 2. Гарнитура обыкновенная. Печать высокая. Усл. печ. л. 10,08. Усл. кр.-отт. 10,5. Уч.-изд. л. 10,77. Тираж 45 000 экз. Заказ № 670. Цена 65 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени  
издательство «Наука»

Главная редакция

физико-математической литературы

117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Типография № 4 издательства «Наука»  
630077 г. Новосибирск-77, Станиславского, 25.

