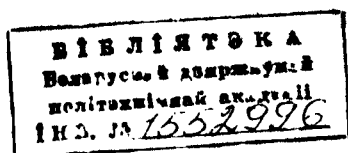


О.Зенкевич  
К.Морган

# Конечные элементы и аппроксимация

Перевод с английского  
Б.И. КВАСОВА

под редакцией  
Н.С. БАХВАЛОВА



МОСКВА «МИР» 1986

**FINITE ELEMENTS  
AND APPROXIMATION**

**O.C. Zienkiewicz**

**K. Morgan**

**University of Wales, Swansea, United Kingdom**

**A Wiley-Interscience Publication**

**John Wiley & Sons**

**New York Chichester Brisbane Toronto Singapore**

**1983**

## ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Метод конечных элементов в настоящее время является одним из самых распространенных методов решения прикладных задач, например изучения тепловых процессов, прочностных расчетов, проблем динамики жидкости. Наглядность метода и сравнительная простота его применения в случае областей сложной формы сделали его весьма популярным среди широкого круга прикладников, в частности инженеров. На его основе создан и успешно эксплуатируется ряд промышленных систем прикладных расчетов.

Первоначально метод конечных элементов был предложен инженерами, нашел широкое применение на практике, но значительное время оставался вне поля зрения математиков. После подробного систематического его исследования оказалось, что при негладких входных данных задачи метод конечных элементов часто сходится быстрее, чем метод конечных разностей, а иногда вообще обладает оптимальной скоростью сходимости.

Один из авторов, Ольгерд Зенкевич, относится к числу основоположников метода конечных элементов, описание которого занимает центральное место в книге. Она адресована прежде всего инженерам, и поэтому в ней, как пишут авторы, «сделана попытка дать изложение, которое при разумной строгости было бы доступно тем, кто знаком лишь с основами математического анализа». И хотя понятия «разумной строгости» анализа вычислительных алгоритмов у математиков и у инженеров отнюдь не совпадают (например, в книге вообще не уделяется внимания устойчивости решения по отношению к вычислительной погрешности), мы редко вмешивались в авторский текст, чтобы не нарушать цельности изложения.

При общей ориентации на первоначальное ознакомление читателя с методом конечных элементов книга содержит материал, инте-

3-56  
ББК ~~22.193~~

356

УДК ~~519.63 + 519.65~~

**Зенкевич О., Морган К.**

356      Конечные элементы и аппроксимация: Пер. с англ.— М.:  
Мир, 1986.—318 с., ил.

Книга одного из крупнейших английских специалистов по методу конечных элементов О. Зенкевича, написанная им совместно с его учеником и коллегой К. Морганом, служит введением в круг основных понятий численной аппроксимации, используемых при практическом решении дифференциальных уравнений.

Для чтения книги достаточно знания математики в объеме вузовских программ и не требуется предварительного знакомства с численными методами решения дифференциальных уравнений. Многочисленные примеры и упражнения способствуют усвоению материала.

Для специалистов по вычислительной и прикладной математике, физиков, инженеров, а также для студентов и аспирантов университетов и вузов.

3  $\frac{1702070000-090}{041 (01)-86}$  33-86, ч. 1

ББК 22.193  
518

*Редакция литературы по математическим наукам*

Copyright © 1983 by John Wiley & Sons, Inc. All Right Reserved.  
Authorized translation from English language edition published by John Wiley & Sons, Inc.

© перевод на русский язык, «Мир», 1986

ресный и для специалистов. Здесь следует прежде всего указать установление взаимосвязи между методом конечных элементов, методом конечных разностей и другими приближенными методами решения дифференциальных уравнений. Однако главная ее ценность — систематическое и подробное описание метода, иллюстрированное многочисленными примерами и позволяющее читателю войти в курс предмета.

*Н. С. Бахвалов*

*Москва*

*март 1985 г.*

## **ПРЕДИСЛОВИЕ**

В настоящее время метод конечных элементов является мощным средством приближенного решения дифференциальных уравнений, описывающих различные физические процессы. Многообразны его применения в технике и научных исследованиях, и можно с полным основанием сказать, что без него (и его служанки ЭВМ) многие задачи не могли бы быть решены. Однако, несмотря на столь широкое распространение метода, у пользователей, обучавшихся по стандартным студенческим курсам и даже по спецкурсам, зачастую наблюдается непонимание используемых в нем идей. Наша книга адресована такой аудитории и может быть положена в основу учебных курсов для студентов и аспирантов: в течение последних лет в Хельсинкском университете студентам, специализирующимся по гражданскому строительству, читался курс, построенный на материале отдельных разделов этой книги, и, по нашему мнению, такой курс воспринимался без особого труда. При работе над текстом авторы учитывали интересы инженеров и физиков, так что содержание книги рассчитано на всех, кто изучает этот предмет.

Прошло около 25 лет с того момента как был введен в обращение термин «метод конечных элементов». В то время его идейным источником было исследование механических конструкций и аналогии с такого рода дискретными проблемами использовались для решения непрерывных задач. По мере углубления понимания основного процесса становилась очевидной его связь с другими приближенными методами (такими, как методы Рунге, Рунге и Галеркина), и достигнутая общность привлекла к этой области внимание математиков. К сожалению, многие из их работ написаны на языке, малопонятном для представителей иных специальностей. Поэтому в нашей книге сделана попытка дать изложение, которое при разумной строгости было бы доступно тем, кто знаком лишь с основами математического анализа.

До появления метода конечных элементов существовало много иных численных процессов аппроксимации. Это уже зарекомендовавшие себя методы граничных решений и конечно-разностные методы. Их приверженцы по временам скрещивали шпаги с защитниками метода конечных элементов, провозглашая те или иные их преимущества. В настоящее время некоторые из нас видят, что все процессы аппроксимации, используемые при решении описываемых дифференциальными уравнениями задач, по существу составляют единое целое, и эта мысль постоянно подчеркивается в книге. Мы пытаемся показать, что можно ввести «обобщенный метод конечных элементов», охватывающий все возможные варианты и, таким образом, оставляющий простор для выбора пользователем оптимальной аппроксимации. По этой причине книга начинается с главы, посвященной конечно-разностным методам, — возможно, наиболее наглядным (и старейшим) процедурам аппроксимации.

Мы старались обеспечить достаточное число иллюстративных примеров, а также упражнений, чтобы книга могла служить учебником (или даже самоучителем). Любые предложения читателя по конкретным улучшениям будут приветствоваться.

В заключение мы хотели бы поблагодарить д-ра Дона Келли за содействие в написании посвященной оценкам погрешностей части гл. 8 и секретарей Отдела гражданского строительства в Суонси за перепечатку рукописи.

*О. Зенкевич  
К. Морган*

*Суонси, Уэльс, Великобритания  
Сентябрь 1982 г.*

## НЕПРЕРЫВНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ И НЕОБХОДИМОСТЬ ЧИСЛЕННОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ. КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ

### 1.1. Введение

При поиске количественного описания физического явления инженер и физик обычно вводят в рассмотрение некоторую систему обыкновенных дифференциальных уравнений или уравнений с частными производными, справедливую в определенной области, и полагают на эту систему подходящие краевые и начальные условия. На этой стадии математическая модель замкнута, и для практических применений требуется только найти решение для конкретного множества числовых данных. Здесь, однако, возникают основные трудности, так как точному решению существующими математическими методами поддаются лишь уравнения самого простого вида внутри геометрически тривиальных границ. Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами являются одним из немногих примеров, для которых имеются стандартные процедуры решения, но даже здесь при большом числе зависимых переменных встречаются значительные трудности.

Чтобы преодолеть эти трудности и иметь возможность воспользоваться наиболее мощным средством вычислений нашего века — цифровой ЭВМ, — необходимо преобразовать задачу к чисто алгебраической форме, включающей только основные арифметические операции. Для достижения этой цели могут быть использованы различные виды *дискретизации* непрерывной задачи, определенной дифференциальными уравнениями. При такой дискретизации бесконечное множество чисел, представляющих неизвестную функцию или функции, заменяется конечным числом неизвестных параметров, и для этого процесса, вообще говоря, требуется некоторая форма аппроксимации.

Среди различных возможных видов дискретизации одним из простейших является *процесс перехода к конечным разностям*. В этой главе описываются некоторые из основных моментов этого процесса, что позволит сформулировать суть метода. Остальная часть книги касается различных аппроксимаций *базисными функциями*, при общей классификации относящихся к *методам конечных элементов*. Читатель увидит впоследствии, что даже конечно-разностный процесс может быть включен (как подкласс) в эту более общую категорию.



Прежде чем переходить к дальнейшему изложению, сосредоточим внимание на некоторых конкретных задачах, которые будут служить основой для дальнейших примеров. В книге такого объема очевидным образом невозможно детально оперировать с широким кругом физических задач, каждая из которых требует своей постановки. Надеемся, однако, что немногочисленные выбранные примеры помогут установить общие принципы аппроксимации, которые читатели смогут затем применить к интересующим их конкретным частным случаям.

## 1.2. Некоторые примеры непрерывных задач

Рассмотрим представленную на рис. 1.1, *a* задачу распространения тепла в двумерной области  $\Omega$ . Если потоки тепла в направлении осей  $x$  и  $y$  на единицу длины за единицу времени обозначены через  $q_x$  и  $q_y$  соответственно, то разность  $D$  между вытекающим и втекающим потоками для элемента размера  $dx dy$  задается выражением

$$D = dy \left( q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx - q_x \right) + dx \left( q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy - q_y \right). \quad (1.1)$$

Для сохранения тепла эта величина должна быть равна сумме тепла, генерируемого в элементе за единицу времени, скажем  $Q dx dy$ , где  $Q$  может изменяться в зависимости от координат и времени, и тепла, освобождаемого за единицу времени из-за изменения температуры, а именно  $-\rho c (\partial \varphi / \partial t) dx dy$ , где  $c$  — удельная теплоемкость,  $\rho$  — плотность и  $\varphi(x, y, t)$  — распределение температуры. Ясно, что это требование равенства ведет к дифференциальному соотношению

$$\partial q_x / \partial x + \partial q_y / \partial y - Q + \rho c \partial \varphi / \partial t = 0, \quad (1.2)$$

которое выполняется во всей области  $\Omega$ , где решается задача.

Вводя теперь физический закон, определяющий поток тепла в изотропной среде [1], можно записать для компоненты потока в произвольном направлении  $n$

$$q_n = -k \partial \varphi / \partial n, \quad (1.3)$$

где  $k$  — коэффициент теплопроводности, характеризующий свойство среды, известное под названием проводимости. В частности, для изотропного материала по направлениям  $x$  и  $y$  выполняются равенства

$$q_x = -k \partial \varphi / \partial x, \quad q_y = -k \partial \varphi / \partial y. \quad (1.4)$$

Соотношения (1.2) и (1.4) определяют систему дифференциальных уравнений, описывающих рассматриваемую задачу; теперь эти

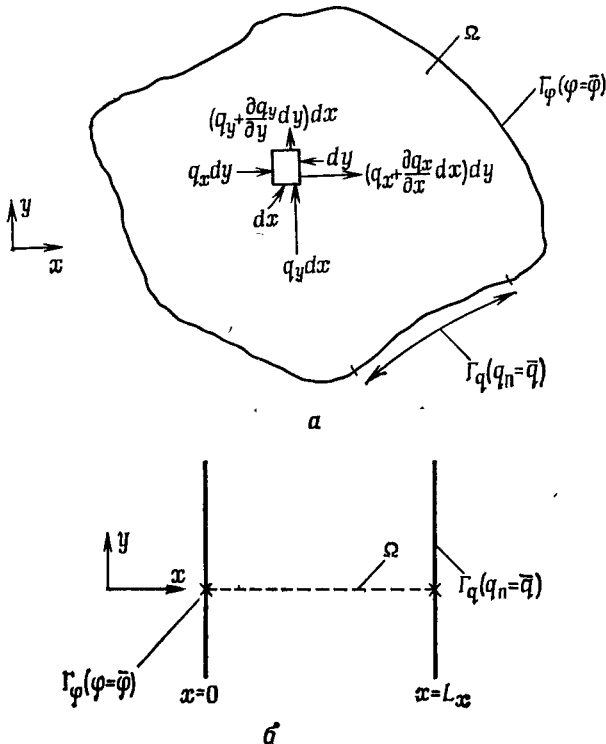


Рис. 1.1. Примеры непрерывных задач. *a* — двумерная задача теплопроводности; *б* — одномерная задача теплопроводности.

уравнения нужно решить относительно трех зависимых переменных  $q_x$ ,  $q_y$  и  $\varphi$ .

Для такого решения необходимо задать *начальные условия*, скажем в момент времени  $t = t_0$  (например, в этот момент времени всюду в  $\Omega$  может быть задано распределение температуры), и *краевые условия* на границе  $\Gamma$  области решения задачи. Как правило, могут быть использованы два различных типа краевых условий.

В случае первого условия, скажем применяемого на участке границы  $\Gamma_\varphi$ , задаются значения температуры  $\bar{\varphi}(x, y, t)$ , т. е.

$$\varphi - \bar{\varphi} = 0 \quad \text{на } \Gamma_\varphi. \quad (1.5)$$

Краевое условие этого вида часто называют краевым условием Дирихле.

В случае второго условия, применяемого на остальной части границы  $\Gamma_q$ , задаются значения потока тепла  $\bar{q}(x, y, t)$  в направ-

лении нормали к границе  $n$ . Тогда можно записать

$$q_n - \bar{q} = 0 \quad \text{на } \Gamma_q, \quad (1.6a)$$

или

$$-k \partial \varphi / \partial n - \bar{q} = 0 \quad \text{на } \Gamma_q. \quad (1.6b)$$

Этот тип краевого условия часто называется краевым условием Неймана.

Теперь задача полностью определена уравнениями (1.2), (1.4), (1.5) и (1.6), и решением этой системы уравнений в принципе можно получить числа, представляющие распределение для  $\varphi$ ,  $q_x$  и  $q_y$  в любой момент времени.

Данную задачу можно записать в иной форме, исключив при помощи уравнений (1.4) величины  $q_x$  и  $q_y$  из уравнения (1.2) и получив в результате дифференциальное уравнение более высокого порядка с одной независимой переменной, а именно уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + Q - \rho c \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (1.7)$$

для которого опять требуется задать начальные и краевые условия.

Выше была рассмотрена задача, определенная в пространственно-временной области и требующая задания начальных условий. Независимыми переменными здесь были  $x$ ,  $y$  и  $t$ . Если предполагаются *стационарные* условия (т. е. задача не зависит от времени и, следовательно,  $\partial \varphi / \partial t = 0$ ), то уравнения (1.2) и (1.7) упрощаются. В последнем случае имеет место уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + Q = 0, \quad (1.8)$$

для решения которого требуется только задать краевые условия вида (1.5) и (1.6). Такие краевые задачи будут предметом обсуждения большей части этой книги, но в гл. 7 мы вернемся к уравнениям, зависящим от времени, и рассмотрим возможные методы их решения.

Хотя основные уравнения были записаны для двумерного случая, их легко распространить на трехмерный случай, чтобы иметь возможность иметь дело с более общими задачами. С другой стороны, в некоторые задачи входит только одна независимая переменная; на рис. 1.1, б, например, рассматривается поток тепла через плиту, на которой условия не меняются по  $y$ . Тогда из уравнения (1.8) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$d(k d\varphi/dx)/dx + Q = 0, \quad (1.9)$$

а «областью» определения задачи является отрезок  $0 \leq x \leq L_x$ .

Такое обыкновенное дифференциальное уравнение можно ре-

аналитически, однако мы широко используем его (и аналогичные уравнения) для иллюстрации применения процедур дискретизации. Это позволит продемонстрировать точность приближенных методов путем сравнения получаемых результатов с точными решениями.

Только что описанная задача теплопроводности является типичным примером многих физических ситуаций, и действительно, уравнение (1.8) описывает и другие задачи, например следующие.

1. Безвихревое течение идеальной жидкости. Если положить  $k=1$ ,  $Q=0$ , то уравнение (1.8) сведется к простому уравнению Лапласа

$$\partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2 \equiv \nabla^2\varphi = 0, \quad (1.10)$$

описывающему распределение потенциала в безвихревом течении идеальной жидкости.

2. Течение жидкости через пористую среду. Здесь полагается  $Q=0$  и  $k$  отождествляется с проницаемостью среды. Тогда гидродинамический напор  $\varphi$  удовлетворяет уравнению (1.8).

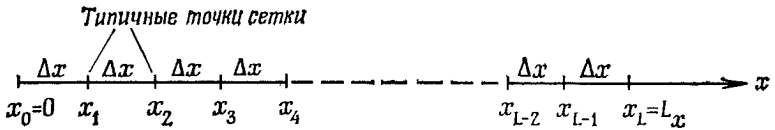
3. Малые деформации мембраны под действием поперечной нагрузки. При  $k=1$  и величине  $Q$ , определенной как отношение интенсивности поперечной нагрузки к натяжению мембраны, уравнение (1.8) служит для описания поперечного отклонения мембраны  $\varphi$ .

Читателю, знакомому с различными физическими и инженерными задачами, встречаются и другие приложения, и время от времени в этой книге будут рассматриваться различные приложения приведенного выше дифференциального уравнения, а также другие системы дифференциальных уравнений.

Хотя в таких случаях полное исследование происхождения и вывода таких уравнений может не всегда быть очевидным всем читателям, можно надеяться, что процедуры математической дискретизации, выбранные для получения решения, будут ясны во всех случаях.

### 1.3. Конечные разности в одномерном случае

Предположим, что решается просто одномерная краевая задача, т. е. требуется определить функцию  $\varphi(x)$ , удовлетворяющую заданному дифференциальному уравнению на отрезке  $0 \leq x \leq L_x$  вместе с надлежащими краевыми условиями при  $x=0$  и  $x=L_x$ . Как было только что показано, типичным примером такого рода задачи является задача вычисления распределения температуры  $\varphi(x)$  в плите толщиной  $L_x$  из материала с коэффициентом теплопроводности  $k$ ; на плоскостях  $x=0$  и  $x=L_x$ , ограничивающих плиту, сохраняются заданные значения темпера-

Рис. 1.2. Построение конечно-разностной сетки на отрезке  $0 \leq x \leq L_x$ .

туры  $\bar{\varphi}_0$  и  $\bar{\varphi}_{L_x}$  соответственно, и в плите генерируется тепло со скоростью  $Q(x)$  на единицу толщины. Дифференциальное уравнение для этой задачи задается уравнением (1.9), которое при предположении, что теплопроводность материала постоянна, сводится к уравнению

$$k d^2 \varphi / dx^2 = -Q(x). \quad (1.11)$$

Соответствующие краевые условия задаются равенствами вида (1.5) и могут быть записаны в виде

$$\varphi(0) = \bar{\varphi}_0, \quad \varphi(L_x) = \bar{\varphi}_{L_x}. \quad (1.12)$$

Для решения этой задачи методом конечных разностей прежде всего производится *дискретизация* независимой переменной  $x$ , т. е. строится множество (или *сетка*)  $L+1$  дискретных равноотстоящих точек  $x_l$  ( $l=0, 1, 2, \dots, L$ ) на отрезке  $0 \leq x \leq L_x$  (см. рис. 1.2) с  $x_0=0$ ,  $x_L=L_x$  и  $x_{l+1}-x_l=\Delta x$ .

Следующий шаг состоит в замене в дифференциальном уравнении членов, содержащих дифференцирование, членами, в которых используются только алгебраические операции. Этот процесс по необходимости включает аппроксимацию и может быть выполнен путем использования конечно-разностных аппроксимаций для производных функции. Обсудим теперь способ, которым могут быть осуществлены такие аппроксимации.

### 1.3.1. Конечно-разностные аппроксимации производных

Пользуясь разложением по формуле Тейлора, можно записать

$$\varphi(x_{l+1}) = \varphi(x_l + \Delta x) = \varphi(x_l) + \Delta x \left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{x=x_l} + (\Delta x^2/2) \left. \frac{d^2\varphi}{dx^2} \right|_{x=x_l + \theta_1 \Delta x}, \quad (1.13)$$

где  $\theta_1$  — некоторое число,  $0 \leq \theta_1 \leq 1$ . Используя нижний индекс  $l$  для значения в точке  $x = x_l$ , это соотношение можно переписать в виде

$$\varphi_{l+1} = \varphi_l + \Delta x \left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_l + (\Delta x^2/2) \left. \frac{d^2\varphi}{dx^2} \right|_{l+\theta_1}, \quad (1.14)$$

и, следовательно,

$$\left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_l = (\varphi_{l+1} - \varphi_l) / \Delta x - (\Delta x/2) \left. \frac{d^2\varphi}{dx^2} \right|_{l+\theta_1}. \quad (1.15)$$

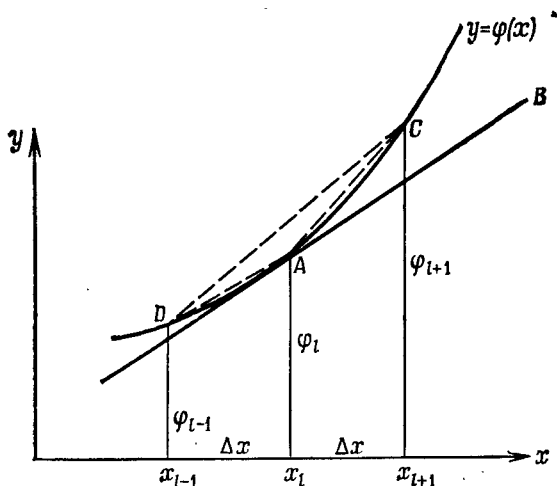


Рис. 1.3. Графическая интерпретация некоторых конечно-разностных аппроксимаций для  $d\varphi/dx|_l$ . Разность вперед соответствует наклону  $AC$ ; разность назад — наклону  $DA$ ; центральная разность — наклону  $DC$ .

Это ведет к так называемой аппроксимации *разностью вперед* для первой производной функции, когда

$$d\varphi/dx|_l \approx (\varphi_{l+1} - \varphi_l)/\Delta x. \quad (1.16)$$

Нетрудно видеть, что погрешность  $E$  такой аппроксимации задается выражением

$$E = -(\Delta x/2) d^2\varphi/dx^2|_{l+\theta_1}, \quad (1.17)$$

и так как  $E$  пропорциональна  $\Delta x$ , то говорят, что эта погрешность равна  $O(\Delta x)$ . Так указывается *порядок* погрешности.

Из этого выражения нельзя получить точную величину погрешности, так как фактическое значение  $\theta_1$  неизвестно, однако

$$|E| \leq (\Delta x/2) \max_{[x_l, x_{l+1}]} |d^2\varphi/dx^2|. \quad (1.18)$$

Рис. 1.3 дает графическую интерпретацию полученной аппроксимации. Первая производная от  $\varphi(x)$  в  $x = x_l$  равна наклону касательной к кривой  $y = \varphi(x)$  в этой точке, т. е. наклону прямой  $AB$ . Аппроксимация разностью вперед равна наклону прямой  $AC$ , и нетрудно видеть, что с уменьшением шага сетки  $\Delta x$  наклон этой прямой аппроксимирует наклон прямой  $AB$ .

Аналогичным образом, пользуясь разложением по формуле Тейлора, получим

$$\varphi_{l-1} = \varphi_l - \Delta x d\varphi/dx|_l + (\Delta x^2/2) d^2\varphi/dx^2|_{l-\theta_2}, \quad (1.19)$$

где  $0 \leq \theta_2 \leq 1$ . Переписывая это соотношение в виде

$$d\varphi/dx|_l = (\varphi_l - \varphi_{l-1})/\Delta x + (\Delta x/2) d^2\varphi/dx^2|_{l-\theta_2}, \quad (1.20)$$

можно получить аппроксимацию *разностью назад*

$$d\varphi/dx|_l \approx (\varphi_l - \varphi_{l-1})/\Delta x. \quad (1.21)$$

Погрешность  $E$  этой аппроксимации снова имеет порядок  $O(\Delta x)$ , и

$$|E| \leq (\Delta x/2) \max_{[x_{l-1}, x_l]} |d^2\varphi/dx^2|. \quad (1.22)$$

Графическое представление аппроксимации разностью назад можно видеть на рис. 1.3; теперь наклон прямой  $AB$  аппроксимируется наклоном прямой  $AD$ .

Для обеих аппроксимаций разностями (вперед и назад) погрешность имеет один и тот же порядок  $O(\Delta x)$ . Однако если разложения (1.14) и (1.19) заменить на

$$\varphi_{l+1} = \varphi_l + \Delta x \frac{d\varphi}{dx}|_l + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{d^2\varphi}{dx^2}|_l + \frac{\Delta x^3}{6} \frac{d^3\varphi}{dx^3}|_{l+\theta_3}, \quad (1.23a)$$

$$0 \leq \theta_3 \leq 1,$$

$$\varphi_{l-1} = \varphi_l - \Delta x \frac{d\varphi}{dx}|_l + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{d^2\varphi}{dx^2}|_l - \frac{\Delta x^3}{6} \frac{d^3\varphi}{dx^3}|_{l+\theta_4}, \quad (1.23б)$$

$$0 \leq \theta_4 \leq 1,$$

то более точное представление для первой производной можно получить вычитанием равенства (1.23б) из равенства (1.23а). Результирующее уравнение

$$\varphi_{l+1} - \varphi_{l-1} = 2\Delta x \frac{d\varphi}{dx}|_l + \frac{\Delta x^3}{6} \left( \frac{d^3\varphi}{dx^3}|_{l+\theta_3} + \frac{d^3\varphi}{dx^3}|_{l-\theta_4} \right) \quad (1.24)$$

может быть использовано для получения аппроксимации *центральной разностью*

$$d\varphi/dx|_l \approx (\varphi_{l+1} - \varphi_{l-1})/(2\Delta x); \quad (1.25)$$

для погрешности  $E$  этой аппроксимации имеем

$$|E| \leq (\Delta x^2/6) \max_{[x_{l-1}, x_{l+1}]} |d^3\varphi/dx^3|. \quad (1.26)$$

Так как здесь погрешность имеет порядок  $O(\Delta x^2)$ , это представление должно быть лучше, чем аппроксимации разностями вперед и назад. Это тоже видно на рис. 1.3, где графическая интерпретация состоит в том, что наклон прямой  $AB$  аппроксимируется

наклоном прямой  $DC$ . Складывая разложения в ряд Тейлора

$$\varphi_{l+1} = \varphi_l + \Delta x \left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_l + \frac{\Delta x^2}{2} \left. \frac{d^2\varphi}{dx^2} \right|_l + \frac{\Delta x^3}{6} \left. \frac{d^3\varphi}{dx^3} \right|_l + \frac{\Delta x^4}{24} \left. \frac{d^4\varphi}{dx^4} \right|_{l+\theta_s},$$

$$0 \leq \theta_s \leq 1, \quad (1.27a)$$

$$\varphi_{l-1} = \varphi_l - \Delta x \left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_l + \frac{\Delta x^2}{2} \left. \frac{d^2\varphi}{dx^2} \right|_l - \frac{\Delta x^3}{6} \left. \frac{d^3\varphi}{dx^3} \right|_l + \frac{\Delta x^4}{24} \left. \frac{d^4\varphi}{dx^4} \right|_{l-\theta_s},$$

$$0 \leq \theta_s \leq 1, \quad (1.27b)$$

обнаруживаем, что члены с первой и третьей производными взаимно уничтожаются. В результате имеем

$$\left. \frac{d^2\varphi}{dx^2} \right|_l = \frac{\varphi_{l+1} - 2\varphi_l + \varphi_{l-1}}{\Delta x^2} - \frac{\Delta x^2}{24} \left( \left. \frac{d^4\varphi}{dx^4} \right|_{l+\theta_s} + \left. \frac{d^4\varphi}{dx^4} \right|_{l-\theta_s} \right), \quad (1.28)$$

и, таким образом, вторую производную можно аппроксимировать выражением

$$d^2\varphi/dx^2|_l \approx (\varphi_{l+1} - 2\varphi_l + \varphi_{l-1})/(\Delta x^2). \quad (1.29)$$

Погрешность  $E$  этой аппроксимации имеет порядок  $O(\Delta x^2)$ , причем

$$|E| \leq (\Delta x^2/12) \max_{[x_{l-1}, x_{l+1}]} |d^4\varphi/dx^4|. \quad (1.30)$$

Эти аппроксимации первой и второй производных достаточны для наших последующих целей. Аппроксимации (возрастающей сложности) производных более высоких порядков, если они потребуются, можно получить аналогичным образом. Вкратце это будет рассмотрено далее; см. § 1.10.

### 1.3.2. Решение дифференциального уравнения методом конечных разностей

Записывая уравнение (1.11) в типичной точке сетки  $x_l$ , имеем точное равенство

$$k d^2\varphi/dx^2|_l = -Q_l \quad (1.31)$$

и, используя аппроксимацию (1.29) для второй производной, приходим к уравнению

$$k(\varphi_{l+1} - 2\varphi_l + \varphi_{l-1})/(\Delta x^2) = -Q_l. \quad (1.32)$$

Уравнение такого типа получается в любой внутренней точке  $x_l$  ( $l = 1, 2, \dots, L-1$ ) конечно-разностной сетки. Выписав все эти уравнения (с изменением знака и с учетом краевых условий (1.12)),



получим

$$\begin{aligned}
 -\varphi_2 + 2\varphi_1 &= \Delta x^2 Q_1/k + \bar{\varphi}_0, \\
 -\varphi_3 + 2\varphi_2 - \varphi_1 &= \Delta x^2 Q_2/k, \\
 -\varphi_4 + 2\varphi_3 - \varphi_2 &= \Delta x^2 Q_3/k, \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 -\varphi_{L-1} + 2\varphi_{L-2} - \varphi_{L-3} &= \Delta x^2 Q_{L-2}/k, \\
 2\varphi_{L-1} - \varphi_{L-2} &= \Delta x^2 Q_{L-1}/k + \bar{\varphi}_{Lx}.
 \end{aligned} \tag{1.33}$$

Если  $\varphi$  — вектор-столбец, представляющий собой транспонированную вектор-строку  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{L-1})$ , то эту систему уравнений можно записать как одно векторное уравнение

$$K\varphi = f, \tag{1.34}$$

где

$$K = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \tag{1.35}$$

$$f = \begin{bmatrix} (\Delta x^2/k) Q_1 + \bar{\varphi}_0 \\ (\Delta x^2/k) Q_2 \\ \vdots \\ (\Delta x^2/k) Q_{L-1} + \bar{\varphi}_{Lx} \end{bmatrix}. \tag{1.36}$$

Таким образом, исходная задача определения неизвестной непрерывной функции  $\varphi(x)$  заменяется задачей решения векторного уравнения относительно дискретного множества значений  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_{L-1}$ .

Конечно-разностный метод, следовательно, дает информацию о значениях функции в узлах сетки, но не дает никакой информации о значениях функции между этими точками. В действительности дифференциальное уравнение аппроксимируется только в дискретном числе точек, а не на всем интервале.

Можно эффективно вычислить решение уравнения (1.34), если заметить, что матрица  $K$  симметрична, положительно определена и трехдиагональна, а затем использовать алгоритм обращения,

специально разработанный для таких систем уравнений [2]<sup>1)</sup>. Необходимо заметить, что полученное решение  $\varphi$  только аппроксимированное точное решение исходной задачи, так как аппроксимация состоит в замене уравнения (1.31) уравнениями (1.32). Однако тот факт, что погрешность аппроксимации имеет порядок  $O(\Delta x^2)$ , указывает на уменьшение погрешности при уменьшении шага сетки и получение все более точного решения<sup>2)</sup>.

Практическое использование конечно-разностного метода теперь будет продемонстрировано путем применения намеченной выше общей теории к простому конкретному случаю.

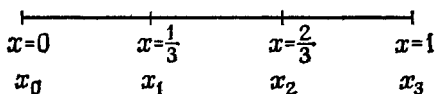


Рис. 1.4. Конечно-разностная сетка, используемая в примерах 1.1 и 1.2.

**Пример 1.1.** Требуется найти решение уравнения  $d^2\varphi/dx^2 - \varphi = 0$ , удовлетворяющее крайним условиям  $\varphi = 0$  при  $x = 0$  и  $\varphi = 1$  при  $x = 1$ . Шаг сетки  $\Delta x = 1/3$ , как показано на рис. 1.4, и решение может быть найдено конечно-разностным методом.

Единственными неизвестными являются  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , значения решения в точках  $x = 1/3$  и  $x = 2/3$  соответственно, тогда как заданные крайние условия дают  $\varphi_0 = 0$  и  $\varphi_3 = 1$ .

Уравнение, записанное в произвольной точке сетки  $x_l$ , имеет вид

$$d^2\varphi/dx^2|_l - \varphi_l = 0$$

и, согласно аппроксимации (1.29), может быть выражено в конечно-разностной форме так:

$$\varphi_{l+1} - 2\varphi_l + \varphi_{l-1} - \Delta x^2\varphi_l = 0.$$

Используя это уравнение для  $l = 1$  и  $l = 2$ , т. е. для двух внутренних точек, и учитывая крайние условия, имеем систему

$$-\varphi_2 + 2\frac{1}{9}\varphi_1 = 0,$$

$$2\frac{2}{9}\varphi_2 - \varphi_1 = 1$$

с решением  $\varphi_1 = 0.2893$ ,  $\varphi_2 = 0.6107$ .

<sup>1)</sup> Этот метод называется методом прогонки (см. Бахвалов Н. С. Численные методы: Анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения.— 2-е изд.— М.: Наука, 1975, а также Самарский А. А. Введение в численные методы.— М.: Наука, 1983).— *Прим. ред.*

<sup>2)</sup> Для стремления ошибки к нулю при измельчении сетки существенно, кроме того, чтобы конечно-разностный метод был корректным (см. Березин Н. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Том 2.— 2-е изд.— М.: Физматгиз, 1982).— *Прим. ред.*

Читатель может легко получить аналитическое решение для этого простого примера и сравнить приведенные выше результаты с точными значениями в узлах сетки 0.2889 и 0.6102 соответственно.

Если вычисление повторить при  $\Delta x = 1/6$ , то решение полученной системы уравнений даст значения 0.2890 и 0.6104 для конечно-разностных аппроксимаций значений  $\varphi$  при  $x = 1/3$  и  $x = 2/3$  соответственно. Налицо повышение точности конечно-разностных аппроксимаций с уменьшением шага сетки.

## Упражнения

1.1. Решить уравнение  $d^2\varphi/dx^2 + \varphi = 0$  с краевыми условиями  $\varphi = 1$  при  $x = 0$  и  $\varphi = 0$  при  $x = 1$ , используя шаг сетки  $\Delta x = 0.25$ . Сравнить полученное конечно-разностное решение с точным решением.

1.2. Распределение изгибающего момента  $M$  в балке под действием распределенной поперечной нагрузки  $w(x)$  на единицу длины удовлетворяет уравнению  $d^2M/dx^2 = w(x)$ . Балка единичной длины свободно опирается (т. е.  $M = 0$ ) на обоих концах и несет нагрузку  $w(x) = \sin \pi x$  на единицу длины. Вычислить распределение изгибающего момента конечно-разностным методом, используя шаг сетки  $\Delta x = 0.25$ .

1.3. Уравнение, описывающее изменение температуры  $T$  в вязкой жидкости, текущей между двумя параллельными пластинами ( $y = 0$  и  $y = 2H$ ), имеет вид

$$d^2T/dy^2 = -[4U^2\mu/(H^4k)](H - y)^2,$$

где  $\mu$ ,  $k$  и  $U$  — коэффициент вязкости, коэффициент теплопроводности и максимальная скорость жидкости соответственно. Пусть  $\mu = 0.1$ ,  $k = 0.08$ ,  $H = 3.0$  и  $U = 3.0$ . Используя конечно-разностный метод и шаг сетки  $\Delta y = 0.5H$ , вычислить распределение температуры, если на одной пластине поддерживается температура  $T = 0$ , а на другой  $T = 5$ .

1.4. Трос с натяжением  $T$  закрепляется концами  $x = 0$  и  $x = 1$  и покоится на упругом основании жесткостью  $k$ . Когда трос подвергается поперечной нагрузке  $w$  на единицу длины, его отклонение  $\varphi$  удовлетворяет уравнению  $d^2\varphi/dx^2 - k\varphi/T = -w/T$ . Решить это уравнение конечно-разностным методом для случая  $k/T = 1$ ,  $w/T = 1$ , используя шаг сетки  $\Delta x = 0.1$  и подходящую программу для ЭВМ. Сравнить решение с точным ответом для этой задачи.

1.5. На конечно-разностной сетке с шагом  $\Delta x$  первая производная заменяется аппроксимацией  $d\varphi/dx|_i \approx a\varphi_{i+1} + b\varphi_i$ , где  $a$  и  $b$  — постоянные. Показать, что если требуется, чтобы эта аппроксимация была точна каждый раз, когда  $\varphi$  — линейная функция от  $x$ , то  $a = 1/\Delta x$ ,  $b = -1/\Delta x$ , т. е. имеет место метод с разностями вперед. Показать, что если то же самое требование применяется к аппроксимации  $d\varphi/dx|_i \approx a\varphi_i + b\varphi_{i-1}$ , то результатом будет метод с разностями назад. (Указание. Сначала сдвинуть начало координат в  $x = x_i$ , используя замену переменной  $x = x - x_i$ , и затем потребовать, чтобы аппроксимация была точной для функций  $\varphi = 1$  и  $\varphi = x$ .)

1.6. Доказать, что если аппроксимация  $d^2\varphi/dx^2|_i \approx a\varphi_{i+1} + b\varphi_i + c\varphi_{i-1}$  точна каждый раз, когда  $\varphi$  — квадратичная функция от  $x$ , то  $a$ ,  $b$  и  $c$  таковы, что аппроксимация совпадает с приведенной в формуле (1.29). Показать, что эта аппроксимация точна и в том случае, когда  $\varphi$  — кубический многочлен.

1.7. Построить аппроксимацию

$$d\varphi/dx|_i \approx a\varphi_{i+2} + b\varphi_{i+1} + c\varphi_i + d\varphi_{i-1} + e\varphi_{i-2},$$

потребовав, чтобы аппроксимация была точна, если  $\varphi$  — многочлен четвертой степени от  $x$ . Каков порядок погрешности этой аппроксимации?

### 1.4. Задача Неймана

В реальных задачах одно (или более) из соответствующих краевых условий часто может быть выражено через производную; например, возвращаясь к задаче теплопроводности из § 1.3, предположим, что на поверхности плиты  $x=L_x$  задан поток тепла  $\bar{q}$  через эту поверхность (т. е. имеет место условие вида (1.6)). В силу (1.6) соответствующее условие при  $x=L_x$  теперь выражает задание в этой точке не самой температуры, но ее градиента:

$$-k \, d\varphi/dx = \bar{q} \quad \text{при } x=L_x. \quad (1.37)$$

Тогда, повторив вычисления предыдущего параграфа и записав конечно-разностное уравнение в каждой внутренней точке, получим

$$\begin{aligned} -\varphi_2 + 2\varphi_1 &= \Delta x^2 Q_1/k + \bar{\varphi}_0, \\ -\varphi_3 + 2\varphi_2 - \varphi_1 &= \Delta x^2 Q_2/k, \\ -\varphi_4 + 2\varphi_3 - \varphi_2 &= \Delta x^2 Q_3/k, \\ &\vdots \\ &\vdots \\ -\varphi_{L-1} + 2\varphi_{L-2} - \varphi_{L-3} &= \Delta x^2 Q_{L-2}/k, \\ -\varphi_L + 2\varphi_{L-1} - \varphi_{L-2} &= \Delta x^2 Q_{L-1}/k. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Так как теперь  $\varphi_L$  неизвестно, мы имеем систему из  $L-1$  уравнений с  $L$  неизвестными  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_L$ . Недостающее уравнение обеспечивается краевым условием (1.37), которое может быть записано как

$$d\varphi/dx|_L = -\bar{q}/k. \quad (1.39)$$

Если производная аппроксимируется разностью назад по формуле (1.21), то это условие принимает вид

$$(\varphi_L - \varphi_{L-1})/\Delta x = -\bar{q}/k \quad (1.40)$$

и вместе с уравнениями (1.38) дает замкнутую систему  $L$  уравнений для неизвестных  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_L$ .

**Пример 1.2.** Вернемся к уравнению, рассмотренному в примере 1.1, наложив теперь краевые условия  $\varphi=0$  при  $x=0$  и  $d\varphi/dx=1$  при  $x=1$ . Если использована конечно-разностная сетка, изображенная на рис. 1.4, то неизвестными являются  $\varphi_1, \varphi_2$  и  $\varphi_3$ , тогда как краевые условия дают  $\varphi_0=0$ ,  $d\varphi/dx|_3=1$ .

Конечно-разностная аппроксимация дифференциального уравнения при  $x_1$  и  $x_2$  принимает вид

$$\begin{aligned} -\varphi_2 + 2\frac{1}{9}\varphi_1 &= 0, \\ -\varphi_3 + 2\frac{1}{9}\varphi_2 - \varphi_1 &= 0. \end{aligned}$$

Используя для заданной на границе производной представление разностью назад, имеем

$$(\varphi_3 - \varphi_2)/(1/3) = 1.$$

Нетрудно получить решение этой системы уравнений  $\varphi_1 = 0.2477$ ,  $\varphi_2 = 0.5229$ ,  $\varphi_3 = 0.8563$  (точным решением в данном случае будет 0.2200, 0.4648 и 0.7616).

В проведенных выше построениях есть определенная несогласованность, состоящая в том, что дифференциальное уравнение аппроксимируется с погрешностью  $O(\Delta x^2)$ , тогда как при представлении производной разностью назад погрешность аппроксимации краевого условия имеет порядок  $O(\Delta x)$ . Этот недостаток может быть исправлен путем другой аппроксимации производной на границе. Вначале введем фиктивную точку сетки  $x_{L+1} (= x_L + \Delta x)$  с соответствующей «температурой»  $\varphi_{L+1}$ . Эта «температура» не имеет физического смысла, так как точка  $x_{L+1}$  лежит вне рассматриваемой плиты. Тогда можно записать конечно-разностное представление дифференциального уравнения в каждой точке  $x_l$  ( $l = 1, 2, \dots, L$ ) и получить

$$\begin{aligned} -\varphi_2 + 2\varphi_1 &= \Delta x^2 Q_1/k + \bar{\varphi}_0, \\ -\varphi_3 + 2\varphi_2 - \varphi_1 &= \Delta x^2 Q_2/k, \\ -\varphi_4 + 2\varphi_3 - \varphi_2 &= \Delta x^2 Q_3/k, \\ &\vdots \\ &\vdots \\ -\varphi_L + 2\varphi_{L-1} - \varphi_{L-2} &= \Delta x^2 Q_{L-1}/k, \\ -\varphi_{L+1} + 2\varphi_L - \varphi_{L-1} &= \Delta x^2 Q_L/k, \end{aligned} \quad (1.41)$$

т. е. систему  $L$  уравнений для  $L+1$  неизвестных  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{L+1}$ . Недостающее уравнение снова обеспечивается краевым условием при  $x=L_x$ , но вместо представления разностью назад, использованного ранее в уравнении (1.40), теперь применяется аппроксимация центральной разностью. Это означает, что мы имеем

$$d\varphi/dx|_L \approx (\varphi_{L+1} - \varphi_{L-1})/(2\Delta x) \quad (1.42)$$

и соответствующей формой краевого условия из уравнения (1.37) будет

$$\varphi_{L+1} - \varphi_{L-1} = -2\bar{q}\Delta x/k. \quad (1.43)$$

Таким образом, дифференциальное уравнение и краевое условие могут быть аппроксимированы с одним и тем же порядком погрешности.

Читатель заметит, что полученная система уравнений, записан-

ная в векторной форме (1.34), утрачивает симметричность; в вычислительном отношении этот момент достаточно важен.

**Пример 1.3.** Рассмотрим теперь еще раз задачу, решенную в примере 1.2, используя для производной на границе при  $x=1$  аппроксимацию центральной разностью. При том же самом шаге

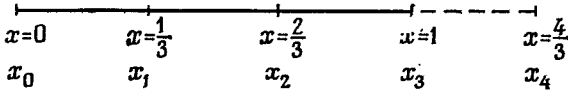


Рис. 1.5. Конечно-разностная сетка, используемая в примере 1.3.

сетки  $\Delta x=1/3$  необходимо ввести фиктивную точку сетки  $x_4$  с соответствующим значением «решения»  $\varphi_4$ , как показано на рис. 1.5.

Конечно-разностная форма дифференциального уравнения в точках  $x_1, x_2, x_3$  дает

$$\begin{aligned} -\varphi_2 + 2\frac{1}{9}\varphi_1 &= 0, \\ -\varphi_3 + 2\frac{1}{9}\varphi_2 - \varphi_1 &= 0, \\ -\varphi_4 + 2\frac{1}{9}\varphi_3 - \varphi_2 &= 0, \end{aligned}$$

где использовано краевое условие  $\varphi_0=0$ . Применение центральной разности для производной на границе в  $x_3$  приводит к дополнительному соотношению

$$(\varphi_4 - \varphi_2)/(2/3) = 1.$$

Решение этой системы уравнений имеет вид  $\varphi_1=0.2168$ ,  $\varphi_2=0.4576$ ,  $\varphi_3=0.7493$  и, как можно видеть, гораздо точнее решения, численного в примере 1.2 при представлении производной на границе разностью назад.

## Упражнения

1.8. Решить уравнение  $d^2\varphi/dx^2 + \varphi = x$  с краевыми условиями  $\varphi=0$  при  $x=0$  и  $d\varphi/dx + \varphi=0$  при  $x=1$ , используя подходящий шаг сетки.

1.9. Решить задачу на упражнении 1.3, но со следующими краевыми условиями: на одной пластине поддерживается температура  $T=0$ , а через другую теплообмена отсутствует (т. е.  $dT/dy=0$ ).

1.10. Рассмотреть одномерную установившуюся теплопередачу в стержне длиной 10 см и диаметром 1 см. На одном конце стержня поддерживается температура  $50^\circ\text{C}$ , тогда как тепловая энергия поступает через другой конец со скоростью  $200 \text{ Вт/см}^2$ . Пусть  $k=75 \text{ Вт/см}^\circ\text{C}$  и тепло генерируется в стержне со скоростью  $150 T \text{ Вт/см}^2$  на единицу длины, где  $T$  — температура. Вычислить распределение температуры, используя конечно-разностный метод с шагом сетки  $\Delta x=1.0 \text{ см}$ .

### 1.5. Нелинейные задачи

При математическом моделировании физических задач часто приходится иметь дело с дифференциальными уравнениями (или) краевыми условиями, которые по своей природе являются нелинейными. В то время как аналитические методы решения линейных уравнений при попытке применения их к нелинейным дифференциальным уравнениям обычно не работают, метод конечных разностей без каких-либо модификаций может быть использован и для линейных, и для нелинейных задач. Мы уже видели, что применение метода конечных разностей к линейным краевым задачам требует решения системы линейных уравнений вида (1.34). В случае нелинейной краевой задачи применение метода конечных разностей дает систему нелинейных алгебраических уравнений.

Возвращаясь к примеру уравнения теплопроводности из § 1.3, можно рассмотреть физически реальную задачу, когда коэффициент теплопроводности  $k$  является заданной функцией температуры  $\varphi$  и физический процесс описывается нелинейным уравнением

$$d[k(\varphi) d\varphi/dx]/dx = -Q(x). \quad (1.44)$$

Используя теперь аппроксимацию центральной разностью, можно записать

$$d\psi/dx|_l = (\psi_{l+1/2} - \psi_{l-1/2})/\Delta x, \quad (1.45)$$

где индекс  $l+1/2$  указывает на вычисление в средней точке между  $x_l$  и  $x_{l+1}$ , а индекс  $l-1/2$  определен аналогично. Таким образом, если взять  $\psi = k(\varphi) d\varphi/dx$ , то исходное дифференциальное уравнение может быть заменено конечно-разностной аппроксимацией

$$k(\varphi_{l+1/2}) d\varphi/dx|_{l+1/2} - k(\varphi_{l-1/2}) d\varphi/dx|_{l-1/2} = \Delta x Q_l, \quad (1.46)$$

а изменение знака и замена соответствующих производных центральными разностями дает

$$-k(\varphi_{l+1/2}) [\varphi_{l+1} - \varphi_l] + k(\varphi_{l-1/2}) [\varphi_l - \varphi_{l-1}] = \Delta x^2 Q_l. \quad (1.47)$$

Таким образом, применение метода конечных разностей к исходному нелинейному дифференциальному уравнению приводит к системе нелинейных алгебраических уравнений<sup>1)</sup>

$$-k(\varphi_{l+1/2}) \varphi_{l+1} + [k(\varphi_{l+1/2}) + k(\varphi_{l-1/2})] \varphi_l - k(\varphi_{l-1/2}) \varphi_{l-1} = \Delta x^2 Q_l, \quad l = 1, 2, \dots, L-1. \quad (1.48)$$

Необходимо отметить, что при постоянном  $k$  это уравнение сводится к уравнению (1.32). Определяя, как и ранее, вектор-столбцы  $\varphi$  и  $\mathbf{f}$ , решение можно получить из системы нелинейных уравне-

<sup>1)</sup> Значения  $k(\varphi_{l\pm 1/2})$  каким-либо образом выражаются через значения  $\varphi_j$  при целых  $j$ ; см. пример 1.4, — Прим. ред.

ний, которую удобно записать в виде

$$K(\varphi)\varphi = f. \quad (1.49)$$

Искомое решение можно получить многими стандартными методами, к сожалению итерационными и часто дорогостоящими. Подробности таких процедур [3] здесь обсуждаться не будут. Ограничимся рассмотрением одного из простейших и наиболее прозрачных методов—метода простой итерации, когда система уравнений (1.49) многократно решается с последовательным уточнением значений  $K(\varphi)$ .

Если исходить из некоторого начального приближения

$$\varphi = \varphi_0 \quad (1.50)$$

и вычислить матрицу

$$K(\varphi_0) = K_0, \quad (1.51)$$

то улучшенная аппроксимация для  $\varphi (= \varphi_1)$  может быть получена как

$$\varphi_1 = K_0^{-1}f. \quad (1.52)$$

Этот процесс очевидным образом может быть продолжен по правилу

$$\varphi_n = K_{n-1}^{-1}f \quad (1.53)$$

до тех пор, пока разность между  $\varphi_n$  и  $\varphi_{n-1}$  не станет достаточно мала. Такой подход к решению нелинейных систем лучше всего проиллюстрировать на конкретном примере.

**Пример 1.4.** Пусть требуется решить уравнение

$$d[kd\varphi/dx]/dx = -10x,$$

где  $\varphi = 0$  при  $x = 0$ ,  $x = 1$  и  $k = 1 + 0.1\varphi$ . Здесь, как и в примере 1.1, выбрано значение  $\Delta x = 1/3$ , и, используя равенства (1.48), конечно-разностное уравнение при  $x = x_l$  можно записать в виде

$$-k_{l+1/2}\varphi_{l+1} + (k_{l+1/2} + k_{l-1/2})\varphi_l - k_{l-1/2}\varphi_{l-1} = 10x_l\Delta x^2.$$

Отсюда при  $l = 1, 2$  с учетом краевых условий  $\varphi_0 = \varphi_3 = 0$  имеем

$$\begin{aligned} -k_{3/2}\varphi_2 + (k_{3/2} + k_{1/2})\varphi_1 &= 10x_1\Delta x^2, \\ (k_{5/2} + k_{3/2})\varphi_2 - k_{3/2}\varphi_1 &= 10x_2\Delta x^2. \end{aligned}$$

Однако по определению  $k_{3/2} = 1 + 0.1\varphi_{3/2}$ , т. е. используется значение  $\varphi$  в средней точке между узлами сетки  $x_1$  и  $x_2$ . Один из способов для получения этого значения состоит в использовании аппроксимации

$$\varphi_{3/2} \approx (\varphi_1 + \varphi_2)/2,$$

что дает

$$k_{3/2} \approx 1 + 0.1(\varphi_1 + \varphi_2)/2.$$



Если аналогично вычислить  $k_{1/2}$ ,  $k_{5/2}$ , то приведенная выше система нелинейных уравнений будет включать только два неизвестных значения  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  и можно начать итерации. Теперь

$$K(\varphi) = \begin{bmatrix} 2 + 0.05(2\varphi_1 + \varphi_2) & -1 - 0.05(\varphi_1 + \varphi_2) \\ -1 - 0.05(\varphi_1 + \varphi_2) & 2 + 0.05(\varphi_1 + 2\varphi_2) \end{bmatrix},$$

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} 10/27 \\ 20/27 \end{bmatrix},$$

и, таким образом, исходя из начального приближения  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ ,

$$K_0 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

получаем решение

$$\varphi_1 = \begin{bmatrix} 0.49383 \\ 0.61728 \end{bmatrix}.$$

Новая матрица  $K_1$  получается подстановкой этих значений в приведенную выше матрицу  $K$ , что дает

$$K_1 = \begin{bmatrix} 2.08025 & -1.05556 \\ -1.05556 & 2.08642 \end{bmatrix},$$

и теперь решением является

$$\varphi_2 = \begin{bmatrix} 0.48190 \\ 0.59883 \end{bmatrix}.$$

Повторяя этот процесс, после четырех циклов имеем

$$\varphi_4 = \begin{bmatrix} 0.48220 \\ 0.59931 \end{bmatrix};$$

путем непосредственного интегрирования уравнения читатель может убедиться в том, что это приближение совпадает с точным решением в узлах сетки с четырьмя десятичными знаками.

## Упражнения

1.11. Решить уравнение  $e^{-\varphi} d^2\varphi/dx^2 = 1$  с краевыми условиями  $\varphi = 0$  при  $x = 0$  и  $x = 1$ , используя сетку с шагом  $\Delta x = 0.25$ . Это уравнение типично для задач о распространении тепла в химически реагирующих материалах, для которых  $Q$  пропорционально  $e^\varphi$ , где  $\varphi$  — температура. Решить ту же задачу с правой частью уравнения, равной 10.

1.12. Края  $x = 0$  и  $x = 1$  плиты с коэффициентом теплопроводности  $k = 1$  поддерживаются соответственно при температуре 10 и 80°C. Используя разностную сетку с шагом 1/3, найти стационарное распределение температуры  $\varphi$ , если тепло генерируется внутри плиты со скоростью  $0.01\varphi^2$  на единицу длины.

1.13. Требуется решить уравнение  $\varphi(d\varphi/dx) = d^2\varphi/dx^2$  с крайними условиями  $\varphi = -2$  при  $x = 0$  и  $\varphi = -1$  при  $x = 1$ . Используя метод конечных разностей, предложить два различных представления, скажем  $K^1(\varphi)$  и  $K^2(\varphi)$ , матрицы  $K(\varphi)$  из уравнения (1.49) и найти выражения для элементов матриц  $K^1(\varphi)$  и  $K^2(\varphi)$ . Решить обе системы уравнений, используя метод простой итерации и шаг сетки  $\Delta x = 1/3$ . Сравнить получаемые приближения с точным решением  $\varphi = -2/(1+x)$ .

## 1.6. Конечные разности в многомерном случае

Задача аппроксимации дифференциальных уравнений с двумя и более независимыми переменными очевидным образом сложнее, однако используемые принципы идентичны применяемым в одномерном случае. Рассмотрим еще раз задачу теплопроводности, описываемую в стационарном режиме уравнением (1.8). Для простоты в качестве области  $\Omega$  возьмем прямоугольник, как показано на рис 1.6. При постоянном коэффициенте теплопроводности  $k$  описывающее физический процесс уравнение принимает вид

$$k(\partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2) = -Q(x, y). \quad (1.54)$$

Если на сторонах прямоугольника поддерживается постоянная температура  $\bar{\varphi}$ , то соответствующие крайевые условия могут быть записаны так:

$$\varphi(0, y) = \varphi(L_x, y) = \varphi(x, 0) = \varphi(x, L_y) = \bar{\varphi}. \quad (1.55)$$

Начало системы координат  $(x, y)$  находится в одной из вершин прямоугольника, а оси расположены вдоль его сторон, как показано на рис. 1.6.

Чтобы применить метод конечных разностей в этой ситуации, поступим совершенно так же, как в одномерном случае. С этой целью построим множество равноотстоящих точек сетки  $x_l$  ( $l = 0, 1, 2, \dots, L$ ) на отрезке  $0 \leq x \leq L_x$  с  $x_0 = 0$ ,  $x_L = L_x$ ,  $x_{l+1} - x_l = \Delta x$ , а также множество равноотстоящих точек  $y_m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots, M$ ) на отрезке  $0 \leq y \leq L_y$  с  $y_0 = 0$ ,  $y_M = L_y$ ,  $y_{m+1} - y_m = \Delta y$ . После этого область, где ищется решение, покрывается прямоугольной конечно-разностной сеткой: через каждую точку  $x_l$  проводятся прямые, параллельные  $Oy$ , а через каждую точку  $y_m$  — прямые, параллельные  $Ox$  (рис. 1.7). Тогда типичная точка сетки имеет координаты вида  $(x_l, y_m)$ . После этого конечно-разностный метод применяется к уравнению (1.54), т. е. входящие в это уравнение частные производные заменяются соответствующими конечно-разностными аппроксимациями.

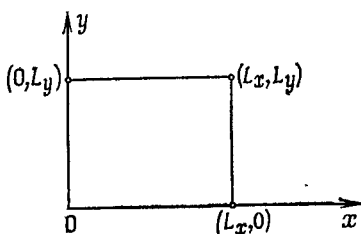


Рис. 1.6. Прямоугольная область, на которой решается стационарное уравнение теплопроводности.

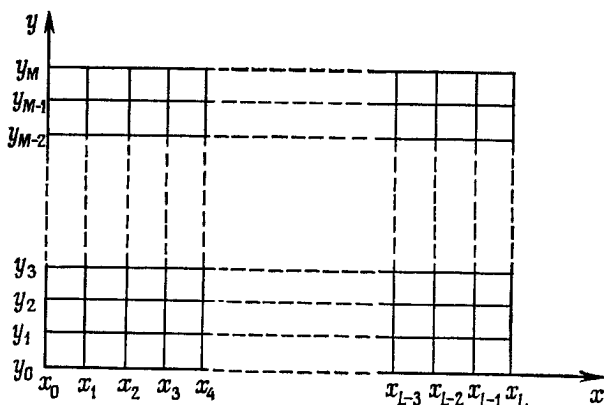


Рис. 1.7. Конечно-разностная сетка, покрывающая прямоугольную область на рис. 1.6.

### 1.6.1. Конечно-разностные аппроксимации частных производных

Используя формулу Тейлора для функции двух переменных, можно записать

$$\begin{aligned} \varphi(x_{l+1}, y_m) &= \varphi(x_l + \Delta x, y_m) = \\ &= \varphi(x_l, y_m) + \Delta x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x_l, y_m} + (\Delta x^2/2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_{x_l + \theta_1 \Delta x, y_m}, \\ & \qquad \qquad \qquad 0 \leq \theta_1 \leq 1, \end{aligned} \quad (1.56)$$

или, применяя индексы  $l, m$  для значений в точке  $(x_l, y_m)$ ,

$$\varphi_{l+1, m} = \varphi_{l, m} + \Delta x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{l, m} + (\Delta x^2/2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_{l + \theta_1, m}. \quad (1.57)$$

Поступая аналогично тому, как это было сделано в § 1.3.1, можно получить следующие результаты:

1) аппроксимацию разностью вперед для  $\partial \varphi / \partial x$ , а именно

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{l, m} \approx (\varphi_{l+1, m} - \varphi_{l, m}) / \Delta x \quad (1.58)$$

с погрешностью  $O(\Delta x)$ ;

2) аппроксимацию разностью назад для  $\partial \varphi / \partial x$ , а именно

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{l, m} \approx (\varphi_{l, m} - \varphi_{l-1, m}) / \Delta x \quad (1.59)$$

с погрешностью  $O(\Delta x)$ ;

3) аппроксимацию центральной разностью для  $\partial \varphi / \partial x$ , а именно

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{l, m} \approx (\varphi_{l+1, m} - \varphi_{l-1, m}) / (2\Delta x) \quad (1.60)$$

с погрешностью  $O(\Delta x^2)$ ;

4) конечно-разностную аппроксимацию для  $\partial^2 \varphi / \partial x^2$ , а именно

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_{l, m} \approx (\varphi_{l+1, m} - 2\varphi_{l, m} + \varphi_{l-1, m}) / \Delta x^2 \quad (1.61)$$

с погрешностью  $O(\Delta x^2)$ .

Кроме того, используя разложение по формуле Тейлора для  $\varphi(x_l, y_m \pm \Delta y)$ , можно получить аналогичные выражения для конечно-разностных аппроксимаций  $\partial\varphi/\partial y$  и  $\partial^2\varphi/\partial y^2$ .

### 1.6.2. Решение уравнения с частными производными методом конечных разностей

Записывая уравнение (1.54) в типичной точке сетки  $(x_l, y_m)$ , а именно

$$k(\partial^2\varphi/\partial x^2|_{l,m} + \partial^2\varphi/\partial y^2|_{l,m}) = -Q_{l,m}, \quad (1.62)$$

и используя аппроксимацию вида (1.61) для вторых производных, имеем

$$k \left[ \frac{\varphi_{l+1,m} - 2\varphi_{l,m} + \varphi_{l-1,m}}{\Delta x^2} + \frac{\varphi_{l,m+1} - 2\varphi_{l,m} + \varphi_{l,m-1}}{\Delta y^2} \right] = -Q_{l,m}. \quad (1.63)$$

Задание краевых условий означает, что

$$\begin{aligned} \varphi_{0,m} = \varphi_{L,m} = \bar{\varphi}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, M, \\ \varphi_{l,0} = \varphi_{l,M} = \bar{\varphi}, \quad l = 0, 1, 2, \dots, L. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Таким образом, записывая уравнение (1.63) в каждой внутренней точке сетки (т. е. для  $l = 1, 2, 3, \dots, L-1$ ;  $m = 1, 2, 3, \dots, M-1$ ) и привлекая краевые условия, получаем систему  $(L-1) \times (M-1)$  линейных уравнений с  $(L-1) \times (M-1)$  неизвестными  $\varphi_{1,1}, \varphi_{1,2}, \dots, \varphi_{L-1,M-1}$ . Если положить

$$\varphi_l^T = (\varphi_{l,1}, \varphi_{l,2}, \varphi_{l,3}, \dots, \varphi_{l,M-1}) \quad (1.65)$$

и

$$\varphi^T = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_{L-1}), \quad (1.66)$$

то эту систему уравнений можно представить в стандартной форме (1.34). В этом случае  $K$  — симметричная ленточная положительно определенная матрица, которую удобно записать в виде

$$K = \begin{bmatrix} \bar{K} & -I & 0 & 0 \\ -I & \bar{K} & -I & 0 \\ 0 & -I & \bar{K} & -I \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & -I & \bar{K} - I \\ & & & & & 0 & -I & \bar{K} \end{bmatrix}, \quad (1.67)$$



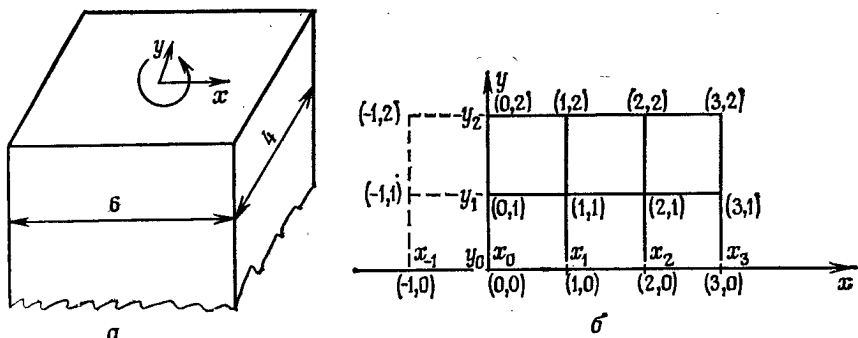


Рис. 1.8. Упругое кручение призматического стержня. *a* — стержень прямоугольного поперечного сечения; *б* — используемая конечно-разностная сетка.

В силу симметрии необходимо, чтобы  $\partial\varphi/\partial x = 0$  вдоль оси  $y$  как показано на рис. 1.8, *б*. Аналогично  $\partial\varphi/\partial y = 0$  вдоль оси  $x$ . Эти условия аппроксимируются с помощью формулы (1.42), и тогда, например, в точке  $(x_0, y_1)$  результирующее уравнение принимает вид  $\varphi_{-1,1} = \varphi_{1,1}$ .

Так как на границах  $x=3$  и  $y=2$  искомая функция принимает нулевые значения, приходим к системе уравнений с шестью неизвестными значениями  $\varphi$ , матричная запись которой такова:

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{0,0} \\ \varphi_{1,0} \\ \varphi_{2,0} \\ \varphi_{0,1} \\ \varphi_{1,1} \\ \varphi_{2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Прямой подстановкой читатель может проверить, что решением этих уравнений является

$$\varphi^T = [3.1370, 2.8866, 1.9971, 2.3873, 2.2062, 1.5508].$$

Используя правило трапеций<sup>1)</sup> в случае двух переменных, можно приближенно вычислить интеграл, определяющий крутящий момент, что дает  $T = 65.41$  (для сравнения укажем точное значение  $T = 76.4$ ). Аналогично максимальный наклон [5] будет получен в точке  $(0, 2)$ , и, таким образом, возможной аппроксимацией абсолютного значения максимума касательного напряжения будет  $|\tau_{\max}| = 2.3873$ , если использовать аппроксимацию разностью назад для производной  $\partial\varphi/\partial n$ . Этот результат тоже можно сравнить с точным максимальным значением напряжения  $|\tau_{\max}| = 2.96$ .

<sup>1)</sup> Этот и другие методы численного интегрирования подробно обсуждаются в гл. 5.

Как уже было показано, аппроксимация, полученная использованием формулы с разностью назад, менее точна, чем аппроксимация, примененная для основного дифференциального уравнения. Аппроксимацию для  $\tau_{\max}$  можно улучшить, если использовать три значения  $\varphi$  на проходящих через центр прямых  $A$  именно, обозначая точку  $(x_0, y_2)$  через  $A$ ,  $(x_0, y_1)$  через  $B$  и  $(x_0, y_0)$  через  $C$ , согласно формуле Тейлора можно записать

$$\varphi_B = \varphi_A - \Delta y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_A + \frac{1}{2} \Delta y^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \Big|_A - \frac{\Delta y^3}{6} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} \Big|_D$$

и

$$\varphi_C = \varphi_A - 2\Delta y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_A + \frac{1}{2} (2\Delta y)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \Big|_A - \frac{(2\Delta y)^3}{6} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} \Big|_E,$$

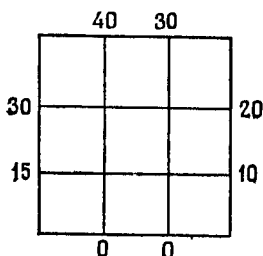
где  $D$  лежит на  $AB$ , а  $E$  — на  $AC$ .

Исключая из этих двух уравнений  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \Big|_A$ , получаем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_A = (\varphi_C - 4\varphi_B + 3\varphi_A) / (2\Delta y) + O(\Delta y^2).$$

Если правую часть этого равенства аппроксимировать первым слагаемым, погрешность будет иметь тот же порядок, что и погрешность аппроксимации основного уравнения. Проводя соответствующие вычисления, находим  $|\tau_{\max}| = 3.21$ . Этот результат ближе к точному значению, чем полученный выше при использовании аппроксимации разностью назад.

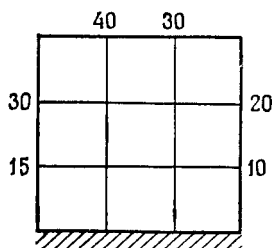
### Упражнения



К упражнению 1.14.

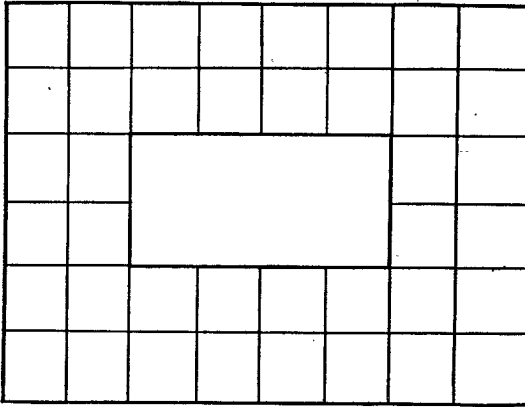
1.14. Температура на сторонах квадратной пластины сохраняет значения, приведенные на рисунке. Найти внутреннее распределение температуры, используя изображенную квадратную сетку.

1.15. Температура вдоль трех сторон квадратной пластины сохраняет значения, показанные на рисунке, тогда как четвертая сторона теплоизолирована. Найти стационарное распределение температур, используя изображенную квадратную сетку.



К упражнению 1.15.

1.16. Методом конечных разностей решить задачу распространения тепла в стенках трубы, изображенной на рисунке. Шаги сетки взяты равными  $\Delta x = \Delta y = 1$ . На внутренней границе поддерживается постоянная температура  $\varphi = 100$ , тогда как на внешней границе задано условие  $k \partial \varphi / \partial n = -\alpha \varphi$ . Рассмотреть случай  $\alpha = k = 1$ .

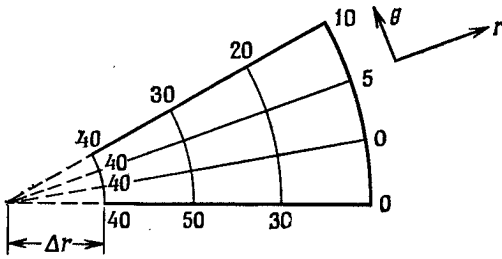


К упражнению 1.16.

1.17. Найти конечно-разностную аппроксимацию уравнения Лапласа

$$\partial^2 \varphi / \partial r^2 + (1/r) \partial \varphi / \partial r + (1/r^2) \partial^2 \varphi / \partial \theta^2 = 0$$

в полярных координатах  $(r, \theta)$ . Температура вдоль сторон сектора кругового кольца сохраняет значения, показанные на рисунке. Найти распределение температур, используя изображенную сетку с  $\Delta r = 1/4$  и  $\Delta \theta = \pi/18$ .



К упражнению 1.17.

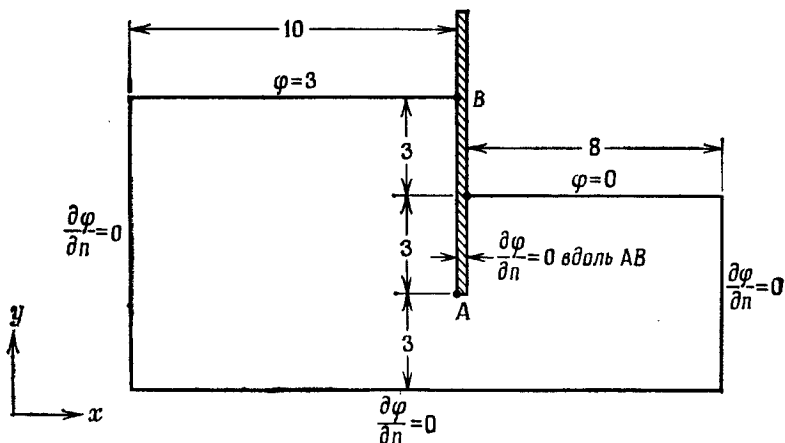
1.18. Потенциал  $\varphi$  течения грунтовых вод под перемычкой удовлетворяет уравнению

$$\partial^2 \varphi / \partial x^2 + \partial^2 \varphi / \partial y^2 = 0.$$

Найти этот потенциал в изображенной на рисунке области при указанных красных условиях. Использовать конечно-разностную сетку с  $\Delta x = 2$  и  $\Delta y = 1.5$ .

1.19. В примере 1.5 был дан способ конечно-разностной аппроксимации  $\partial \varphi / \partial y$  с погрешностью  $O(\Delta y^2)$ . Решить пример 1.2, используя такую аппроксимацию для производной, заданной на границе  $x = 1$ . Сравнить результаты с полученными в примерах 1.2 и 1.3.





К упражнению 1.18.

### 1.7. Задачи для областей неправильной формы

Рассмотренные в последнем параграфе примеры имели границы, состоящие из отрезков прямых, которые пересекались прямоугольной сеткой в точках, также являвшихся узлами сетки. Однако в случае криволинейной границы такая ситуация не имеет места и полученные ранее конечно-разностные выражения для производных вблизи границы должны быть модифицированы.

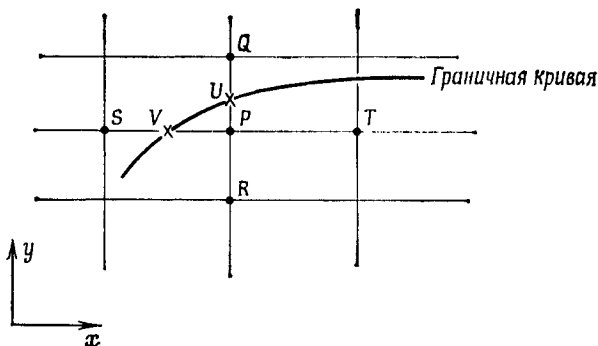


Рис. 1.9. Конечно-разностная сетка в окрестности криволинейной границы.

Предположим, что для некоторой задачи граничная кривая пересекает прямоугольную конечно-разностную сетку, как показано на рис. 1.9. Тогда  $PT = PS = \Delta x$  и  $PQ = PR = \Delta y$ . Пусть  $PU = \lambda \Delta y$  и  $PV = \mu \Delta x$  ( $0 < \lambda, \mu < 1$ ), где  $U$  и  $V$  — точки, в кото-

рых граница пересекает прямые  $PQ$  и  $PS$  соответственно. Используя формулу Тейлора, можно записать

$$\varphi_T = \varphi_P + \Delta x \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_P + \frac{\Delta x^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right|_P + \frac{\Delta x^3}{6} \left. \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \right|_{P_1} \quad (1.69)$$

и

$$\varphi_V = \varphi_P - \mu \Delta x \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_P + \frac{\mu^2 \Delta x^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right|_P - \frac{\mu^3 \Delta x^3}{6} \left. \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \right|_{P_2}, \quad (1.70)$$

где  $P_1$  — некоторая точка на  $PT$ , а  $P_2$  — некоторая точка на  $PV$ . Из этих двух уравнений получаем аппроксимации

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_P \approx \frac{\mu^2 \varphi_T - \varphi_V - (\mu^2 - 1) \varphi_P}{\mu (\mu - 1) \Delta x} \quad (1.71)$$

с погрешностью  $O(\Delta x^2)$  и

$$\left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right|_P \approx \frac{2 [\mu \varphi_T + \varphi_V - (\mu + 1) \varphi_P]}{\mu (\mu + 1) \Delta x^2} \quad (1.72)$$

с погрешностью  $O(\Delta x)$ , т. е. точность аппроксимации второй производной в окрестности границы хуже, чем во внутренних узлах сетки. Аналогичным образом можно получить аппроксимации для  $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_P$  и  $\left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right|_P$ . Таким образом, если мы пытаемся решить уравнение теплопроводности

$$k \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right] = -Q(x, y) \quad (1.73)$$

в области с криволинейной границей, вдоль которой заданы значения функции  $\varphi(x, y)$ , то аппроксимацию (1.63) можно применить в точках, не соседствующих с границей, тогда как в точках типа точки  $P$  на рис. 1.9 соответствующей конечно-разностной аппроксимацией будет уравнение

$$\frac{\mu \varphi_T + \varphi_V - (\mu + 1) \varphi_P}{\mu (\mu + 1) \Delta x^2} + \frac{\varphi_U + \lambda \varphi_R - (\lambda + 1) \varphi_P}{\lambda (\lambda + 1) \Delta y^2} = -\frac{Q_P}{2k}, \quad (1.74)$$

где значения  $\varphi_U$  и  $\varphi_V$  заданы краевыми условиями.

Ситуация становится более трудной, если краевые условия задачи дают информацию о производной функции вдоль криволинейной границы, например если при решении уравнения теплопроводности (1.73) на некоторой части  $\Gamma_q$  криволинейной границы задан поток тепла  $\bar{q}$ . Как уже было указано, соответствующее краевое условие имеет вид

$$-k \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\Gamma_q} = \bar{q}, \quad (1.75)$$

где  $n$  — направление внешней нормали к  $\Gamma_q$ . Способ решения таких задач методом конечных разностей не будет рассматриваться

в этой книге, и интересующемуся им читателю следует обратиться к другим работам [6]<sup>1)</sup>.

### 1.8. Нелинейные задачи в многомерном случае

В одномерном случае уже было показано, что метод конечных разностей с одинаковым успехом может быть применен и к линейным, и к нелинейным краевым задачам. То же самое верно и в многомерном случае. Например, если требуется решить задачу стационарной теплопроводности в поперечном сечении прямоугольного блока, теплопроводность которого зависит от температуры, то необходимо решить нелинейное уравнение

$$\partial [k(\varphi) \partial \varphi / \partial x] / \partial x + \partial [k(\varphi) \partial \varphi / \partial y] / \partial y = -Q(x, y). \quad (1.76)$$

Применение метода конечных разностей с использованием аппроксимаций из § 1.5 дает систему нелинейных уравнений

$$\begin{aligned} & [-k_{l+1/2, m} \varphi_{l+1, m} + (k_{l+1/2, m} + k_{l-1/2, m}) \varphi_{l, m} - k_{l-1/2, m} \varphi_{l-1, m}] / \Delta x^2 + \\ & + [-k_{l, m+1/2} \varphi_{l, m+1} + (k_{l, m+1/2} + k_{l, m-1/2}) \varphi_{l, m} - \\ & - k_{l, m-1/2} \varphi_{l, m-1}] / \Delta y^2 = Q_{l, m}, \\ & l = 1, 2, \dots, L-1, \quad m = 1, 2, \dots, M-1. \end{aligned} \quad (1.77)$$

Учитывая соответствующие краевые условия, эту систему можно решить подходящим итерационным методом, однако ясно, что вычислительные затраты будут на этот раз значительно больше.

### 1.9. Аппроксимация и сходимость

Мы надеемся, что одно- и двумерные решения обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными, полученные в этой главе процедурами конечно-разностной аппроксимации, продемонстрировали возможности дискретизации. Представляющаяся затруднительной (или по крайней мере математически сложной) задача решения дифференциального уравнения сводится к чисто алгебраической задаче решения системы алгебраических уравнений. Если число уравнений велико, то это решение нелегко найти вычислениями вручную, но его всегда можно получить на ЭВМ при определенных затратах времени и средств. Очевидно, что эти затраты можно уменьшить с помощью оптимизации алгоритмов, нахождения численного решения, и в этом направлении уже предприняты существенные усилия [7]<sup>2)</sup>.

Здесь важен тот факт, что возможность решения существует, хотя для этого и приходится прибегнуть к аппроксимации. Ранее

<sup>1)</sup> См. также Самарский А. А., Андреев В. Б. Разностные методы для эллиптических уравнений.— М.: Наука, 1976.— *Прим. ред.*

<sup>2)</sup> См. также книгу А. А. Самарского и Е. С. Николаева, цитированную на с. 30.— *Прим. ред.*

было показано, что погрешность конечно-разностной аппроксимации убывает как некоторая степень шага сетки. Чтобы применить этот процесс на практике в ситуации, когда точное решение неизвестно, необходимо изучить *сходимость* метода при измельчении шага сетки с целью оценить величину погрешности, получающейся при применении аппроксимации.

Если, например, погрешность аппроксимации равна  $O(\Delta x^n)$ , то результаты двух решений на сетках с шагами  $\Delta x_1$  и  $\Delta x_2$  можно экстраполировать следующим образом.

Пусть  $\varphi_1^i$  соответствует конечно-разностному решению на первой сетке, а  $\varphi_2^i$  — решению на второй сетке. Если  $\varphi_i^e$  — точное решение в  $x_i$ , то даже при неизвестной величине погрешности

$$(\varphi_i^e - \varphi_1^i) / (\varphi_i^e - \varphi_2^i) = (\Delta x_1 / \Delta x_2)^2 \quad (1.78)$$

и точное решение  $\varphi_i^e$  может быть найдено. Соотношение (1.78) не является вполне корректным, так как «порядок» погрешности и ее фактическая величина не есть одно и то же, однако часто таким образом можно получить более точные результаты. Эта процедура известна как экстраполяция Ричардсона<sup>1)</sup>.

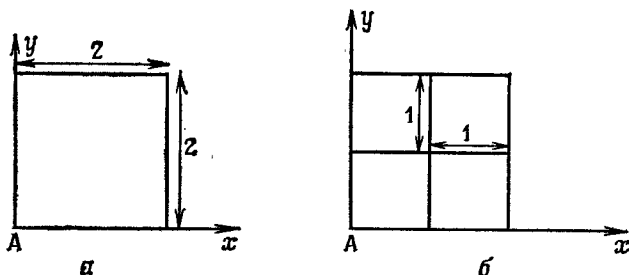


Рис. 1.10. Применение экстраполяции Ричардсона к задаче упругого кручения из примера 1.6. Конечно-разностные сетки, использованные на четверти сечения, имеют шаги  $\Delta x_1 = \Delta y_1 = 2$  (а) и  $\Delta x_2 = \Delta y_2 = 1$  (б).

**Пример 1.6.** Рассмотрим задачу кручения стержня квадратного сечения  $4 \times 4$ . Опять требуется решить уравнение кручения из примера 1.5 для функции напряжения  $\varphi$ , удовлетворяющей на границе краевому условию  $\varphi = 0$ , и в силу симметрии достаточно рассмотреть только четверть сечения. При  $\Delta x_1 = \Delta y_1 = 2$  (рис. 1.10, а) конечно-разностная аппроксимация дает  $\varphi_A^1 = 2 G\theta$ , где  $A$  — центр сечения. Используя  $\Delta x_2 = \Delta y_2 = 1$  (рис. 1.10, б), получаем  $\varphi_A^2 = 2.25 G\theta$ . Тогда применение процедуры экстраполяции (1.78) дает  $\varphi_A^e = 2.333 G\theta$  (точное значение  $\varphi_A = 2.357 G\theta$ ).

<sup>1)</sup> См., например, Марчук Г. И., Шайдулов В. В. Повышение точности решений разностных схем. — М.: Наука, 1979. — Прим. ред.

## 1.10. Заключительные замечания

Материал этой главы ограничен рассмотрением решения краевых задач методом конечных разностей. Мы сосредоточили наше внимание на задачах, включающих производные первого и второго порядков, хотя читатель уже должен заметить возможность распространения методики на общие дифференциальные уравнения, включающие производные более высоких порядков. Например, обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка можно аппроксимировать путем двукратного использования выражений вида (1.29). Для произвольной конечно-разностной сетки (см. рис. 1.2) можно записать

$$\left. \frac{d^4\varphi}{dx^4} \right|_l = \frac{d^2}{dx^2} \left( \left. \frac{d^2\varphi}{dx^2} \right|_l \right) \approx \frac{d^2\varphi/dx^2|_{l+1} - 2d^2\varphi/dx^2|_l + d^2\varphi/dx^2|_{l-1}}{\Delta x^2}. \quad (1.79)$$

Подставляя сюда

$$d^2\varphi/dx^2|_{l+1} \approx (\varphi_{l+2} - 2\varphi_{l-1} + \varphi_l)/\Delta x^2 \quad (1.80)$$

и другие разностные выражения, получаем пятиточечную аппроксимацию

$$d^4\varphi/dx^4|_l \approx (\varphi_{l+2} - 4\varphi_{l+1} + 6\varphi_l - 4\varphi_{l-1} + \varphi_{l-2})/\Delta x^4. \quad (1.81)$$

Такого рода аппроксимации, как и многие другие, позволяют весьма расширить область применимости метода конечных разностей, и известно немало примеров его успешного использования для самых различных задач. Однако трудности аппроксимации криволинейных границ, а также заданного на границе градиента остаются. В последующих разделах этой книги будут даны рецепты их преодоления путем использования отображения или нерегулярных сеток. С другой стороны, иные более общие процедуры, которые будут обсуждаться ниже, позволят, как мы увидим, легко исключать такие трудности.

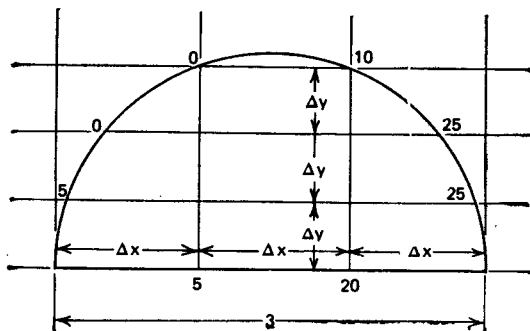
## Упражнения

1.20. Уравнение  $EI d^4\varphi/dx^4 + k\varphi = \omega$  описывает отклонение балки, покоящейся на упругом основании жесткостью  $k$ . Здесь  $EI$  — постоянная жесткость балки на изгиб, а  $\omega$  — поперечная нагрузка на единицу ее длины. Пусть балка имеет единичную длину и закреплена в обоих концах так, что  $\varphi = d\varphi/dx = 0$  при  $x=0$  и  $x=1$ . Используя метод конечных разностей, найти отклонение балки, если  $\omega(EI) = k/(EI) = 1$  и шаг сетки  $\Delta x = 1/3$ . Повторить вычисления при  $\Delta x = 1/6$  и затем использовать экстраполяцию Ричардсона. Сравнить результаты при  $x = 1/3$  и  $x = 2/3$  с точным решением.

1.21. Однородная тонкая упругая пластина  $\Omega$  с постоянной жесткостью  $D$  на изгиб свободно опирается вдоль сторон  $\Gamma$  и находится под действием единичной равномерной поперечной нагрузки на единицу площади. Малое поперечное отклонение такой пластины описывается дифференциальным уравнением  $\partial^4\varphi/\partial x^4 + 2\partial^4\varphi/\partial x^2\partial y^2 + \partial^4\varphi/\partial y^4 = 1/D$  в  $\Omega$  и краевыми условиями  $\varphi = \partial^2\varphi/\partial n^2 = 0$  на  $\Gamma$ . Найти отклонение для прямоугольной пластины  $|x| \leq 3$ ,  $|y| \leq 2$ , используя метод конечных разностей и шаг сетки  $\Delta x = \Delta y = 1/2$ .

1.22. На конечно-разностной сетке с шагом  $\Delta x$  четвертая производная заменяется аппроксимацией  $d^4\varphi/dx^4|_i \approx a\varphi_{i+2} + b\varphi_{i+1} + c\varphi_i + d\varphi_{i-1} + e\varphi_{i-2}$ , где  $a, b, c, d$  и  $e$  — постоянные. Показать, что если требуется, чтобы эта аппроксимация была точна всякий раз, когда  $\varphi$  — многочлен четвертой степени от  $x$ , то постоянные таковы, что получается аппроксимация (1.81). Каков порядок погрешности такой аппроксимации?

1.23. Определить стационарное распределение температуры  $\varphi$  внутри изображенного на рисунке полукруга. Использовать указанные конечно-разностную сетку и значения температуры в точках границы. Рассмотреть трудности, которые возникли бы при конечно-разностном подходе, если крайнее условие вдоль криволинейной границы заменить условием  $d\varphi/dn = 0$ .



К упражнению 1.23.

## Литература

[1] См., например, Carslaw H. S., Jaeger J. C. *Conduction of heat in solids.*— 2nd ed.— Oxford: Clarendon, 1959. [Имеется перевод: Карслоу Г., Ягер Д. Теплопроводность твердых тел.— М.: Наука, 1964.]

[2] Детали этой и более общих процедур обращения матриц приведены в книге Potter D. *Computational physics.*— New York: Wiley-Interscience, 1973.

[3] За сведениями о более общих методах читателю следует обратиться к книге Zienkiewicz O. C. *The finite element method.*— 3rd ed.— New York: McGraw-Hill, 1977, а также к приведенным там ссылкам.

[4] См., например, [2].

[5] Детальный анализ этой задачи содержится в работе Sokolnikoff I. S. *Mathematical theory of elasticity.*— New York: McGraw-Hill, 1956.

[6] Этот метод подробно описан в книге Crandall S. H. *Engineering analysis.*— New York: McGraw-Hill, 1956.

[7] Относительно дальнейших сведений см. Wait R. *The numerical solution of algebraic equations.*— New York: Wiley-Interscience, 1979.

## Рекомендуемая литература

Fried I. *Numerical solution of differential equations.*— New York: Academic Press, 1979.

Hageman L. A., Young D. M. *Applied iterative methods.*— New York: Academic Press, 1981. [Имеется перевод: Хейгеман Л., Янг Д. Прикладные итерационные методы.— М.: Мир, 1986.]

Mitchell A. R., Griffiths D. F. *The finite difference method in partial differential equations.*— Chichester: Wiley, 1980.

Smith G. D. *Numerical solution of partial differential equations.*— Oxford: Oxford University Press, 1971.

## МЕТОДЫ ВЗВЕШЕННЫХ НЕВЯЗОК. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ

### 2.1. Введение. Аппроксимация базисными функциями

Как будет показано в этой главе, ключ к проблеме численного решения дифференциальных уравнений лежит в возможности получения методов аппроксимации функций. В методе конечных разностей основное внимание уделялось определению значений неизвестной функции  $\varphi(x)$  в конечном числе точек  $x$ . Проводя процесс аппроксимации функций более систематически и общо, можно развить и другие методы численного решения дифференциальных уравнений.

Предположим, что требуется аппроксимировать заданную функцию  $\varphi$  в некоторой области  $\Omega$ , ограниченной замкнутой кривой  $\Gamma$ . В задачах, описываемых дифференциальными уравнениями, необходимо найти решение, удовлетворяющее определенным краевым условиям. Поэтому попытаемся сначала построить аппроксимации, которые на граничной кривой  $\Gamma$  принимали бы те же значения, что и  $\varphi$ . Если найти некоторую функцию  $\psi$ , принимающую одинаковые с  $\varphi$  значения на  $\Gamma$ , т. е.  $\psi|_{\Gamma} = \varphi|_{\Gamma}$ , и ввести систему линейно независимых *базисных функций*  $\{N_m; m = 1, 2, 3, \dots\}$ , таких, что  $N_m|_{\Gamma} = 0$  для всех  $m$ , то на  $\Omega$  можно предложить аппроксимацию для  $\varphi$ :

$$\varphi \approx \hat{\varphi} = \psi + \sum_{m=1}^M a_m N_m, \quad (2.1)$$

где  $a_m$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ) — некоторые параметры, вычисляемые таким образом, чтобы получить хорошее приближение. Базисные функции этого типа иногда называют функциями *формы* или *пробными* функциями.

Способ определения  $\psi$  и системы базисных функций автоматически обеспечивает тот факт, что аппроксимация обладает свойством  $\hat{\varphi}|_{\Gamma} = \varphi|_{\Gamma}$  для любых значений параметров  $a_m$ . Ясно, что система базисных функций должна быть выбрана таким образом, чтобы гарантировать улучшение аппроксимации при возрастании числа  $M$  используемых базисных функций. Очевидное условие подобной сходимости аппроксимации таково: система базисных функций должна обладать тем свойством, что комбинация  $\psi +$

Сумма  $\sum_{m=1}^M a_m N_m$  при  $M \rightarrow \infty$  может сколь угодно точно представлять произвольную функцию  $\varphi$ , удовлетворяющую условию  $\varphi|_{\Gamma} = \psi|_{\Gamma}$ . Это так называемое условие *полноты*; в ряде случаев его нетрудно проверить.

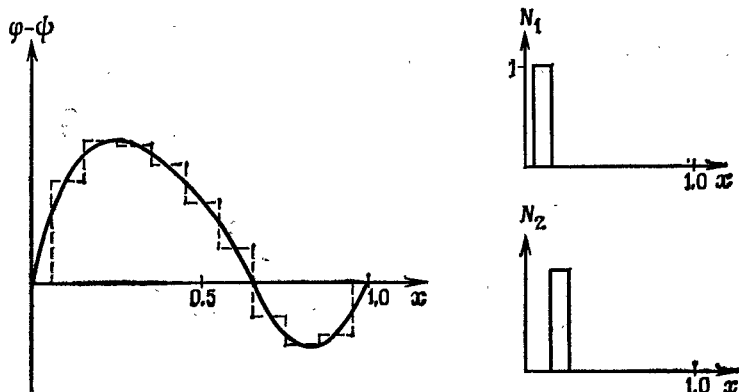


Рис. 2.1. Разрывные базисные функции, обладающие свойством полноты на отрезке  $0 \leq x \leq 1$ .

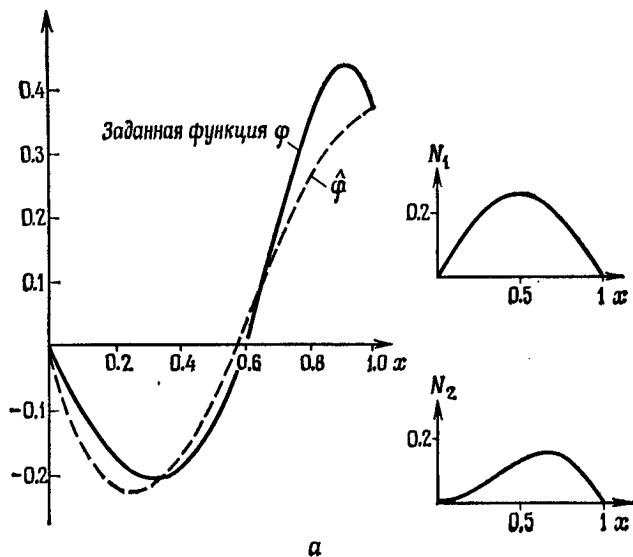
Такая ситуация иллюстрируется рис. 2.1, где  $\Omega$  — отрезок  $0 \leq x \leq 1$ , а выбранные функции  $N_m$  разрывны и равны единице на соответствующем интервале и нулю вне его. Ясно, что если рассматривается вся внутренняя часть отрезка, то произвольная хорошо ведущая себя однозначная функция может быть аппроксимирована с любой требуемой степенью точности путем деления всего отрезка на достаточно малые интервалы. Такие разрывные функции будут рассмотрены далее (гл. 3), однако вопрос полноты для других используемых в этой главе систем базисных функций более рассматриваться не будет.

Чтобы продемонстрировать этот общий подход к аппроксимации функций, начнем с рассмотрения некоторых очевидных способов определения параметров  $a_m$ , используемых в представлении (2.1).

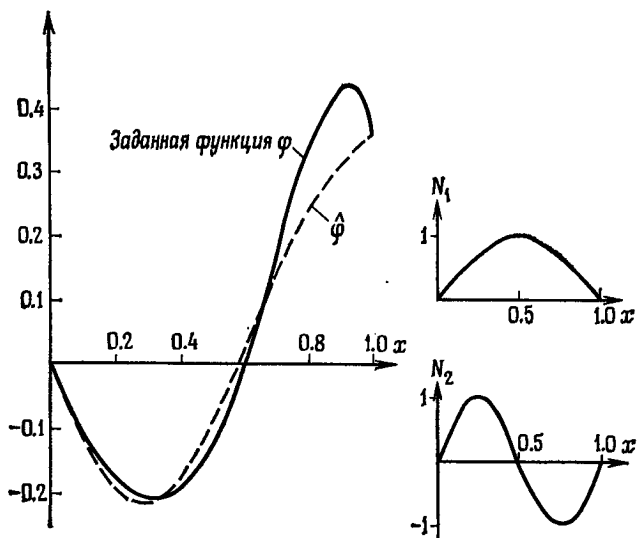
### 2.1.1. Интерполяция

В этом методе параметры  $a_m$  выбираются на основании требования, что аппроксимация  $\hat{\varphi}$  должна совпадать с функцией  $\varphi$  в  $M$  различных произвольно выбранных точках  $\Omega$ . Это требование приводит к системе линейных уравнений относительно набора параметров  $\{a_m; m = 1, 2, \dots, M\}$ . На рис. 2.2 показано, как аппроксимировать произвольную функцию на отрезке  $0 \leq x \leq 1$ ,





а



б

Рис. 2.2. Интерполяция заданной функции  $\varphi$  с помощью первых двух элементов систем базисных функций  $\{N_m = x^m(1-x), m=1, 2, \dots\}$  (а) и  $\{N_m = \sin m\pi x, m=1, 2, \dots\}$  (б).

посредством первых двух элементов следующих систем базисных функций: на рис. 2.2, а

$$\{N_m = x^m (1-x); m = 1, 2, \dots\}^1,$$

а на рис. 2.2, б

$$\{N_m = \sin m\pi x; m = 1, 2, \dots\}.$$

В данном случае функция  $\psi$  была выбрана просто как линейная функция, принимающая те же значения, что и  $\varphi$ , при  $x=0$  и  $x=1$ , а параметры выбирались так, чтобы равенство  $\hat{\varphi} = \psi$  выполнялось при  $x=1/3$  и  $x=2/3$ .

### 2.1.2. Синус-ряды Фурье

Используя теорию рядов Фурье [1], можно получить аппроксимацию произвольной функции  $\varphi(x)$ ,  $0 \leq x \leq L_x$ , в виде (2.1). Для возможности такой аппроксимации достаточно, например, чтобы в рассматриваемой области функция  $\varphi(x)$  имела только конечное число разрывов и конечное число локальных максимумов и минимумов — требования, которым удовлетворяет большинство функций, встречающихся при решении физических задач. Если предположить, что  $\varphi$  — непрерывная кусочно-дифференцируемая функция и снова определить  $\psi$  как линейную функцию, принимающую те же, что и  $\varphi$ , значения при  $x=0$  и  $x=L_x$ , то бесконечные ряды

$$\psi + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin(m\pi x/L_x), \quad (2.2)$$

где коэффициенты заданы равенствами

$$a_m = (2/L_x) \int_0^{L_x} (\varphi - \psi) \sin(m\pi x/L_x) dx, \quad (2.3)$$

сходятся всюду на  $[0, L_x]$  к значению функции  $\varphi(x)$ . Обрывая ряды (2.2) на конечном числе  $M$  членов, получаем аппроксимацию

$$\varphi(x) \approx \hat{\varphi}(x) = \psi(x) + \sum_{m=1}^M a_m \sin(m\pi x/L_x), \quad 0 \leq x \leq L_x. \quad (2.4)$$

Теория рядов Фурье может быть использована для того, чтобы доказать полноту этого множества базисных функций и чтобы показать улучшение аппроксимации такого рода при увеличении  $M$ . Применение этого метода для интерполяции функций демонстри-

<sup>1)</sup> Заметим, что при большом числе базисных функций из этой системы вычислительная погрешность может катастрофически исказить приближенное решение; см., например, книгу С. Г. Михлина [4]. — *Прим. ред.*

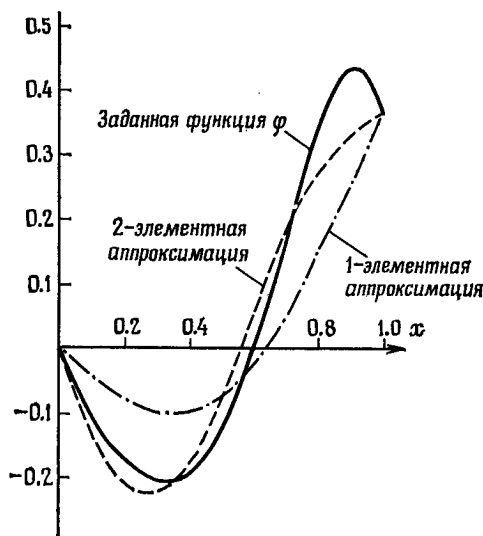


Рис. 2.3. Использование усеченных рядов Фурье для аппроксимации заданной функции.

руется на рис. 2.3, где отражены результаты использования одного и двух элементов для аппроксимации заданной функции с областью определения  $0 \leq x \leq 1$ .

## 2.2. Аппроксимации с помощью взвешенных невязок

Попытаемся теперь получить общий метод определения постоянных в аппроксимации вида (2.1) и покажем, что рассмотренные в предыдущем параграфе конкретные методы являются просто частными случаями этого общего подхода. Начнем с введения погрешности или *невязки*  $R_\Omega$  в аппроксимации, определяемой по правилу

$$R_\Omega = \varphi - \hat{\varphi}. \quad (2.5)$$

Заметим, что  $R_\Omega$  — функция, зависящая от координат точки из  $\Omega$ . Чтобы уменьшить эту невязку неким всеобъемлющим способом на всей области  $\Omega$ , потребуем равенства нулю соответствующего числа интегралов от погрешности, взятых с различными весами, т. е.

$$\int_{\Omega} W_l (\varphi - \hat{\varphi}) d\Omega \equiv \int_{\Omega} W_l R_\Omega d\Omega = 0; \quad l = 1, 2, \dots, M, \quad (2.6)$$

где  $\{W_l; l=1, 2, 3, \dots\}$ —множество линейно независимых *весовых функций*<sup>1)</sup>. Тогда общее требование сходимости  $\hat{\varphi} \rightarrow \varphi$  при  $M \rightarrow \infty$  можно записать в форме условия выполнения равенств (2.6) для всех  $l$  при  $M \rightarrow \infty$ . Читатель легко может проверить, что это будет верно лишь при условии  $R_\Omega \rightarrow 0$  во всех точках области<sup>2)</sup>.

Подставляя в (2.6) выражение (2.1) для  $\hat{\varphi}$ , видим, что *система уравнений метода взвешенных невязок* (2.6) сводится к системе линейных алгебраических уравнений для неизвестных коэффициентов  $a_m$ , которую можно записать в общем виде

$$Ka = f, \quad (2.7)$$

где

$$a^T = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_M), \quad (2.8a)$$

$$K_{lm} = \int_{\Omega} W_l N_m d\Omega, \quad 1 \leq l, m \leq M, \quad (2.8б)$$

$$f_l = \int_{\Omega} W_l (\varphi - \psi) d\Omega, \quad 1 \leq l \leq M. \quad (2.8в)$$

Таким образом, если известна аппроксимируемая функция  $\varphi$ , определена функция  $\psi$  и выбраны подходящие системы базисных и весовых функций, то, решая уравнение (2.7), можно получить коэффициенты в аппроксимации (2.1).

На практике могут быть использованы [2] различные виды систем весовых функций  $\{W_l; l=1, 2, \dots\}$ , ведущие к разным *методам аппроксимации посредством взвешенных невязок*. Ниже на одномерном примере будут описаны некоторые из наиболее употребительных выборов таких систем.

### 2.2.1 Поточечная коллокация

Здесь элементы  $W_l$  системы весовых функций заданы формулой

$$W_l = \delta(x - x_l), \quad (2.9a)$$

где  $\delta(x - x_l)$ —дельта-функция Дирака, по определению обладающая свойствами

$$\begin{aligned} \delta(x - x_l) = 0, \quad x \neq x_l; \quad \delta(x - x_l) = \infty, \quad x = x_l. \\ \int_{x < x_l}^x G(x) \delta(x - x_l) dx = G(x_l). \end{aligned} \quad (2.9б)$$

<sup>1)</sup> Другие авторы называют функции  $W_l$  иногда базисными, а иногда — пробными. — *Прим. ред.*

<sup>2)</sup> Кроме того, система функций  $W_l$  должна быть полной. — *Прим. ред.*

Согласно (2.6), выбор таких весовых функций эквивалентен тому, что невязка  $R_\Omega$  полагается равной нулю (т. е.  $\varphi = \hat{\varphi}$ ) в ряде заданных точек  $x_l$ . Тогда матрица  $K$  и вектор  $f$  в (2.8) имеют элементы

$$K_{lm} = N_m |_{x=x_l}, \quad f_l = [\varphi - \psi]_{x=x_l}. \quad (2.10)$$

Эти формулы естественно являются основой метода интерполяции, использованного для построения аппроксимации в разд. 2.1.1.

### 2.2.2. Коллокация по подобластям

Если весовые функции выбираются по правилу

$$W_l = \begin{cases} 1, & x_l < x < x_{l+1}, \\ 0, & x < x_l, \quad x > x_{l+1}, \end{cases} \quad (2.11)$$

то уравнения метода взвешенных невязок (2.6) равносильны требованию равенства нулю интеграла от погрешности по каждой из  $M$  подобластей основной области. Теперь для завершения аппроксимации остается решить систему (2.7), где

$$K_{lm} = \int_{x_l}^{x_{l+1}} N_m dx, \quad f_l = \int_{x_l}^{x_{l+1}} (\varphi - \psi) dx. \quad (2.12)$$

### 2.2.3. Метод Галеркина

В этом наиболее популярном методе взвешенных невязок вместо привлечения новой системы функций в качестве весовых множителей выбираются сами базисные функции, т. е.

$$W_l = N_l. \quad (2.13)$$

В этом случае в системе (2.7) матрица  $K$  и вектор  $f$  имеют элементы

$$K_{lm} = \int_{\Omega} N_l N_m dx, \quad f_l = \int_{\Omega} N_l (\varphi - \psi) dx. \quad (2.14)$$

Отметим, что симметричность матрицы  $K$  обеспечивает методу вычислительные преимущества. Этот метод впервые был использован Галеркиным и теперь обычно называется его именем<sup>1)</sup>.

Здесь целесообразно отметить, что, используя для аппроксимации функции  $\varphi$  на отрезке  $0 \leq x \leq L_x$  метод Галеркина с системой базисных функций  $\{N_m = \sin(m\pi x/L_x); m = 1, 2, 3, \dots\}$ ,

<sup>1)</sup> Иногда общую схему метода взвешенных невязок называют методом Галеркина—Петрова, а данный метод — методом Бубнова—Галеркина.—*Прим. ред.*

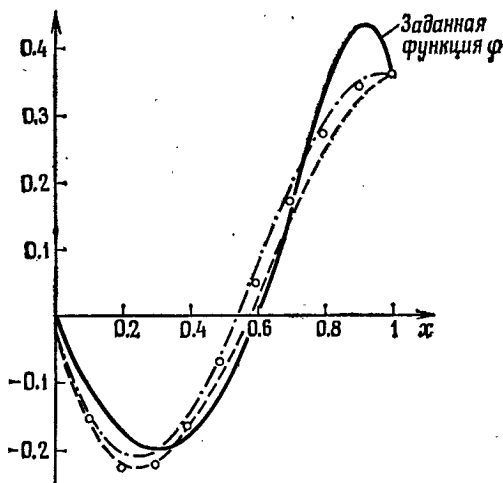


Рис. 2.4. Аппроксимация заданной функции, полученная поточечной коллокацией, коллокацией по подобластям и методом Галеркина. В каждом случае использованы два первых элемента системы базисных функций  $\{N_m = x^m(1-x), m=1, 2, \dots\}$ .

---  $W_l = \delta(x-x_l)$ ,  $x_1=1/3$ ,  $x_2=2/3$  — поточечная коллокация; — · —  $W_1=1$  при  $0 < x < 1/2$ ;  $W_1=0$  при  $1/2 < x < 1$ ;  $W_2=0$  при  $0 < x < 1/2$ ;  $W_2=1$  при  $1/2 < x < 1$  — коллокация по подобластям; ○ ○ ○  $W_l = N_l$  — метод Галеркина.

в силу (2.14) приходим к коэффициентам

$$K_{lm} = \int_0^{L_x} \sin(l\pi x/L_x) \sin(m\pi x/L_x) dx, \quad (2.15)$$

$$f_l = \int_0^{L_x} (\varphi - \psi) \sin(l\pi x/L_x) dx.$$

Выполняя интегрирование, находим

$$K_{lm} = \begin{cases} L_x/2, & l=m, \\ 0, & l \neq m, \end{cases} \quad (2.16)$$

и, следовательно, матрица системы (2.7) имеет диагональную форму, что позволяет сразу выписать решение:

$$a_m = (2/L_x) \int_0^{L_x} (\varphi - \psi) \sin(m\pi x/L_x) dx, \quad m=1, 2, \dots, M. \quad (2.17)$$

Полученное выражение тождественно формуле (2.3), используемой для определения коэффициентов в разд. 2.1.2. Таким образом, представление функции посредством усеченных синус-рядов

Фурье можно рассматривать как аппроксимацию по Галеркину с помощью взвешенных невязок. Особая простота уравнений, получающихся в этом случае при аппроксимации по Галеркину, является следствием свойства *ортogonalности* используемых базисных функций, выражаемого равенством

$$\int_{\Omega} N_l N_m d\Omega = 0, \quad l \neq m. \quad (2.18)$$

Эта характеристика элементов системы базисных функций является чрезвычайно полезной.

На рис. 2.4 сравниваются результаты, полученные при аппроксимации заданной функции  $\varphi(x)$  тремя различными методами взвешенных невязок.

#### 2.2.4. Другие способы определения весовых множителей

Ясно, что существует большое число других возможных способов выбора систем весовых функций, и специфические свойства многих из них уже изучены. Один из таких очевидных способов выбора состоит в использовании системы  $\{W_l = x^{l-1}; l = 1, 2, \dots\}$  и называется иногда методом моментов, поскольку, согласно этому методу, требуется, чтобы площадь, лежащая ниже кривой погрешности, и ее различные моменты относительно начала координат были равны нулю. Но мы не будем рассматривать эти дополнительные возможности, так как уже описанные методы вполне достаточны для наших последующих целей. Целесообразно отметить, однако, что, хотя метод наименьших квадратов обычно не рассматривается как метод взвешенных невязок, он тоже относится к этому классу методов. Стандартная формулировка метода наименьших квадратов состоит в требовании минимизировать интеграл от квадрата погрешности по области  $\Omega$ . В данном случае требуется найти минимум

$$I(a_1, a_2, a_3, \dots, a_M) = \int_{\Omega} (\varphi - \hat{\varphi})^2 d\Omega, \quad (2.19)$$

для чего полагается

$$\partial I / \partial a_l = 0, \quad l = 1, 2, \dots, M. \quad (2.20)$$

Проводя дифференцирование и замечая из (2.1), что

$$\partial \hat{\varphi} / \partial a_l = N_l, \quad (2.21)$$

можно показать, что  $I$  достигает минимума при условии

$$\int_{\Omega} (\varphi - \hat{\varphi}) N_l d\Omega = 0. \quad (2.22)$$

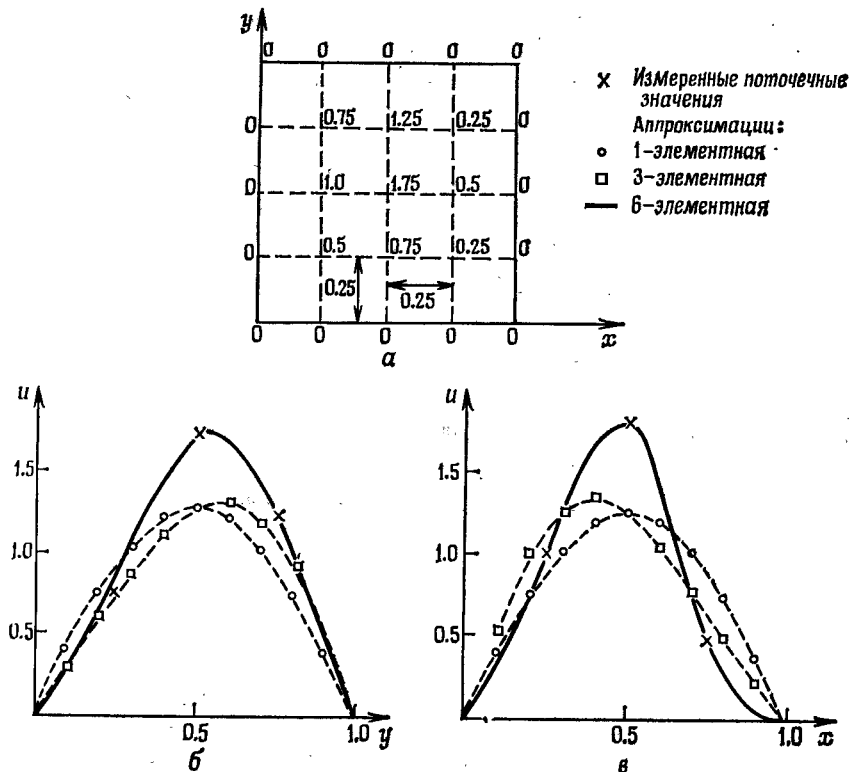


Рис. 2.5. Задача об отклонении нагруженной квадратной пластины из примера 2.1. *a* — измеренные поточечные отклонения, *б* и *в* — поведение аппроксимаций по Галеркину на прямых  $x=0.5$  и  $y=0.5$  соответственно.

Полученное соотношение в точности совпадает со стандартным уравнением метода взвешенных невязок (2.6) с весами  $W_i = N_i$ , и, таким образом, в этом случае метод наименьших квадратов эквивалентен методу Галеркина.

**Пример 2.1.** Для определения отклонения  $u(x, y)$  квадратной пластины со сторонами единичной длины, находящейся под действием нагрузки и закрепленной по краям, был проведен эксперимент. Пластина покрывалась квадратной сеткой с шагом  $\Delta x = \Delta y = 0.25$ , и отклонение измерялось в узлах сетки. Результат показан на рис. 2.5, *a*. Используя методику предыдущих параграфов, по этому набору экспериментальных данных можно построить гладкую кривую и получить информацию о форме поля перемещений между узлами сетки. Заметим, что тривиальная функция  $\psi = 0$  удовлетворяет краевым условиям нулевого откло-



нения вдоль краев пластины. В качестве соответствующей системы базисных функций, обращающихся в нуль на границе пластины, возьмем  $\{\sin(l\pi x) \sin(m\pi y); l, m = 1, 2, \dots\}$ .

Тогда, согласно (2.1), 6-элементную аппроксимацию  $\hat{u}$  для поля перемещений можно записать в виде

$$\hat{u} = \sum_{\substack{l, m=1 \\ l+m \leq 4}}^3 a_{lm} \sin l\pi x \sin m\pi y,$$

где постоянные  $a_{lm}$  могут быть определены, например, по методу Галеркина

$$\int_{\Omega} (u - \hat{u}) \sin l\pi x \sin m\pi y \, dx \, dy = 0.$$

Проводя интегрирование, находим

$$a_{lm} = 4 \int_0^1 \int_0^1 u \sin l\pi x \sin m\pi y \, dx \, dy.$$

Простота этого результата следует из ортогональности базисных функций на области  $\Omega$ . Численное интегрирование <sup>1)</sup>, использующее двумерное обобщение правила трапеций, на сетке, показанной на рис. 2.5, а, позволяет определить значения постоянных. В результате получаем

$$\begin{aligned} \hat{u} = & 1.275 \sin \pi x \sin \pi y - 0.169 \sin \pi x \sin 2\pi y + \\ & + 0.258 \sin 2\pi x \sin \pi y - 0.130 \sin \pi x \sin 3\pi y - \\ & - 0.063 \sin 2\pi x \sin 2\pi y - 0.307 \sin 3\pi x \sin \pi y. \end{aligned}$$

На рис. 2.5, б и в показано поведение 1-, 3- и 6-элементных аппроксимаций по Галеркину с помощью взвешенных невязок вдоль прямых  $x=0.5$  и  $y=0.5$ , сравниваемых с поточечными значениями функции перемещения  $u$ .

## Упражнения

2.1. Используя подходящую систему базисных функций в виде многочленов, аппроксимировать функцию  $\varphi = 1 + \sin(\pi x/2)$  на отрезке  $0 \leq x \leq 1$ . Применить метод поточечной коллокации и метод Галеркина. Численно исследовать сходимость последовательных аппроксимаций к заданной функции.

2.2. Для распределения температуры в одномерном стационарном случае эксперимент дал следующие значения в различных точках отрезка:

Расстояние	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
Температура	20	30	50	65	40	30

<sup>1)</sup> Детали процедур численного интегрирования обсуждаются в гл. 5,

Построить гладкую кривую для этого набора данных, используя метод Галеркина и подходящую систему базисных функций.

2.3. Для примера 2.1 рассмотреть поведение 6-элементного разложения, где постоянные определяются поточечной коллокацией в шести внутренних узлах сетки.

### 2.3. Аппроксимация решений дифференциальных уравнений и использование базисных функций; виды взвешенных невязок. Выполнение краевых условий с помощью базисных функций

Рассмотрим дифференциальное уравнение обсуждавшегося в гл. 1 типа, которое в достаточно общем виде будем записывать как

$$A(\varphi) = \mathcal{L}\varphi + p = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (2.23)$$

где  $\mathcal{L}$  — соответствующий *линейный* дифференциальный оператор, а  $p$  не зависит от  $\varphi$ . Конкретным примером было бы, в частности, уравнение (1.8) из гл. 1. Это уравнение можно записать в приведенных выше обозначениях, положив

$$\mathcal{L}\varphi = \partial(k \partial\varphi/\partial x)/\partial x + \partial(k \partial\varphi/\partial y)/\partial y, \quad p = Q, \quad (2.24)$$

где  $k$  и  $Q$  не зависят от  $\varphi$ . Дальнейшее изложение будет основываться, однако, не на конкретном уравнении типа (2.24), а на общем уравнении (2.23), что позволит продемонстрировать общность описываемой методики.

Решение уравнения (2.23) должно удовлетворять соответствующим краевым условиям, которые тоже запишем в общем виде:

$$B(\varphi) = \mathcal{M}\varphi + r = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (2.25)$$

где  $\mathcal{M}$  — соответствующий линейный оператор, а  $r$  не зависит от  $\varphi$ . Например, краевые условия Дирихле и Неймана (1.5) и (1.6) можно выразить в общем виде (2.25), положив

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\varphi &= \varphi, & r &= -\bar{\varphi} \quad \text{на } \Gamma_\varphi, \\ \mathcal{M}\varphi &= -k \partial\varphi/\partial n, & r &= -\bar{q} \quad \text{на } \Gamma_q. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Следуя описанной в предыдущих разделах методике, попытаемся построить аппроксимацию  $\hat{\varphi}$  для решения  $\varphi$ , используя, как и в (2.1), разложение

$$\varphi \approx \hat{\varphi} = \psi + \sum_{m=1}^M a_m N_m. \quad (2.27)$$

Здесь функция  $\psi$  и базисные функции  $N_m$  выбраны таким образом, что

$$\mathcal{M}\psi = -r, \quad \mathcal{M}N_m = 0, \quad m = 1, 2, \dots, \quad \text{на } \Gamma, \quad (2.28)$$

и поэтому  $\varphi$  автоматически удовлетворяет краевым условиям (2.25) при произвольных коэффициентах  $a_m$ . Непосредственным дифференцированием аппроксимации (2.27) можно получить аппроксимации производных от  $\varphi$ <sup>1)</sup>. Следовательно, если функции  $N_m$  непрерывны в рассматриваемой области  $\Omega$  и все их производные существуют, то

$$\begin{aligned}\varphi &\approx \hat{\varphi} = \psi + \sum_{m=1}^M a_m N_m, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &\approx \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \sum_{m=1}^M a_m \frac{\partial N_m}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &\approx \frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \sum_{m=1}^M a_m \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2}\end{aligned}\quad (2.29)$$

и т. д.

В этой главе будет предполагаться, что базисные функции непрерывно дифференцируемы, однако в гл. 3 это требование будет ослаблено.

Так как построенное разложение удовлетворяет краевым условиям, то для получения аппроксимации искомой функции  $\varphi$  необходимо только гарантировать, что  $\hat{\varphi}$  — приближенное решение дифференциального уравнения (2.23). Подставляя  $\hat{\varphi}$  в это уравнение, получим невязку  $R_\Omega$ , которую в силу линейности оператора  $\mathcal{L}$  можно записать в виде

$$R_\Omega \equiv A(\hat{\varphi}) \equiv \mathcal{L}\hat{\varphi} + p \equiv \mathcal{L}\psi + \left( \sum_{m=1}^M a_m \mathcal{L}N_m \right) + p. \quad (2.30)$$

Для получения приближенного равенства  $R_\Omega = 0$  всюду в  $\Omega$  можно непосредственно применить процедуры § 2.2. Это позволит найти аппроксимацию  $\hat{\varphi}$  искомой функции  $\varphi$ . Как и ранее, для этой цели можно воспользоваться методом взвешенных невязок, выбирая некоторую систему весовых функций  $\{W_l; l=1, 2, \dots\}$  и требуя, чтобы

$$\int_{\Omega} W_l R_\Omega d\Omega \equiv \int_{\Omega} W_l \left\{ \mathcal{L}\psi + \left( \sum_{m=1}^M a_m \mathcal{L}N_m \right) + p \right\} d\Omega = 0. \quad (2.31)$$

Так как общее число неизвестных равно  $M$ , то, применяя уравнение (2.31) для  $l=1, 2, 3, \dots, M$ , получаем систему линейных алгебраических уравнений, которую можно записать в виде

$$Ka = f, \quad (2.32)$$

<sup>1)</sup> Если  $f(x) \approx g(x)$ , то может оказаться, что  $df/dx$  и  $dg/dx$  далеки друг от друга, и тогда «непосредственное дифференцирование» (2.27) приведет к неверному результату. — *Прим. ред.*

где теперь

$$K_{lm} = \int_{\Omega} W_l \mathcal{L} N_m d\Omega, \quad 1 \leq l, m \leq M, \quad (2.33)$$

$$f_l = - \int_{\Omega} W_l p d\Omega - \int_{\Omega} W_l \mathcal{L} \psi d\Omega, \quad 1 \leq l \leq M.$$

Вычислив элементы матрицы и правой части уравнений и решив затем полученную систему, мы определим неизвестные  $a_m$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots, M$ , и тем самым закончим процесс построения приближенного решения заданного дифференциального уравнения. Обычно матрица  $K$  оказывается заполненной и не имеет тенденции к ленточной структуре, характерной для матриц, получавшихся при применении метода конечных разностей в предыдущей главе.

Можно опять рассмотреть различные выборы весовых функций, получавшихся в предыдущем параграфе. Для демонстрации деталей процедуры снова обратимся к примерам 1.1 и 1.5.

**Пример 2.2.** Как и в примере 1.1, потребуем, чтобы решение уравнения  $d^2\varphi/dx^2 - \varphi = 0$  удовлетворяло краевым условиям  $\varphi = 0$  при  $x = 0$  и  $\varphi = 1$  при  $x = 1$ .

Приведенные краевые условия можно выразить в общем виде (2.25), положив  $\mathcal{M}\varphi = \varphi$ ,  $r = 0$  при  $x = 0$  и  $r = -1$  при  $x = 1$ . Тогда, согласно (2.28),  $\psi$  и базисные функции  $N_m$  должны быть выбраны таким образом, что

$$\psi = N_m = 0 \text{ при } x = 0; \quad \psi = 1, N_m = 0 \text{ при } x = 1.$$

Функция  $\psi = x$  удовлетворяет этим условиям, а в качестве базисных функций, обращающихся в нуль при  $x = 0$  и  $x = 1$ , можно взять систему  $\{N_m = \sin m\pi x; m = 1, 2, 3, \dots\}$ .

Тогда разложение

$$\hat{\varphi} = x + \sum_{m=1}^M a_m \sin m\pi x$$

будет удовлетворять краевым условиям задачи. Решаемое уравнение можно записать в общем виде  $\mathcal{L}\varphi + p = 0$ , положив  $\mathcal{L}\varphi = d^2\varphi/dx^2 - \varphi$  и  $p = 0$ . Выбрав весовые функции, можно составить систему  $M$  уравнений вида (2.32) и (2.33). Возьмем  $M = 2$ , т. е. используем два неизвестных параметра  $a_1$  и  $a_2$ , и рассмотрим две возможности, а именно поточечную коллокацию с  $W_l = \delta(x - x_l)$  и метод Галеркина с  $W_l = N_l$ . Читатель может непосредственно проверить, что потребуются решить два уравнения

$$K_{11}a_1 + K_{12}a_2 = f_1,$$

$$K_{21}a_1 + K_{22}a_2 = f_2,$$

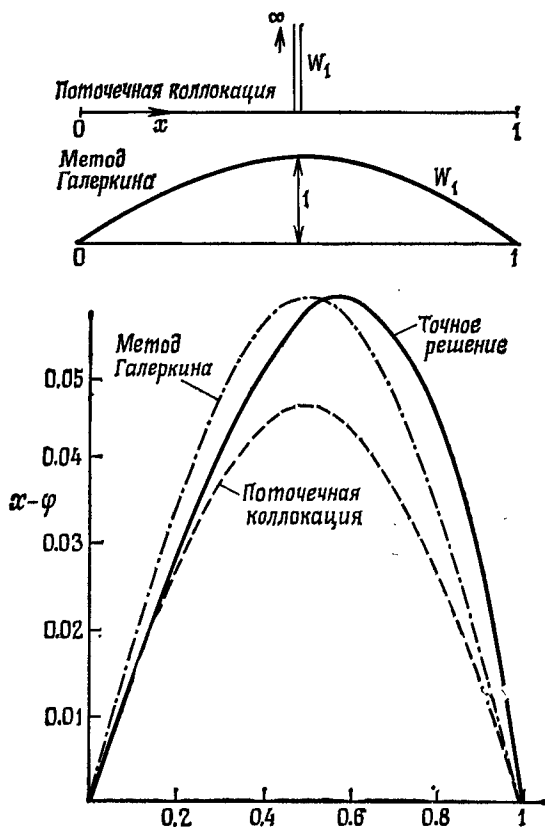


Рис. 2.6а. Приближенные решения задачи из примера 2.2, полученные методами поточечной коллокации и Галеркина с использованием 1-элементной аппроксимации.

где для  $l, m = 1, 2$

$$K_{lm} = \int_0^1 (1 + m^2 \pi^2 x) W_l \sin \pi x \, dx,$$

$$f_l = - \int_0^1 W_l x \, dx.$$

Для метода коллокации (с  $R_\Omega$ , равной нулю при  $x_1 = 1/3$ ,  $x_2 = 2/3$ ) получаем

$$\begin{aligned} K_{11} &= (1 + \pi^2) \sin(\pi/3), & K_{12} &= (1 + 4\pi^2) \sin(2\pi/3), \\ K_{21} &= (1 + \pi^2) \sin(2\pi/3), & K_{22} &= (1 + 4\pi^2) \sin(4\pi/3), \\ f_1 &= -1/3, & f_2 &= -2/3, \end{aligned}$$

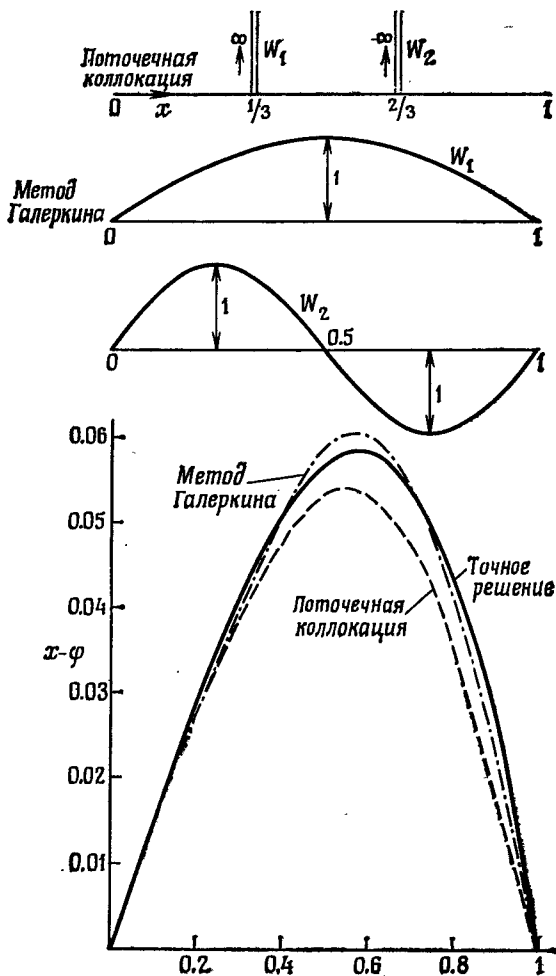


Рис. 2.66. Приближенные решения задачи из примера 2.2, полученные методами потоочечной коллокации и Галеркина с использованием 2-элементной аппроксимации.

тогда как для метода Галеркина

$$K_{11} = (1 + \pi^2)/2, \quad K_{12} = K_{21} = 0, \quad K_{22} = (1 + 4\pi^2)/2, \quad f_1 = -1/\pi, \quad f_2 = 1/(2\pi).$$

Численное решение этих уравнений дает

$$\begin{aligned} a_1 &= -0.05312, & a_2 &= 0.004754 & \text{для потоочечной коллокации,} \\ a_1 &= -0.05857, & a_2 &= 0.007864 & \text{для метода Галеркина.} \end{aligned}$$

На рис. 2.6а и 2.6б приведены полученные в этом случае численные решения для  $M=1$  и  $M=2$  и двух видов весовых множителей. Сравнение с точным решением показывает сходимость в этом примере.

Интересно также сравнить только что полученное решение с решением, найденным методом конечных разностей в гл. 1. Это сделано в следующей таблице, где приведены приближенные и точные значения в узлах конечно-разностной сетки  $x=1/3$  и  $x=2/3$ .

$x$	Метод конечных разностей ( $\Delta x=1/3$ )	Поточечная коллокация	Метод Галеркина	Точное решение
1/3	0.2893	0.2914	0.2894	0.2889
2/3	0.6107	0.6165	0.6091	0.6102

Нужно заметить, что метод Галеркина, использованный в сочетании с соответствующими тригонометрическими функциями, снова привел к диагональной форме матрицы  $K$ , что является следствием ортогональности базисных функций. Таким образом, для данной формы метода Галеркина легко непосредственно вычислить коэффициенты аппроксимирующего ряда:

$$a_m = \int_0^1 x \sin m\pi x dx \cdot \left[ \int_0^1 (1 + m^2\pi^2) \sin m\pi x dx \right]^{-1} = \\ = 2(-1)^m \cdot [m\pi(1 + m^2\pi^2)]^{-1}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Наличие такого решения позволяет получить простую оценку величины погрешности, возникающей на любом этапе аппроксимации.

Можно было бы рассмотреть и другие системы весовых и базисных функций. Для тренировки предлагаем читателю заменить тригонометрические функции системой  $\{N_m = x^m(1-x); m=1, 2, \dots\}$  и сравнить полученную аппроксимацию с найденной выше.

**Пример 2.3.** Чтобы продемонстрировать применение метода взвешенных невязок к двумерной задаче, снова рассмотрим описанную в примере 1.5 задачу кручения. В этом случае требуется решить уравнение  $\partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2 = -2$  в прямоугольнике  $-3 \leq x \leq 3$ ,  $-2 \leq y \leq 2$  с нулевыми краевыми условиями, т. е.  $\varphi = 0$  на границах  $x = \pm 3$  и  $y = \pm 2$ .

Очевидно, что решение симметрично относительно прямых  $x=0$  и  $y=0$ , и поэтому мы ограничимся использованием четных базисных функций, которые также обладают этим свойством симметрии. Например, если выбрана система  $N_1 = \cos(\pi x/6) \cos(\pi y/4)$ ,  $N_2 = \cos(3\pi x/6) \cos(\pi y/4)$ ,  $N_3 = \cos(\pi x/6) \cos(3\pi y/4)$  и т. д., то

трехэлементная аппроксимация вида

$$\hat{\varphi} = a_1 \cos(\pi x/6) \cos(\pi y/4) + a_2 \cos(3\pi x/6) \cos(\pi y/4) + \\ + a_3 \cos(\pi x/6) \cos(3\pi y/4) = \sum_{m=1}^3 a_m N_m$$

автоматически удовлетворяет требуемым краевым условиям и является четной функцией. Как и выше, решаемое уравнение можно записать в общем виде  $\mathcal{L}\varphi + p = 0$ , положив  $\mathcal{L}\varphi = \partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2$  и  $p = 2$ . Когда весовые функции выбраны, из формул (2.32) и (2.33) получаем систему трех уравнений, решение которой дает значения  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$ . Если воспользоваться методом Галеркина, то элементы матрицы  $\mathbf{K}$  и вектора  $\mathbf{f}$  примут вид

$$K_{lm} = - \int_{-3}^3 \int_{-2}^2 (\partial^2 N_m / \partial x^2 + \partial^2 N_m / \partial y^2) N_l dy dx, \\ f_l = \int_{-3}^3 \int_{-2}^2 2N_l dy dx$$

и в силу ортогональности базисных функций на рассматриваемом прямоугольнике система имеет диагональную форму, а решение может быть выписано непосредственно:

$$a_1 = 4608/(13\pi^4), \quad a_2 = -4608/(135\pi^4), \quad a_3 = -4608/(255\pi^4).$$

Аппроксимацию крутящего момента  $T$  можно теперь вычислить по формуле

$$T = 2 \int_{-3}^3 \int_{-2}^2 \hat{\varphi} dy dx = 74.265$$

(точное значение равно 76.4). Приближенным значением максимума касательного напряжения в этом случае будет  $|\tau| = 3.02$  (точное значение равно 2.96).

Как и в § 2.2, метод наименьших квадратов можно снова включить в общую формулировку метода взвешенных невязок (2.31). На этот раз попытаемся минимизировать

$$I(a_1, a_2, \dots, a_m) = \int_{\Omega} R_{\Omega}^2 d\Omega = \int_{\Omega} \left\{ \mathcal{L}\psi + \left( \sum_{m=1}^M a_m \mathcal{L}N_m \right) + p \right\}^2 d\Omega, \quad (2.34)$$

попробовав, чтобы

$$\partial I / \partial a_l = 0, \quad l = 1, 2, \dots, M. \quad (2.35)$$



В результате получим систему уравнений

$$\int_{\Omega} R_{\Omega} (\partial R_{\Omega} / \partial a_l) d\Omega = 0, \quad l = 1, 2, \dots, M, \quad (2.36)$$

совпадающую с системой уравнений метода взвешенных невязок при выборе весовых функций по правилу

$$W_l = \partial R_{\Omega} / \partial a_l = \mathcal{L} N_l. \quad (2.37)$$

Отметим, что в данном случае метод наименьших квадратов не эквивалентен методу Галеркина.

В заключение этого параграфа укажем, что в примерах 2.2 и 2.3 метод Галеркина приводил к системе с симметричной матрицей, тогда как метод коллокации давал несимметричные коэффициенты. Эта характерная особенность метода Галеркина отмечалась в § 2.2 применительно к аппроксимации функций; причины ее повторного упоминания здесь будут объяснены позднее. Заметим, однако, еще раз, что указанная особенность дает вычислительные преимущества при решении большинства задач и является одной из причин популярности метода Галеркина.

## Упражнения

2.4. В упражнении 1.2 найти распределение изгибающего момента, используя методы поточечной коллокации, Галеркина и наименьших квадратов и подходящую систему базисных функций. Сравнить ответы с точным решением и результатами, полученными методом конечных разностей.

2.5. Некоторая задача одномерной стационарной теплопроводности с распределенным источником тепла описывается уравнением  $d^2\varphi/dx^2 + \varphi + 1 = 0$  с краевыми условиями  $\varphi = 0$  при  $x = 0$  и  $d\varphi/dx = -\varphi$  при  $x = 1$ . Найти приближенное решение методом Галеркина и исследовать скорость сходимости метода, сравнив полученные результаты с точным решением.

2.6. В упражнении 1.20 найти отклонение нагруженной балки на упругом основании методами поточечной коллокации и Галеркина. Сравнить ответы с точным решением и с результатами, полученными методом конечных разностей.

2.7. В некоторой двумерной задаче стационарной теплопроводности для квадрата со стороной длины 1 температура на сторонах  $x = \pm 1$  изменяется как  $1 - y^2$ , а на сторонах  $y = \pm 1$  — как  $1 - x^2$ . Используя метод Галеркина, найти распределение температуры на квадрате.

2.8. В упражнении 1.21 получить аппроксимацию отклонения нагруженной пластины, используя методы поточечной коллокации и Галеркина.

## 2.4. Одновременная аппроксимация решений дифференциальных уравнений и краевых условий

В предыдущем параграфе было показано, как можно приближенно решить дифференциальное уравнение, используя разложение по базисным функциям и строя аппроксимирующую функцию  $\hat{\varphi}$ , тождественно удовлетворяющую всем краевым условиям

задачи. В данном параграфе это требование будет ослаблено, поскольку оно естественным образом ограничивает выбор возможных видов базисных функций.

Если теперь мы будем считать, что разложение

$$\varphi \approx \hat{\varphi} = \sum_{m=1}^M a_m N_m \quad (2.38)$$

не удовлетворяет априори некоторому краевому условию или всем краевым условиям задачи, то к невязке по области

$$R_\Omega = A(\hat{\varphi}) = \mathcal{L}(\hat{\varphi}) + p \quad \text{на } \Omega \quad (2.39)$$

добавляется невязка в краевых условиях

$$R_\Gamma = B(\hat{\varphi}) = \mathcal{M}\hat{\varphi} + r \quad \text{на } \Gamma. \quad (2.40)$$

Можно попытаться уменьшить взвешенную сумму невязок на границе и по области, полагая

$$\int_{\Omega} W_i R_\Omega d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{W}_i R_\Gamma d\Gamma = 0, \quad (2.41)$$

где, вообще говоря, весовые функции  $W_i$  и  $\bar{W}_i$  могут быть выбраны независимо.

Ясно, что если соотношение (2.41) выполняется для достаточно большого числа произвольных функций  $W_i$  и  $\bar{W}_i$ , то аппроксимация  $\hat{\varphi}$  должна приближать точное решение  $\varphi$  при условии, что разложение (2.38) вообще способно это сделать. Положение не меняется, если  $W_i$  и  $\bar{W}_i$  связаны каким-либо образом.

Подлежащую решению систему уравнений можно опять записать в достаточно общем виде

$$Ka = f, \quad (2.42)$$

где теперь

$$\begin{aligned} K_{im} &= \int_{\Omega} W_i \mathcal{L} N_m d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{W}_i \mathcal{M} N_m d\Gamma, \\ f_i &= - \int_{\Omega} W_i p d\Omega - \int_{\Gamma} \bar{W}_i r d\Gamma. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Чтобы проиллюстрировать применение этого процесса, снова рассмотрим решение примера 2.2, но на этот раз используем разложение по базисным функциям, не удовлетворяющее априори краевым условиям.

**Пример 2.4.** В примере 2.2 уравнение  $d^2\varphi/dx^2 - \varphi = 0$  с  $\varphi = 0$  при  $x = 0$  и  $\varphi = 1$  при  $x = 1$  решалось путем построения аппроксимации  $\hat{\varphi}$ , автоматически удовлетворявшей заданным условиям при  $x = 0$  и  $x = 1$ . Если обратиться к этой задаче, используя только

что описанный метод, то более не нужно, чтобы функция  $\psi$  удовлетворяла краевым условиям для  $\varphi$ , как и не требуется, чтобы базисные функции обращались в нуль на границах. В качестве возможной системы базисных функций теперь можно взять, например,  $\{N_m = x^{m-1}; m = 1, 2, 3, \dots\}$ .

В рассматриваемом случае граничная кривая  $\Gamma$  состоит из двух точек  $x=0$  и  $x=1$ , так что интеграл по границе в (2.41) сводится к двум дискретным невязкам и это соотношение теперь можно записать в виде

$$\int_0^1 W_i R_\Omega dx + [\bar{W}_i R_\Gamma]_{x=0} + [\bar{W}_i R_\Gamma]_{x=1} = 0.$$

Для этого примера используем весовые функции, определенные равенствами  $W_i = N_i$ ,  $\bar{W}_i = -N_i|_\Gamma$ . Тогда, согласно выписанному выше соотношению,

$$\int_0^1 (d^2\hat{\varphi}/dx^2 - \hat{\varphi}) N_i dx - [N_i \hat{\varphi}]_{x=0} - [N_i (\hat{\varphi} - 1)]_{x=1} = 0.$$

Применяя 3-элементное разложение  $\hat{\varphi} = a_1 + a_2x + a_3x^2$ , получим систему вида (2.42), где теперь

$$K = \begin{bmatrix} 3 & 3/2 & -2/3 \\ 3/2 & 4/3 & 1/4 \\ 4/3 & 5/4 & 8/15 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что матрица  $K$  в данном случае несимметрична.

Решение этой системы таково:

$$a_1 = 0.068, \quad a_2 = 0.632, \quad a_3 = 0.226.$$

Сходимость аппроксимации к заданным условиям при  $x=0$  и  $x=1$  показана в следующей таблице, где сравнивается поведение 1-, 2- и 3-элементных аппроксимаций в этих двух точках:

	Один элемент	Два элемента	Три элемента	Точное решение
$x=0$	1/3	-0.095	0.068	0
$x=1$	2/3	0.762	0.925	1

Сходимость аппроксимирующей последовательности на всем отрезке  $0 \leq x \leq 1$  показана на рис. 2.7, где эти три аппроксимации сравниваются с точным решением.

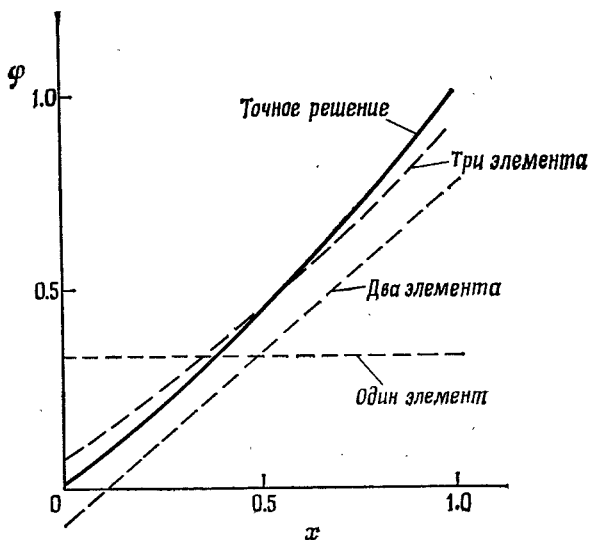


Рис. 2.7. Сравнение точного решения с решением, полученным с помощью базисных функций, для задачи из примера 2.4.

В только что рассмотренном одномерном примере интеграл по границе в уравнении (2.41) свелся к определению двух значений в точках. Однако процесс очевидным образом справедлив и для двумерной или многомерной областей. Такая ситуация иллюстрируется следующим примером.

**Пример 2.5.** Снова рассмотрим задачу кручения из примеров 1.5 и 2.3, описываемую уравнением  $\partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2 = -2$  в прямоугольнике  $-3 \leq x \leq 3$ ,  $-2 \leq y \leq 2$  с краевым условием  $\varphi = 0$  на границах. Как и ранее, ограничимся четными базисными функциями, но на этот раз откажемся от требования, чтобы аппроксимация автоматически удовлетворяла всем краевым условиям. Например, если берется система

$$\begin{aligned} N_1 &= (4 - y^2), & N_2 &= (4 - y^2)x^2, & N_3 &= (4 - y^2)y^2, \\ N_4 &= (4 - y^2)x^2y^2, & N_5 &= (4 - y^2)x^4 & \text{и т. д.} \end{aligned}$$

и образуется 5-элементная аппроксимация

$$\hat{\varphi} = (4 - y^2)(a_1 + a_2x^2 + a_3y^2 + a_4x^2y^2 + a_5x^4),$$

то  $\hat{\varphi}$  непосредственно удовлетворяет требуемым условиям при  $y = \pm 2$ , но условие  $\hat{\varphi} = 0$  при  $x = \pm 3$  автоматически уже не выполняется. Тогда краевое условие на прямых  $x = \pm 3$  учитывается путем включения этого условия в уравнения метода взвешенных невязок, как это сделано в уравнении (2.41), и соответ-

ствующей формой этих уравнений для данной задачи будет

$$\int_{-3}^3 \int_{-2}^2 (\partial^2 \hat{\varphi} / \partial x^2 + \partial^2 \hat{\varphi} / \partial y^2 + 2) W_i dy dx + \\ + \int_{-2}^2 \bar{W}_i \hat{\varphi} |_{x=3} dy - \int_{-2}^2 W_i \hat{\varphi} |_{x=-3} dy = 0.$$

Используя весовые функции  $W_i = N_i$ ,  $\bar{W}_i = N_i|_{\Gamma}$  и выполняя интегрирование, получаем уравнение вида (2.42), где

$$K = \begin{bmatrix} 6.66667 & -44 & 43.7333 & 80 & -813.6 \\ -12 & -333.6 & 105.6 & 355.2 & 5748.68 \\ 11.7333 & -16 & 159.086 & 389.486 & -547.2 \\ 9.6 & -163.2 & 433.371 & 1971.57 & -3932.43 \\ -237.6 & -3156.69 & 432 & 1473.74 & -46239.43 \end{bmatrix},$$

$$f = \begin{bmatrix} 12 \\ 36 \\ 16 \\ 48 \\ 194.4 \end{bmatrix}.$$

Сходимость аппроксимации к точным значениям крутящего момента  $T$  и максимуму касательного напряжения  $\tau$  показана в следующей таблице, где отражены результаты, полученные использованием 2- и 5-элементных аппроксимаций:

	Два элемента	Пять элементов	Точное решение
$T$	58.94	73.60	76.4
$ \tau $	3.52	3.33	2.96

Повышение точности представления краевого условия  $\hat{\varphi} = 0$  на прямых  $x = \pm 3$  с увеличением числа используемых элементов иллюстрируется рис. 2.8, где показано поведение 2- и 5-элементных аппроксимаций на этих граничных прямых.

## Упражнения

2.9. Применяя метод взвешенных невязок, решить задачу из упражнения 1.1, используя сначала аппроксимацию, удовлетворяющую заданным крайним условиям, а затем аппроксимацию, для которой крайние условия не удовле-

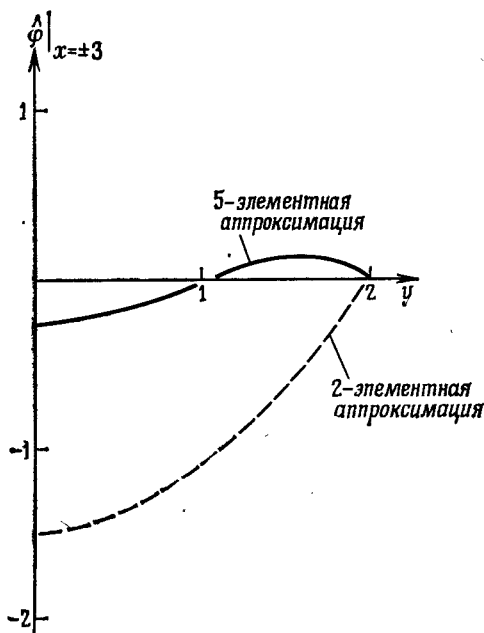


Рис. 2.8. Поведение 2- и 5-элементных аппроксимаций из примера 2.5 на прямых  $\nu = \pm 3$ .

периодически. Сравните результаты, полученные этими методами, с поведением точного решения.

2.10. Методом взвешенных невязок найти распределение изгибающего момента в балке из упражнения 1.2, используя аппроксимацию, удовлетворяющую краевому условию при  $x=0$ , но не удовлетворяющую автоматически краевому условию при  $x=1$ . Использовать граничные весовые функции  $W_i = \alpha N_i|_{\Gamma}$ , где  $\alpha$  — постоянная, и сравнить результаты, найденные при  $\alpha = 0.1, \pm 1, \pm 10, \pm 100$ , с результатами из упражнения 2.4, полученными с помощью аппроксимации, автоматически удовлетворявшей обоим краевым условиям.

2.11. В упражнении 2.7 найти распределение температуры, используя аппроксимацию, удовлетворяющую краевым условиям только на сторонах  $x = \pm 1$ . Показать сходимость аппроксимации к краевому условию на сторонах  $y = \pm 1$ .

2.12. В упражнении 1.21 была описана задача определения отклонения нагруженной упругой пластины. Найти приближенное решение этой задачи, которое сначала удовлетворяет только граничному условию нулевого смещения на краях пластины. Показать улучшение выполнения другого граничного условия на краях пластины с увеличением числа используемых в аппроксимации элементов.

## 2.5. Естественные краевые условия

Примеры, приведенные в предыдущем параграфе, показали, что можно вычислить коэффициенты разложения (2.38) и таким образом определить приближенное решение без априорного удовлетворения краевым условиям. Тем не менее процесс был более сложен даже в этих простых примерах. Здесь для получения аппроксимации требовалось больше параметров, чем для нахождения приближения, изначально удовлетворявшего краевым условиям, т. е. для достижения заданной точности решалось большее число уравнений.

Кроме того, использование уравнения (2.41) может потребовать вычисления интегралов, включающих производные от  $\hat{\varphi}$  вдоль границ, что может оказаться затруднительным, если эти границы криволинейны или имеют какие-либо другие осложняющие дело особенности.

В этом параграфе для конкретных уравнений и краевых условий будет показано, как можно обойти указанные затруднения с вычислением производной на границе и нужным образом видоизменить соответствующую общую формулировку.

Возвращаясь к уравнению метода взвешенных невязок (2.41), необходимо отметить, что в этом уравнении первое слагаемое

$$\int_{\Omega} W_l R_{\Omega} d\Omega \equiv \int_{\Omega} W_l (\mathcal{L}\hat{\varphi} + p) d\Omega, \quad (2.44)$$

как правило, можно преобразовать к виду

$$\int_{\Omega} W_l \mathcal{L}\hat{\varphi} d\Omega \equiv \int_{\Omega} (\mathcal{E}W_l) (\mathcal{D}\hat{\varphi}) d\Omega + \int_{\Gamma} W_l \mathcal{E}\hat{\varphi} d\Gamma, \quad (2.45)$$

где  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{D}$  и  $\mathcal{E}$  — линейные дифференциальные операторы более низкого порядка, чем исходный оператор  $\mathcal{L}$ . Для рассматриваемых задач результат подстановки этого выражения в (2.41) часто называется *слабой формулировкой* метода взвешенных невязок (или *слабой формой* уравнения метода взвешенных невязок). После такой подстановки надлежащим выбором граничной весовой функции  $\bar{W}_l$  можно добиться того, что последнее слагаемое в (2.45) и часть второго слагаемого в (2.41) взаимно уничтожаются и, таким образом, будет исключен интеграл, содержащий  $\hat{\varphi}$  или ее производные вдоль границы. Это будет возможно только для определенных краевых условий, называемых *естественными*. В общем случае применение такой процедуры для краевых условий, включающих только заданные значения самой функции, выгоды не дает, но она может быть полезна при задании на границе производной.

Еще одно преимущество такого преобразования состоит в определенной симметрии соответствующих алгебраических уравнений наряду с получением, вообще говоря, более низкого порядка производных базисных функций  $N_m$ . Эта характерная особенность будет важным элементом обсуждения в следующей главе.

Для иллюстрации и дальнейшего пояснения процесса на данном этапе полезно рассмотреть конкретный пример.

**Пример 2.6.** Рассмотрим еще раз уже изучавшееся выше дифференциальное уравнение  $d^2\varphi/dx^2 - \varphi = 0$ , но на этот раз с крайними условиями  $\varphi = 0$  при  $x = 0$  и  $d\varphi/dx = 20$  при  $x = 1$ . Предположим, что аппроксимация имеет вид

$$\hat{\varphi} = \psi + \sum_{m=1}^M a_m N_m,$$

где  $\psi$  и система  $N_m$  таковы, что краевое условие при  $x = 0$  выполняется автоматически. Подходящим выбором была бы здесь, например, система  $\{N_m = x^m; m = 1, 2, \dots, M\}$  при  $\psi = 0$ .

Тогда, согласно методу взвешенных невязок для дифференциального уравнения и еще не выполненного краевого условия при  $x = 1$ , получаем

$$\int_0^1 (d^2\hat{\varphi}/dx^2 - \hat{\varphi}) W_l dx + [(d\hat{\varphi}/dx - 20) \bar{W}_l]_{x=1} = 0.$$

Интегрируя первое слагаемое по частям, это выражение можно переписать в виде

$$\int_0^1 (d\hat{\varphi}/dx) (dW_l/dx) dx - \int_0^1 \hat{\varphi} W_l dx + [W_l d\hat{\varphi}/dx]_{x=1} - [W_l d\hat{\varphi}/dx]_{x=0} + [\bar{W}_l (d\hat{\varphi}/dx - 20)]_{x=1} = 0.$$

Если теперь функции  $W_l$  и  $\bar{W}_l$  взять такими, что  $\bar{W}_l|_{x=1} = W_l|_{x=1}$  и  $W_l|_{x=0} = 0$ , то находим

$$\int_0^1 (d\hat{\varphi}/dx) (dW_l/dx) dx + \int_0^1 \hat{\varphi} W_l dx = 20W_l|_{x=1}.$$

Здесь уже не требуется вычислять производную от  $\hat{\varphi}$  при  $x = 1$ , и поставленное в этой точке краевое условие является естественным. Кроме того, если для нашего примера краевое условие при  $x = 1$  имеет вид  $d\varphi/dx = 0$ , то никакого дополнительного слагаемого, учитывающего краевое условие, привлекать не требуется. Этот факт подчеркивает естественность задания на границе градиента в такой формулировке.



Далее система аппроксимирующих уравнений получается стандартным образом, основываясь на используемой базисной функции  $\hat{\varphi}$ . В результате опять имеем систему

$$Ka = f$$

с элементами

$$K_{lm} = \int_0^1 (dW_l/dx)(dN_m/dx) dx + \int_0^1 W_l N_m dx, \quad f_l = 20W_l|_{x=1},$$

которые легко вычислить. При двух неизвестных параметрах  $a_1$  и  $a_2$  и базисных функциях  $N_m = x^m$  применение метода Галеркина дает  $a_1 = 11.7579$ ,  $a_2 = 3.4582$ . В следующей таблице соответствующие значения  $\hat{\varphi}$  при  $x = 1/2$  и  $x = 1$  сравниваются с точным решением.

	Метод Галеркина с двумя элементами	Точное решение
$x = 0.5$	6.7435	6.7540
$x = 1$	15.2161	15.2319

Сходимость  $d\hat{\varphi}/dx|_{x=1}$  к заданному значению 20 иллюстрируется тем фактом, что при аппроксимации одним элементом  $d\varphi/dx|_{x=1} = 15$ , а для двух элементов  $d\varphi/dx|_{x=1} = 18.67$ .

Отметим, что метод Галеркина может быть использован здесь на законном основании, поскольку все базисные функции автоматически удовлетворяют ограничению  $W_l|_{x=0} = 0$ , наложенному выше при получении окончательной формулировки метода взвешенных невязок.

### 2.5.1. Естественные краевые условия для уравнения теплопроводности

Рассмотрим вновь уравнение теплопроводности из гл. 1 и обсудим в более общей постановке вопрос о естественных краевых условиях. Итак, будем искать решение уравнения

$$\partial(k\partial\varphi/\partial x)/\partial x + \partial(k\partial\varphi/\partial y)/\partial y + Q = 0 \quad (2.46)$$

с краевыми условиями

$$\varphi = \bar{\varphi} \text{ на } \Gamma_\varphi, \quad k\partial\varphi/\partial n = -\bar{q} \text{ на } \Gamma_q. \quad (2.47)$$

Используем разложение по базисным функциям

$$\hat{\varphi} = \psi + \sum_{m=1}^M a_m N_m, \quad (2.48)$$

где  $\psi$  и базисные функции выбираются таким образом, что  $\varphi = \bar{\varphi}$  на  $\Gamma_\varphi$ , т. е.  $\psi = \bar{\psi}$ , и  $N_m = 0$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$  на  $\Gamma_\varphi$ . Запись уравнений метода взвешенных невязок в виде

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y} \right) \right] W_l dx dy + \int_{\Omega} W_l Q dx dy + \\ + \int_{\Gamma_q} \left( k \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial n} + q \right) \bar{W}_l d\Gamma = 0, \quad l = 1, 2, \dots, M \quad (2.49)$$

в пределе при  $M \rightarrow \infty$  обеспечивает выполнение как дифференциального уравнения, так и условия задания на границе  $\Gamma_q$  градиента. Первый интеграл можно переписать в виде (2.45), используя хорошо известную формулу Грина [3]<sup>1)</sup>, согласно которой для достаточное число раз дифференцируемых функций  $\alpha$  и  $\beta$  справедливы тождества

$$\int_{\Omega} \alpha (\partial \beta / \partial x) dx dy = - \int_{\Omega} (\partial \alpha / \partial x) \beta dx dy + \int_{\Gamma} \alpha \beta n_x d\Gamma, \quad (2.50a)$$

$$\int_{\Omega} \alpha (\partial \beta / \partial y) dx dy = - \int_{\Omega} (\partial \alpha / \partial y) \beta dx dy + \int_{\Gamma} \alpha \beta n_y d\Gamma, \quad (2.50b)$$

где  $n_x$  и  $n_y$  — направляющие косинусы внешней нормали  $n$  к замкнутой кривой  $\Gamma$ , ограничивающей область  $\Omega$  в плоскости  $(x, y)$ , а интегрирование вдоль  $\Gamma$  осуществляется в направлении против часовой стрелки. Используя это тождество и замечая, что

$$n_x \partial \alpha / \partial x + n_y \partial \alpha / \partial y = \partial \alpha / \partial n, \quad (2.51)$$

уравнения метода взвешенных невязок можно преобразовать к виду

$$\int_{\Omega} [(\partial W_l / \partial x) k \partial \hat{\varphi} / \partial x + (\partial W_l / \partial y) k \partial \hat{\varphi} / \partial y] dx dy + \int_{\Omega} W_l Q dx dy + \\ + \int_{\Gamma_\varphi + \Gamma_q} k (\partial \hat{\varphi} / \partial n) W_l d\Gamma + \int_{\Gamma_q} (k \partial \hat{\varphi} / \partial n + \bar{q}) \bar{W}_l d\Gamma = 0. \quad (2.52)$$

Ограничивая теперь выбор весовых функций требованием

$$W_l = 0 \quad \text{на } \Gamma_\varphi, \quad (2.53a)$$

$$\bar{W}_l = -W_l \quad \text{на } \Gamma_q, \quad (2.53b)$$

видим, что интегралы, включающие градиент от  $\hat{\varphi}$  на границе, взаимно уничтожаются и аппроксимирующее соотношение при-

<sup>1)</sup> См. также Владимиров В. С. Уравнения математической физики, — 4-е изд. — М.: Наука, 1981. — Прим. ред.

нимает вид

$$\int_{\Omega} [(\partial W_l / \partial x) k \partial \hat{\varphi} / \partial x + (\partial W_l / \partial y) k \partial \hat{\varphi} / \partial y] dx dy - \int_{\Omega} W_l Q dx dy + \int_{\Gamma_q} W_l \bar{q} d\Gamma = 0. \quad (2.54)$$

Подставляя в это уравнение разложение по базисным функциям (2.48), приходим к стандартной системе линейных алгебраических уравнений

$$K a = f \quad (2.55)$$

с элементами матрицы и правой части

$$K_{lm} = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial W_l}{\partial x} k \frac{\partial N_m}{\partial x} + \frac{\partial W_l}{\partial y} k \frac{\partial N_m}{\partial y} \right) dx dy, \quad 1 \leq l, m \leq M,$$

$$f_l = \int_{\Omega} W_l Q dx dy - \int_{\Gamma_q} W_l \bar{q} d\Gamma - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial W_l}{\partial x} k \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial W_l}{\partial y} k \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dx dy, \quad 1 \leq l \leq M. \quad (2.56)$$

Необходимо опять отметить, что в данном контексте выбор базисных функций по Галеркину  $N_l = W_l$  допустим, так как использованные в разложении (2.48) базисные функции  $N_m$  автоматически удовлетворяют условию (2.53а). Кроме того, можно непосредственно видеть, что применение метода Галеркина приводит к симметричной матрице  $K$ , поскольку

$$K_{lm} = K_{ml}. \quad (2.57)$$

Этот факт отмечался ранее в примере 2.3, но не был очевиден до применения формулы Грина к уравнениям метода взвешенных невязок.

Напомним, что метод конечных разностей, примененный к этой задаче с заменой производной на границе центральной разностью, приводил к системе уравнений с несимметричной матрицей. Наконец, здесь было показано, в каком смысле краевое условие

$$k \partial \varphi / \partial n = -\bar{q} \quad (2.58)$$

является естественным для данной задачи, поскольку его использование позволяет исключить фактическое вычисление  $\partial \varphi / \partial n$  на границах. Заметим, что если  $\bar{q} = 0$ , то указанные границы более не входят явно в соотношения (2.54).

**Пример 2.7.** Требуется решить задачу стационарной теплопроводности в материале с коэффициентом теплопроводности  $k = 1$ ,

занимающим квадратную область  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ . На сторонах  $y = \pm 1$  поддерживается нулевая температура, тогда как через стороны  $x = \pm 1$  подается тепло со скоростью  $\cos(\pi y/2)$  на единицу длины.

Описывающее этот процесс дифференциальное уравнение стационарной теплопроводности при отсутствии источников тепла является частным случаем уравнения (2.46) и имеет вид

$$\partial^2 \varphi / \partial x^2 + \partial^2 \varphi / \partial y^2 = 0$$

с краевыми условиями типа (2.47):

$$\begin{aligned} \varphi &= 0 \quad \text{при } y = \pm 1, \text{ т. е. на } \Gamma_\varphi, \\ \partial \varphi / \partial n &= \cos(\pi y/2) \quad \text{при } x = \pm 1, \text{ т. е. на } \Gamma_q. \end{aligned}$$

Если воспользоваться системой базисных функций  $N_1 = 1 - y^2$ ,  $N_2 = (1 - y^2)x^2$ ,  $N_3 = (1 - y^2)y^2$ ,  $N_4 = (1 - y^2)x^2y^2$ ,  $N_5 = (1 - y^2)x^4$  и т. д., то 5-элементная аппроксимация

$$\hat{\varphi} = (1 - y^2)(a_1 + a_2 x^2 + a_3 y^2 + a_4 x^2 y^2 + a_5 x^4)$$

будет непосредственно удовлетворять краевым условиям на  $\Gamma_\varphi$ . Тогда согласно методу взвешенных невязок (2.49) для данного типа аппроксимации имеем

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\partial^2 \hat{\varphi} / \partial x^2 + \partial^2 \hat{\varphi} / \partial y^2) W_t dx dy + \int_{\Gamma_q} [\partial \hat{\varphi} / \partial n - \cos(\pi y/2)] \bar{W}_t d\Gamma = 0,$$

откуда, используя соотношения (2.50), можно получить уравнение

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [(\partial \hat{\varphi} / \partial x) \partial W_t / \partial x + (\partial \hat{\varphi} / \partial y) \partial W_t / \partial y] dx dy - \\ - \int_{\Gamma_\varphi + \Gamma_q} (\partial \hat{\varphi} / \partial n) W_t d\Gamma - \int_{\Gamma_q} [\partial \hat{\varphi} / \partial n - \cos(\pi y/2)] \bar{W}_t d\Gamma = 0. \end{aligned}$$

Если взять  $W_t = N_t$ , то интеграл по  $\Gamma_\varphi$  обращается в нуль, поскольку на этой части границы  $N_t = 0$ .

Тогда приведенное выше соотношение можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [(\partial \hat{\varphi} / \partial x) \partial N_t / \partial x + (\partial \hat{\varphi} / \partial y) \partial N_t / \partial y] dx dy - \\ - \int_{\Gamma_q} (\partial \hat{\varphi} / \partial n) N_t d\Gamma - \int_{\Gamma_q} [\partial \hat{\varphi} / \partial n - \cos(\pi y/2)] \bar{W}_t d\Gamma = 0. \end{aligned}$$

Чтобы избавиться от интегралов по  $\Gamma_q$ , содержащих градиент от  $\varphi$ , можно взять  $\bar{W}_t = N_t|_{\Gamma_q}$ , как это было сделано в (2.53б). Отсюда следует, что условие на  $\Gamma_q$  является естественным крае-

вым условием для этого уравнения. В результате имеем

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [(\partial \hat{\varphi} / \partial x) \partial N_l / \partial x + (\partial \hat{\varphi} / \partial y) \partial N_l / \partial y] dx dy = \int_{\Gamma_q} N_l \cos(\pi y / 2) dy.$$

Подставляя сюда рассматриваемую аппроксимацию  $\hat{\varphi}$ , получаем векторное уравнение вида (2.55), где теперь

$$K_{lm} = \int_0^1 \int_0^1 \left( \frac{\partial N_l}{\partial x} \frac{\partial N_m}{\partial x} + \frac{\partial N_l}{\partial y} \frac{\partial N_m}{\partial y} \right) dx dy, \quad 1 \leq l, m \leq 5,$$

$$f_l = \int_0^1 N_l |_{x=1} \cos(\pi y / 2) dy, \quad 1 \leq l \leq 5.$$

Вычисляя элементы матрицы и правой части, находим

$$K = \begin{bmatrix} 1.33333 & 0.444444 & 0.266667 & 0.0888889 & 0.266667 \\ & 0.977778 & 0.0888889 & 0.154921 & 1.4381 \\ & & 0.419048 & 0.139683 & 0.0533333 \\ \text{Симметрично} & & & 0.117672 & 0.16 \\ & & & & 1.3672 \end{bmatrix},$$

$$f = \begin{bmatrix} 0.516025 \\ 0.516025 \\ 0.0704803 \\ 0.0704803 \\ 0.516025 \end{bmatrix},$$

после чего, решая векторное уравнение, можно найти вектор неизвестных коэффициентов  $a$ . Если этот процесс выполнен, то становится возможным показать сходимость полученной таким образом аппроксимации к естественным краевым условиям на прямых  $x = \pm 1$  (см. рис. 2.9).

## Упражнения

2.13. Используя метод Галеркина, решить задачу теплопроводности из упражнения 1.9 и сравнить точное и приближенное решения.

2.14. Решить упражнение 1.10 методом Галеркина. Показать сходимость приближенного решения к точному при возрастании числа элементов, используемых в аппроксимации.

2.15. В упражнении 1.20 была рассмотрена задача об отклонении нагруженной балки с защемленными концами, покоящейся на упругом основании. Выяснить, какие краевые условия здесь являются естественными. Решить эту задачу методом Галеркина для случая, когда балка свободно опирается на концах, используя аппроксимацию, не удовлетворяющую автоматически этим естественным краевым условиям. Краевые условия, соответствующие свободно опирающейся балке, имеют вид  $\varphi = d^2\varphi / dx^2 = 0$  на обоих концах.

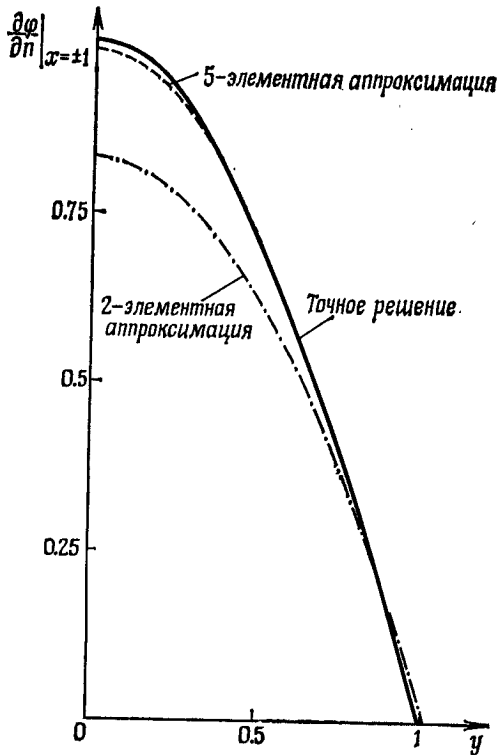


Рис. 2.9. Сравнение нормальных производных точного и приближенного решений на прямых  $x=\pm 1$  для задачи из примера 2.7.

2.16. Вывести уравнения метода взвешенных невязок для задачи двумерной стационарной теплопроводности в области  $\Omega$  с краевыми условиями  $\varphi = \bar{\varphi}$  на  $\Gamma_{\varphi}$  и  $k\frac{d\varphi}{dn} = -\bar{q} + h(\varphi - \varphi_0)$  на  $\Gamma_q$ . Здесь  $\varphi$  — температура в произвольной точке,  $k$  — коэффициент теплопроводности среды, а  $\bar{\varphi}$ ,  $\bar{q}$ ,  $h$  и  $\varphi_0$  — заданные функции координат.

2.17. Решить задачу стационарной теплопроводности в материале, занимающем квадрат  $-1 \leq x, y \leq 1$ , если на сторонах  $y = \pm 1$  поддерживается температура  $100^\circ \text{C}$ , тогда как на сторонах  $x = \pm 1$  задано условие  $\frac{d\varphi}{dn} = -1 - \varphi$ .

2.18. Показать, что для описанной в упражнении 1.21 задачи об отклонении нагруженной тонкой упругой пластины краевое условие  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2} = 0$  на  $\Gamma$  является естественным краевым условием. Решить эту задачу и сравнить ответы с полученными в упражнении 2.12.

## 2.6. Методы граничного решения

В этой главе для построения приближенных решений дифференциальных уравнений с соответствующими краевыми условиями использовались системы базисных функций, такие, что либо

1) аппроксимация  $\varphi$  полностью удовлетворяла краевым условиям, но не удовлетворяла априори дифференциальному уравнению в области  $\Omega$ , либо

2) аппроксимация  $\hat{\varphi}$  ни полностью, ни частично не удовлетворяла краевым условиям, как не удовлетворяла и дифференциальному уравнению.

Ясно, что существует и третья возможность, когда базисные функции таковы, что аппроксимация  $\hat{\varphi}$  автоматически удовлетворяет дифференциальному уравнению, но не удовлетворяет непосредственно краевым условиям [4]. Если рассматриваемое дифференциальное уравнение линейно, то такая возможность может быть реализована выбором базисных функций, которые сами являются решениями дифференциального уравнения. Выбирая базисные функции таким образом, положим

$$\varphi \approx \hat{\varphi} = \sum_{m=1}^M a_m N_m. \quad (2.59)$$

Тогда уравнение метода взвешенных невязок (2.41) сводится к соотношению

$$\int_{\Gamma} \overline{W}_i R_{\Gamma} d\Gamma = 0, \quad (2.60)$$

так как

$$R_{\Omega} = A(\hat{\varphi}) = \sum_{m=1}^M a_m A(N_m) = 0. \quad (2.61)$$

Теперь необходимо определить только систему весовых функций  $\overline{W}_i$ , и причем фактически лишь на границе  $\Gamma$ .

Тем не менее такую систему базисных функций выбрать труднее. Для этого существуют общие, хотя и достаточно сложные процедуры. Здесь, однако, мы ограничимся демонстрацией решения задачи на примере уравнения Лапласа, для которого выбор базисных функций особенно прост.

Если имеется некоторая аналитическая функция комплексной переменной  $z = x + iy$ , то ее вещественная и мнимая части должны автоматически удовлетворять уравнению Лапласа. Действительно, пусть такой аналитической функцией является

$$f(z) = u + iv, \quad (2.62)$$

где  $u$  и  $v$  вещественны. Тогда

$$\partial^2 f / \partial x^2 = f'', \quad \partial^2 f / \partial y^2 = i^2 f'' = -f'', \quad (2.63)$$

где  $f'' = d^2 f / dz^2$ . Таким образом,

$$\nabla^2 f = \nabla^2 u + i \nabla^2 v = 0, \quad (2.64)$$

что может быть верно только тогда, когда  $\nabla^2 u = \nabla^2 v = 0$ . Этот результат позволяет непосредственно использовать аналитическую функцию

$$f(z) = z^n \quad (2.65)$$

для получения системы функций, удовлетворяющих уравнению Лапласа, а именно:

$$\begin{aligned} n=1, & \quad u=x, & \quad v=y, \\ n=2, & \quad u=x^2-y^2, & \quad v=2xy, \\ n=3, & \quad u=x^3-3xy^2, & \quad v=3x^2y-y^3, \\ n=4, & \quad u=x^4-6x^2y^2+y^4, & \quad v=4x^3y-4xy^3 \end{aligned} \quad (2.66)$$

и т. д.

Построив подходящую систему функций, продемонстрируем применение метода на примере повторного решения задачи кручения, уже рассматривавшейся в примерах 1.5, 2.3 и 2.5.

**Пример 2.8.** Рассмотренная ранее задача кручения описывается дифференциальным уравнением  $\partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2 = -2$  в прямоугольной области  $-3 \leq x \leq 3$ ,  $-2 \leq y \leq 2$  с краевым условием  $\varphi=0$ . Выше было показано, как построить систему функций, удовлетворяющих уравнению Лапласа. Чтобы иметь возможность воспользоваться этой системой функций в данном примере, введем сначала новую переменную  $\theta$ , положив

$$\varphi = \theta - (x^2 + y^2)/2.$$

Тогда задача кручения сводится к решению уравнения

$$\partial^2\theta/\partial x^2 + \partial^2\theta/\partial y^2 = 0, \quad -3 \leq x \leq 3, \quad -2 \leq y \leq 2,$$

с условием  $\theta = (x^2 + y^2)/2$  на границе. Попытаемся теперь решить эту задачу описанным выше методом граничного решения. Искомое решение будет симметрично относительно  $x$  и  $y$ . Поэтому, согласно (2.66), в качестве базисных функций можно использовать систему  $N_1=1$ ,  $N_2=x^2-y^2$ ,  $N_3=x^4-6x^2y^2+y^4$  и т. д.

Трехэлементная аппроксимация

$$\hat{\theta} = a_1 + a_2(x^2 - y^2) + a_3(x^4 - 6x^2y^2 + y^4)$$

в точности удовлетворяет дифференциальному уравнению при всех значениях  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$ , так как каждая базисная функция является решением уравнения Лапласа.

Поэтому уравнения метода взвешенных невязок имеют вид (2.60) и для данного примера могут быть записаны как

$$\int_{\Gamma} [\hat{\theta} - (x^2 + y^2)/2] \overline{W}_i d\Gamma = 0.$$



Если весовые функции  $\bar{W}_i$  выбрать из условия  $\bar{W}_i = N_i|_{\Gamma}$ , то эти соотношения примут вид

$$\int_0^2 [\hat{\theta}|_{x=3} - (9+y^2)/2] N_i|_{x=3} dy + \int_0^3 [\hat{\theta}|_{y=2} - (x^2+4)/2] N_i|_{y=2} dx = 0.$$

Подставляя сюда выражение для  $\hat{\theta}$  и вычисляя полученные интегралы, приходим к стандартному векторному уравнению вида (2.55), где

$$K = \begin{bmatrix} 5 & 12.3333 & -95 \\ 12.2333 & 145 & 98.543 \\ -95 & 98.543 & 18170.4 \end{bmatrix},$$

$$f = \begin{bmatrix} 20.8333 \\ 78.1 \\ -539.643 \end{bmatrix},$$

с решением  $a_1 = 3.2154$ ,  $a_2 = -0.2749$ ,  $a_3 = -0.01438$ . Определив таким образом 3-элементную аппроксимацию  $\hat{\theta}$  и воспользовав-

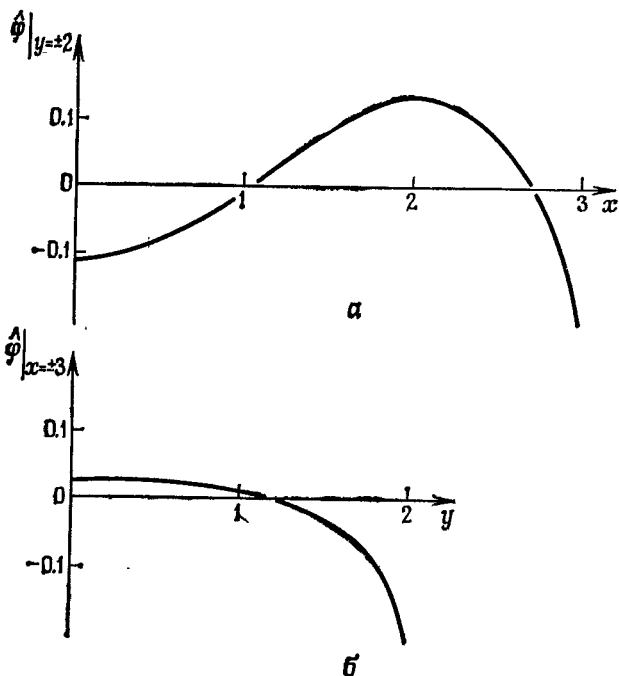


Рис. 2.10. Поведение аппроксимации базисными функциями из примера 2.8 на прямых  $y=\pm 2$  (а) и  $x=\pm 3$  (б).

лись соотношением  $\hat{\varphi} = \hat{\theta} - (x^2 + y^2)/2$ , получим эквивалентную аппроксимацию исходной функции  $\varphi$ .

Поведение  $\hat{\varphi}$  на границах, где искомое решение удовлетворяет условию  $\varphi = 0$ , показано на рис. 2.10. Крутящий момент, вычисленный с использованием такой аппроксимации, равен 75.51 (точное значение равно 76.4).

Для дифференциальных уравнений более общего вида выбор базисных функций в методе граничного решения менее очевиден. В общем случае могут быть использованы сингулярные функции типа функции Грина, и тогда результирующая аппроксимация представляется системой интегральных уравнений. К методам такого типа относятся так называемые методы граничных интегральных уравнений. Они являются полезным инструментом численного анализа [5].

В большинстве книг такие процедуры граничного решения трактуются как вполне самостоятельные и изолированные. Читатель должен заметить, однако, что такой подход является всего лишь вариантом общего метода взвешенных невязок.

## 2.7. Системы дифференциальных уравнений

Метод взвешенных невязок может быть весьма успешно применен и к решению систем дифференциальных уравнений. Формулируя эту задачу в самой общей постановке, можно сказать, что отыскивается неизвестная функция  $\varphi$ :

$$\varphi^T = (\varphi_1, \varphi_2, \dots), \quad (2.67)$$

такая, что в области  $\Omega$  она удовлетворяет некоторым дифференциальным уравнениям, записываемым в виде

$$A_1(\varphi) = 0, \quad A_2(\varphi) = 0, \dots, \quad (2.68)$$

или

$$A(\varphi) = \begin{bmatrix} A_1(\varphi) \\ A_2(\varphi) \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = 0 \quad \text{на } \Omega. \quad (2.69)$$

Будем предполагать, что на границе  $\Gamma$  области  $\Omega$  задано нужное число соответствующих краевых условий, а именно

$$B_1(\varphi) = 0, \quad B_2(\varphi) = 0, \dots, \quad (2.70)$$

или в другой записи

$$B(\varphi) = \begin{bmatrix} B_1(\varphi) \\ B_2(\varphi) \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = 0 \quad \text{на } \Gamma. \quad (2.71)$$

Для каждой компоненты неизвестного вектора  $\varphi$  используем разложение по базисным функциям вида (2.27), полагая

$$\begin{aligned}\varphi_1 &\approx \hat{\varphi}_1 = \psi_1 + \sum_{m=1}^M a_{m,1} N_{m,1}, \\ \varphi_2 &\approx \hat{\varphi}_2 = \psi_2 + \sum_{m=1}^M a_{m,2} N_{m,2}\end{aligned}\quad (2.72)$$

и т. д. Эти разложения можно записать в более компактной векторной форме

$$\varphi \approx \hat{\varphi} = \psi + \sum_{m=1}^M N_m a_m, \quad (2.73)$$

где

$$\psi^T = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots), \quad (2.74a)$$

$$a_m^T = (a_{m,1}, a_{m,2}, a_{m,3}, \dots)$$

и

$$N_m = \begin{bmatrix} N_{m,1} & & & & 0 \\ & N_{m,2} & & & \\ & & N_{m,3} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \ddots \end{bmatrix}. \quad (2.74b)$$

Очевидно, что в этом случае опять могут быть использованы введенные в предыдущих параграфах стандартные виды аппроксимации. При этом подразумевается, что теперь  $N_m$  — диагональная матрица, составленная из базисных функций, а параметр  $a_m$  — вектор с числом компонент, равным числу неизвестных функций в определении  $\varphi$ .

Чтобы получить для задачи этого типа обобщенные уравнения метода взвешенных невязок, можно рассмотреть каждое из уравнений (2.68) и соответствующие им краевые условия и приписать им соответствующие веса. Тогда вместо (2.41) мы будем иметь систему уравнений

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} W_{l,1} A_1(\hat{\varphi}) d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{W}_{l,1} B_1(\hat{\varphi}) d\Gamma &= 0, \\ \int_{\Omega} W_{l,2} A_2(\hat{\varphi}) d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{W}_{l,2} B_2(\hat{\varphi}) d\Gamma &= 0, \\ &\vdots \\ &\vdots\end{aligned}\quad (2.75)$$

Если ввести диагональные матрицы весовых функций  $W_l$  и

$W_l$ , положив

$$W_l = \begin{bmatrix} W_{l,1} & & & 0 \\ & W_{l,2} & & \\ & & W_{l,3} & \\ 0 & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad (2.76)$$

$$\bar{W}_l = \begin{bmatrix} \bar{W}_{l,1} & & & 0 \\ & \bar{W}_{l,2} & & \\ & & \bar{W}_{l,3} & \\ 0 & & & \ddots \end{bmatrix},$$

то систему уравнений (2.75) можно записать в компактной форме

$$\int_{\Omega} W_l A(\hat{\varphi}) d\Omega + \int_{\Gamma} W_l B(\hat{\varphi}) d\Gamma = 0, \quad (2.77)$$

и соответствующая аппроксимация получена.

Применение такого подхода к задачам, описываемым системой двух дифференциальных уравнений, иллюстрируется следующим примером.

**Пример 2.9.** В гл. 1 было показано, как записать общую задачу теплопроводности в виде системы уравнений первого порядка (1.2) и (1.4). В случае одномерной стационарной теплопроводности эти уравнения принимают вид

$$q + kd\varphi/dx = 0, \quad dq/dx - Q = 0,$$

где  $q$  — поток тепла в направлении  $x$ ,  $\varphi$  — температура,  $Q$  — скорость генерирования тепла внутри материала и  $k$  — коэффициент теплопроводности материала. Эту систему уравнений можно решать одновременно для  $q$  и  $\varphi$ , если положить

$$\Phi = \begin{bmatrix} q \\ \varphi \end{bmatrix}$$

и записать дифференциальные уравнения в виде

$$A(\Phi) = \begin{bmatrix} q + k d\varphi/dx \\ dq/dx - Q \end{bmatrix} = 0$$

или в виде

$$\mathcal{L}\Phi + p = \begin{bmatrix} 1 & kd/dx \\ d/dx & 0 \end{bmatrix} \Phi + \begin{bmatrix} 0 \\ -Q \end{bmatrix} = 0.$$

Для конкретного примера отрезка  $0 \leq x \leq 1$ , где  $k=1$ ,  $Q=1$  при  $0 \leq x \leq 1/2$  и  $Q=0$  при  $1/2 < x \leq 1$ , и краевых условий  $\varphi=0$  при  $x=0$  и  $q=0$  при  $x=1$  задача является корректно поставленной и допускает решение. Отметим, кстати, что для каждой из неизвестных функций задается только одно краевое условие, причем на градиент краевое условие не накладывается.

Для аппроксимации вида (2.72)

$$\hat{q} = \psi_1 + \sum_{m=1}^M a_{m,1} N_{m,1}, \quad \hat{\varphi} = \psi_2 + \sum_{m=1}^M a_{m,2} N_{m,2}$$

краевые условия будут автоматически выполнены, если положить  $\psi_1 = \psi_2 = 0$ , а системы базисных функций выбрать так, что

$$N_{m,1} = 0 \text{ при } x=1; \quad N_{m,2} = 0 \text{ при } x=0; \quad m=1, 2, \dots, M.$$

В данном примере мы удовлетворим этим условиям, взяв системы базисных функций

$$N_{m,1} = x^{m-1}(1-x); \quad N_{m,2} = x^m, \quad m=1, 2, \dots, M.$$

Уравнение (2.77) принимает теперь простой вид

$$\int_0^1 W_l \mathcal{L} \hat{\varphi} dx + \int_0^1 W_l p dx = 0,$$

где  $\mathcal{L}$  и  $p$  определены выше. Подставляя сюда разложения для приближенных решений, приходим к стандартной системе уравнений  $Ka = f$ , где

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \dots \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{M1} & K_{M2} & K_{M3} & \dots \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_M \end{bmatrix}.$$

Подматрица  $K_{lm}$  матрицы  $K$  является  $(2 \times 2)$ -матрицей, определенной соотношением

$$K_{lm} = \int_0^1 W_l \mathcal{L} N_m dx,$$

а подвектор  $f_l$  является  $(2 \times 1)$ -вектор-столбцом

$$f_l = - \int_0^1 W_l p dx.$$

При использовании метода Галеркина, т. е. при  $W_l = N_l$ , можно

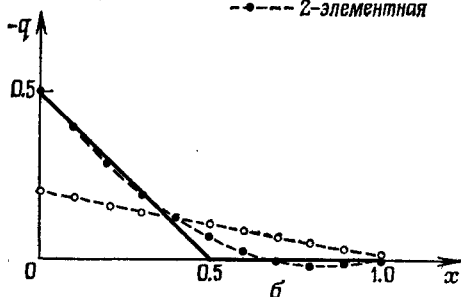
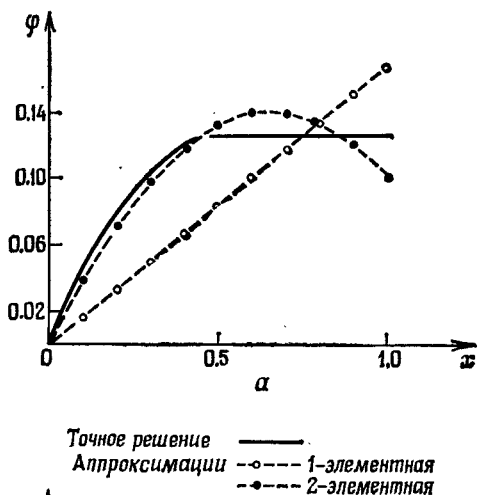


Рис. 2.11. Сравнение точного и приближенного решений из примера 2.9 для температуры  $\varphi(a)$  и потока тепла  $q(b)$ .

записать

$$K_{lm} = \int_0^1 \begin{bmatrix} N_{l,1} N_{m,1} & N_{l,1} dN_{m,2}/dx \\ N_{l,2} dN_{m,1}/dx & 0 \end{bmatrix} dx.$$

Тогда, используя 2-элементную аппроксимацию для  $q$  и  $\varphi$  и вычисляя матрицу коэффициентов и правую часть, получаем систему уравнений

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 1/2 & 1/12 & 1/3 \\ -1/2 & 0 & -1/6 & 0 \\ 1/12 & 1/6 & 1/30 & 1/6 \\ -1/3 & 0 & -1/6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{1,2} \\ a_{2,1} \\ a_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/8 \\ 0 \\ 1/24 \end{bmatrix},$$

решение которой позволяет найти значения неизвестных параметров. Заметим, что применение метода Галеркина в данном слу-

чае не приводит к системе с симметричной матрицей, однако такая симметричность может быть достигнута путем некоторых преобразований. На рис. 2.11 сравниваются результаты использования 1- и 2-элементных аппроксимаций с точным решением этой задачи. Для некоторых задач можно доказать предпочтительность использования различного числа параметров в разложениях для  $\varphi$  и  $q$ . Без потери общности эта процедура очевидным образом может быть реализована путем приравнивания к нулю соответствующих параметров и вычеркивания соответствующих строк и столбцов из стандартной системы уравнений. Формулировки типа обсуждавшейся в этом примере часто называются *смешанными*, так как число подлежащих решению уравнений, если это требуется, может быть уменьшено соответствующим преобразованием. (В данном случае можно исключить  $q$  из второго уравнения системы и получить одно уравнение для  $\varphi$ .) Иногда такие формулировки могут быть точнее, чем формулировки, в которых такое исключение не может быть проведено. Однако, как было показано выше, они приводят к более сложным в вычислительном отношении уравнениям.

### 2.7.1. Двумерные плоские задачи теории упругости в напряжениях

В качестве еще одного примера для только что описанной формулировки рассмотрим задачу теории упругости, связанную с определением плоских напряжений [6]. Здесь основными неизвестными будут перемещения  $u$  и  $v$  по направлениям  $x$  и  $y$ , т. е.

$$\varphi^T = (u, v). \quad (2.78)$$

Деформации, а следовательно, и напряжения могут быть выражены через эти перемещения, а именно деформации записываются в виде

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{bmatrix} = \mathcal{L}\varphi, \quad (2.79)$$

где

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} \partial / \partial x & 0 \\ 0 & \partial / \partial y \\ \partial / \partial y & \partial / \partial x \end{bmatrix}. \quad (2.80)$$

В частном случае плоских напряжений последние задаются фор-

мудой

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \varepsilon = D\varepsilon. \quad (2.81)$$

Здесь  $E$  — модуль Юнга, а  $\nu$  — коэффициент Пуассона рассматриваемого материала. Остается решить в двумерной области систему уравнений равновесия, которую с учетом соотношений (2.79) — (2.81) можно записать в виде

$$A(\varphi) = \begin{bmatrix} \partial\sigma_x/\partial x + \partial\sigma_{xy}/\partial y + X \\ \partial\sigma_{xy}/\partial x + \partial\sigma_y/\partial y + Y \end{bmatrix} = \mathcal{L}^T D \mathcal{L} \varphi + X = 0. \quad (2.82)$$

В этом уравнении  $X$  и  $Y$  — внешние силы, действующие на единичный объем,  $X^T = (X, Y)$ .

Краевые условия для типичных двумерных задач теории упругости могут быть корректно поставлены путем задания поверхностных (граничных) нагрузок или перемещений. В этом случае

$$B\varphi = \begin{bmatrix} \sigma_x n_x + \sigma_{xy} n_y - \bar{t}_x \\ \sigma_{xy} n_x + \sigma_y n_y - \bar{t}_y \end{bmatrix} = 0 \quad \text{на } \Gamma_\sigma \quad (2.83)$$

и

$$B\varphi = \begin{bmatrix} u - \bar{u} \\ v - \bar{v} \end{bmatrix} = 0 \quad \text{на } \Gamma_\varphi, \quad (2.84)$$

где  $n_x$  и  $n_y$  — направляющие косинусы внешней нормали к  $\Gamma$ , а  $t_x$ ,  $t_y$ ,  $\bar{u}$  и  $\bar{v}$  — заданные граничные нагрузки и перемещения. Для определенных таким образом  $A$  и  $B$  уравнения метода взвешенных невязок имеют вид (2.77).

Для рассматриваемой системы уравнений представляет значительный интерес вопрос о том, какие из соответствующих краевых условий являются естественными.

Если можно найти функции  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , такие, что

$$\psi_1 = \bar{u}, \quad \psi_2 = \bar{v} \quad \text{на } \Gamma_\varphi \quad (2.85)$$

и используемые базисные функции обращаются в нуль на  $\Gamma_\varphi$ , то разложение по базисным функциям

$$\hat{\varphi} = \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{bmatrix} = \psi + \sum_{m=1}^M N_m a_m, \quad (2.86)$$

где  $\psi^T = (\psi_1, \psi_2)$ , автоматически удовлетворяет краевым условиям



на  $\Gamma_\varphi$ . Определяя весовые функции по правилу

$$\mathbf{W}_l = \begin{bmatrix} W_{l,1} & 0 \\ 0 & W_{l,2} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{W}}_l = \begin{bmatrix} \bar{W}_{l,1} & 0 \\ 0 & \bar{W}_{l,2} \end{bmatrix}, \quad (2.87)$$

согласно методу взвешенных невязок для уравнения равновесия в напряжениях имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\partial \hat{\sigma}_x / \partial x + \partial \hat{\sigma}_{xy} / \partial y + X) W_{l,1} d\Omega + \\ & \quad + \int_{\Gamma_\sigma} (n_x \hat{\sigma}_x + n_y \hat{\sigma}_{xy} - \bar{t}_x) \bar{W}_{l,1} d\Gamma = 0, \\ & \int_{\Omega} (\partial \hat{\sigma}_{xy} / \partial x + \partial \hat{\sigma}_y / \partial y + Y) W_{l,2} d\Omega + \\ & \quad + \int_{\Gamma_\sigma} (n_x \hat{\sigma}_{xy} + n_y \hat{\sigma}_y - \bar{t}_y) \bar{W}_{l,2} d\Gamma = 0, \end{aligned} \quad (2.88)$$

где  $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D} \mathcal{L} \hat{\boldsymbol{\varphi}}$ . Используя формулу Грина (равенство (2.50)), эти соотношения можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} (\hat{\sigma}_x \partial W_{l,1} / \partial x + \hat{\sigma}_{xy} \partial W_{l,1} / \partial y - W_{l,1} X) d\Omega + \\ & \quad + \int_{\Gamma_\varphi + \Gamma_\sigma} (\hat{\sigma}_x n_x + \hat{\sigma}_{xy} n_y) W_{l,1} d\Gamma + \\ & \quad + \int_{\Gamma_\sigma} (\hat{\sigma}_x n_x + \hat{\sigma}_{xy} n_y - \bar{t}_x) \bar{W}_{l,1} d\Gamma = 0, \quad (2.89) \\ & - \int_{\Omega} (\hat{\sigma}_{xy} \partial W_{l,2} / \partial x + \hat{\sigma}_y \partial W_{l,2} / \partial y - W_{l,2} Y) d\Omega + \\ & \quad + \int_{\Gamma_\varphi + \Gamma_\sigma} (\hat{\sigma}_{xy} n_x + \hat{\sigma}_y n_y) W_{l,2} d\Gamma + \\ & \quad + \int_{\Gamma_\sigma} (\hat{\sigma}_{xy} n_x + \hat{\sigma}_y n_y - \bar{t}_y) \bar{W}_{l,2} d\Gamma = 0. \end{aligned}$$

Если теперь ограничить выбор весовых функций требованием

$$W_{l,1} = W_{l,2} = 0 \quad \text{на } \Gamma_\varphi, \quad (2.90a)$$

$$\bar{W}_{l,1} = -W_{l,1}|_{\Gamma_\sigma}, \quad \bar{W}_{l,2} = -W_{l,2}|_{\Gamma_\sigma}, \quad (2.90b)$$

то приведенные выше уравнения можно записать в компактной форме

$$\int_{\Omega} (\mathcal{L} \mathbf{W}_l)^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{W}_l X d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{W}_l \bar{\mathbf{t}} d\Gamma = 0, \quad (2.91)$$

где  $\bar{\mathbf{t}}^T = (\bar{t}_x, \bar{t}_y)$ .

Выражая напряжения через перемещения, из (2.91) имеем

$$\int_{\Omega} (\mathcal{L} \mathbf{W}_i)^T \mathbf{D} \mathcal{L} \hat{\boldsymbol{\varphi}} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{W}_i \mathbf{X} d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{W}_i \bar{\mathbf{t}} d\Gamma, \quad (2.92)$$

т. е. получаем уравнения метода взвешенных невязок для (2.82). Таким образом, условие задания граничной нагрузки, получающееся в связи с дифференцированием поля перемещений, для этой задачи является естественным краевым условием. Подставляя в (2.92) аппроксимацию (2.86) для поля перемещений, находим

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M \left( \int_{\Omega} (\mathcal{L} \mathbf{W}_i)^T \mathbf{D} \mathcal{L} \mathbf{N}_m d\Omega \right) \mathbf{a}_m = \\ = \int_{\Omega} \mathbf{W}_i \mathbf{X} d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{W}_i \bar{\mathbf{t}} d\Gamma - \int_{\Omega} (\mathcal{L} \mathbf{W}_i)^T \mathbf{D} \mathcal{L} \boldsymbol{\psi} d\Omega. \end{aligned} \quad (2.93)$$

Последние соотношения эквивалентны векторному уравнению

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f}. \quad (2.94)$$

Использование в данном случае аппроксимации по Галеркину приводит к симметричной матрице  $\mathbf{K}$ , для которой подматрица  $K_{lm}$  задается выражением

$$K_{lm} = \int_{\Omega} (\mathcal{L} \mathbf{N}_l)^T \mathbf{D} \mathcal{L} \mathbf{N}_m d\Omega. \quad (2.95)$$

Рассмотренный выше подход является достаточно общим и может быть использован для решения многих плоских задач теории упругости. В самом деле, при соответствующем определении перемещений, напряжений и деформаций такой подход может быть распространен на любые ситуации в линейной теории упругости.

В следующем примере будет рассмотрено применение этого метода к одной типичной задаче. Однако, прежде чем переходить к этому иллюстративному примеру, целесообразно сделать еще одно замечание, относящееся к уравнению (2.91). Это уравнение может быть получено, исходя из принципа виртуальной работы [7], согласно которому все точки тела находятся в состоянии равновесия при условии равенства работ, совершаемых внутренними напряжениями и внешними силами на произвольном или «виртуальном» перемещении.

Таким образом, если

$$\boldsymbol{\varphi}^* = \begin{bmatrix} u^* \\ v^* \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varphi}^* |_{\Gamma_{\varphi}} = \bar{\boldsymbol{\varphi}} |_{\Gamma_{\varphi}} \quad (2.96)$$

произвольное перемещение, а

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathcal{L} \boldsymbol{\varphi}^* \quad (2.97)$$

— соответствующие деформации, то из принципа виртуальной работы следует, что

$$\int_{\Omega} \varepsilon^{*T} \sigma \, d\Omega = \int_{\Omega} \varphi^{*T} X \, d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \varphi^{*T} \bar{t} \, d\Gamma. \quad (2.98)$$

Применяя это соотношение к рассматриваемой задаче, где использованы приближенные напряжения  $\sigma = \hat{\sigma}$ , и ограничивая произвол выбором

$$\varphi^* = W_i \delta_i^*, \quad (2.99)$$

где произвольны только  $\delta_i^*$ , сразу получаем

$$\delta_i^{*T} \int_{\Omega} (\mathcal{L} W_i)^T \hat{\sigma} \, d\Omega = \delta_i^{*T} \left( \int_{\Omega} W_i X \, d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} W_i \bar{t} \, d\Gamma \right). \quad (2.100)$$

Так как это верно для всех значений  $\delta_i^*$ , мы приходим к уравнениям метода взвешенных невязок (2.91).

**Пример 2.10.** Квадратная пластина из материала с модулем Юнга  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$  ( $= 0.25$ ), занимающая область  $-1 \leq x, y \leq 1$ , закреплена вдоль сторон  $y = \pm 1$  и находится под действием нагрузки  $\bar{t}_x = E(1 - y^2)/(1 + \nu)$ ,  $\bar{t}_y = 0$  на сторонах  $x = \pm 1$ . Требуется определить аппроксимации возникающих полей перемещений и напряжений.

Из соображений симметрии выберем базисные функции

$$N_{1,1} = x(1 - y^2), \quad N_{2,1} = x^3(1 - y^2), \quad N_{3,1} = xy^2(1 - y^2)$$

и т. д. для представления перемещения  $u$  в направлении  $x$  и базисные функции

$$N_{1,2} = y(1 - y^2), \quad N_{2,2} = x^2y(1 - y^2), \quad N_{3,2} = y^3(1 - y^2)$$

и т. д. для представления перемещения  $v$  в направлении  $y$ . Определяя 3-элементные аппроксимации

$$\hat{u} = a_{1,1} N_{1,1} + a_{2,1} N_{2,1} + a_{3,1} N_{3,1},$$

$$\hat{v} = a_{1,2} N_{1,2} + a_{2,2} N_{2,2} + a_{3,2} N_{3,2},$$

можно видеть, что краевое условие нулевого перемещения на сторонах  $y = \pm 1$  автоматически выполняется. Тогда уравнения метода взвешенных невязок имеют вид (2.91), а именно (в предположении равенства нулю внешних сил)

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathcal{L} W_i)^T \hat{\sigma} \, dx \, dy = \int_{-1}^1 W_i|_{x=1} \bar{t} \, dy - \int_{-1}^1 W_i|_{x=-1} \bar{t} \, dy.$$

Если положить

$$a_m = \begin{bmatrix} a_{m,1} \\ a_{m,2} \end{bmatrix}, \quad N_m = \begin{bmatrix} N_{m,1} & 0 \\ 0 & N_{m,2} \end{bmatrix},$$

$$\hat{\varphi} = \begin{bmatrix} \hat{\varphi}_1 \\ \hat{\varphi}_2 \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^3 N_m a_m \quad \text{и} \quad \hat{\sigma} = D\mathcal{L}\hat{\varphi}.$$

Кроме того, если весовые функции  $W_l$  выбрать по правилу  $W_l = N_l$ , то уравнение метода взвешенных невязок в покомпонентной записи принимает вид

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^3 \int_0^1 \int_0^1 & \left\{ \left( 8 \frac{\partial N_{l,1}}{\partial x} \frac{\partial N_{m,1}}{\partial x} + 3 \frac{\partial N_{l,1}}{\partial y} \frac{\partial N_{m,1}}{\partial y} \right) a_{m,1} + \right. \\ & \left. + \left( 2 \frac{\partial N_{l,1}}{\partial x} \frac{\partial N_{m,2}}{\partial y} + 3 \frac{\partial N_{l,1}}{\partial y} \frac{\partial N_{m,2}}{\partial x} \right) a_{m,2} \right\} dx dy = \\ & = 6 \int_0^1 (1-y^2) N_{l,1}|_{x=1} dy, \\ \sum_{m=1}^3 \int_0^1 \int_0^1 & \left\{ \left( 2 \frac{\partial N_{l,2}}{\partial y} \frac{\partial N_{m,1}}{\partial x} + 3 \frac{\partial N_{l,2}}{\partial x} \frac{\partial N_{m,1}}{\partial y} \right) a_{m,1} + \right. \\ & \left. + \left( 8 \frac{\partial N_{l,2}}{\partial y} \frac{\partial N_{m,2}}{\partial y} + 3 \frac{\partial N_{l,2}}{\partial x} \frac{\partial N_{m,2}}{\partial x} \right) a_{m,2} \right\} dx dy = 0. \end{aligned}$$

Вычислив эти интегралы, получим векторное уравнение стандартного вида (2.94), где теперь

$$a^T = (a_{1,1}, a_{2,1}, a_{3,1}, a_{1,2}, a_{2,2}, a_{3,2}),$$

$$f^T = (3.2, 3.2, 0.457143, 0, 0, 0),$$

$$K = \begin{bmatrix} 5.6 & 5.066667 & 0.876190 & 0.533333 & -0.355556 & 0.228571 \\ 8.251429 & 0.769524 & & 0.533333 & 0 & 0.228571 \\ & 1.688889 & -0.076190 & & 0.050794 & 0.025397 \\ & & 6.4 & & 2.133333 & 2.742857 \\ \text{Симметрично} & & & & 1.584762 & 0.914286 \\ & & & & & 2.336508 \end{bmatrix}$$

с решением

$$a^T = (0.574778, 0.052828, -0.070674, -0.177255, 0.367795, 0.003533).$$

Найденное поле перемещений  $\hat{\varphi}$  можно использовать для приближенного вычисления поля напряжений по формуле  $\hat{\sigma} = D\mathcal{L}\hat{\varphi}$ . Поведение решения на прямых  $x = \pm 1$ , где краевое условие является естественным, показано на рис. 2.12.

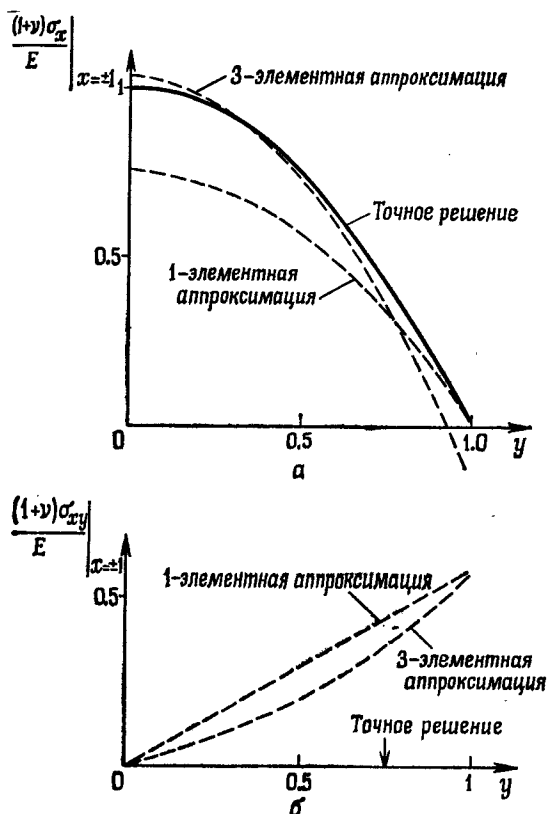


Рис. 2.12. Сравнение точного и приближенного решений из примера 2.10. На прямых  $x = \pm 1$  показано нормальное напряжение (а) и касательное напряжение (б).

## Упражнения

2.19. Уравнение из упражнения 1.20, описывающее отклонение балки, находящейся под действием нагрузки и покоящейся на упругом основании, может быть разбито на два уравнения второго порядка

$$EI \frac{d^2\varphi}{dx^2} = -M, \quad d^2M/dx^2 - k\varphi = -w,$$

где  $\varphi$  — отклонение, а  $M$  — изгибающий момент. Используя разложения для  $M$  и  $\varphi$ , получить приближенное решение для балки единичной длины с  $EI = k = w = 1$  при следующих краевых условиях: 1) оба конца балки защемлены и 2) оба конца балки свободно оперты. Сравнить найденные ответы с полученными в упражнениях 2.6 и 2.15.

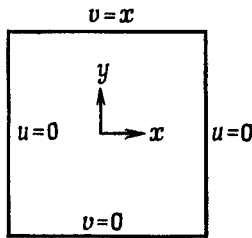
2.20. Квадратная пластина  $0 \leq x, y \leq 1$  закреплена вдоль сторон и находится под действием единичной внешней силы на единицу площади по обоим направлениям  $x$  и  $y$ . Найти поле перемещений методом взвешенных невязок.

2.21. В двумерном безвихревом течении невязкой несжимаемой жидкости

компоненты скорости  $u$ ,  $v$  в направлениях  $x$ ,  $y$  и потенциал скорости  $\varphi$  удовлетворяют уравнениям

$$u = \partial\varphi/\partial x, \quad v = \partial\varphi/\partial y, \quad \text{div} u + \text{div} v = 0.$$

Построив аппроксимации для  $u$ ,  $v$  и  $\varphi$ , приближенно найти поле скоростей потока в квадрате  $-1 \leq x, y \leq 1$  с краевыми условиями, приведенными на рисунке.



К упражнению 2.21.

## 2.8. Нелинейные задачи

Как было отмечено в § 1.5, при моделировании физических задач описывающие физический процесс дифференциальные уравнения и/или краевые условия по своей природе часто оказываются нелинейными. До сих пор в этой главе обсуждалось применение метода взвешенных невязок к линейным задачам. Однако с равным успехом этот метод может быть использован и для решения нелинейных задач. В последнем случае применение обычной процедуры метода взвешенных невязок приводит не к стандартной системе уравнений (2.94), а к системе нелинейных уравнений, которую можно записать в виде

$$K(a) a = f. \quad (2.101)$$

Как было отмечено в гл. 1, уравнения этого типа могут быть решены с помощью подходящего итерационного метода.

Вывод векторного уравнения (2.101) можно продемонстрировать опять на примере задачи двумерного стационарного распространения тепла в материале, теплопроводность которого зависит от температуры. Описывающее этот процесс дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + Q = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (2.102)$$

где  $k(\varphi)$  — заданная функция. Общеупотребительными краевыми условиями здесь являются условие Дирихле

$$\varphi = \bar{\varphi} \quad \text{на } \Gamma_\varphi \quad (2.103 a)$$

и условие Неймана

$$k(\varphi) \partial\varphi/\partial n = -\bar{q} \quad \text{на } \Gamma_q. \quad (2.103 \text{ б})$$

Отыскивая приближенное решение в виде

$$\hat{\varphi} = \psi + \sum_{m=1}^M a_m N_m, \quad (2.104)$$

где  $\psi$  и  $N_m$ , как обычно, выбраны таким образом, чтобы автоматически обеспечить выполнение краевого условия на  $\Gamma_\varphi$ , и используя соотношения (2.49)—(2.54), приходим к системе уравнений метода взвешенных невязок

$$\int_{\Omega} \left[ \left( \partial W_l / \partial x \right) k(\hat{\varphi}) \partial \hat{\varphi} / \partial x + \left( \partial W_l / \partial y \right) k(\hat{\varphi}) \partial \hat{\varphi} / \partial y \right] dx dy - \\ - \int_{\Omega} W_l Q dx dy + \int_{\Gamma_q} W_l \bar{q} d\Gamma = 0, \quad l = 1, 2, \dots, M. \quad (2.105)$$

Эта система нелинейных уравнений требует итерационного решения, для чего могут быть использованы многие стандартные методы. Следуя рассмотренному в § 1.5 методу простой итерации, можно исходить из некоторого начального приближения

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^0 = (a_1^0, a_2^0, \dots, a_M^0)^T \quad (2.106)$$

и отвечающего ему приближенного решения  $\hat{\varphi}^0$ , а затем получить улучшенное решение  $\mathbf{a}^1$  из линейного уравнения

$$\mathbf{K}(\mathbf{a}^0) \mathbf{a}^1 = \mathbf{f}^0, \quad (2.107)$$

где

$$K_{lm}(\mathbf{a}^0) = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial W_l}{\partial x} k(\hat{\varphi}^0) \frac{\partial N_m}{\partial x} + \frac{\partial W_l}{\partial y} k(\hat{\varphi}^0) \frac{\partial N_m}{\partial y} \right) dx dy, \quad (2.108)$$

$$f_l^0 = \int_{\Omega} W_l Q dx dy - \int_{\Gamma_q} W_l \bar{q} d\Gamma - \\ - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial W_l}{\partial x} k(\hat{\varphi}^0) \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial W_l}{\partial y} k(\hat{\varphi}^0) \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dx dy. \quad (2.109)$$

Далее общая итерационная схема

$$\mathbf{K}(\mathbf{a}^{n-1}) \mathbf{a}^n = \mathbf{f}^{n-1} \quad (2.110)$$

применяется до тех пор, пока процесс не сойдется в пределах заданной точности приближения.

**Пример 2.11.** Рассмотрим одномерную задачу теплопроводности с генерированием тепла в области, где теплопроводность зави-

сит от температуры. Такая задача, описываемая уравнением

$$d(k d\varphi/dx)/dx = -10x$$

с  $\varphi = 0$  для  $x = 0$  и  $x = 1$  и  $k = 1 + 0.1\varphi$ , была решена в примере 1.4 методом конечных разностей. Решение этой задачи методом взвешенных невязок может быть получено путем последовательного выполнения описанных выше шагов. Например, для системы базисных функций

$$N_m = x^m(1-x), \quad m = 1, 2, \dots$$

разложение

$$\hat{\varphi} = \sum_{m=1}^M a_m x^m (1-x)$$

автоматически удовлетворяет краевым условиям при  $x = 0$  и  $x = 1$ . Применяя метод взвешенных невязок, получаем систему уравнений

$$\int_0^1 \{d(k d\hat{\varphi}/dx)/dx + 10x\} W_l dx = 0, \quad l = 1, 2, \dots, M,$$

которая при использовании 2-элементной аппроксимации и метода поточечной коллокации сводится к уравнению вида (2.101), где

$$\mathbf{K}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} -\frac{d}{dx} \left( k(\hat{\varphi}) \frac{\partial N_1}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_1} & -\frac{d}{dx} \left( k(\hat{\varphi}) \frac{\partial N_2}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_1} \\ -\frac{d}{dx} \left( k(\hat{\varphi}) \frac{\partial N_1}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_2} & -\frac{d}{dx} \left( k(\hat{\varphi}) \frac{\partial N_2}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 10x_1 \\ 10x_2 \end{bmatrix}.$$

В качестве точек коллокации берутся  $x_1 = 1/3$  и  $x_2 = 2/3$ . Исходя из начального приближения  $a_1 = a_2 = 0$  (т. е.  $\mathbf{a}^0 = 0$ ), находим

$$\mathbf{K}(\mathbf{a}^0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$

и решением является

$$\mathbf{a}^1 = \begin{bmatrix} 1.66667 \\ 1.66667 \end{bmatrix}.$$

Эти значения используются для построения матрицы

$$\mathbf{K}^1 = \begin{bmatrix} 2.06061 & -0.037037 \\ 1.10494 & 2.12346 \end{bmatrix},$$

и решением тогда будет

$$\mathbf{a}^2 = \begin{bmatrix} 1.64477 \\ 1.50911 \end{bmatrix}.$$



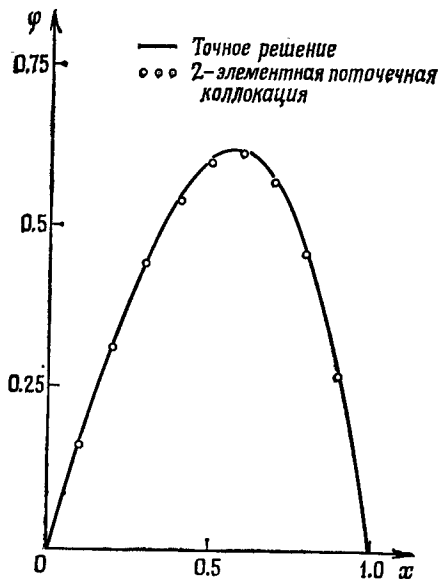


Рис. 2.13. Сравнение точного решения и решения, полученного 2-элементной поточечной коллокацией, задачи из примера 2.11.

Повторяя этот процесс, после еще двух циклов получим решение с уже не меняющимися тремя десятичными знаками

$$a = \begin{bmatrix} 1.644 \\ 1.517 \end{bmatrix}.$$

На рис. 2.13 поведение полученной таким образом 2-элементной аппроксимации сравнивается с точным решением задачи.

### Упражнения

2.22. Используя метод Галеркина, повторить вычисления примера 2.11 и сравнить достигнутую точность с точностью метода поточечной коллокации и метода конечных разностей из примера 1.4.

2.23. В упражнении 1.11 найти решение методами поточечной коллокации и Галеркина.

2.24. Используя метод Галеркина, найти решение упражнения 1.12.

2.25. Повторить упражнение 1.13, используя методы поточечной коллокации и Галеркина.

### 2.9. Заключительные замечания

В этой главе для решения обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными был предложен процесс аппроксимации базисными функциями, который является

альтернативой для обсуждавшегося в гл. 1 метода конечных разностей. Полезность метода очевидна, поскольку было показано, что в ряде задач при одном и том же числе неизвестных он дает решение более точное, чем метод конечных разностей.

К сожалению, использование метода взвешенных невязок применительно к аппроксимациям базисными функциями еще не снимает основных трудностей. Для двух- и трехмерных областей метод конечных разностей представляется более гибким, так как использование здесь базисных функций естественно ограничено бы нас рассмотрением прямоугольников, параллелепипедов и других областей простой формы, если мы хотим точно учесть краевые условия. Кроме того, матрица  $K$  системы алгебраических уравнений, получающейся при применении метода взвешенных невязок (см. уравнение (2.55)), с увеличением числа используемых для аппроксимации элементов в ряде случаев может стать плохо обусловленной. Такая ситуация имела место в примере 2.6, где матрица  $K$  подобна хорошо известной матрице Гильберта.

Проблему, связанную с выбором системы базисных функций, обычно удается решить путем использования базисных функций с более сильными свойствами ортогональности [8]. В частности, если в примере 2.6 базисные функции должны быть многочленами, то наиболее приемлемым выбором могли бы быть многочлены Лежандра (обсуждаемые в другом контексте в гл. 4) или многочлены Чебышева [9].

В следующей главе указанные недостатки метода базисных функций будут устранены, и тогда станет ясно, что такие процедуры, применяемые надлежащим образом, обладают широчайшим кругом возможностей.

## Литература

[1] Courant R. Differential and integral calculus. Vol. I. — 2nd ed. — London: Blackie and Son, 1937. [Имеется перевод: Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1. — 4-е изд. — М.: Наука, 1967.]

[2] Подробное обсуждение различных имеющихся возможностей можно найти в книге Finlayson B. A. The method of weighted residuals and variational principles. — New York: Academic Press, 1972.

[3] Вывод этой формулы имеется в книге Zienkiewicz O. C. The finite element method. — 3rd ed. — New York: McGraw-Hill, 1977.

[4] Такие процедуры использования пробных функций впервые были предложены Треффлем в 1926 г. (см., например, Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. — 2-е изд. — М.: Наука, 1970) и часто называются его именем.

[5] Подробное обсуждение таких процедур можно найти в книге Zienkiewicz O. C., Kelly D. W., Bettess P. Marriage à la mode — The best of both worlds (finite elements and boundary integrals). — In: Energy methods in finite element analysis. Ed. by R. Glowinski, E. Y. Rodin, O. C. Zienkiewicz. — New York: Wiley-Interscience, 1979.

[6] Timoshenko S., Goodier J. N. Theory of elasticity. — 2nd ed. — New

York: McGraw-Hill, 1951. [Имеется перевод: Тимошенко С. П., Гудьер Дж., Теория упругости.—2-е изд.—М.: Наука, 1979.]

[7] Этот принцип обсуждается в книге Richards T. H. Energy methods in stress analysis.—Chichester: Ellis-Horwood, 1977.

[8] Strang G., Fix G. J. An analysis of the finite element method.—Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1973. [Имеется перевод: Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов.—М.: Мир, 1977.]

[9] Fox L., Parker I. B., Chebyshev polynomials in numerical analysis.—New York: Oxford University Press, 1968.

### **Рекомендуемая литература**

Brebbia C. A., Walker S., Boundary element techniques in engineering.—London: Newnes-Butterworths, 1980. [Имеется перевод: Бреббия К., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике.—М.: Мир, 1983.]

Collatz L. The numerical treatment of differential equations.—Berlin: Springer, 1960. [Имеется перевод нем. изд. 1951 г.: Коллатц Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений.—М.: ИЛ, 1953.]

Crandall S. H., Engineering analysis.—New York: McGraw-Hill, 1956.

# КУСОЧНО-ОПРЕДЕЛЕННЫЕ БАЗИСНЫЕ ФУНКЦИИ И МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

## 3.1. Введение. Понятие конечного элемента

В методах аппроксимации предыдущей главы неявно предполагалось, что базисные функции  $N_m$ , входящие в разложение

$$\varphi \approx \hat{\varphi} = \psi + \sum_{m=1}^M a_m N_m, \quad (3.1)$$

были определены одним выражением на всей области  $\Omega$ , а интегралы в аппроксимирующих уравнениях типа (2.6) и (2.41) вычислялись сразу по всей этой области.

Альтернативный подход состоит в разбиении области  $\Omega$  на ряд неперекрывающихся *подобластей* или *элементов*  $\Omega^e$  и построении затем аппроксимации  $\hat{\varphi}$  *кусочным* образом, т. е. отдельно на каждой подобласти. Тогда используемые в процессе аппроксимации базисные функции также могут быть определены кусочным образом с применением различных выражений для разных подобластей  $\Omega^e$ , из которых составлена вся область. В таком случае входящие в аппроксимирующие уравнения определенные интегралы могут быть получены простым суммированием их вклада по каждой подобласти или элементу:

$$\int_{\Omega} W_i R_{\Omega} d\Omega = \sum_{e=1}^E \int_{\Omega^e} W_i R_{\Omega} d\Omega, \quad (3.2a)$$

$$\int_{\Gamma} \bar{W}_i R_{\Gamma} d\Gamma = \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma^e} \bar{W}_i R_{\Gamma} d\Gamma \quad (3.2b)$$

при условии, что  $\sum_{e=1}^E \Omega^e = \Omega$ ,  $\sum_{e=1}^E \Gamma^e = \Gamma$ . Здесь  $E$  — общее число

подобластей, на которые разбивается вся область, а  $\Gamma^e$  — часть границы  $\Omega^e$ , лежащая на  $\Gamma$ . Таким образом, суммирование, включающее  $\Gamma^e$ , производится только по тем элементам  $\Omega^e$ , которые непосредственно примыкают к границе.

Если подобласти имеют сравнительно простую форму и базисные функции на этих подобластях определяются однотипно, то весьма просто оперировать указанным выше способом в случае областей сложной формы, составленных из таких подобластей. В этом и состоит идея *метода конечных элементов*. В действитель-

ности, как может заметить читатель, рассмотренные в предыдущей главе процессы являются частным случаем метода конечных элементов, когда используется только один элемент.

Кусочное определение базисных функций означает, что аппроксимирующие функции или их производные могут иметь разрывы. Такие разрывы в производных высшего порядка допустимы, и мы покажем как они влияют на выбор используемой формулировки.

Если базисные функции определены кусочным образом, то выгодно поставить им в соответствие некоторый малый «носитель», полагая их равными нулю всюду, кроме рассматриваемого элемента и непосредственно примыкающих к нему подобластей. Как будет показано в дальнейшем, это в конечном счете позволит получить аппроксимирующие уравнения с ленточными матрицами, обеспечивающими методу конечных элементов дополнительное преимущество.

### 3.2. Некоторые типичные локально определенные базисные функции с минимальными носителями

Чтобы продемонстрировать использование метода конечных элементов, рассмотрим построение аппроксимации для произвольной функции  $\varphi(x)$  на отрезке  $\Omega = [0, L_x]$ . Разбиение  $\Omega$  на  $E (= M_n - 1)$  неперекрывающихся подотрезков осуществляется простым выбором подходящего множества точек  $\{x_l; l = 1, 2, \dots, M_n\}$  в  $\Omega$  с  $x_1 = 0$  и  $x_{M_n} = L_x$ ; в качестве элемента  $\Omega^e$  берется отрезок  $x_e \leq x \leq x_{e+1}$ .

На рис. 3.1а показано использование метода поточечной коллокации для аппроксимации заданной функции  $\varphi(x)$  посредством функции  $\hat{\varphi}(x)$ , принимающей постоянные значения на каждом элементе. Получаемая аппроксимация является разрывной со скачками в точках сопряжения элементов  $\{x_l; l = 2, 3, \dots, M_n - 1\}$ . В качестве точек коллокации выбираются средние точки элементов. Эти точки называются *узлами*. В конечно-элементных процессах узлы и элементы нумеруются. Здесь нами принята показанная на рисунке очевидная система нумерации, когда узел  $m$  принадлежит элементу  $m$ . Функция  $\hat{\varphi}(x)$  может быть записана в стандартной форме (3.1) путем сопоставления каждому узлу  $m$  кусочно-постоянной разрывной одинаковой для всех элементов (*глобальной*) базисной функции  $N_m$ , по определению принимающей значения единица на элементе  $m$  и нуль на всех других элементах. Тогда можно записать

$$\varphi \approx \hat{\varphi} = \sum_{m=1}^{M_n-1} \varphi_m N_m \quad \text{в } \Omega, \quad (3.3a)$$

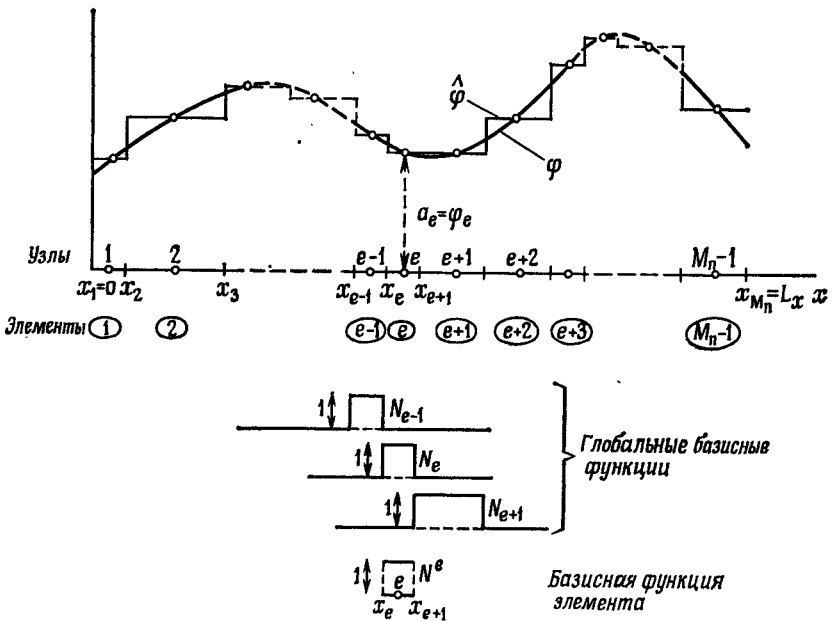


Рис. 3.1а. Аппроксимация функции одной переменной методом поточечной коллокации с использованием кусочно-постоянных элементов.

так как  $a_m = \varphi_m$ , где  $\varphi_m$  — значение функции  $\varphi$  в узле  $m$ . Таким образом, при использовании метода конечных элементов параметры аппроксимации имеют вполне понятный смысл. Произвольная функция  $\psi$  из (3.1) здесь опущена, и, следовательно, эта аппроксимация, вообще говоря, не будет равна значению функции  $\varphi$  в граничных точках отрезка  $x=0$ ,  $x=L_x$ . Однако в данном представлении эти значения приближаются сколь угодно точно при уменьшении длин элементов, прилегающих к границам  $x=0$  и  $x=L_x$ .

На каждом элементе  $e$  глобальная аппроксимация (3.3а) может быть выражена через значения  $\varphi_e$  в узле элемента и *базисной функции элемента*  $N^e$ , а именно

$$\varphi \approx \hat{\varphi} = \varphi_e N^e = \varphi_e \quad \text{на элементе } e, \quad (3.3б)$$

где  $N^e$  как раз и определена для элемента  $e$  и принимает на этом элементе значение единица.

На рис. 3.1б используется то же самое разбиение отрезка  $0 \leq x \leq L_x$  на элементы. Однако на этот раз за счет использования аппроксимации функцией, линейно меняющейся по  $x$  на каждом элементе, достигается более точное приближение. В этом случае (нумерованными) узлами являются точки сопряжения

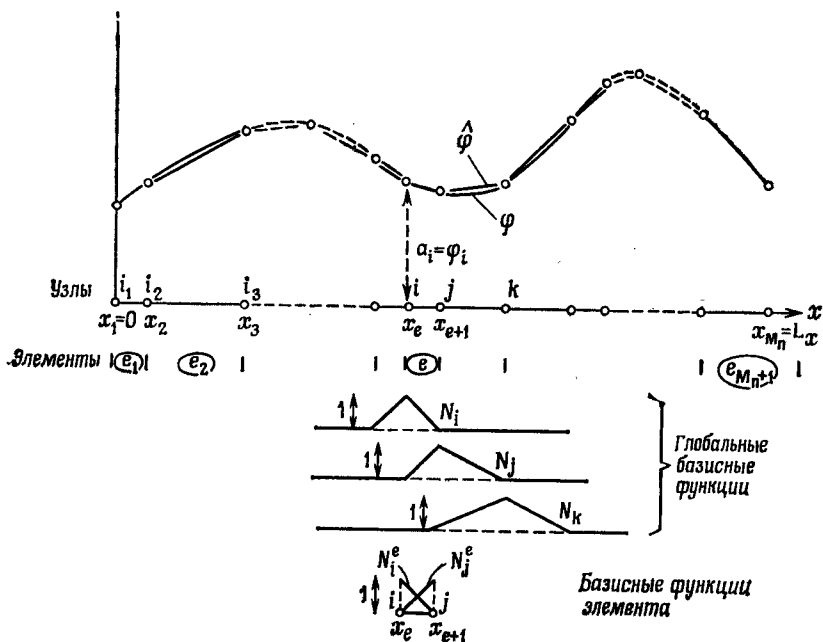


Рис. 3.16. Аппроксимация функции одной переменной методом поточечной коллокации с использованием кусочно-линейных элементов.

элементов и аппроксимация осуществляется путем сопоставления каждому узлу  $i$  кусочно-линейной глобальной базисной функции  $N_i$ .

Эти глобальные базисные функции обладают тем свойством, что  $N_i$  отлично от нуля только на элементах, ассоциируемых с узлом  $i$ , причем  $N_i = 1$  в узле  $i$  и равно нулю во всех других узлах. Можно заметить, что с узлами некоторого элемента ассоциируются только те глобальные базисные функции, которые на нем отличны от нуля.

Если в качестве точек коллокации взять узлы, то глобальную аппроксимацию можно записать в виде

$$\varphi \approx \hat{\varphi} = \sum_{m=1}^{M_n} \varphi_m N_m \quad \text{в } \Omega, \quad (3.4a)$$

где  $\varphi_m$  — опять значение  $\varphi$  в узле  $m$ . Подстановка соответствующих значений в узлах  $x=0$  и  $x=L_x$  гарантирует, что это представление автоматически принимает нужные значения в двух граничных точках отрезка и явное использование функции  $\varphi$  не требуется. На каждом элементе  $e$  с узлами  $i$  и  $j$  аппроксимация может быть выражена с помощью двух линейных базисных функ-

ций элемента  $N_i^e, N_j^e$  и узловых значений  $\varphi_i, \varphi_j$  по правилу

$$\varphi \approx \hat{\varphi} = \varphi_i N_i^e + \varphi_j N_j^e \quad \text{на элементе } e. \quad (3.4б)$$

Линейное изменение аппроксимации на каждом элементе тогда очевидно, так как обе базисные функции элемента линейны.

Из этих двух примеров видно, что характерной особенностью метода конечных элементов является нумерация узлов и элементов. Вопросу выбора способа нумерации мы здесь не уделяем внимания. В дальнейшем, однако, будет показано, что способ нумерации узлов и элементов влияет на ширину ленты матрицы системы уравнений, получающейся при применении конечно-элементной аппроксимации, — факт, который в вычислительном плане может иметь важное значение.

Использованные для построения аппроксимаций две системы базисных функций, как можно видеть, обладают свойством полноты, т. е. с увеличением числа разбиений становится возможным с их помощью приблизить любую достаточно хорошую функцию с нужной степенью точности. Аналогичные кусочно-постоянные и кусочно-линейные базисные функции можно определить для аппроксимации функций на двумерных областях. Эта возможность иллюстрируется рис. 3.2а и 3.2б, где осуществлено разбиение двумерной области на треугольники. Снова использован метод поточечной коллокации, причем при аппроксимации кусочно-постоянными функциями в качестве узлов взяты центры тяжести треугольников, тогда как при кусочно-линейной аппроксимации узлами служат вершины треугольников.

Аппроксимации (3.3) и (3.4) были построены с помощью метода поточечной коллокации, однако аналогичные выражения могут быть использованы и для построения аппроксимаций посредством рассмотренного в предыдущей главе общего метода взвешенных невязок. На рис. 3.3 заданная функция одной переменной аппроксимируется методом Галеркина с использованием кусочно-постоянных и кусочно-линейных элементов. Аппроксимация этой функции непрерывными функциями была показана на рис. 2.2—2.4. Поскольку мы воспользовались процедурой Галеркина, весовые функции в данном примере взяты по правилу  $W_i = N_i$ , и согласно методу взвешенных невязок, аппроксимирующие уравнения имеют вид

$$\int_0^1 N_i (\varphi - \hat{\varphi}) dx = 0. \quad (3.5)$$

Подставляя сюда выражение (3.3а) или (3.4а) для  $\hat{\varphi}$ , приходим к стандартной системе уравнений

$$Ka = f, \quad (3.6)$$



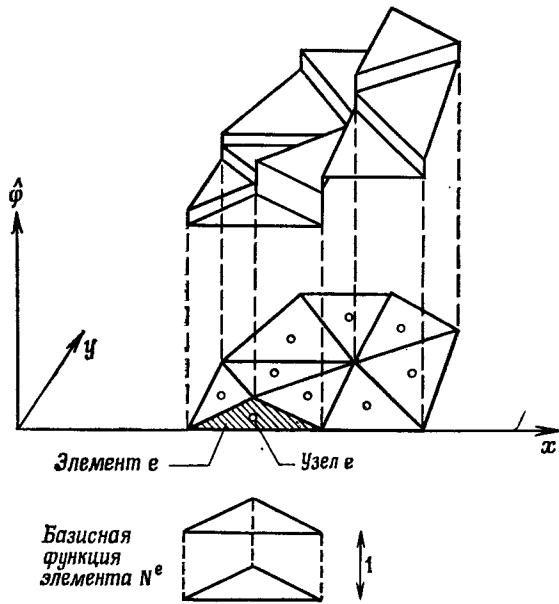


Рис. 3.2а. Аппроксимация функции двух переменных методом поточечной коллокации с использованием кусочно-постоянных треугольных элементов.

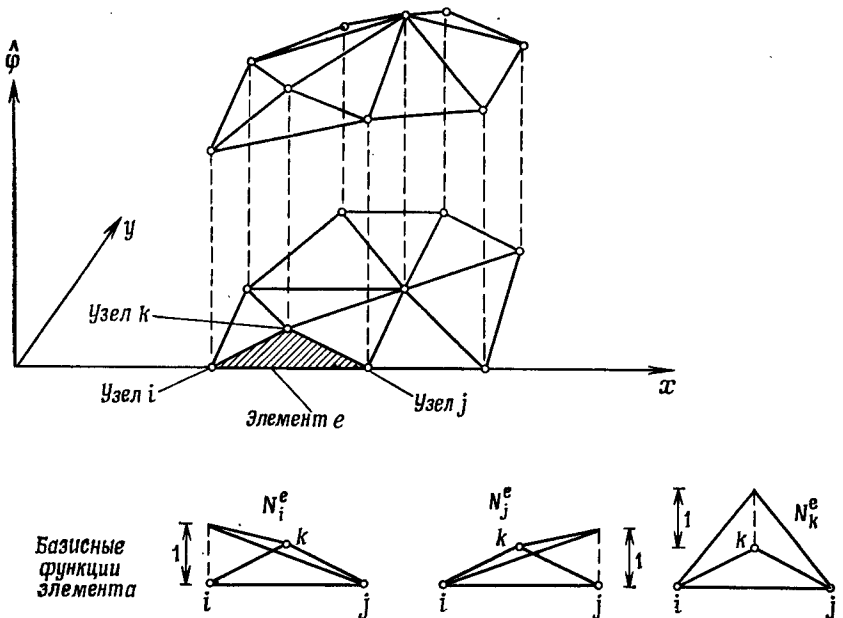


Рис. 3.2б. Аппроксимация функции двух переменных методом поточечной коллокации с использованием кусочно-линейных треугольных элементов.

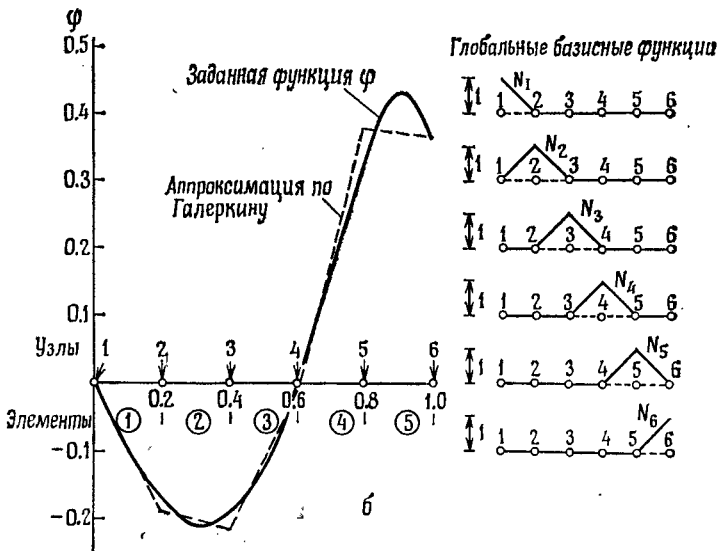
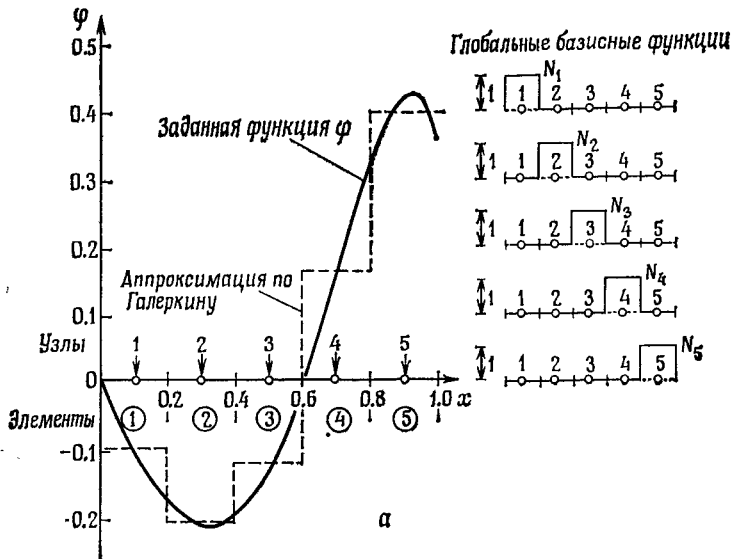


Рис. 3.3. Аппроксимация функции одной переменной методом Галеркина с использованием кусочно-постоянных элементов (а) и кусочно-линейных элементов (б).

где

$$K_{lm} = \int_0^1 N_l N_m dx, \quad f_l = \int_0^1 \varphi N_l dx \quad (3.7a)$$

и

$$\Phi^T = (\varphi_1, \varphi_2, \dots). \quad (3.7b)$$

Компоненты вектора  $\Phi$  будут опять узловыми значениями аппроксимации  $\hat{\varphi}$  и, следовательно, аппроксимациями узловых значений заданной функции  $\varphi$ . Как уже отмечалось в (3.2), фигурирующие в (3.7a) глобальные интегралы могут быть вычислены путем суммирования вклада отдельных элементов, т. е.

$$K_{lm} = \sum_{e=1}^E K_{lm}^e, \quad f_l = \sum_{e=1}^E f_l^e, \quad (3.8)$$

где  $K_{lm}^e$  и  $f_l^e$  находятся интегрированием только по одному элементу  $e$ .

В случае аппроксимации кусочно-постоянными базисными функциями система (3.6) диагональна, так как

$$N_l N_m = 0, \quad l \neq m. \quad (3.9)$$

Построенная таким образом аппроксимация представлена на рис. 3.3, а. При использованной там нумерации узлов и элементов решение имеет вид

$$\varphi_l = \left[ \int_{x_l}^{x_{l+1}} \varphi dx \right] \left[ \int_{x_l}^{x_{l+1}} dx \right]^{-1}. \quad (3.10)$$

Аппроксимация той же самой функции с помощью кусочно-линейных функций показана на рис 3.3, б. При использованной там нумерации узлов система уравнений (3.6) теперь трехдиагональна и симметрична совершенно так же, как и для многих рассмотренных ранее задач. Подробности того, как лучше всего в этом случае определить матрицу коэффициентов, здесь обсуждаться не будут, однако они станут ясны после того, как читатель рассмотрит примеры в § 3.5.

### 3.3. Аппроксимация решений дифференциальных уравнений и требования гладкости

Рассмотренный в § 3.1 и 3.2 процесс аппроксимации функций может быть использован для решения задач, описываемых дифференциальными уравнениями, согласно методике, обсуждавшейся в гл. 2.

Если такое дифференциальное уравнение опять записать в виде

$$A(\varphi) = \mathcal{L}\varphi + \rho \quad \text{в } \Omega \quad (3.11)$$

с краевыми условиями

$$B(\varphi) = \mathcal{M}\varphi + r = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (3.12)$$

то соответствующими дискретными аппроксимирующими уравнениями по методу взвешенных невязок будут

$$\int_{\Omega} W_i R_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma} \overline{W}_i R_{\Gamma} d\Gamma = 0, \quad (3.13)$$

где

$$R_{\Omega} = \mathcal{L}\hat{\varphi} + \rho, \quad R_{\Gamma} = \mathcal{M}\hat{\varphi} + r. \quad (3.14)$$

В § 3.2 для конечно-элементной аппроксимации функций успешно использовались разрывные базисные функции, а также непрерывные базисные функции с разрывными производными. Поставим теперь вопрос: допустимы ли такие функции в данном контексте, поскольку уравнение (3.13) включает производные от базисных функций?

Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим поведение трех типов одномерных базисных функций  $N_m$  вблизи точки стыковки  $A$  двух элементов (рис. 3.4). Первая функция разрывна в точке  $A$ , тогда как вторая имеет разрывную производную  $dN_m/dx$  в той же самой точке, а у третьей разрывна вторая производная  $d^2N_m/dx^2$ . Ясно, что в точках разрыва соответственно первая, вторая и третья производные этих функций не будут ограничены.

Если теперь вычислить интегралы типа фигурирующих в уравнении (3.13), то желательно исключить такие бесконечные значения, так как они могут приводить к неопределенностям в интегралах. Если интегралы в (3.13) содержат производные порядка  $s$  (т. е. если такие производные содержат операторы  $\mathcal{L}$  или  $\mathcal{M}$ ), то для устранения подобных затруднений необходимо гарантировать кусочную дифференцируемость производных порядка  $s-1$  от используемых в аппроксимации базисных функций  $N_m$ . Математически это означает, что мы будем требовать, чтобы базисные функции принадлежали классу гладкости  $C^{s-1}$ .

Например, если, как и в § 3.2, мы просто интерполируем заданную функцию и не используем никакого дифференциального оператора, то  $s=0$  и допустимо применение разрывных базисных функций типа изображенной на рис. 3.4, *a*. Аналогично, если в  $\mathcal{L}$  или  $\mathcal{M}$  входят первые производные, т. е.  $s=1$ , то необходима

<sup>1)</sup> Здесь и далее авторы используют следующее нестандартное определение классов гладкости  $C^r$ : функция принадлежит классу  $C^r$ , если она и ее производные до порядка  $r$  включительно непрерывны и производные порядка  $r$  (при  $r > 0$  сама функция) кусочно-непрерывно дифференцируемы. — Прим. ред.

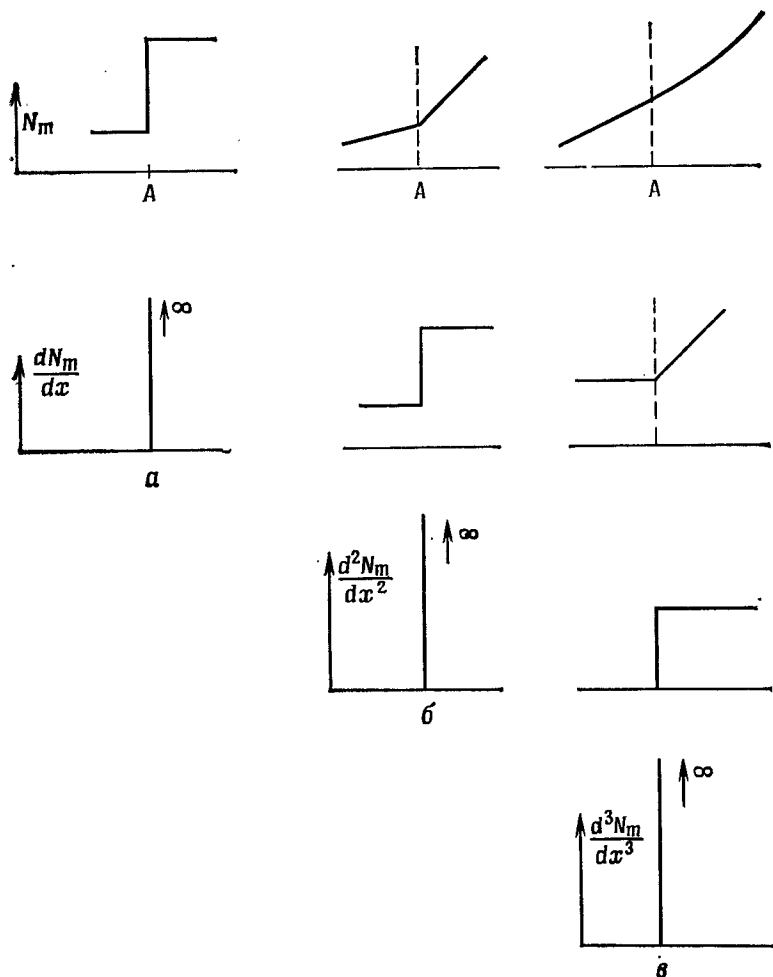


Рис. 3.4. Поведение трех типов базисных функций и их производных вблизи точки стыковки  $A$  двух элементов.

$C^0$ -гладкость, которой обладает функция на рис. 3.4, б. Если же, кроме того, входят и вторые производные, то  $s=2$  и требуется, как на рис. 3.4, в,  $C^1$ -гладкость.

Требования гладкости, наложенные здесь на базисные функции, применимы также и к весовым функциям  $W_i$ . Таким образом, в общем случае для справедливости уравнений (3.13) необходимо исключить бесконечные значения  $W_i$  и считать допустимыми для этих функций только «обычные» разрывы. В § 2.2 были

использованы весовые функции  $W_i$ , которые принимали в определенной точке бесконечные значения и интегралы от которых по некоторому содержащему эту точку отрезку были равны единице (дельта-функция Дирака). Такие весовые функции требовались для применения поточечной коллокации. Ясно, что тем самым нарушалось только что введенное правило. Однако это исключение допустимо, если значение невязки в рассматриваемой точке конечно. В описываемых здесь общих конечно-элементных процессах такие виды весовых функций будут использоваться редко и приведенные правила обычно являются достаточными.

### 3.4. Слабая формулировка и метод Галеркина

В предыдущей главе было показано, что член, содержащий взвешенную невязку по области

$$\int_{\Omega} W_i \mathcal{L} N_m d\Omega, \quad (3.15a)$$

часто может быть заменен выражением вида (см. равенство (2.45))

$$\int_{\Omega} (\mathcal{E} W_i) (\mathcal{D} N_m) d\Omega + \text{границные члены}, \quad (3.15b)$$

где операторы  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{D}$  включают более низкий порядок дифференцирования, чем исходный оператор  $\mathcal{L}$ . Достижимое таким преобразованием преимущество очевидно, если используются локально определенные базисные функции, поскольку в этом случае от последних будет требоваться более низкий порядок гладкости. Однако читатель сразу заметит, что теперь рассматриваемые весовые функции  $W_i$  должны обладать более высоким порядком гладкости. Так как операторы  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{D}$  обычно включают один и тот же порядок дифференцирования, тождественное определение базисных и весовых функций, используемых в методе Галеркина, представляется обоснованным. В большинстве практических приложений, упоминаемых в оставшейся части этой книги, будет использоваться метод Галеркина, когда

$$W_i = N_i \quad (3.16)$$

с кусочно-определенными базисными функциями. В отдельных случаях лучшие результаты удастся получить без применения этого правила, хотя и здесь обычно желательно, чтобы  $W_i$  и  $N_i$  имели одну и ту же степень гладкости.

### 3.5. Некоторые одномерные задачи

Чтобы конкретизировать уже высказанные идеи, рассмотрим в этом параграфе некоторые одномерные примеры, в которых кусочно-определенные базисные функции используются для решения задач, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка. В первых двух примерах использование рассмотренных ранее кусочно-постоянных базисных функций затруднительно из-за наличия в невязке производных. Поэтому здесь будут применены непрерывные кусочно-линейные функции типа представленных на рис. 3.16. Выше уже упоминалось, что для понижения порядка дифференцирования подынтегрального выражения необходима соответствующая переформулировка задачи, и по этой причине будет использована аппроксимация Галеркина (3.16). Третий пример иллюстрирует возможность применения кусочно-постоянных элементов в рамках метода конечных элементов для решения уравнений второго порядка при использовании смешанной формулировки типа рассмотренной в примере 2.9.

**Пример 3.1.** В предыдущих двух главах различными методами решалось уравнение  $d^2\varphi/dx^2 - \varphi = 0$ ,  $0 \leq x \leq 1$  с крайевыми условиями  $\varphi = 0$  при  $x = 0$  и  $\varphi = 1$  при  $x = 1$ . Попытаемся решить теперь эту задачу методом конечных элементов. На отрезке  $0 \leq x \leq 1$  выберем  $M + 1$  узлов, как показано на рис. 3.5, и

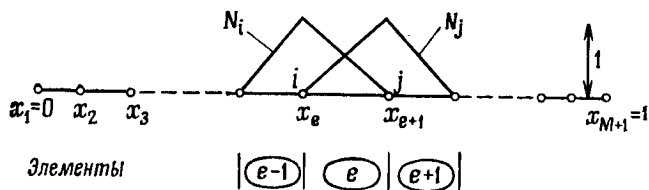


Рис. 3.5. Общая нумерация узлов и элементов для задачи из примера 3.1.

сопоставим каждому узлу  $m$  кусочно-линейную глобальную базисную функцию  $N_m$ . Тогда можно построить аппроксимацию

$$\varphi \approx \hat{\varphi} = \sum_{m=1}^{M+1} \varphi_m N_m,$$

где  $\varphi_m$  — значение аппроксимации в узле  $m$ . Краевым условиям при  $x = 0$  и  $x = 1$  можно удовлетворить непосредственно заданием соответствующих значений в узлах. Однако удобнее составить уравнения метода взвешенных невязок без первоначального задания граничных значений  $\varphi$ , а затем учесть эти условия при решении конечной системы уравнений. Таким образом, если на данном этапе все  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_M, \varphi_{M+1}$  рассматривать как неиз-

вестные, то аппроксимирующие уравнения метода взвешенных невязок (3.13) принимают вид

$$\int_0^1 W_l (d^2 \hat{\varphi} / dx^2 - \hat{\varphi}) dx = 0, \quad l = 1, 2, \dots, M+1.$$

Член, учитывающий невязку на границе  $R_\Gamma$ , не включен, поскольку впоследствии он будет сделан тождественно равным нулю. В приведенном виде эта формулировка требует  $C^1$ -гладкости базисных функций. Интегрирование по частям ослабляет это требование, и положенное на базисные функции, и приводит к слабой формулировке метода взвешенных невязок:

$$-\int_0^1 \left( \frac{dW_l}{dx} \frac{d\hat{\varphi}}{dx} + W_l \hat{\varphi} \right) dx + \left[ W_l \frac{d\hat{\varphi}}{dx} \right]_0^1 = 0, \quad l = 1, 2, \dots, M, M+1.$$

Теперь очевидно, что требуется только  $C^0$ -гладкость  $\hat{\varphi}$  (а следовательно, и  $N_m$ ) и  $W_l$ . Кусочно-линейные базисные функции удовлетворяют этому требованию, и при использовании метода Галеркина гарантирована  $C^0$ -гладкость весовых функций. Получаемая при применении метода Галеркина система уравнений будет иметь вид

$$\mathbf{K}\varphi = \mathbf{f},$$

где

$$K_{lm} = \int_0^1 [(dN_l/dx)(dN_m/dx) + N_l N_m] dx, \quad 1 \leq l, m \leq M+1,$$

$$f_l = [N_l d\hat{\varphi}/dx]_0^1, \quad 1 \leq l \leq M+1.$$

Заметим теперь, что вклад в эти коэффициенты элемента  $e$ , узлы которого имеют номера  $i$  и  $j$  (рис. 3.5), может быть вычислен в общей форме, и полезность применения правила суммирования (3.2) становится очевидной. На таком типичном элементе  $e$ , положив  $\chi = x - x_i$ , имеем

$$N_j = N_j^e = \chi/h^e, \quad N_l = N_l^e = (h^e - \chi)/h^e,$$

где  $h^e = x_j - x_i$ . Единственными отличными от нуля на элементе  $e$  глобальными базисными функциями будут  $N_i$  и  $N_j$ , и, таким образом,  $N_l = 0$  на элементе  $e$ , если  $l$  не равно  $i$  или  $j$ , т. е. если узел  $l$  не принадлежит элементу  $e$ . Поскольку

$$K_{lm} = \sum_{e=1}^E K_{lm}^e,$$

для построения матрицы  $\mathbf{K}$  достаточно оценить вклад произвольного элемента. В общем виде для элемента  $e$  это можно сделать



следующим образом:

$$K_{lm}^e = 0, \quad l, m \neq i, j,$$

$$K_{ij}^e = K_{ji}^e = \int_0^{h^e} \left[ \frac{dN_i^e}{dx} \frac{dN_j^e}{dx} + N_i^e N_j^e \right] dx = -\frac{1}{h^e} + \frac{h^e}{6},$$

$$K_{ii}^e = K_{jj}^e = \int_0^{h^e} \left[ \left( \frac{dN_i^e}{dx} \right)^2 + (N_i^e)^2 \right] dx = \frac{1}{h^e} + \frac{h^e}{3}.$$

Вычислив таким образом компоненты матрицы элемента  $K^e$ , простым суммированием по всем таким элементам получим матрицу  $K$ .

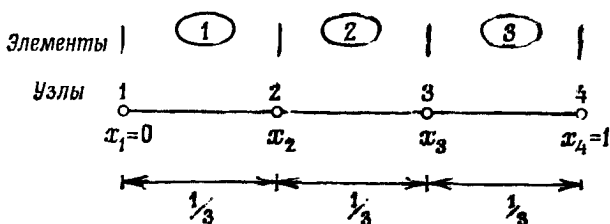


Рис. 3.6. Нумерация узлов и элементов, использованная при получении приближенного решения задачи из примера 3.1.

Этот процесс, обычно называемый *ансамблированием*, будет здесь продемонстрирован для случая  $E=M=3$ . Предположим, что все элементы имеют равную длину (т. е.  $h^1=h^2=h^3=h=1/3$ ), и поэтому полученные результаты можно сравнить с конечно-разностным решением из примера 1.1. Если узлы нумеруются последовательно от 1 до 4, а элементы—от 1 до 3, как показано на рис. 3.6, то матрицы элементов принимают вид

$$K^1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} + \frac{h}{3} & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & \frac{1}{h} + \frac{h}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$K^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h} + \frac{h}{3} & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & \frac{1}{h} + \frac{h}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$K^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{h} + \frac{h}{3} & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & \frac{1}{h} + \frac{h}{3} \end{bmatrix}.$$

Используя свойства базисных функций, находим, что  $f_2 = f_3 = 0$ , и после суммирования приходим к системе уравнений

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{h} + \frac{h}{3} & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & 2\left(\frac{1}{h} + \frac{h}{3}\right) & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & 2\left(\frac{1}{h} + \frac{h}{3}\right) & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & \frac{1}{h} + \frac{h}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{d\hat{\varphi}}{dx} \Big|_{x=0} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{d\hat{\varphi}}{dx} \Big|_{x=1} \end{bmatrix}.$$

Теперь можно вычеркнуть из этой системы уравнений строки 1 и 4, получающиеся при применении метода взвешенных невязок к исходному уравнению с базисными функциями, отвечающими узлам, где заданы значения решения, и использовать заданные значения  $\varphi_1 = 0$  и  $\varphi_4 = 1$  в оставшихся уравнениях. Тогда имеем

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{1}{h} + \frac{h}{3}\right)\varphi_2 + \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right)\varphi_3 &= 0, \\ \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right)\varphi_2 + 2\left(\frac{1}{h} + \frac{h}{3}\right)\varphi_3 &= -\left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right). \end{aligned}$$

Решая эти уравнения для  $h = 1/3$ , находим  $\varphi_2 = 0.2885$  и  $\varphi_3 = 0.6098$  (точные значения в узлах равны  $\varphi_2 = 0.28892$  и  $\varphi_3 = 0.61024$ ). Это решение несколько точнее, чем полученное конечно-разностной аппроксимацией в примере 1.1, несмотря на сходство основных трехточечных уравнений.

В этом примере вычисления на всех элементах одинаковы, так как краевые условия применяются только на этом этапе решения. Кроме того, непосредственная подстановка численного решения в два вычеркнутых из системы уравнения дает аппроксимацию градиента решения при  $x=0$  и  $x=1$ . Эта дополнительная информация может быть важна при анализе физических задач, где, как уже было показано, такие величины в ряде случаев

могут иметь конкретный физический смысл. (Например, в одномерной задаче теплопроводности это будет информация о потоке тепла через границы  $x=0$  и  $x=1$ .) В данном случае вычеркнутые уравнения дают

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\varphi}}{dx} \Big|_{x=0} &= - \left( -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} \right) \varphi_2 = 0.8496, \\ \frac{d\hat{\varphi}}{dx} \Big|_{x=1} &= \left( \frac{1}{h} + \frac{h}{6} \right) \varphi_3 + \left( \frac{1}{h} + \frac{h}{3} \right) \varphi_4 = 1.3156, \end{aligned}$$

что хорошо согласуется с точными значениями 0.8509 и 1.3130 соответственно.

Из этого примера должно быть ясно, что нет необходимости вычислять каждую компоненту матрицы элемента  $\mathbf{K}^e$ , поскольку ее составляющая  $K_{lm}^e$  равна нулю, если узлы  $l$  и  $m$  не принадлежат элементу. Поэтому на практике вычисляется только приведенная матрица  $\mathbf{k}^e$ , содержащая ненулевые элементы  $\mathbf{K}^e$ . Для данного примера  $\mathbf{k}^e$  будет  $(2 \times 2)$ -матрицей, определенной соотношением<sup>1)</sup>

$$\mathbf{k}^e = \int_{x_i}^{x_j} \begin{bmatrix} \left( \frac{dN_i^e}{dx} \right)^2 + (N_i^e)^2 & \frac{dN_i^e}{dx} \frac{dN_j^e}{dx} + N_i^e N_j^e \\ \frac{dN_i^e}{dx} \frac{dN_j^e}{dx} + N_i^e N_j^e & \left( \frac{dN_j^e}{dx} \right)^2 + (N_j^e)^2 \end{bmatrix} dx.$$

Подставив сюда базисные функции элемента и проинтегрировав, получим

$$\mathbf{k}^e = \begin{bmatrix} \frac{1}{h^e} + \frac{h^e}{3} & -\frac{1}{h^e} + \frac{h^e}{6} \\ -\frac{1}{h^e} + \frac{h^e}{6} & \frac{1}{h^e} + \frac{h^e}{3} \end{bmatrix}.$$

Эти матрицы опять могут быть вычислены непосредственно для каждого элемента и после ансамблирования дадут матрицу  $\mathbf{K}$ . Чтобы гарантировать, что такой процесс ансамблирования производится корректно, полезно заметить, что ненулевые компоненты

<sup>1)</sup> Компоненты приведенной матрицы элемента часто представляются компактными общими выражениями, например для данного случая выражениями

$$\int_{\Omega^e} \left[ \left( \frac{dN_i^e}{dx} \right) \left( \frac{dN_j^e}{dx} \right) + N_i^e N_j^e \right] dx.$$

При этом подразумевается, что  $i$  и  $j$  соответствуют номерам узлов элемента при их надлежащем расположении. Для большей ясности изложения эта краткая форма записи здесь не используется.

$K^e \varphi$  содержатся в

$$k^e \varphi^e = \begin{bmatrix} \frac{1}{h^e} + \frac{h^e}{3} & -\frac{1}{h^e} + \frac{h^e}{6} \\ -\frac{1}{h^e} + \frac{h^e}{6} & \frac{1}{h^e} + \frac{h^e}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \end{bmatrix},$$

где  $\varphi^e = (\varphi_i, \varphi_j)^T$  — вектор значений в узлах элемента  $e$ . Тогда при добавлении вклада элемента  $e$  в матрицу  $K$  компоненты  $k^e$  должны быть учтены таким образом, чтобы правильно оперировать с узловыми переменными  $\varphi_i$  и  $\varphi_j$ , как это сделано выше. Этот процесс можно продемонстрировать повторно, рассмотрев решение этого примера с расположением узлов и системой нумерации, показанными на рис. 3.6. Так как все три элемента имеют равную длину  $h (= 1/3)$ , то

$$k^1 = k^2 = k^3 = \begin{bmatrix} 28/9 & -53/18 \\ -53/18 & 28/9 \end{bmatrix}.$$

Тогда процесс аисамблирования производится следующим образом.

*Вклад элемента 1.* Этому элементу соответствуют узлы 1 и 2, и ненулевой вклад в  $K\varphi$  от этого элемента содержится в

$$k^1 \varphi^1 = \begin{bmatrix} 28/9 & -53/18 \\ -53/18 & 28/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}.$$

Тогда компоненты  $k^1$  учитываются в  $K$  таким образом, чтобы правильно оперировать с узловыми переменными  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , т. е.

$$K\varphi = \begin{bmatrix} 28/9 & -53/18 & 0 & 0 \\ -53/18 & 28/9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix}.$$

*Вклад элемента 2.* Этому элементу соответствуют узлы 2 и 3, и, таким образом, ненулевой вклад этого элемента содержится в

$$k^2 \varphi^2 = \begin{bmatrix} 28/9 & -53/18 \\ -53/18 & 28/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}.$$

Добавив этот вклад в  $K$ , получим

$$K\varphi = \begin{bmatrix} 28/9 & -53/18 & 0 & 0 \\ -53/18 & 28/9 + 28/9 & -53/18 & 0 \\ 0 & -53/18 & 28/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix}.$$

Необходимо отметить, что  $K_{22}$  образовано суммой двух компонент, так как узел 2 принадлежит и элементу 1, и элементу 2.

*Вклад элемента 3.* Процесс ансамблирования заканчивается добавлением вклада элемента 3, причем соответствующими узлами теперь будут 3 и 4. Таким образом,

$$k^3 \varphi^3 = \begin{bmatrix} 28/9 & -53/18 \\ -53/18 & 28/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix},$$

и добавление этой подматрицы в  $K$  дает окончательный результат

$$K\varphi = \begin{bmatrix} 28/9 & -53/18 & 0 & 0 \\ -53/18 & 28/9 + 28/9 & -53/18 & 0 \\ 0 & -53/18 & 28/9 + 28/9 & -53/18 \\ 0 & 0 & -53/18 & 28/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix}.$$

Заметим опять, что, так как узел 3 принадлежит обоим элементам 2 и 3,  $K_{33}$  получается суммированием вклада этих двух элементов.

Полученная таким образом матрица  $K$  совпадает с найденной ранее, и дальнейшее решение производится тем же способом.

**Пример 3.2.** В этом примере показывается применение метода конечных элементов к задачам с заданной на границе производной. Рассмотрим решение того же уравнения, что и в примере 3.1, но с краевыми условиями  $\varphi=0$  при  $x=0$  и  $d\varphi/dx=1$  при  $x=1$ . Методом конечных разностей эта задача была решена в примерах 1.2 и 1.3. Используя конечно-элементную аппроксимацию  $\hat{\varphi}$  из примера 3.1, приходим к уравнениям метода взвешенных невязок (см. уравнение (3.13))

$$\int_0^1 W_l [d^2 \hat{\varphi}/dx^2 - \hat{\varphi}] dx + [\bar{W}_l (d\hat{\varphi}/dx - 1)]_{x=1} = 0.$$

Здесь невязка при  $x=0$  опущена, поскольку, как и в предыдущем примере, впоследствии она будет сделана тождественно равной нулю. Выполняя интегрирование по частям и полагая  $\bar{W}_l|_{x=1} = -W_l|_{x=1}$ , имеем

$$\int_0^1 \left[ \frac{dW_l}{dx} \frac{d\hat{\varphi}}{dx} + W_l \hat{\varphi} \right] dx + \left[ W_l \frac{d\hat{\varphi}}{dx} \right]_{x=0} - [W_l]_{x=1} = 0.$$

Отсюда следует, что краевое условие при  $x=1$  для данной задачи является естественным. Если весовые функции определяются по правилу  $W_l = N_l$  и выбираются три равных элемента, изображенных на рис. 3.6, то приведенные матрицы элементов  $k^1$ ,  $k^2$ ,  $k^3$  будут совпадать с аналогичными из примера 3.1. Однако вектор  $f$  в правой части уравнения теперь будет другим. Осуществив про-

цесс ансамблирования, имеем

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{h} + \frac{h}{3} & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & 2\left(\frac{1}{h} + \frac{h}{3}\right) & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & 2\left(\frac{1}{h} + \frac{h}{3}\right) & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & \frac{1}{h} + \frac{h}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{d\hat{\varphi}}{dx} \Big|_{x=0} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

краевое условие на правом конце при этом учтено.

Теперь можно учесть краевое условие при  $x=0$ , вычеркнув из системы первое уравнение и положив  $\varphi_1=0$  в остальных уравнениях. Решая получающуюся систему с  $h=1/3$ , находим  $\varphi_2=0.2193$ ,  $\varphi_3=0.4634$ ,  $\varphi_4=0.7600$ . Эти результаты существенно ближе к точному решению, чем полученные с помощью центральной разности в примере 1.3. Вычеркнутое уравнение опять можно использовать для вычисления

$$d\hat{\varphi}/dx|_{x=0} = -(-1/h + h/6) \varphi_2 = 0.6457,$$

что является хорошим приближением точного значения 0.6481.

В этом и предыдущем примерах метод конечных элементов с выбором базисных функций по Галеркину, примененный к уравнению  $d^2\varphi/dx^2 - \varphi = 0$ , приводил к ленточной симметричной глобальной матрице  $K$ . Такие свойства матрицы были характерной особенностью метода конечных разностей. Однако они были утрачены при применении общих процедур аппроксимации базисными функциями в гл. 2. Кроме того, при возрастании числа узлов практически не возникает проблем с плохой обусловленностью матрицы  $K$  в отличие от матрицы системы из примера 2.6.

**Пример 3.3.** В гл. 1 было показано, что имеющее второй порядок уравнение теплопроводности  $k(d^2\varphi/dx^2) + Q = 0$  можно заменить эквивалентной системой двух уравнений  $k(d\varphi/dx) + q = 0$ ,  $dq/dx - Q = 0$ . Проиллюстрируем решение методом конечных элементов системы уравнений этого типа в смешанной формулировке, вернувшись к задаче из примера 2.9. Если положить

$$q \approx \hat{q} = \sum_{m=1}^{M_q} q_m N_{m,1}, \quad \varphi \approx \hat{\varphi} = \sum_{m=1}^{M_\varphi} \varphi_m N_{m,2},$$

то, согласно методу взвешенных невязок, для данной задачи

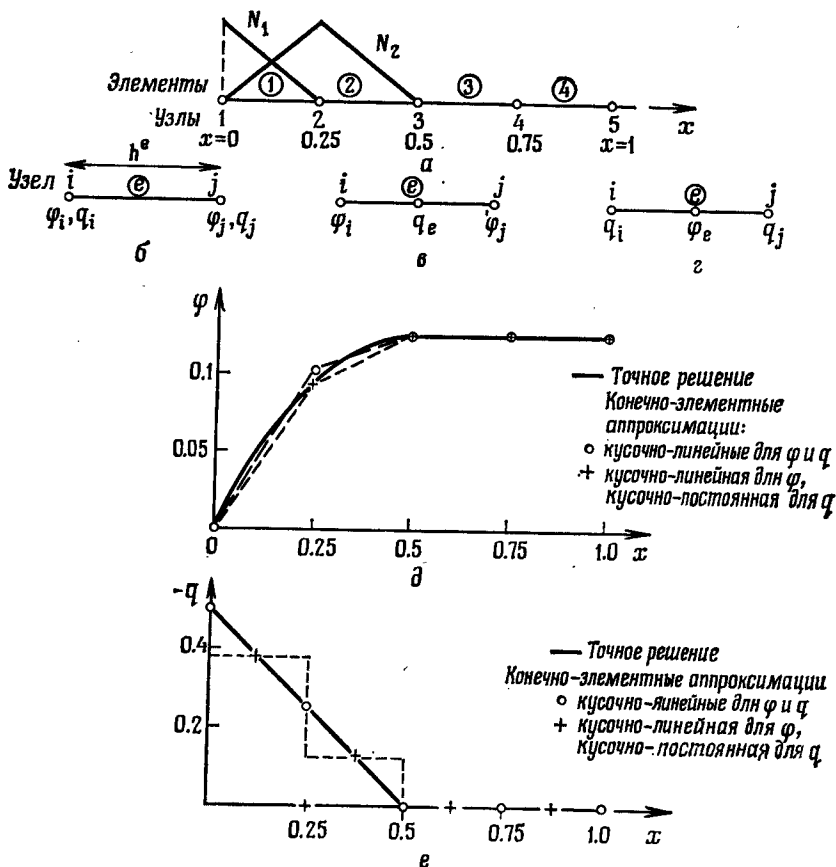


Рис. 3.7. Решение задачи из примера 3.3. *a* — система узлов и элементов, принятая для кусочно-линейных  $\varphi$  и  $q$  (*b*), а также модификации, которые должны быть сделаны для кусочно-линейной  $\varphi$ , кусочно-постоянной  $q$  (*в*) и кусочно-постоянной  $\varphi$ , кусочно-линейной  $q$  (*г*). На графиках *д* и *е* сравниваются аппроксимации для  $\varphi$  и  $q$  соответственно.

получим

$$\int_0^1 k \frac{d\hat{\varphi}}{dx} N_{l,1} dx + \int_0^1 \hat{q} N_{l,1} dx = 0, \quad l = 1, 2, \dots, M_q,$$

$$\int_0^1 \frac{d\hat{q}}{dx} N_{l,2} dx = \int_0^1 Q N_{l,2} dx, \quad l = 1, 2, \dots, M_\varphi.$$

Используя для представления  $q$  и  $\varphi$  показанные на рис. 3.7, *a* линейные конечные элементы, получим, что  $M_q = M_\varphi = 5$  и

$N_{i,1} = N_{i,2} = N_i$ . Далее имеются четыре узловые переменные  $q_i$ ,  $\varphi_i$ ,  $q_j$  и  $\varphi_j$ , соответствующие общему элементу  $e$  на рис. 3.7,б, и ненулевой вклад этого элемента в  $\mathbf{K}\Phi$  содержится в

$$\mathbf{k}^e \Phi^e = \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} (N_i^e)^2 & k N_i^e \frac{dN_i^e}{dx} & N_i^e N_j^e & k N_i^e \frac{dN_j^e}{dx} \\ N_i^e \frac{dN_i^e}{dx} & 0 & N_i^e \frac{dN_j^e}{dx} & 0 \\ N_j^e N_i^e & k N_j^e \frac{dN_i^e}{dx} & (N_j^e)^2 & k N_j^e \frac{dN_j^e}{dx} \\ N_j^e \frac{dN_i^e}{dx} & 0 & N_j^e \frac{dN_j^e}{dx} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i \\ \varphi_i \\ q_j \\ \varphi_j \end{bmatrix} dx.$$

Производя интегрирование, для данной задачи при  $k=1$  находим

$$\mathbf{k}^e = \begin{bmatrix} \frac{h^e}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{h^e}{6} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{h^e}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{h^e}{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

При  $Q=1$  для  $x < 1/2$ ,  $Q=0$  для  $x > 1/2$  и четырех элементах равной длины  $h$  процесс ансамблирования матрицы дает

$$\begin{bmatrix} \frac{h}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{h}{6} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{h}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{h}{3} + \frac{h}{3} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} & \frac{h}{6} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{h}{3} + \frac{h}{3} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} & \frac{h}{6} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{h}{3} + \frac{h}{3} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} & \frac{h}{6} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{h}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \varphi_1 \\ q_2 \\ \varphi_2 \\ q_3 \\ \varphi_3 \\ q_4 \\ \varphi_4 \\ q_5 \\ \varphi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{h}{2} \\ 0 \\ h \\ 0 \\ \frac{h}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Если поставлены краевые условия  $\varphi_1 = 0$ ,  $q_5 = 0$  и используется значение  $h = 1/4$ , то эта система уравнений имеет решение

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= 5/48, & \varphi_3 &= \varphi_4 = \varphi_5 = 1/8, \\ q_1 &= -1/2, & q_2 &= -1/4, & q_3 &= q_4 = 0. \end{aligned}$$

Как следует из рис. 3.7, *д* и *е*, это означает, что  $q$  представляется точно, а  $\hat{\varphi}$  является весьма хорошей аппроксимацией для  $\varphi$ .

Можно рассмотреть и другой подход. Интегрируя по частям второе из соотношений метода взвешенных невязок (и меняя знак), получаем

$$-[\hat{q}N_{i,2}]_0^1 + \int_0^1 \hat{q} \frac{dN_{i,2}}{dx} = - \int_0^1 QN_{i,2} dx, \quad l = 1, 2, \dots, M_\varphi.$$

Теперь очевидно, что для  $\hat{q}$  возможно представление кусочно-постоянными конечными элементами, тогда как для  $\hat{\varphi}$  сохраняется кусочно-линейная аппроксимация. Для сетки, изображенной на рис. 3.7, *а*,  $M_\varphi = 5$ ,  $M_q = 4$  и имеются три переменные  $\varphi_i$ ,  $\varphi_j$ ,  $q_e$ , соответствующие общему элементу  $e$  на рис. 3.7, *в*. В этом случае

$$\mathbf{k}^e \boldsymbol{\varphi}^e = \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} 0 & \frac{dN_i^e}{dx} & 0 \\ \frac{dN_i^e}{dx} & 1 & \frac{dN_j^e}{dx} \\ 0 & \frac{dN_j^e}{dx} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_i \\ q_e \\ \varphi_j \end{bmatrix} dx$$

и, таким образом,

$$\mathbf{k}^e = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & h^e & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Проводя ансамблирование матриц элементов, получаем систему

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & h & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & h & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & h & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & h & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ q_1 \\ \varphi_2 \\ q_2 \\ \varphi_3 \\ q_3 \\ \varphi_4 \\ q_4 \\ \varphi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h/2 - \hat{q}|_{x=0} \\ 0 \\ -h \\ 0 \\ -h/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

с решением

$$\varphi_2 = 3/32, \quad \varphi_3 = \varphi_4 = \varphi_5 = 1/8, \\ q_1 = -3/8, \quad q_2 = -1/8, \quad q_3 = q_4 = 0.$$

Как показано на рис. 3.7,  $d$  и  $e$ , этот метод воспроизводит точные значения  $\varphi$  и  $q$  в узлах. Из первого уравнения можно найти значение  $\hat{q}|_{x=0} = -1/2$ , которое тоже является точным.

Наконец, имеется еще возможность использовать интегрирование по частям в первом соотношении метода взвешенных невязок. Тогда для  $\hat{\varphi}$  может быть принято кусочно-постоянное представление, а для  $\hat{q}$  — кусочно-линейное (рис. 3.7,  $g$ ). Читателю рекомендуется провести этот анализ и сравнить точность полученной аппроксимации с только что найденной.

### Упражнения

3.1. Использовать метод конечных элементов для аппроксимации функции  $\varphi = 1 + \sin(\pi x/2)$  на отрезке  $0 \leq x \leq 1$ . Рассмотреть кусочно-постоянные и кусочно-линейные функции и применить методы поточечной колокации и Галеркина. Сравнить результаты с полученными в упражнении 2.1.

3.2. Решить уравнение  $d^2\varphi/dx^2 + \varphi = 0$  с краевыми условиями  $\varphi = 1$  при  $x = 0$ ,  $\varphi = 0$  при  $x = 1$ , используя конечно-элементную аппроксимацию по Галеркину с четырьмя линейными элементами. Сравнить результаты с полученными в упражнении 1.1.

3.3. В примере 3.2, используя разложение в ряд Тейлора в уравнении для узла 4, показать, что краевое условие  $d\varphi/dx = 1$  при  $x = 1$  аппроксимируется с погрешностью  $O(h^3)$ . Сравнить этот результат с конечно-разностной аппроксимацией в примере 1.3.

3.4. В упражнении 1.2 найти распределение изгибающего момента с помощью конечно-элементной аппроксимации по Галеркину. Сравнить результаты с конечно-разностным решением и решением с помощью базисных функций из упражнения 2.4.

3.5. Найти распределение температуры для задачи из упражнения 1.3, используя конечно-элементную аппроксимацию по Галеркину.

3.6. В упражнении 3.5 не проводить точное интегрирование  $[U^2\mu/(H^4k)] \times (H-y)^2 N_i$  по каждому элементу, а заменить  $F = (H-y)^2$  кусочно-линейной конечно-элементной аппроксимацией  $\hat{F}$ , удовлетворяющей в узлах условию  $\hat{F} = F$ . Сравнить ответ с полученными в упражнении 3.5.

3.7. Используя конечно-элементную аппроксимацию по Галеркину, решить задачу одномерной стационарной теплопроводности из упражнения 2.5.

3.8. Решить задачу об отклонении находящегося под действием нагрузки троса на упругом основании из упражнения 1.4. Использовать метод конечно-элементной аппроксимации по Галеркину и сравнить результаты с точным решением и с решением, полученным методом конечных разностей.

3.9. Найти конечно-элементные формулировки для нелинейных задач из упражнений 1.11 и 1.12.

3.10. Решить нелинейную задачу из упражнения 1.13, используя три линейных элемента равной длины.

### 3.6. Стандартная дискретная система. Физический аналог процесса ансамблирования уравнения

Так как уравнения метода взвешенных невязок могут быть получены суммированием соответствующих уравнений для каждого элемента (в силу свойства интегралов (3.2)), этот процесс аналогичен ситуациям, встречающимся при анализе многих дискретных физических систем, когда полная система формируется из вкладов отдельных «элементов».

Такие дискретные системы характеризуются следующими свойствами.

1. Для системы может быть определен набор величин  $a_m$  (обычно в узлах, где возникают межэлементные связи),  $m = 1, 2, \dots, M$ .

2. С каждым узлом  $l$  элемента  $e$ ,  $e = 1, 2, \dots, E$ , может быть ассоциирован набор величин  $q_l^e$ . Такие величины часто являются линейными функциями от  $a_m$  и могут быть записаны в виде

$$q_l^e = K_{lm}^e a_m - f_l^e. \quad (3.17)$$

3. Уравнения для полной системы получаются простым суммированием величин  $q_l^e$  по элементам. Поэтому для линейного примера все уравнения будут иметь вид

$$\sum_{e=1}^E q_l^e = \sum_{e=1}^E K_{lm}^e a_m - \sum_{e=1}^E f_l^e = 0. \quad (3.18)$$

Следовательно, уравнения для полной системы могут быть записаны в стандартной форме

$$K a = f, \quad (3.19)$$

где

$$K_{lm} = \sum_{e=1}^E K_{lm}^e, \quad f_l = \sum_{e=1}^E f_l^e. \quad (3.20)$$

Имеется много физических примеров описанных выше процессов (которые, заметим, тождественны встречающимся в конечно-элементных процедурах метода взвешенных невязок, где все матрицы элементов просто складываются). Возможно, наиболее известной является задача исследования конструкций (часто сложной формы), которые обычно состояются из простых элементов. Смысл различных терминов очевиден (см. рис. 3.8, а). Элементы конструкции и узлы, в которых эти элементы связаны, занумерованы;  $a^e = (a_i, a_j)^T$  — вектор узловых перемещений элемента  $e$ ,  $q_i^e$  — сила, действующая на узел  $i$  со стороны элемента  $e$ . Предполагая линейное упругое поведение элемента, можно записать

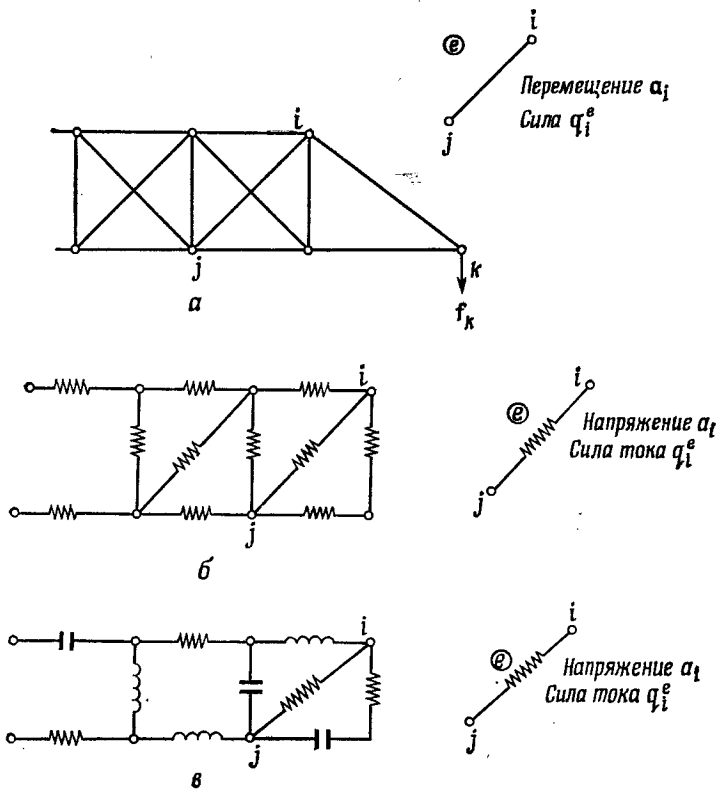


Рис. 3.8. Примеры дискретных систем. *a* — конструкция из шарнирно соединенных стержней; *б* — электрический контур из активных сопротивлений; *в* — сложный электрический контур.

$$\begin{bmatrix} q_i^e \\ q_j^e \end{bmatrix} = k^e a^e + \begin{bmatrix} f_i^e \\ f_j^e \end{bmatrix}, \quad (3.21a)$$

где  $f_i^e$  — сила в узле  $i$ , требующаяся для уравновешивания некоторой действующей на элемент распределенной нагрузки, а  $k^e$  — матрица жесткости элемента. Если конструкция находится под действием внешних сил  $r_l$ , приложенных в узле  $l$ , то для равновесия узла  $l$  требуется, чтобы

$$r_l = \sum_{e=1}^E q_l^e, \quad (3.21б)$$

где очевидным образом не равны нулю только включающие узел  $l$  компоненты. Комбинируя уравнения (3.21a) и (3.21б) и ансамбли-

руя все уравнения элементов, имеем

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f} + \mathbf{r}, \quad (3.22)$$

где  $\mathbf{K}$ —полная матрица жесткости системы,  $\mathbf{a}$ —вектор узловых перемещений,  $\mathbf{f}$ —вектор узловых сил, обусловленных распределенной нагрузкой, и  $\mathbf{r}$ —вектор сил, приложенных в узлах.

На рис. 3.8, б приведен аналогичный пример, возможно лучше знакомый некоторым из читателей,—электрический контур. Здесь применимы те же самые процедуры. Систему переменных образуют  $a_l$ —напряжение в узле  $l$  и  $q_l^e$ —сила тока, протекающего через узел  $l$  элемента  $e$ . Тогда имеем зависимость вида

$$\begin{bmatrix} q_l^e \\ q_j^e \end{bmatrix} = \mathbf{k}^e \mathbf{a}^e, \quad (3.23a)$$

где  $\mathbf{k}^e$ —матрица коэффициентов проводимости элемента, а  $\mathbf{a}^e$ —вектор напряжений в узлах элемента. Утверждение

$$r_l = \sum_{e=1}^E q_l^e \quad (3.23b)$$

теперь представляет собой просто закон Кирхгофа для суммы сил токов в каждом узле  $l$ , где  $r_l$ —результатирующая сила тока из узла  $l$ . Комбинируя уравнения (3.23a) и (3.23b), получаем стандартную ансамблированную систему линейных уравнений.

Наконец, на рис. 3.8, в изображен более сложный электрический контур, на элементы которого подается периодическое напряжение вида

$$a_l = \bar{a}_l e^{V-1} \omega t. \quad (3.24)$$

Опять применимы правила и определения, аналогичные данным для примера на рис. 3.8, б. Однако теперь величины  $a_l$ ,  $q_l^e$ —комплексные числа, а матрицы элементов  $\mathbf{k}^e$ —обратные для матриц импеданса.

Эти три примера—типичные представители ряда физических задач, по форме аналогичных задачам, встречающимся в методе конечных элементов. Читатели наверняка смогут указать и другие подобные задачи, с которыми они имеют дело в своей практике. Такие аналогии часто будут полезны инженерам и физикам, желающим получить более абстрактную формулировку их математических задач, и могут приводить к лучшему пониманию математических операций, выполняемых при решении, и даже к лучшим формулировкам самих задач. Действительно, инженеры часто могут обнаружить, что для решения их непрерывных задач можно воспользоваться программами для ЭВМ и процедурами, разработанными в дискретном анализе.

В заключение этого параграфа рассмотрим простой одномерный

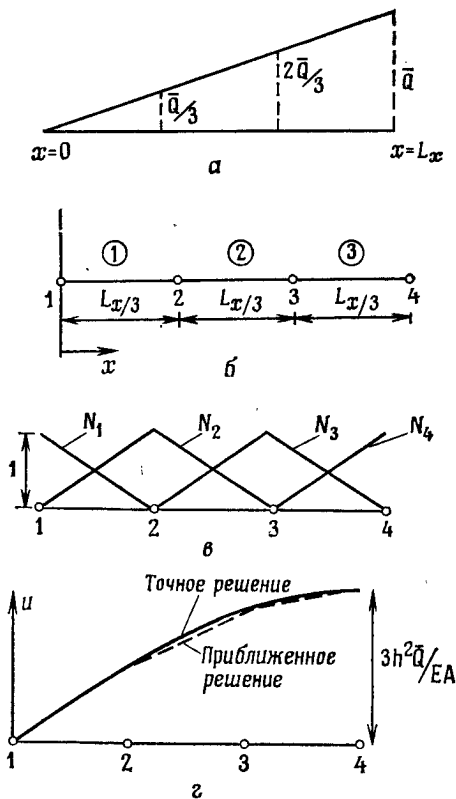


Рис. 3.9. Конечно-элементное решение задачи об определении смещения аксиально нагруженного стержня из примера 3.4. *a* — распределение аксиальных сил; *б* — конечно-элементная дискретизация с нумерацией узлов и элементов; *в* — кусочно-линейные базисные функции; *г* — аксиальное смещение.

пример, который, как можно надеяться, проиллюстрирует некоторые из концепций аналогии и позволит сравнить результат с решением той же самой задачи методом конечных разностей, где аналогия не столь прозрачна.

**Пример 3.4.** Обратимся к задаче определения смещений в стержне, находящемся под действием аксиальных сил (рис. 3.9, *a*). Уравнение равновесия стержня можно записать в виде

$$d(\sigma A)/dx + Ab = 0,$$

где  $\sigma$  — напряжение,  $A$  — площадь поперечного сечения и  $b$  — сила на единицу объема материала в направлении  $x$ . (Это может быть, например, постоянная сила тяжести или переменная сила инерции в случае равномерно вращающегося стержня.)

Напряжение связано с деформацией  $\varepsilon$  зависимостью  $\sigma = E\varepsilon$ , где  $E$  — модуль Юнга материала стержня. Так как деформация определяется по правилу  $\varepsilon = du/dx$ , напряжение связано и с перемещением  $u$ , которое будет рассматриваться в качестве основной переменной.

После исключения  $\sigma$  уравнение равновесия можно записать в виде

$$d(k du/dx)/dx + Q = 0,$$

где  $k = AE$  и  $Q = Ab$ , т. е. в виде, уже встречавшемся для уравнения теплопроводности в гл. 1 (уравнение (1.9)).

Краевые условия для этой задачи, где один конец стержня свободен, а другой закреплен, записываются как

$$u = 0 \quad \text{при } x = 0; \quad \sigma = 0 \Rightarrow du/dx = 0 \quad \text{при } x = L_x.$$

Для показанных на рис. 3.9, б разбиения отрезка и нумерации узлов возьмем

$$u \approx \hat{u} = \sum_{m=1}^4 u_m N_m.$$

Тогда уравнения метода взвешенных невязок (3.13) принимают вид

$$\int_0^{L_x} \left[ \frac{d}{dx} \left( k \frac{d\hat{u}}{dx} \right) + Q \right] \overline{W}_l dx + \left[ \overline{W}_l \frac{d\hat{u}}{dx} \right]_{x=L_x} = 0;$$

при этом условие  $u = 0$  при  $x = 0$  будет удовлетворено точно позднее.

Полагая  $W_l = N_l$ ,  $[\overline{W}_l]_{x=L_x} = -[kN_l]_{x=L_x}$  и интегрируя по частям, приходим к уравнениям в слабой форме

$$\int_0^{L_x} k \frac{d\hat{u}}{dx} \frac{dN_l}{dx} dx = \int_0^{L_x} N_l Q dx - \left[ N_l k \frac{d\hat{u}}{dx} \right]_{x=0},$$

откуда подстановкой аппроксимации  $\hat{u}$  получаем линейную систему

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{f},$$

где  $\mathbf{u}^T = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ . Компоненты матрицы  $\mathbf{K}$  и правой части  $\mathbf{f}$  могут быть получены суммированием вкладов отдельных элементов.

Для элемента  $e$  длиной  $h^e$  с узлами  $i$  и  $j$ , показанного на рис. 3.5,

$$K_{im}^e = \int_0^{h^e} k (dN_i^e/dx) (dN_m^e/dx) dx, \quad k = EA,$$

и, как и в примере 3.1, имеем

$$K_{im}^e = 0, \quad l, m \neq i, j, \\ K_{ii}^e = K_{jj}^e = EA/h^e, \quad K_{ij}^e = K_{ji}^e = -EA/h^e,$$

где по предположению  $k = AE$  постоянно. Аналогично

$$f_i^e = \int_0^{h^e} N_i^e Q dx,$$

где интеграл может быть вычислен для любого известного распределения  $Q = Q(x)$ .

Рассматривая полученные выше соотношения в общем виде, можно заметить здесь аналогию с одним физическим фактом. Дело в том, что

$$K_{ij}^e u_j = -EA u_j / h^e$$

точно представляет силу, действующую в узле элемента и обусловленную перемещением  $u_j$  одного конца, тогда как другой конец остается неподвижным. Действительно, этот факт мог бы быть отправной точкой для получения решения. Для нашего конкретного примера (см. рис. 3.9, *в*) будем считать, что  $Q$  изменяется линейным образом (см. рис. 3.9, *а*). Используя предложенный в упражнении 3.6 метод, интерполируем  $Q$  тем же самым спосо-

бом, что и  $u$ , т. е. положим  $Q \approx \hat{Q} = \sum_{m=1}^4 Q_m N_m$ . Это позволяет записать

$$f_i^e = \sum_{m=1}^4 S_{im}^e Q_m, \quad S_{im}^e = \int_0^{h^e} N_i^e N_m^e dx.$$

Проинтегрировав, получим, что  $S_{im}^e = 0$ , если  $l, m \neq i, j$ , и

$$S_{ii}^e = S_{jj}^e = h^e/3, \quad S_{ij}^e = S_{ji}^e = h^e/6.$$

Как может проверить читатель, ансамблированная система уравнений принимает вид

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -kd\dot{u}/dx|_{x=0} + \bar{Q}h/18 \\ \bar{Q}h/3 \\ 2\bar{Q}h/3 \\ 4\bar{Q}h/9 \end{bmatrix},$$

где  $h = L_x/3$ . Полагая  $u_1 = 0$ , из последних трех уравнений получаем  $u_2 = 13h^2\bar{Q}/(9EA)$ ,  $u_3 = 23h^2\bar{Q}/(9EA)$ ,  $u_4 = 3h^2\bar{Q}/(EA)$ ; можно проверить (непосредственным интегрированием исходного уравнения), что эти значения совпадают с точными значениями перемещений в узлах<sup>1)</sup>. График на рис. 3.9, *г* показывает, что

<sup>1)</sup> Интересно отметить, что во многих одномерных задачах метод Галеркина приводит к нахождению точного решения в узлах независимо от возможности плохого приближения где-нибудь в другом месте. Это замечательное свойство суперсходимости обсуждается в [1] [см. также Даутов Р. З. Суперсходимость МКЭ в сеточных нормах.— Ж. выч. матем. и матем. физ., 1982, т.



получаемые значения между узлами являются только приближенными. Неиспользованное уравнение системы теперь дает  $AE \hat{d}u/dx|_{x=0} = 3h\bar{Q}/2$ , что тоже является точным значением. Физически эта величина представляет силу, которая должна быть приложена для предотвращения перемещения при  $x=0$ .

Если та же самая задача решается методом конечных разностей, то соответствующие уравнения можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \frac{h^2 \bar{Q}}{EA} \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1/2 \end{bmatrix},$$

где для учета граничного условия при  $x=1$  использована аппроксимация центральной разностью. Эта система очевидным образом отличается от уравнений метода конечных элементов и поэтому не дает точного решения в узлах.

Читатель, без сомнения, отметит, что конечно-разностные уравнения могут быть записаны непосредственно без проведения представляющегося утомительным процесса ансамблирования. Это, конечно, верно, но, с другой стороны, вычисления по методу конечных элементов позволят нам весьма просто решать задачи, где  $EA$  зависит от  $x$ , и получать гораздо более точную аппроксимацию для производной на границе (упражнение 3.3). Усложнение выкладок не представит затруднений, если используется программа для ЭВМ. Для простых случаев с постоянным размером элементов нет нужды также повторять процесс ансамблирования.

## Упражнения

**3.11.** Используя метод конечных элементов с двумя элементами равной длины, найти стационарное распределение температуры  $T$  на отрезке  $0 \leq x \leq 1$  с крайними условиями  $T=0$  при  $x=0$  и  $T=1$  при  $x=1$ . Коэффициент теплопроводности  $k$  определен по правилу  $k=1$  для  $0 \leq x < 1/2$  и  $k=2$  для  $1/2 < x \leq 1$ . Сравнить решение с точным распределением температуры. Решить ту же задачу методом конечных разностей.

**3.12.** Найти смещения в аксиально нагруженном стержне из примера 3.4 при  $k=1+x/L_x$ . Использовать метод конечных элементов с четырьмя линейными элементами.

22, № 5; Андреев А. Б., Харти М. Е., Лазарев Р. Д. Сверхсходимость градиента в методе конечных элементов для некоторых эллиптических и параболических задач. — В кн.: Вариационно-разностные методы в математической физике/Под ред. Н. С. Бахвалова и Ю. А. Кузнецова. — М.: Отд. выч. матем. АН СССР, 1984, с. 13—25. — *Ред.*] Условия, при которых сверхсходимость имеет место, состоят просто в том, что базисные функции должны тождественно удовлетворять соответствующему однородному дифференциальному уравнению.

### 3.7. Обобщение конечно-элементных алгоритмов на двумерные и трехмерные задачи

#### 3.7.1. Общие замечания

Одномерные примеры типа рассматривавшихся в предыдущем параграфе не представляют существенного практического интереса, так как во многих случаях для них легко найти точные решения. Однако, как уже было отмечено, для дву- и трехмерных задач ситуация существенно отлична, поскольку для них точное решение возможно лишь в случае простейших областей и краевых условий. Как правило, для практически важных задач неизбежно численное решение.

В многомерном случае выбор конечно-элементных базисных функций связан с рядом трудностей. В качестве одного из возможных подходов ранее было предложено использовать кусочно-линейные функции с разбиением области на треугольники (см. рис. 3.2). Теперь рассмотрим этот подход более детально и изучим возможность использования прямоугольных элементов с соответствующими базисными функциями. Будет обсуждено также обобщение этих простых элементов на случай трех измерений. Известно, что общие задачи, где требуется  $C^0$ -гладкость базисных функций, могут быть проанализированы с помощью использования этих простых элементов. Это, конечно, ограничивает круг рассматриваемых нами задач такими, где в слабой форме аппроксимационных соотношений (3.156) под знаком интеграла стоят только первые производные. Другие более сложные виды базисных функций и элементов будут подробно обсуждаться в следующей главе.

#### 3.7.2. Линейный треугольник

Треугольник является чрезвычайно полезной фигурой для любого двумерного анализа, так как с помощью семейств треугольников можно легко и достаточно точно представить области с криволинейными границами весьма сложной формы. Для типичного треугольного элемента  $e$ , узлы которого  $i, j, k$  пронумерованы в направлении против часовой стрелки и совпадают с вершинами треугольника (см. рис. 3.26), будем искать базисную функцию  $N_i^e(x, y)$ , принимающую значение единица в узле  $i$  и равную нулю в узлах  $j$  и  $k$ . Кроме того, соответствующая глобальная базисная функция  $N_i$  должна быть непрерывной при переходе через границы элемента и отличной от нуля только на элементах, ассоциируемых с узлом  $i$ . Это требование непрерывности можно обеспечить, предположив линейность  $N_i^e$ , т. е. приравняв, что

$$N_i^e = \alpha_i^e + \beta_i^e x + \gamma_i^e y \quad \text{на элементе } e. \quad (3.25)$$

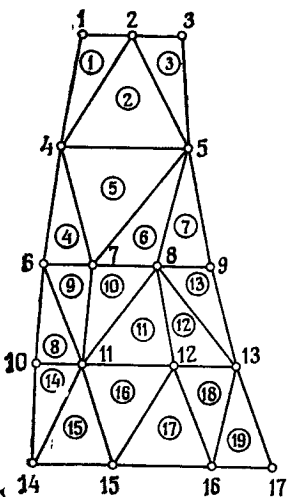


Рис. 3.10. Треугольные конечные элементы, использованные для представления профиля плотины.

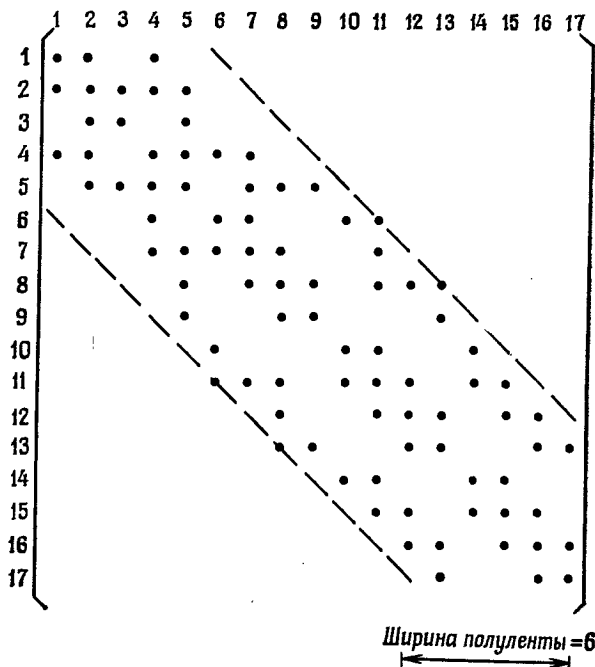


Рис. 3.11. Расположение ненулевых компонент матрицы  $K$ , получающейся при ансамблировании вкладов элементов, изображенных на рис. 3.10.

Постоянные, входящие в это выражение, находятся из условий  $N_i^e(x_i, y_i) = 1$  и  $N_i^e(x_j, y_j) = N_i^e(x_k, y_k) = 0$ , где координаты узлов определяются положением узлов в триангулируемой области. Выполнение этих трех условий дает систему уравнений

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i^e \\ \beta_i^e \\ \gamma_i^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

с решением

$$\alpha_i^e = \frac{x_j y_k - x_k y_j}{2\Delta^e}, \quad \beta_i^e = \frac{y_j - y_k}{2\Delta^e}, \quad \gamma_i^e = \frac{x_k - x_j}{2\Delta^e}, \quad (3.27a)$$

где

$$2\Delta^e = \det \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} = 2 \times \text{площадь элемента } e. \quad (3.27b)$$

Задав базисные функции для треугольника, легко вычислить все необходимые матрицы элементов для любой подходящим образом определенной задачи, в слабую формулировку которой входят только первые производные.

На рис. 3.10 изображена типичная область, разбитая на треугольные элементы с узлами в вершинах. Криволинейные левая и правая стороны аппроксимируются отрезками прямых. Это может быть, например, профиль плотины, для которого требуется исследовать возникающие напряжения или распределение температуры. Задача такого типа ведет к стандартной системе уравнений (3.6). Не конкретизируя задачу и краевые условия, заметим, что для приведенного конечно-элементного разбиения еще до учета краевых условий матрица системы  $K$  будет иметь разреженную форму, показанную на рис. 3.11. Кружками обозначены ненулевые компоненты, возникающие из-за связи элементов (напомним, что если узлы  $l$  и  $m$  не ассоциируются с элементом  $e$ , то  $K_{lm}^e = 0$ , так как базисные функции обращаются в нуль в точках, не принадлежащих этому элементу).

Отметим, что, как и для конечно-разностного метода, матрица является разреженной и ленточной. Поэтому для решения системы алгебраических уравнений требуется меньший объем вычислений, чем в случае полностью заполненной матрицы; уменьшаются и требования к памяти ЭВМ.

Если применяемая процедура решения [2] использует ленточность структуры матрицы  $K$ , то узлы должны быть занумерованы таким образом, чтобы обеспечить минимум ширины ленты: это увеличит вычислительную эффективность процесса решения. В общем случае должно быть очевидным, что если максимальная разница в номерах узлов любого элемента равна  $b-1$ , то матрица  $K$  будет иметь ширину полуленты  $b$ . На рис. 3.10 видно, что такая максимальная разность в номерах узлов равна 5 (она имеет место для элементов 8, 9, 12, 13), и, таким образом, результирующая матрица  $K$  имеет ширину полуленты 6.

Предполагая существование некоторой стандартной формулы для определения вкладов  $K_{im}^e$  и  $f_i^e$  каждого элемента, отметим, что

1) для каждого элемента такие вычисления должны быть проведены только один раз;

2) один раз найденные вклады каждого элемента могут быть непосредственно учтены в соответствующем месте глобальной матрицы, а затем (если применяется ЭВМ) стерты из памяти.

Таким образом, важен также порядок, в котором нумеруются элементы. На рис. 3.12 показано, как влияет вклад первых четырех элементов на матрицу системы  $K$  для задачи, представленной на рис. 3.10.

Из рис. 3.12 следует, что вычисление конкретной строки ансамблированной матрицы заканчивается после того, как будут

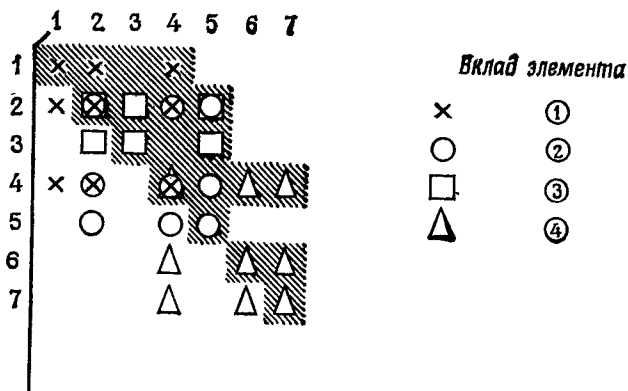


Рис. 3.12. Процесс ансамблирования элементов 1—4, изображенных на рис. 3.10. Заштрихованная область соответствует информации, которую следует запомнить, если матрица симметрична.

учтены все элементы, содержащие вершину с номером, соответствующим данной строке. Таким образом, чтобы получить уравнение для узла 1, используется только элемент 1. Для построения уравнений для узлов 2 и 3 привлекается вся информация от элементов 2 и 3. Этот «волновой» фронт ансамблирования распространяется равномерно, если элементы вовлекаются в вычисления упорядоченным образом. В результате исключение переменных удается проводить в окончанием формирования строк. Эффективные конечно-элементные программы основаны на использовании процедур фронтального решения [3], позволяющих минимизировать хранимую информацию и число выполняемых арифметических операций. При этом важен порядок, в котором нумеруются элементы (но не узлы).

### 3.7.3. Билинейный прямоугольник

Простой прямоугольный элемент может быть получен следующим образом. С каждым элементом ассоциируем четыре узла, расположенных в вершинах прямоугольника. Базисные функции узлов получаем в виде произведения двух одномерных линейных базисных функций, как показано на рис. 3.13. Например, с узлом  $i$  элемента  $e$  ассоциируем базисную функцию элемента (относительно осей координат с началом в узле  $i$ )

$$N_i^e = [(h_x^e - x)/h_x^e] [(h_y^e - y)/h_y^e]. \quad (3.28)$$

Такой элемент называется билинейным, поскольку в это выражение кроме линейных членов входит произведение  $xy$ . Выражение (3.28) для  $N_i^e$  автоматически удовлетворяет обычному требованию,

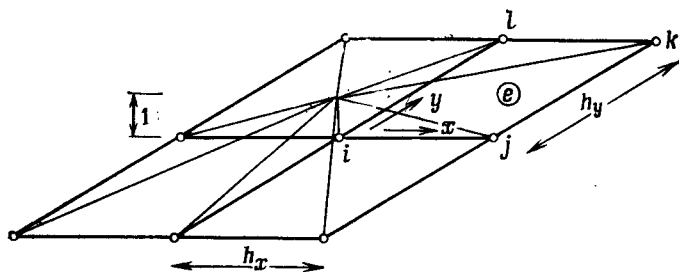


Рис. 3.13. Билинейная базисная функция, ассоциируемая с узлом  $i$  типичного прямоугольного элемента с четырьмя узлами.

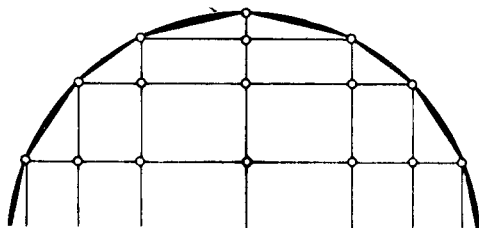
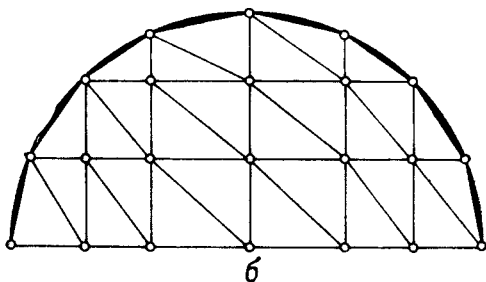
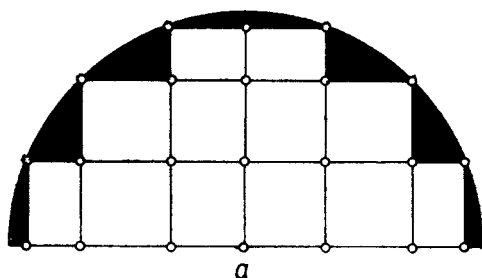


Рис. 3.14. Конечно-элементное разбиение полукруга, использующее только прямоугольные элементы (а), треугольные элементы с тем же самым общим числом узлов (б) и комбинацию треугольных и прямоугольных элементов с дополнительными граничными узлами (в). В каждом случае зачерненная область показывает величину погрешности, получающейся при соответствующем представлении области.

что  $N_i^e$  принимает значение единица в узле  $i$  и значение нуль во всех других узлах элемента  $e$ .

При аналогичном определении глобальной базисной функции  $N_i$  в соседних элементах становится очевидным, что при переходе через границы элемента обеспечена  $C^0$ -гладкость  $N_i$ . Нетрудно выписать выражения для базисных функций элемента, ассоциируемых с другими узлами  $j, k, l$  элемента  $e$ . Более систематические методы получения базисных функций прямоугольного элемента приводятся в гл. 4.

Прямоугольные элементы этого типа удобны при разбиении областей типа квадрата или прямоугольника. Треугольные элементы предпочтительнее при представлении областей более сложной формы, когда при том же числе узлов требуется точно учесть сложную геометрию границы (рис. 3.14, *a* и *б*). Еще одним способом учета сложной формы границы было бы использование смешанной конечно-элементной сетки, состоящей из прямоугольных элементов внутри области и треугольных элементов вблизи границы, как показано на рис. 3.14, *в*. Подробнее эта задача более точного представления границы будет рассмотрена в гл. 5.

### 3.7.4. Трехмерные элементы линейного типа

Проведенное выше обсуждение в принципе нетрудно распространить на трехмерный случай и определить аналогичные базисные функции, обеспечивающие  $C^0$ -гладкость при переходе между

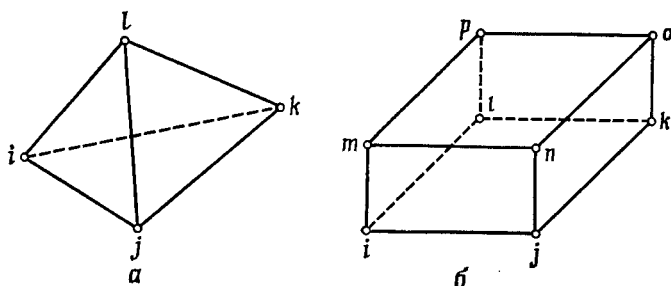


Рис. 3.15. Трехмерные элементы. *a* — тетраэдр с четырьмя узлами; *б* — «кирпич» с восемью узлами.

соседними гранями. Например, на рис. 3.15 изображены два простых трехмерных элемента, для которых базисные функции могут быть получены с помощью тех же процессов, которые были описаны для двумерного случая. Таким образом, для имеющего четыре узла тетраэдра на рис. 3.15, *a* с узлом  $i$  будем ассоциировать базисную функцию элемента

$$N_i^e = \alpha_i^e + \beta_i^e x + \gamma_i^e y + \delta_i^e z, \quad (3.29)$$

где коэффициенты, как и раньше, определяются из условия

$$N_i^e = 1 \quad \text{в узле } i, \quad N_i^e = 0 \quad \text{в узлах } j, k, l. \quad (3.30)$$

Предоставляем читателю сделать это, а также найти базисные функции для имеющих восемь узлов линейных элементов типа «кирпича» на рис. 3,15, б. В этих задачах не возникает каких-либо дополнительных трудностей, кроме усложнения выкладок. Очевидно, однако, что в трехмерном случае число узлов, требуемое для моделирования каких-либо реальных задач, будет гораздо больше, чем в двумерном случае; значительно возрастут также трудоемкость и стоимость решения. Здесь не будут подробно рассматриваться трехмерные задачи, поскольку все применяемые для двумерного анализа принципы читатель без особого труда может обобщить на случай трех измерений.

### 3.8. Метод конечных элементов для двумерных задач теплопроводности

До сих пор в этой главе описание применения метода конечных элементов к двумерным задачам носило общий характер. Рассмотрим теперь конкретную задачу и подробно опишем процесс определения компонент соответствующих матриц элементов. Задача, к которой мы обратимся, состоит в решении уже хорошо знакомого двумерного уравнения стационарной теплопроводности

$$\partial(k\partial\varphi/\partial x)/\partial x + \partial(k\partial\varphi/\partial y)/\partial y + Q = 0 \quad \text{в } \Omega \quad (3.31)$$

с обычными краевыми условиями

$$\varphi = \bar{\varphi} \quad \text{на } \Gamma_\varphi, \quad k\partial\varphi/\partial n = -\bar{q} \quad \text{на } \Gamma_q, \quad (3.32)$$

где  $\Gamma_\varphi + \Gamma_q = \Gamma$ .

Аппроксимацию для неизвестной функции  $\varphi$  будем искать в обычной конечно-элементной форме

$$\varphi \approx \hat{\varphi} = \sum_{m=1}^M \varphi_m N_m; \quad (3.33)$$

тогда краевое условие на  $\Gamma_\varphi$  можно непосредственно удовлетворить в лежащих на  $\Gamma_\varphi$  узлах соответствующим выбором узловых значений  $\varphi_m$ . Как и в рассмотренных ранее одномерных примерах, на данном этапе эти узловые значения считаются неизвестными и будут точно определены позднее. Если теперь в слабой формулировке метода взвешенных невязок в качестве весовых функций взять сами базисные функции, то из уравнения (2.54)



получим

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial N_l}{\partial x} k \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial N_l}{\partial y} k \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y} \right) dx dy = \\ = \int_{\Omega} Q N_l dx dy - \int_{\Gamma_q} \bar{q} N_l d\Gamma, \quad l=1, 2, \dots, M. \quad (3.34)$$

Подставляя сюда аппроксимацию (3.33), приходим к стандартной системе уравнений

$$\mathbf{K}\varphi = \mathbf{f}, \quad (3.35)$$

где компоненты матрицы  $\mathbf{K}$  и правой части  $\mathbf{f}$  определяются суммированием вкладов отдельных элементов

$$K_{lm}^e = \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial N_l^e}{\partial x} k \frac{\partial N_m^e}{\partial x} + \frac{\partial N_l^e}{\partial y} k \frac{\partial N_m^e}{\partial y} \right) dx dy, \quad (3.36a)$$

$$f_l^e = \int_{\Omega^e} Q N_l^e dx dy - \int_{\Gamma_q^e} N_l^e \bar{q} d\Gamma. \quad (3.36b)$$

Здесь  $\Omega^e$  — поверхность элемента  $e$ , а  $\Gamma_q^e$  — та часть границы этого элемента, которая лежит на  $\Gamma_q$  или аппроксимирует ее часть. Таким образом, интеграл по  $\Gamma_q^e$  в (3.36b) будет появляться только для элементов, примыкающих к  $\Gamma_q$ . Приведенная конечно-элементная формулировка является достаточно общей, и для определения матриц как треугольных, так и прямоугольных элементов достаточно просто подставить в приведенные выше формулы соответствующие базисные функции.

### 3.8.1. Треугольные элементы

Координаты узлов задаются при разбиении области  $\Omega$  на определенное число треугольных элементов с узлами в вершинах. Тогда, как уже было показано в одномерных примерах этой главы, ненулевой вклад в  $\mathbf{K}\varphi$  из (3.35) от некоторого элемента общего вида с узлами  $i, j, k$  (см. рис. 3.2б) может быть получен по формуле

$$\mathbf{k}^e \varphi^e = \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} k \left[ \left( \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right)^2 \right] & k \left[ \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right] & k \left[ \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_k^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_k^e}{\partial y} \right] \\ k \left[ \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right] & k \left[ \left( \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right)^2 \right] & k \left[ \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_k^e}{\partial x} + \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial N_k^e}{\partial y} \right] \\ k \left[ \frac{\partial N_k^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial N_k^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right] & k \left[ \frac{\partial N_k^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \frac{\partial N_k^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right] & k \left[ \left( \frac{\partial N_k^e}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial N_k^e}{\partial y} \right)^2 \right] \end{bmatrix} dx dy \begin{bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \\ \varphi_k \end{bmatrix}, \quad (3.37)$$

где

$$\varphi^e = \begin{bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \\ \varphi_k \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

— вектор значений в узлах элемента.

Коэффициенты в базисных функциях элемента (3.25) и площадь элемента  $\Delta^e$  могут быть определены с помощью соотношений (3.27). Тогда входящие в (3.37) производные от базисных функций вычисляются непосредственно:

$$\partial N_i^e / \partial x = \beta_i^e, \quad \partial N_i^e / \partial y = \gamma_i^e; \quad (3.39)$$

аналогичные выражения получаются для производных от других базисных функций элемента. Будем считать, что сторона элемента, соединяющая узлы  $i$  и  $j$ , лежит на фактической границе  $\Gamma_q$  или аппроксимирует ее, а другие стороны не лежат на этой границе. Если  $k$ ,  $Q$  и  $\bar{q}$  не являются постоянными, то удобно, хотя это и непринципиально, взять их постоянными внутри элемента. Тогда на элементе  $e$  можно заменить  $k$  и  $Q$  средними значениями  $k^e$  и  $Q^e$  соответственно, а  $q^e$  средним значением  $\bar{q}^e$  вдоль стороны элемента, представляющей часть границы  $\Gamma_q$ .

Замечая, что

$$\int_{\Omega^e} dx dy = \Delta^e, \quad (3.40)$$

и непосредственно проводя интегрирование в (3.37), получаем

$$k^e \varphi^e = k^e \Delta^e \begin{bmatrix} (\beta_i^e)^2 + (\gamma_i^e)^2 & \beta_i^e \beta_j^e + \gamma_i^e \gamma_j^e & \beta_i^e \beta_k^e + \gamma_i^e \gamma_k^e \\ \beta_i^e \beta_j^e + \gamma_i^e \gamma_j^e & (\beta_j^e)^2 + (\gamma_j^e)^2 & \beta_j^e \beta_k^e + \gamma_j^e \gamma_k^e \\ \beta_i^e \beta_k^e + \gamma_i^e \gamma_k^e & \beta_j^e \beta_k^e + \gamma_j^e \gamma_k^e & (\beta_k^e)^2 + (\gamma_k^e)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \\ \varphi_k \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

Вклад по элементу в вектор нагрузки  $\mathbf{f}$  найдем, проводя интегрирование в (3.36б) с учетом того, что

$$\int_{\Omega^e} N_i^e dx dy = \alpha_i^e + \beta_i^e \bar{X}^e + \gamma_i^e \bar{Y}^e, \quad (3.42a)$$

где

$$\bar{X}^e = (x_i + x_j + x_k)/3, \quad \bar{Y}^e = (y_i + y_j + y_k)/3. \quad (3.42b)$$

В результате имеем

$$\begin{aligned} f_i^e &= (1/3) Q^e \Delta^e - (1/2) \bar{q}^e \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}, \\ f_j^e &= (1/3) Q^e \Delta^e - (1/2) \bar{q}^e \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}, \\ f_k^e &= (1/3) Q^e \Delta^e. \end{aligned} \quad (3.43)$$

В этих выражениях подчеркнутые члены появляются только в том случае, когда узлы  $i$  и  $j$  лежат на  $\Gamma_q$ , и, следовательно, они должны быть опущены для вектора нагрузки, вычисляемого по внутренним элементам.

Таким образом, определена структура матриц элементов  $k^e$  и правых частей  $f^e$  для двумерной задачи стационарной теплопроводности и может быть написана общая программа для ЭВМ для анализа таких задач с использованием треугольных элементов с тремя узлами. Правильный процесс ансамблирования для матриц таких элементов вкратце будет продемонстрирован в примере 3.5.

### 3.8.2. Прямоугольные элементы

Аналогичные результаты могут быть получены и в том случае, когда область  $\Omega$  разбивается на прямоугольные элементы (с четырьмя узлами в вершинах). Вклад в  $K\Phi$  из (3.35) от некоторого элемента  $e$  с узлами  $i, j, k, l$  (см. рис. 3.13) можно теперь найти, вычислив

$$k^e \Phi^e = \int_0^{h_x^e} \int_0^{h_y^e} k \begin{bmatrix} \left[ \left( \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right)^2 \right] & \left[ \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right] \\ \left[ \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right] & \left[ \left( \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right)^2 \right] \\ \left[ \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_k^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_k^e}{\partial y} \right] & \left[ \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_k^e}{\partial x} + \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial N_k^e}{\partial y} \right] \\ \left[ \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_l^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_l^e}{\partial y} \right] & \left[ \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_l^e}{\partial x} + \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial N_l^e}{\partial y} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_k \\ \Phi_l \end{bmatrix} dx dy \quad (3.44)$$

Используя результаты предыдущего параграфа, можно определить базисные функции элемента

$$\begin{aligned} N_i^e &= (h_x^e - x)(h_y^e - y)/(h_x^e h_y^e), & N_j^e &= x(h_y^e - y)/(h_x^e h_y^e), \\ N_k^e &= xy/(h_x^e h_y^e), & N_l^e &= (h_x^e - x)y/(h_x^e h_y^e). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Дифференцирование этих базисных функций позволяет найти входящие в (3.44) выражения, а именно

$$\begin{aligned} \partial N_i^e / \partial x &= -(h_y^e - y) / (h_x^e h_y^e), & \partial N_i^e / \partial y &= -(h_x^e - x) / (h_x^e h_y^e), \\ \partial N_j^e / \partial x &= (h_y^e - y) / (h_x^e h_y^e), & \partial N_j^e / \partial y &= -x / (h_x^e h_y^e), \\ \partial N_k^e / \partial x &= y / (h_x^e h_y^e), & \partial N_k^e / \partial y &= x / (h_x^e h_y^e), \\ \partial N_l^e / \partial x &= -y / (h_x^e h_y^e), & \partial N_l^e / \partial y &= (h_x^e - x) / (h_x^e h_y^e). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Рассмотрим случай, когда стороны элемента, связывающие узлы  $i$  и  $j$  и узлы  $i$  и  $l$  соответственно, образуют или аппроксимируют часть  $\bar{q}$ . Тогда, снова считая, что  $\bar{q}$  постоянно и равно  $\bar{q}^e$  вдоль этих сторон, а  $k$  и  $Q$  постоянны на элементе, из (3.44) имеем

$$\mathbf{k}^e \Phi^e = \frac{k^e}{3h_x^e h_y^e} \begin{bmatrix} [(h_x^e)^2 + (h_y^e)^2] & - \left[ -\frac{1}{2} (h_x^e)^2 + (h_y^e)^2 \right] \\ - \left[ -\frac{1}{2} (h_x^e)^2 + (h_y^e)^2 \right] & [(h_x^e)^2 + (h_y^e)^2] \\ -\frac{1}{2} [(h_x^e)^2 + (h_y^e)^2] & - \left[ (h_x^e)^2 - \frac{1}{2} (h_y^e)^2 \right] \\ - \left[ (h_x^e)^2 - \frac{1}{2} (h_y^e)^2 \right] & -\frac{1}{2} [(h_x^e)^2 + (h_y^e)^2] \\ -\frac{1}{2} [(h_x^e)^2 + (h_y^e)^2] & - \left[ (h_x^e)^2 - \frac{1}{2} (h_y^e)^2 \right] \\ - \left[ (h_x^e)^2 - \frac{1}{2} (h_y^e)^2 \right] & -\frac{1}{2} [(h_x^e)^2 + (h_y^e)^2] \\ [(h_x^e)^2 + (h_y^e)^2] & - \left[ -\frac{1}{2} (h_x^e)^2 + (h_y^e)^2 \right] \\ - \left[ -\frac{1}{2} (h_x^e)^2 + (h_y^e)^2 \right] & [(h_x^e)^2 + (h_y^e)^2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_k \\ \Phi_l \end{bmatrix}. \quad (3.47)$$

Отметим, что, согласно (3.45), на каждом элементе сумма базисных функций элемента равна единице, т. е.

$$N_i^e + N_j^e + N_k^e + N_l^e = 1 \quad \text{на элементе } e. \quad (3.48)$$

Отсюда следует, что на элементе  $e$

$$\frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \frac{\partial N_k^e}{\partial x} + \frac{\partial N_l^e}{\partial x} = \frac{\partial N_i^e}{\partial y} + \frac{\partial N_j^e}{\partial y} + \frac{\partial N_k^e}{\partial y} + \frac{\partial N_l^e}{\partial y} = 0, \quad (3.49)$$

и, таким образом, согласно (3.44), сумма элементов в каждой строке матрицы  $\mathbf{k}^e$  должна быть равна нулю. Это условие выполняется для только что полученной матрицы  $\mathbf{k}^e$  в (3.47) и служит простой проверкой правильности проведения интегрирования.

Компоненты вектора нагрузки элемента вычисляются с помощью

соотношения (3.36б). Например, для узла  $i$  имеем

$$\begin{aligned}
 f_i^e &= \int_0^{h_x^e} \int_0^{h_y^e} [Q^e / (h_x^e h_y^e)] (h_x^e - x) (h_y^e - y) dx dy - \\
 &\quad - \int_0^{h_x^e} [\bar{q}^e (h_x^e - x) / h_x^e] dx - \int_0^{h_y^e} [\bar{q}^e (h_y^e - y) / h_y^e] dy = \\
 &= (1/4) Q^e h_x^e h_y^e - (1/2) \bar{q} h_x^e - (1/2) \bar{q} h_y^e,
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

где подчеркнутые члены появляются только в силу предположения, что стороны элемента, связывающие узлы  $i$  и  $j$  и узлы  $i$  и  $l$  соответственно, образуют часть  $\Gamma_q$ . Тогда остальные ненулевые компоненты вектора нагрузки элемента  $f^e$  выражаются формулам

$$\begin{aligned}
 f_j^e &= (1/4) Q^e h_x^e h_y^e - (1/2) \bar{q} h_x^e, \\
 f_k^e &= (1/4) Q^e h_x^e h_y^e, \\
 f_l^e &= (1/4) Q^e h_x^e h_y^e - (1/2) \bar{q} h_y^e.
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

Хотя вычисление вручную этих матриц элементов и правых частей в известной степени утомительно, его нетрудно осуществить с помощью программы для ЭВМ. Полученные выше соотношения могут быть использованы для треугольников произвольного размера и формы, а также для любых прямоугольников. Следующий этап в процессе решения состоит в ансамблировании вкладов полученных матриц элементов и правых частей для нахождения глобальной матрицы системы  $K$  и правой части  $f$  в (3.35). Эта процедура демонстрируется в следующем примере, где для обоих видов разбиения области на треугольные и прямоугольные элементы осуществляется ансамблирование типичного уравнения во внутреннем узле однородной области.

**Пример 3.5.** Для только что рассмотренной двумерной задачи теплопроводности продемонстрируем процесс ансамблирования матриц элементов в случае равномерной сетки с шагом  $h$  по направлениям  $x$  и  $y$ . Такое ансамблирование сначала проводится для треугольной сетки, показанной на рис. 3.16, а, а затем повторяется для прямоугольной сетки на рис. 3.16, б. Коэффициент теплопроводности  $k$  предполагается постоянным во всей области. В случае треугольных элементов используются соотношения (3.27). Для элемента 1 с узлами 1, 2 и 6 и началом координат в узле 1 это дает

$$\begin{aligned}
 \alpha_1^1 &= 1, & \alpha_2^1 &= 0, & \alpha_6^1 &= 0, \\
 \beta_1^1 &= -1/h, & \beta_2^1 &= 1/h, & \beta_6^1 &= 0, \\
 \gamma_1^1 &= 0, & \gamma_2^1 &= -1/h, & \gamma_6^1 &= 1/h
 \end{aligned}$$

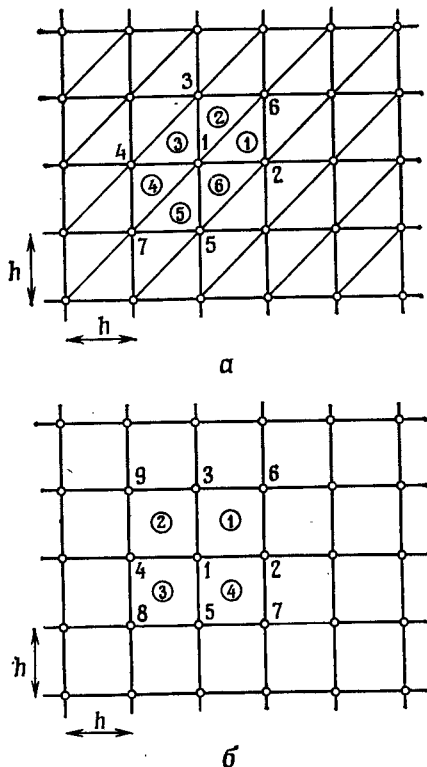


Рис. 3.16. Равномерная сетка внутри двумерной области, использующая треугольные элементы с тремя узлами (а) и прямоугольные элементы с четырьмя узлами (б).

и  $2\Delta^1 = h^2$ . Непосредственная подстановка этих значений в (3.41) дает

$$k^1 \varphi^1 = \frac{k}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix},$$

а для ненулевых компонент вектора нагрузки имеем

$$f_1^1 = f_2^1 = f_3^1 = Q^1 h^2 / 6.$$

Вклад элемента 1 в глобальную матрицу  $K$  и правую часть  $f$ , таким образом, вычислен, и процесс ансамблирования начинается с включения этих вкладов в общую систему уравнений, как показано на рис. 3.17, (а).

$$\begin{array}{c}
 \left( \begin{array}{cccc} 1 & -1 & & \\ -1 & 2 & & -1 \\ & & & \\ & -1 & & 1 \end{array} \right) \begin{array}{c} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \\ \varphi_7 \\ \varphi_8 \end{array} = \frac{2h^2}{6k} \begin{array}{c} q^1 \\ q^1 \\ \\ \\ q^1 \\ \\ \\ \end{array} \quad (a) \\
 \\
 \left( \begin{array}{cccc} 2 & -1 & -1 & \\ -1 & 2 & & -1 \\ -1 & & 2 & -1 \\ & & & \\ & -1 & -1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{c} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \\ \varphi_7 \\ \varphi_8 \end{array} = \frac{2h^2}{6k} \begin{array}{c} q^1 + q^2 \\ q^1 \\ q^2 \\ \\ q^1 + q^2 \\ \\ \\ \end{array} \quad (б) \\
 \\
 \left( \begin{array}{cccc} 4 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & & -1 \\ -2 & & 3 & -1 \\ -1 & & & 1 \\ & -1 & -1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{c} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \\ \varphi_7 \\ \varphi_8 \end{array} = \frac{2h^2}{6k} \begin{array}{c} q^1 + q^2 + q^3 \\ q^1 \\ q^2 + q^3 \\ q^3 \\ \\ q^1 + q^2 \\ \\ \\ \end{array} \quad (в)
 \end{array}$$

Рис. 3.17. Этапы процесса ансамблирования для двумерной задачи теплопроводности с использованием треугольной сетки, изображенной на рис. 3.16, а. Здесь (а) — (в) иллюстрируют ансамблирование ненулевых компонент для элементов 1—6.

Для других элементов компоненты приведенных матриц элементов и векторов нагрузки элементов находятся таким же образом. В рассматриваемом случае можно непосредственно получить соотношения

$$k^3 \varphi^2 = \frac{k}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_6 \\ \varphi_3 \\ \varphi_1 \end{bmatrix}, \\
 k^3 \varphi^3 = \frac{k}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_4 \\ \varphi_1 \\ \varphi_3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 & 2 & & & & \\ -1 & 2 & & & -1 & & & \\ -2 & & 3 & & -1 & & & \\ -2 & & & 3 & & -1 & & \\ & -1 & -1 & & 2 & & & \\ & & & -1 & & 1 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \\ \varphi_7 \\ \varphi_8 \end{pmatrix} = \frac{2h^2}{6k} \begin{pmatrix} a^1 + a^2 + a^3 + a^4 \\ a^1 \\ a^2 + a^3 \\ a^3 + a^4 \\ a^1 + a^2 \\ a^4 \end{pmatrix} \quad (z)$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & -2 & -2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & & & -1 & & & \\ -2 & & 3 & & -1 & & & \\ -2 & & & 3 & & -1 & & \\ -1 & & & & 2 & & -1 & \\ & -1 & -1 & & 2 & & & \\ & & & -1 & -1 & & 2 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \\ \varphi_7 \\ \varphi_8 \end{pmatrix} = \frac{2h^2}{6k} \begin{pmatrix} a^1 + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 \\ a^1 \\ a^2 + a^3 \\ a^3 + a^4 \\ a^5 \\ a^1 + a^2 \\ a^4 + a^5 \end{pmatrix} \quad (a)$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 & -2 & -2 & & & \\ -2 & 3 & & & -1 & & & \\ -2 & & 3 & & -1 & & & \\ -2 & & & 3 & & -1 & & \\ -2 & & & & 3 & & -1 & \\ & -1 & -1 & & 2 & & & \\ & & & -1 & -1 & & 2 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \\ \varphi_7 \\ \varphi_8 \end{pmatrix} = \frac{2h^2}{6k} \begin{pmatrix} a^1 + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 \\ a^1 + a^6 \\ a^2 + a^3 \\ a^3 + a^4 \\ a^5 + a^6 \\ a^1 + a^2 \\ a^4 + a^5 \end{pmatrix} \quad (e)$$

Рис. 3.17. Продолжение.

$$\begin{aligned} k^4 \varphi^4 &= \frac{k}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_4 \\ \varphi_7 \end{bmatrix}, \\ k^5 \varphi^5 &= \frac{k}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_7 \\ \varphi_5 \\ \varphi_1 \end{bmatrix}, \\ k^6 \varphi^6 &= \frac{k}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_3 \\ \varphi_1 \\ \varphi_5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

И т. Д.

Ансамблирование вкладов элементов 2—6 показано на рис. 3.17, (б)—(е). На рис. 3.16, а видно, что узел 1 принадлежит только элементам 1—6, и, таким образом, дальнейшее ансамбли-





$$\begin{bmatrix} 6 & -\frac{1}{2} & -1 & -1 & -\frac{1}{2} & -1 & -1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 2 & -1 & & -\frac{1}{2} & & & \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -\frac{1}{2} & & -\frac{1}{2} & \\ -1 & & -1 & 4 & -1 & & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & & & -1 & 2 & & -\frac{1}{2} & \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & & & 2 & & \\ -1 & & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & & & 2 & \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & & & & & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \\ \varphi_7 \\ \varphi_8 \\ \varphi_9 \end{bmatrix} = \frac{3h^2}{4k} \begin{bmatrix} a^1 + a^2 + a^3 \\ a^1 \\ a^1 + a^2 \\ a^2 + a^3 \\ a^3 \\ a^1 \\ a^3 \\ a^3 \\ a^2 \end{bmatrix} \quad (a)$$

$$\begin{bmatrix} 8 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & & \\ -1 & -1 & 4 & -1 & & -\frac{1}{2} & & -\frac{1}{2} & \\ -1 & & -1 & 4 & -1 & & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \\ -1 & -1 & & -1 & 4 & & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & & & 2 & & & \\ 1 & -\frac{1}{2} & & -\frac{1}{2} & & & 2 & & \\ -1 & & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & & & & 2 & \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & & & & & & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \\ \varphi_7 \\ \varphi_8 \\ \varphi_9 \end{bmatrix} = \frac{3h^2}{4k} \begin{bmatrix} a^1 + a^2 + a^3 + a^4 \\ a^1 + a^4 \\ a^1 + a^2 \\ a^2 + a^3 \\ a^3 + a^4 \\ a^1 \\ a^4 \\ a^3 \\ a^2 \end{bmatrix} \quad (b)$$

Рис. 3.18. Продолжение.

согласно (3.51):

$$f_1^1 = f_2^1 = f_6^1 = f_8^1 = h^2 Q^1 / 4.$$

Для остальных элементов приведенные матрицы элементов могут быть получены непосредственно из  $k^1$ , что дает

$$k^2 \varphi^2 = \frac{k}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1/2 & -1 & -1/2 \\ -1/2 & 2 & -1/2 & -1 \\ -1 & -1/2 & 2 & -1/2 \\ -1/2 & -1 & -1/2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_4 \\ \varphi_1 \\ \varphi_8 \\ \varphi_6 \end{bmatrix},$$

$$k^3 \varphi^3 = \frac{k}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1/2 & -1 & -1/2 \\ -1/2 & 2 & -1/2 & -1 \\ -1 & -1/2 & 2 & -1/2 \\ -1/2 & -1 & -1/2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_6 \\ \varphi_8 \\ \varphi_1 \\ \varphi_4 \end{bmatrix},$$

$$k^4 \varphi^4 = \frac{k}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1/2 & -1 & -1/2 \\ -1/2 & 2 & -1/2 & -1 \\ -1 & -1/2 & 2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_5 \\ \varphi_7 \\ \varphi_2 \\ \varphi_1 \end{bmatrix}$$

и т. д.

Ансамблирование вкладов элементов 1—4 в глобальную матрицу  $K$  и правую часть  $f$  показано на рис. 3.18. Опять можно заметить, что соответствующее узлу 1 уравнение уже не будет меняться при продолжении процесса ансамблирования, так как узел 1 ассоциирован только с элементами 1—4. Таким образом, согласно рис. 3.18, (з), полное уравнение для узла 1 будет иметь вид

$$(8/3) \varphi_1 - (1/3) (\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 + \varphi_6 + \varphi_7 + \varphi_8 + \varphi_9) - [h^2/(4k)] (Q^1 + Q^2 + Q^3 + Q^4) = 0.$$

Полученное ансамблированием для равномерной конечно-элементной сетки уравнение интересно сравнить с эквивалентным конечно-разностным уравнением, которое, согласно результатам гл. 1, в узле 1 имеет вид

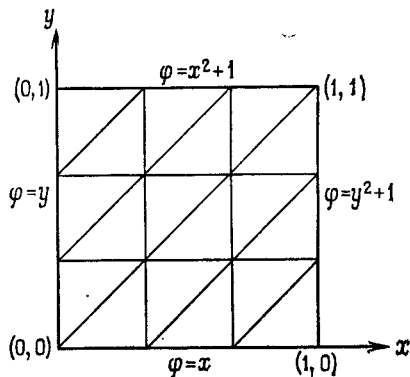
$$4\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4 - \varphi_5 - h^2 Q_1 = 0.$$

Читатель заметит, что приведенное здесь конечно-разностное выражение аналогично уравнению в этом узле, полученному ансамблированием по треугольным элементам. Однако в конечно-разностном выражении значение  $Q$  в узле 1 равно величине нагрузки, тогда как в конечно-элементной форме использовано весовое среднее значение нагрузки, распределенной между примыкающими элементами. Если  $Q$  не равно постоянной, то это приводит к получению разных выражений.

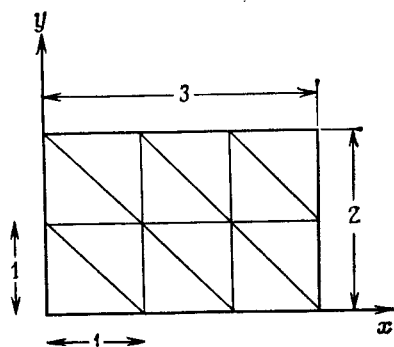
Продолжая процесс ансамблирования, читатель заметит, что вблизи границы, где задан ненулевой поток  $\bar{q}$ , ансамблированные уравнения отличаются от используемых в конечно-разностной аппроксимации. Действительно, конечно-элементная формулировка здесь проще и ее точность выше. Если в примере 1.5 использовать оба типа ансамблированных уравнений, то в случае треугольной сетки результаты будут тождественны полученным ранее с помощью конечно-разностной аппроксимации (так как здесь поток через границы равен нулю и  $Q$  постоянно на всей области). Однако для прямоугольных элементов решение будет иным, и читатель должен сравнить полученные таким образом результаты с результатами, полученными при использовании треугольных элементов (см. упражнение 3.16).

## Упражнения

3.13. Изображенная на рисунке квадратная область делится на 18 равных треугольных элементов с узлами в вершинах. Применяя метод конечных элементов, найти стационарное распределение температуры  $\varphi$  при указанном распределении температуры на сторонах.

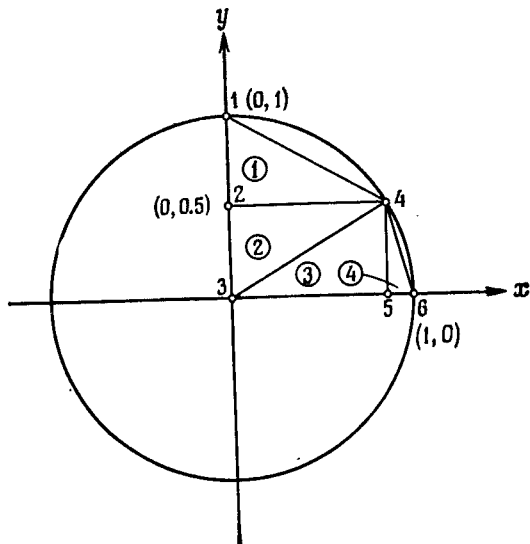


К упражнению 3.13.



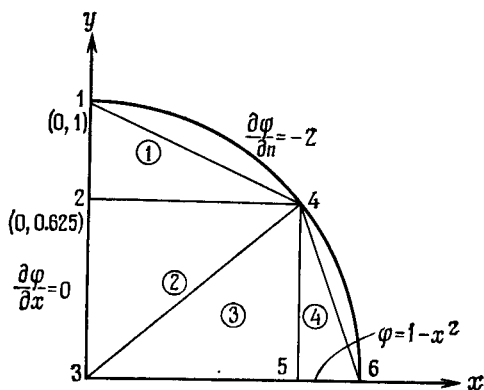
К упражнению 3.16.

3.14. Повторить упражнение 3.13, используя метод конечных элементов и сетку из десяти равных квадратных элементов.



К упражнению 3.17.

3.15. В упражнении 3.13 заменить краевое условие на границе  $x=1$  условием  $\partial\varphi/\partial x=1-0.1\varphi$ . Решить задачу методом конечных элементов на треугольной сетке, используя полученное в упражнении 2.16 уравнение метода взвешенных невязок. Повторить вычисления для сетки из девяти квадратных элементов. Применяя, как и в упражнении 3.3, формулу Тейлора, в обоих случаях исследовать точность аппроксимации условия на границе  $x=1$ .



К упражнению 3.18.

3.16. Решить задачу кручения из примера 1.5, используя сетку из 12 треугольных элементов (см. рисунок). Повторить вычисления для сетки из шести квадратных элементов. Сравнить полученные значения для крутящего момента с найденными другими методами в предыдущих главах.

3.17. Методом конечных элементов решить задачу кручения кругового цилиндра. Использовать сетку с четырьмя треугольными элементами (см. рисунок).

3.18. Методом конечных элементов найти стационарное распределение температуры  $\varphi$  в изображенном на рисунке секторе круга. Использовать показанные треугольную сетку и краевые условия. Повторить задачу, заменив треугольные элементы 2 и 3 одним прямоугольным элементом.

3.19. В разд. 3.8.2 найти вектор нагрузки элемента, если  $Q$  не берется постоянным на прямоугольном элементе, а интерполируется через значения в узлах, т. е. если  $Q \approx Q_i N_i^e + Q_j N_j^e + Q_k N_k^e + Q_l N_l^e$  на элементе  $e$ . Использовать аналогичную интерполяцию для  $q$  вдоль каждой стороны элемента, соединяющей узлы, которые принадлежат граничной кривой  $\Gamma_q$ .

### 3.9. Анализ двумерных задач теории упругости в напряжениях с использованием треугольных элементов

Двумерная задача теории упругости в напряжениях уже была исследована в § 2.7 в качестве примера задачи с двумя неизвестными функциями, определяемыми из системы двух дифференциальных уравнений. Здесь будет рассматриваться та же самая задача, но с заменой использованных ранее базисных функций кусочно-линейными базисными функциями, локально определенными на треугольных элементах с узлами в вершинах. Эта задача

является классической, так как в 1956 г. именно в ней впервые был применен метод конечных элементов [4]. Принятая здесь формулировка все еще широко используется, хотя во многих приложениях простой треугольный элемент заменяется некоторыми более сложными элементами, о которых пойдет речь в следующей главе.

Следуя обозначениям разд. 2.7.1, определим поле перемещений двумя компонентами  $u$  и  $v$ , соответствующими направлениям  $x$  и  $y$ . Эти компоненты будут аппроксимироваться по формуле (2.86), но на этот раз для представления  $u$  и  $v$  будут использованы одни и те же конечно-элементные функции. Опуская произвольную функцию  $\psi$ , которую, как было показано, можно включить в общую конечно-элементную формулировку, имеем

$$\varphi \approx \hat{\varphi} = \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^M N_m \varphi_m, \quad (3.52)$$

где

$$\varphi_m = \begin{bmatrix} u_m \\ v_m \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

— вектор, компоненты которого являются аппроксимациями для перемещений в узле  $m$ .

Тогда деформации в произвольной точке находятся по формуле

$$\varepsilon = \mathcal{L} \sum_{m=1}^M N_m \varphi_m = \sum_{m=1}^M \mathbf{B}_m \varphi_m, \quad (3.54)$$

где оператор  $\mathcal{L}$  определен в (2.80). Компоненты матрицы  $\mathbf{B}_m$  могут быть определены по правилу

$$\mathbf{B}_m = \mathcal{L} \mathbf{N}_m = \begin{bmatrix} \partial N_m / \partial x & 0 \\ 0 & \partial N_m / \partial y \\ \partial N_m / \partial y & \partial N_m / \partial x \end{bmatrix}. \quad (3.55)$$

Ограничим выбор весовых функций в (2.87) условиями

$$W_{l,1} = W_{l,2} = N_l, \quad \bar{W}_{l,1} = \bar{W}_{l,2} = -N_l |_{\Gamma_0} \quad (3.56)$$

и тем самым удовлетворим соотношениям (2.90); тогда уравнения метода взвешенных невязок (2.92) можно записать в виде

$$\sum_{m=1}^M \left[ \int_{\Omega} \mathbf{B}_m^T \mathbf{D} \mathbf{B}_m \partial \Omega \right] \varphi_m = \int_{\Omega} N_l \mathbf{X} \, d\Omega + \int_{\Gamma_0} N_l \bar{\mathbf{f}} \, d\Gamma. \quad (3.57)$$

Эта система уравнений равносильна стандартной системе алгебраических уравнений

$$\mathbf{K} \varphi = \mathbf{f}, \quad (3.58)$$

где матрица  $\mathbf{K}$  и правая часть  $\mathbf{f}$  получаются суммированием вкладов отдельных матриц элементов и соответствующих векторов нагрузки элементов с компонентами

$$\mathbf{K}_{lm}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{V}_i^{eT} \mathbf{D} \mathbf{B}_m^e d\Omega, \quad \mathbf{f}_l = \int_{\Omega^e} N_l^e \mathbf{X} d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma^e} N_l^e \bar{\mathbf{t}} d\Gamma. \quad (3.59)$$

В последнем соотношении интеграл по  $\Gamma_\sigma^e$  появляется только в том случае, когда какая-либо сторона элемента образует часть граничной кривой  $\Gamma_\sigma$ .

Приведенное представление является достаточно общим и применимо к элементам произвольной формы. Однако мы ограничимся рассмотрением частного случая треугольных элементов с узлами в вершинах, для которых базисные функции были определены в разд. 3.7.2. Тогда можно найти ненулевой вклад в вектор  $\mathbf{K}^e \boldsymbol{\varphi}^e$  некоторого элемента  $e$  с узлами  $i, j$  и  $k$  с помощью формулы

$$\mathbf{K}^e \boldsymbol{\varphi}^e = \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_i^{eT} \mathbf{D} \mathbf{B}_i^e & \mathbf{V}_i^{eT} \mathbf{D} \mathbf{B}_j^e & \mathbf{V}_i^{eT} \mathbf{D} \mathbf{B}_k^e \\ \mathbf{V}_j^{eT} \mathbf{D} \mathbf{B}_i^e & \mathbf{V}_j^{eT} \mathbf{D} \mathbf{B}_j^e & \mathbf{V}_j^{eT} \mathbf{D} \mathbf{B}_k^e \\ \mathbf{V}_k^{eT} \mathbf{D} \mathbf{B}_i^e & \mathbf{V}_k^{eT} \mathbf{D} \mathbf{B}_j^e & \mathbf{V}_k^{eT} \mathbf{D} \mathbf{B}_k^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \\ \varphi_k \end{bmatrix} d\Omega. \quad (3.60)$$

Используя соотношение (3.55) и вспоминая, что для таких элементов  $\partial N_i^e / \partial x = \beta_i^e$  и  $\partial N_i^e / \partial y = \gamma_i^e$ , находим

$$\mathbf{V}_i^e = \begin{bmatrix} \beta_i^e & 0 \\ 0 & \gamma_i^e \\ \gamma_i^e & \beta_i^e \end{bmatrix}. \quad (3.61)$$

Аналогичные выражения имеют место для  $\mathbf{V}_j^e$  и  $\mathbf{V}_k^e$ , и, таким образом, на элементе эти матрицы постоянны. Если теперь предположить, что упругие свойства не меняются на элементе (это предположение представляется, вообще говоря, совместимым с аппроксимацией), то в (3.60) можно провести интегрирование и получить

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}^e = \Delta^e \begin{bmatrix} \mathbf{V}_i^{eT} \mathbf{D}^e \mathbf{V}_i^e & \mathbf{V}_i^{eT} \mathbf{D}^e \mathbf{V}_j^e & \mathbf{V}_i^{eT} \mathbf{D}^e \mathbf{V}_k^e \\ \mathbf{V}_j^{eT} \mathbf{D}^e \mathbf{V}_i^e & \mathbf{V}_j^{eT} \mathbf{D}^e \mathbf{V}_j^e & \mathbf{V}_j^{eT} \mathbf{D}^e \mathbf{V}_k^e \\ \mathbf{V}_k^{eT} \mathbf{D}^e \mathbf{V}_i^e & \mathbf{V}_k^{eT} \mathbf{D}^e \mathbf{V}_j^e & \mathbf{V}_k^{eT} \mathbf{D}^e \mathbf{V}_k^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \\ \varphi_k \end{bmatrix}, \quad (3.62)$$

где  $\Delta^e$  — площадь элемента  $e$ . Аналогичным образом, считая объемные силы  $\mathbf{X}$  и граничную нагрузку  $\bar{\mathbf{t}}$  постоянными на элементе,

можно получить ненулевые компоненты вектора нагрузки элемента

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_i^e &= \mathbf{X}^e \int_{\Omega^e} N_i^e d\Omega + \bar{\mathbf{t}}^e \int_{\Gamma_\sigma^e} N_i^e d\Gamma, \\ \mathbf{f}_j^e &= \mathbf{X}^e \int_{\Omega^e} N_j^e d\Omega + \bar{\mathbf{t}}^e \int_{\Gamma_\sigma^e} N_j^e d\Gamma, \\ \mathbf{f}_k^e &= \mathbf{X}^e \int_{\Omega^e} N_k^e d\Omega + \bar{\mathbf{t}}^e \int_{\Gamma_\sigma^e} N_k^e d\Gamma. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Интегралы такого вида уже вычислялись в предыдущем параграфе. Поэтому, предполагая, что на границе  $\Gamma_\sigma$  лежат только узлы  $i$  и  $j$ , можно сразу записать

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_i^e &= (1/3) \Delta^e \mathbf{X}^e + (1/2) \bar{\mathbf{t}}^e \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}, \\ \mathbf{f}_j^e &= (1/3) \Delta^e \mathbf{X}^e + (1/2) \bar{\mathbf{t}}^e \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}, \\ \mathbf{f}_k^e &= (1/3) \Delta^e \mathbf{X}^e. \end{aligned} \quad (3.64)$$

На этом почти заканчивается построение конечно-элементного аналога двумерной задачи теории упругости. Читателю будет полезно, используя результаты предыдущего параграфа, провести вычисление матриц элементов для прямоугольных элементов, имеющих четыре узла. Однако, прежде чем расстаться с этой темой, рассмотрим один пример, иллюстрирующий идею использования узловых переменных векторного типа в двумерном случае.

**Пример 3.6.** Проведем анализ двумерной задачи теории упругости в напряжениях, когда рассматриваемая область покрывается регулярной сеткой треугольных элементов, как показано на рис. 3.16, а. Будем считать, что упругие свойства и объемные силы постоянны на всей области и требуется вычислить приведенную матрицу элемента 1 с узлами 1, 2 и 6.

Поступая так же, как в примере 3.5, и замечая, что для элемента 1 имеем

$$\begin{aligned} \alpha_1^1 &= 1, & \alpha_2^1 &= 1/h, & \alpha_6^1 &= 0, \\ \beta_1^1 &= -1/h, & \beta_2^1 &= 1/h, & \beta_6^1 &= 0, \\ \gamma_1^1 &= 0, & \gamma_2^1 &= -1/h, & \gamma_6^1 &= 1/h, & 2\Delta^1 &= h^2, \end{aligned}$$

сразу получаем

$$\mathbf{B}_1^1 = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2^1 = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_6^1 = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

При постоянных свойствах материала матрица  $\mathbf{D}$  будет постоянна:





### 3.10. Является ли метод конечных разностей частным случаем метода конечных элементов?

Как уже успел заметить читатель, в некоторых одномерных и двумерных примерах аппроксимация с помощью простых конечных элементов приводила к уравнениям, которые или тождественно совпадали с уравнениями, полученными с помощью конечно-разностной аппроксимации в гл. 1, или были чрезвычайно близки к ним. Следовательно, естественно задаться вопросом: является ли один из этих методов частным случаем другого? Так как в гл. 2 было показано, что метод взвешенных невязок обладает большой общностью, то, по-видимому, резонно будет поставить вопрос более конкретно и спросить: всегда ли конечно-разностные уравнения могут быть получены как частный случай уравнений метода взвешенных невязок с локально определенными базисными функциями?

В гл. 1 был предложен процесс конечно-разностной аппроксимации дифференциального уравнения вида

$$A(\varphi) = \mathcal{L}(\varphi) + p = 0, \quad (3.65)$$

где

- 1) аппроксимация входящих в оператор  $\mathcal{L}$  производных осуществлялась с помощью локального разложения в ряд Тейлора;
- 2) для каждой «узловой» точки области уравнение составлялось независимо.

Ясно, что такая аппроксимация может быть получена посредством метода коллокации, когда в качестве весовой функции берется дельта-функция Дирака, т. е.

$$W_i = \delta(x - x_i), \quad (3.66)$$

с использованием базисных функций, представляющих производные точно таким же образом, как и конечно-разностные выражения.

При данном выше определении необходимо, чтобы в точке  $x_i$ , где производится взвешивание, были определены все входящие в оператор  $\mathcal{L}$  производные от базисных функций  $N_m$ . Для этих базисных функций допустимы, однако, разрывы в других точках  $x$  области при условии, что

$$\int_{\Omega} W_i \mathcal{L} N_m d\Omega \rightarrow 0 \quad (3.67)$$

при  $W_i \rightarrow 0$ , где пределы интеграла охватывают точку разрыва [и не содержат других точек разрыва.— *Ред.*]. Это условие легко выполнить даже для разрывных функций.

В качестве примера рассмотрим одномерную задачу

$$d^2\varphi/dx^2 - \varphi = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (3.68)$$

для которой, согласно методу взвешенных невязок,

$$\int_0^1 W_l (d^2\hat{\varphi}/dx^2 - \hat{\varphi}) dx = 0, \quad \hat{\varphi} = \sum_{m=1}^M N_m \varphi_m. \quad (3.69)$$

Аппроксимация функции  $\varphi$  системой пересекающихся дуг парабол (рис. 3.19, а) эквивалентна использованию системы базисных функций, показанных на рис. 3.19, б.

Чтобы доказать выполнение условия (3.67) предположим, что  $W_l$  совпадает с постоянной в окрестности разрыва. Тогда, подставляя  $N_m$  в оператор, имеем

$$\begin{aligned} & \int_{-}^{+} W_l \left( \frac{d^2 N_m}{dx^2} - N_m \right) dx = \\ & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ W_l \int_{-}^{x_l - \varepsilon} \left( \frac{d^2 N_m}{dx^2} - N_m \right) dx + W_l \int_{x_l + \varepsilon}^{+} \left( \frac{d^2 N_m}{dx^2} - N_m \right) dx \right] = \\ & = W_l \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{dN_m}{dx} \Big|_{-}^{x_l - \varepsilon} - \int_{-}^{x_l - \varepsilon} N_m dx + \right. \\ & \quad \left. + \frac{dN_m}{dx} \Big|_{x_l + \varepsilon}^{+} - \int_{x_l + \varepsilon}^{+} N_m dx \right]. \quad (3.70) \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при  $W_l \rightarrow 0$  условие (3.67) выполняется, так как вид выбранной функции  $N_m$  гарантирует конечность предела стоящих в квадратных скобках величин.

Если  $W_l$  берется согласно (3.66), то соотношение (3.69) принимает вид

$$[d^2\hat{\varphi}/dx^2 - \hat{\varphi}]_{x=x_l} = 0, \quad (3.71)$$

где

$$\hat{\varphi} = \varphi_{l-1} N_{l-1}^e + \varphi_l N_l^i + \varphi_{l+1} N_{l+1}^e \quad (3.72)$$

на элементе  $e$ , содержащем узел  $l$  (см. рис. 3.19, а). Если поместить начало координат в узел  $l$ , то эти параболические базисные функции будут иметь вид

$$\begin{aligned} N_{l-1}^e &= -x(h^e - x)/[2(h^e)^2], \\ N_l^i &= (h^e - x)(h^e + x)/(h^e)^2, \\ N_{l+1}^e &= x(h^e + x)/[2(h^e)^2] \end{aligned} \quad (3.73)$$

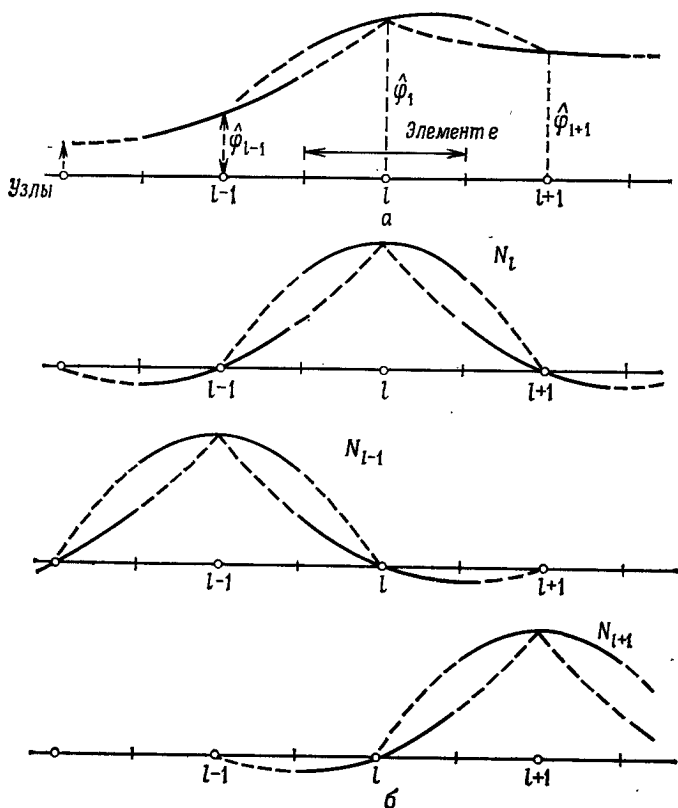


Рис. 3.19. Аппроксимация функции одной переменной (а), использующая базисные функции в виде дуг парабол (б).

и соответственно

$$\frac{d^2 N_l^e}{dx^2} = -\frac{2}{(he)^2}, \quad \frac{d^2 N_{l+1}^e}{dx^2} = \frac{1}{(he)^2} = \frac{d^2 N_{l-1}^e}{dx^2}. \quad (3.74)$$

Тогда подстановка представления (3.72) в (3.71) дает стандартную конечно-разностную аппроксимацию уравнения (3.68):

$$\frac{1}{(he)^2} \varphi_{l-1} - \frac{2}{(he)^2} \varphi_l + \frac{1}{(he)^2} \varphi_{l+1} - \varphi_l = 0. \quad (3.75)$$

Приведенный выше способ получения конечно-разностных выражений может быть обобщен на дву- и трехмерные задачи. В каждом конкретном случае можно показать, что стандартные конечно-разностные методы можно интерпретировать как частные случаи метода взвешенных невязок, однако получение конечно-

разностных аппроксимаций описанным выше способом не рекомендуется из-за его сложности. Тем не менее мы доказали то, что нам требовалось, а именно что конечно-разностная методология является лишь частным случаем общей методологии конечно-элементной аппроксимации с помощью взвешенных невязок.

Мы не будем здесь больше говорить об этом и лишь отметим, что во всех приведенных выше примерах конечно-элементная аппроксимация по Галеркину давала по меньшей мере столь же точные результаты, что и аналогичные конечно-разностные соотношения. Этот факт в сочетании с простотой учета краевых условий Неймана, без сомнения, является одной из причин всесторонней разработки и использования конечно-элементной аппроксимации по Галеркину. С другой стороны, необходимо отметить, что простота записи конечно-разностных выражений для однородных ситуаций и отсутствие процесса ансамблирования делают метод конечных разностей весьма популярным среди многих пользователей.

### 3.11. Заключительные замечания

Эта глава вместе с двумя предыдущими служит введением в круг основных идей, необходимых для понимания современных процессов конечно-элементной аппроксимации. Теперь читатели могут строить дискретные аналоги новых задач с использованием конечных элементов простейшего вида и таким образом оперировать с весьма широким кругом практических задач. Следуя методике, намеченной в § 2.8, этот процесс может быть распространен на нелинейные задачи. Методы решения таких задач

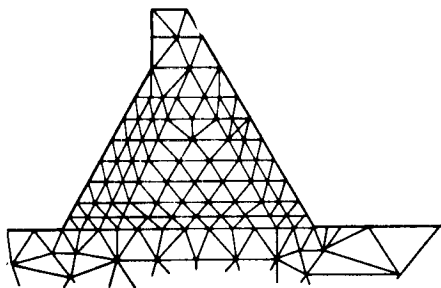


Рис. 3.20. Треугольные элементы, используемые при анализе напряжений в плочине.

достаточно разработаны, и за подробностями читателю рекомендуется обратиться к соответствующей литературе [5].

В заключение этого параграфа приведем несколько примеров практического применения конечно-элементных аппроксимаций,

что позволит читателю понять, каким образом простые конечные элементы могут быть использованы для представления двумерных областей общего вида.

На рис. 3.20 представлена плотина, для которой использованы треугольные элементы. Размеры элементов здесь меняются таким образом, чтобы сгустить сетку вблизи точек ожидаемого быстрого изменения напряжений. Нагрузка в этом примере может включать объемные силы, обусловленные весом, и внешние граничные нагрузки, возникающие из-за давления воды.

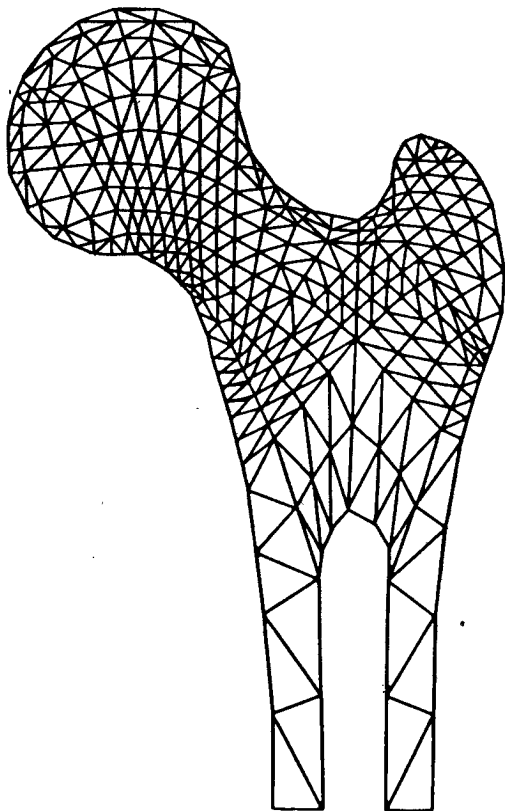


Рис. 3.21. Треугольные элементы, используемые для представления верхней части бедренной кости человека.

На рис. 3.21 показано, как использовать треугольные элементы для двумерного представления верхней части бедренной кости человека, исследуемой для получения информации о развитии напряжений в хряще.

Наконец, на рис. 3.22 демонстрируется разбиение для задачи об электромагните, где применяется уравнение (3.31), в котором теперь  $k$  — магнитная проницаемость, а  $Q$  — сила тока в проводниках.

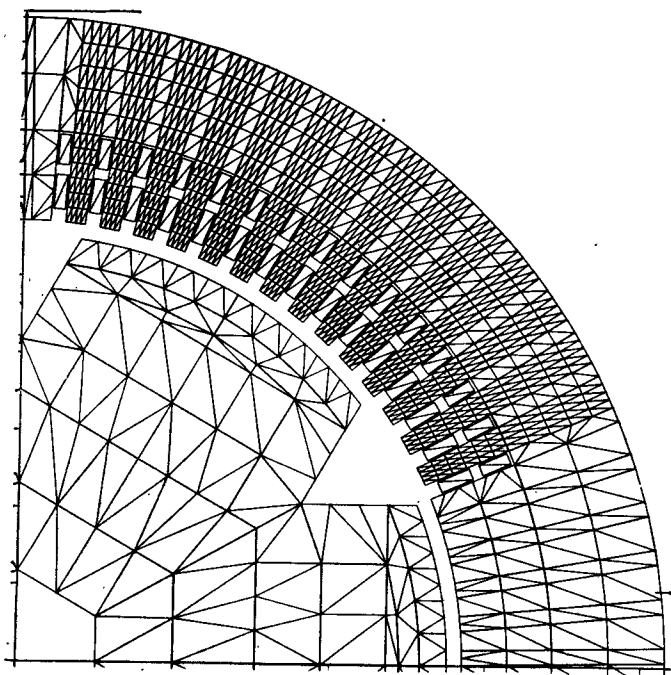


Рис. 3.22. Треугольные элементы, используемые для решения задачи об электромагните.

Широчайшее многообразие задач, которые могут быть решены на основе единой конечно-элементной методологии — и фактически единой программы для ЭВМ, — вот, что читатель должен отметить.

## Литература

[1] Tong P. Exact solutions of certain problems by the finite element method. — *AIAA J.*, 1969, v. 7, p. 179—180. [Имеется перевод: Ракетная техника и космонавтика. — М.: Мир, 1969, т. 7, № 1.]

[2] Описание того, как используется ленточность структуры матрицы при вычислениях на ЭВМ, дано в книге Becker E. B., Carey G. F., Oden J. T. *Finite elements. An introduction, Vol. 1.* — Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1981.

[3] Irons B. M. A frontal solution program. — *Int. J. Num. Math. Eng.*, 1970, v. 2, p. 5—32.

[4] Turner M. J., Clough R. W., Martin H. C., Topp L. J. Stiffness and deflection analysis of complex structures.—*J. Aeronaut. Sci.*, 1956, v. 23, p. 805—823.

[5] См., например, Zienkiewicz O. C. *The finite element method*.—3rd ed.—New York: McGraw-Hill, 1977, p. 450—458.

### Рекомендуемая литература

Davies A. J. *The finite element method: A first approach*.—Oxford: Clarendon, 1980.

Fried I. *Numerical solution of differential equations*.—New York: Academic Press, 1979.

Hinton E., Owen D. R. J. *An introduction to finite element computations*.—Swansea: Pineridge Press, 1979.

Huebner K. H., Thornton E. A. *The finite element method for engineers*.—2nd ed.—New York: Wiley, 1982.

Mitchell A. R., Wait R., *The finite element method in partial differential equations*.—London: Wiley, 1977. [Имеется перевод: Митчелл Э., Уэйт Р. *Метод конечных элементов для уравнений с частными производными*.—М.: Мир, 1981.]

Zienkiewicz O. C. *The finite element method*.—3rd ed.—New York: McGraw-Hill, 1977.



## КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

### 4.1. Введение

В предыдущих главах читатель познакомился с методами аппроксимации базисными функциями, которые либо задавались одним аналитическим выражением на всей области, как в гл. 2, либо определялись поэлементно с помощью простейших локальных функций (гл. 3). В действительности в последнем случае использовались только линейные и билинейные многочлены, ведущие к самым простым видам конечных элементов. В этой главе будет изучена возможность использования более сложных базисных функций, также определенных на конечном элементе (т. е. локально).

Причина введения таких базисных функций высших степеней состоит в желании получить более точную аппроксимацию решения рассматриваемой задачи. При применении использовавшихся до сих пор простых конечных элементов уточнить решение можно только с помощью последовательного измельчения сетки. С другой стороны, повышение точности приближения может быть достигнуто последовательным повышением степени базисных функций (при фиксированной сетке конечных элементов).

С практической точки зрения очевидно, что наилучшим будет выбор, доставляющий максимальную точность при наименьших вычислительных затратах. Предваряя последующую дискуссию, отметим, что в этом отношении нам более эффективными представляются, вообще говоря, аппроксимации высших степеней (хотя фактический оптимум существенно зависит от конкретной задачи).

В первой части этой главы на основе многочленных аппроксимаций предлагается ряд одномерных элементов высших степеней. Устанавливается, что существуют различные способы построения базисных функций, составленных из многочленов одной и той же степени и дающих, таким образом, один и тот же порядок аппроксимации. В этом плане обсуждаются так называемые *иерархические* формы, когда функции высших степеней последовательно получаются с помощью добавления соответствующих слагаемых. Такие формулировки, как правило, оказываются наиболее эффективными в вычислительном отношении.

Во второй части главы эти построения используются для получения дву- и трехмерных многочленных базисных функций высших степеней в случае геометрически простых областей.

#### 4.2. Степень многочленов, составляющих базисные функции, и скорость сходимости

Вопрос о порядке погрешности метода был затронут в гл. 1 в связи с аппроксимацией конечными разностями. Однако он более не поднимался в гл. 2 и 3, где были введены методы, основанные на базисных функциях. Применительно к таким аппроксимациям упоминалось только, что сходимость будет иметь место при условии достаточной полноты системы базисных функций, позволяющей им с любой степенью точности аппроксимировать неизвестную функцию и ее производные, входящие в формулировку задачи. Причина такого упрощения состояла единственно в том, что в этих главах рассматривался широкий спектр систем базисных функций и получение общей оценки скорости сходимости было затруднительным. Если же ограничиться только многочленными аппроксимациями (хотя бы локально определенными), то обсуждать вопросы сходимости и полноты будет значительно легче.

Рассмотрим область  $\Omega$ , которая разбивается на конечные элементы  $\Omega^e$  с характерным размером  $h$ , и предположим, что множество базисных функций, определенных на каждой элементарной подобласти, содержит любой многочлен степени  $p$ .

Отсюда непосредственно следует, что если неизвестная функция (или функции)  $\varphi$  сама является многочленом степени не выше  $p$ , то аппроксимация должна давать точный ответ независимо от использованного типа взвешивания.

Обычно решение  $\varphi$  не является в точности многочленом. Однако если решение не имеет особых точек, где некоторые или все его производные обращаются в бесконечность, то  $\varphi$  можно локально разложить в ряд Тейлора. Например, в случае двух независимых переменных в окрестности некоторой точки  $O$  элемента можно записать

$$\varphi(\Delta x, \Delta y) = \varphi|_O + \Delta x \frac{\partial \varphi}{\partial x}|_O + \Delta y \frac{\partial \varphi}{\partial y}|_O + \dots, \quad (4.1)$$

где  $\Delta x$  и  $\Delta y$  — разности между координатами рассматриваемой точки и точки  $O$ . Если теперь используется аппроксимирующий многочлен степени  $p$ , то он точно воспроизводится соответствующим отрезком ряда Тейлора. Тогда внутри элемента размера  $h$  для максимальной погрешности аппроксимации  $E$  имеем

$$E = O(h^{p+1}), \quad (4.2)$$

поскольку величины  $\Delta x$  и  $\Delta y$  в точках элемента не превосходят  $h$ .

Аналогично аппроксимация первой производной будет иметь точность  $O(h^p)$ , а приближение производной порядка  $d$  будет осуществляться с точностью  $O(h^{p+1-d})$ .

Приведенный выше результат чрезвычайно важен не только для объяснения того факта, почему многочлены высокой степени дают большую точность приближения, но также и для обоснования необходимых условий полноты, которые должны выполняться при использовании любого из методов взвешенных невязок.

Вернемся к общей задаче из гл. 2, где требовалось решить дифференциальное уравнение вида

$$A(\varphi) = \mathcal{L}\varphi + p + 0 \quad \text{в } \Omega \quad (4.3)$$

с краевыми условиями

$$B(\varphi) = \mathcal{M}\varphi + r = 0 \quad \text{на } \Gamma \quad (4.4)$$

при помощи разложения по базисным функциям

$$\hat{\varphi} = \sum_{m=1}^M a_m N_m \quad (4.5)$$

и при использовании уравнения метода взвешенных невязок (а именно уравнения (2.41))

$$\int_{\Omega} W_i[\mathcal{L}\hat{\varphi} + p] d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{W}_i[\mathcal{M}\hat{\varphi} + r] d\Gamma = 0. \quad (4.6)$$

Мы видим, что должна быть обеспечена сходимость при  $h \rightarrow 0$  не только  $\varphi$ , но и всех производных, входящих в операторы  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{M}$ . Если порядок таких производных равен  $d$ , то очевидно, что минимальная степень членов в отрезке ряда Тейлора, используемом для записи  $\hat{\varphi}$  на каждом элементе, должна быть такой, чтобы получающаяся погрешность имела по крайней мере порядок  $O(h)$ . Таким образом, для выполнения требования полноты необходимо, чтобы

$$p + 1 - d \geq 1, \quad (4.7a)$$

или

$$p - d \geq 0. \quad (4.7b)$$

Только что указанное условие полноты подчеркивает полезность обсуждавшейся в § 3.4 слабой формулировки метода взвешенных невязок (а именно формулировки с использованием выражения (3.156)). Понижение порядка  $d$  используемых операторов

не только уменьшает требования гладкости, но и снижает минимальную степень многочленных базисных функций, необходимую для обеспечения полноты, до порядка производных от  $\hat{\varphi}$ , входящих в слабую формулировку задачи.

### 4.3. Кусочное тестирование

Проведенное в предыдущем параграфе обсуждение непосредственно ведет к весьма полезному тесту, часто используемому при практическом применении метода конечных элементов для проверки правильности соответствующих формул, возникающих при составлении конечно-элементных уравнений, или соотношений, получающихся при реализации этих формул. Если точное решение  $\hat{\varphi}$  является многочленом степени не выше  $p$  и для построения аппроксимации используется многочлен степени  $p$ , то, как уже было указано в начале предыдущего параграфа, должно получиться точное решение. Таким образом, если на поле конечных элементов наложить ограничение, потребовав, чтобы узловые значения совпадали со значениями точного решения, то уравнения метода взвешенных невязок должны выполняться точно.

Чтобы реализовать такой тест, необходимо просто провести ансамблирование системы элементов, на которых ассоциируемая с узлом  $l$  весовая функция  $W_l$  отлична от нуля, и проверить, что полученное уравнение метода взвешенных невязок тождественно выполняется. На рис. 4.1 показано поле двумерных элементов, которое может быть использовано для кусочного тестирования.

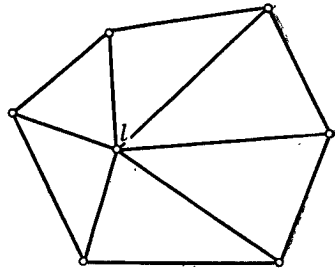


Рис. 4.1. Поле ансамблированных элементов, которое может быть использовано для кусочного тестирования в узле  $l$ .

Как правило, кусочное тестирование используют для того, чтобы убедиться в самом факте сходимости. Его можно использовать также для подтверждения предполагаемого порядка сходимости на элементе. Например, чтобы гарантировать погрешность  $O(h^2)$ , необходимо задать в узлах значения линейной функции и получить точный результат.

Итак, мы просто требуем, чтобы на ансамблируемых элементах точным решением был многочлен степени  $p$ . Наибольшее значение  $p$ , для которого это верно, определяет порядок погрешности  $O(h^{p+1})$ .

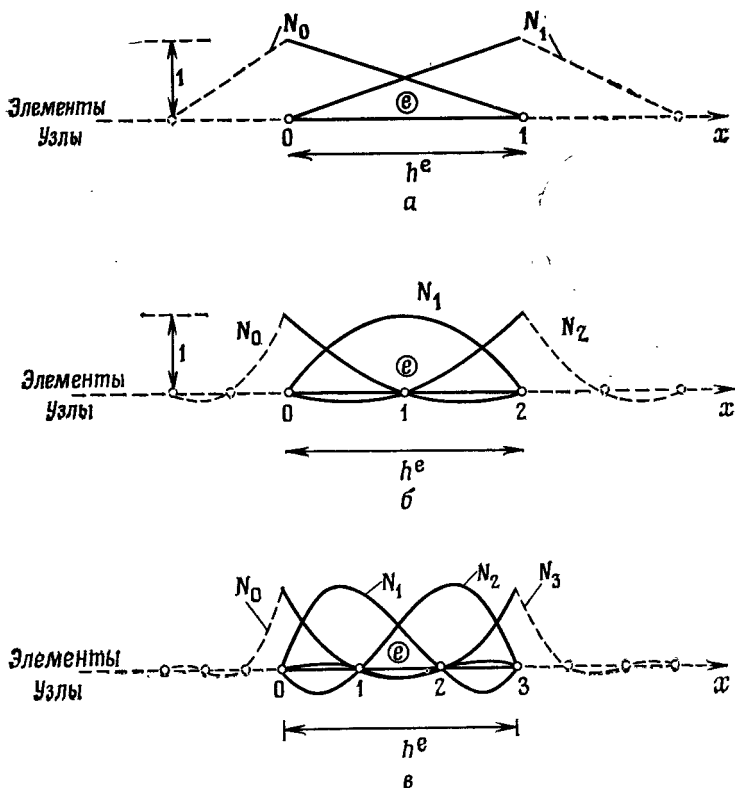


Рис. 4.2. Одномерные элементы и ассоциируемые с ними стандартные базисные функции: линейные (а), квадратичные (б) и кубические (в).

#### 4.4. Стандартные базисные функции высших степеней для одномерных элементов с $C^0$ -гладкостью

Рассмотрим систему одномерных элементов, изображенную на рис. 4.2. На рис. 4.2, а показан стандартный линейный элемент  $e$  с двумя узлами введенного в гл. 2 типа. Здесь предполагается, что два указанных узла занумерованы как 0 и 1 (во избежание лишних буквенных обозначений). В соответствии с рисунком ассоциируем с каждым узлом этого элемента простую линейную базисную функцию. Вид таких функций на смежных элементах также показан на рисунке. Использование таких базисных функций гарантирует, что

1) на каждом элементе аппроксимация  $\hat{\varphi}$  есть линейная функция от  $x$ ;

2) коэффициент  $a_i$  при базисной функции  $N_i$  в разложении (4.5) для  $\hat{\varphi}$  представляет собой просто аппроксимацию значения  $\varphi$  в узле  $l$ .

Межэлементная  $C^0$ -гладкость разложения для  $\hat{\varphi}$  также автоматически гарантирована, поскольку сами базисные функции являются  $C^0$ -гладкими.

Этот процесс можно продолжить и получить базисные функции высших степеней на типичном одномерном элементе. Для изображенного на рис. 4.2, б элемента с тремя узлами возможно представление  $\hat{\varphi}$  с помощью квадратичных базисных функций, ассоциируемых с каждым из узлов этого элемента. Если требуется, чтобы базисная функция элемента, ассоциируемая с конкретным узлом, принимала значение единицы в этом узле и нуль в двух других узлах элемента, то приведенное выше условие 2 остается выполненным. Для такого элемента точное расположение дополнительного узла несущественно, и сразу видно, что ассоциируемая с этим дополнительным узлом базисная функция является внутренней по отношению к элементу и не распространяется на смежные элементы. Получаемое на следующем шаге обобщение показано на рис. 4.2, в, где изображены элемент с четырьмя узлами и соответствующие ему кубические базисные функции.

В общем случае аппроксимация  $\hat{\varphi}$  на элементе с  $p+1$  узлами будет сводиться к многочлену степени  $p$ . На таком элементе, узлы которого с номерами от 0 до  $p$  помещены в точки  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, x_p$ , ассоциируемая с узлом  $l$  базисная функция элемента  $N_l^e$  будет многочленом степени  $p$ , принимающим значение нуль во всех других узлах элемента. Тогда выражение для такой базисной функции можно записать в виде

$$N_l^e = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_p x^p, \quad (4.8)$$

где неизвестные коэффициенты являются решением системы уравнений

$$\begin{array}{ll} x = x_0, & N_l^e = \alpha_0 + \alpha_1 x_0 + \alpha_2 x_0^2 + \dots + \alpha_p x_0^p = 0, \\ x = x_1, & N_l^e = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_1^2 + \dots + \alpha_p x_1^p = 0, \\ \vdots & \vdots \\ x = x_l, & N_l^e = \alpha_0 + \alpha_1 x_l + \alpha_2 x_l^2 + \dots + \alpha_p x_l^p = 1, \\ \vdots & \vdots \\ x = x_p, & N_l^e = \alpha_0 + \alpha_1 x_p + \alpha_2 x_p^2 + \dots + \alpha_p x_p^p = 0. \end{array} \quad (4.9)$$

Однако в достаточно трудоемком решении этой системы нет необходимости, поскольку простая проверка показывает, что многочлен

$$N_l^e = \Lambda_l^e = [(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{l-1})(x - x_{l+1}) \dots (x - x_p)] \times \\ \times [(x_l - x_0)(x_l - x_1) \dots (x_l - x_{l-1})(x_l - x_{l+1}) \dots (x_l - x_p)]^{-1} \quad (4.10)$$

имеет требуемые свойства. Этот многочлен  $\Lambda_l^e$  известен как фундаментальный многочлен Лагранжа [1] степени  $p$ .

Используя это определение, можно выписать базисные функции элемента для изображенных на рис. 4.2 линейных, квадратичных и кубических элементов. При использовании на элементе равноотстоящих узлов и показанной на рисунке нумерации базисные функции можно выразить через нормированную локальную координату элемента  $\xi$ , определенную равенством

$$\xi = 2(x - x_c^e)/h^e. \quad (4.11)$$

Здесь  $x_c^e$  — координата центра элемента,  $h^e$  — длина элемента, и элемент принадлежит отрезку  $-1 \leq \xi \leq 1$ . Нетрудно получить выражения для базисных функций элемента, а именно:

*Линейные базисные функции* (рис. 4.2, а)

$$N_0^e = -(\xi - 1)/2, \quad N_1^e = (\xi + 1)/2. \quad (4.12a)$$

*Квадратичные базисные функции* (рис. 4.2, б)

$$N_0^e = \xi(\xi - 1)/2, \quad N_1^e = -(\xi - 1)(\xi + 1), \quad N_2^e = \xi(\xi + 1)/2. \quad (4.12б)$$

*Кубические базисные функции* (рис. 4.2, в)

$$\begin{aligned} N_0^e &= -(9/16)(\xi + 1/3)(\xi - 1/3)(\xi - 1), \\ N_1^e &= (27/16)(\xi + 1)(\xi - 1/3)(\xi - 1), \\ N_2^e &= -(27/16)(\xi + 1)(\xi + 1/3)(\xi - 1), \\ N_3^e &= (9/16)(\xi + 1)(\xi + 1/3)(\xi - 1/3). \end{aligned} \quad (4.12в)$$

Чтобы продемонстрировать использование таких базисных функций высших степеней, снова обратимся к решению задачи, рассмотренной в примере 3.1.

**Пример 4.1.** Требуется решить уравнение  $d^2\varphi/dx^2 - \varphi = 0$  с краевыми условиями  $\varphi = 0$  при  $x = 0$  и  $\varphi = 1$  при  $x = 1$ .

Если применяется метод Галеркина, то компоненты матрицы элемента  $K^e$ , как и в примере 3.1, задаются выражением

$$K_{lm}^e = \int_{x^e} \left( \frac{dN_l^e}{dx} \frac{dN_m^e}{dx} + N_l^e N_m^e \right) dx.$$

Используя базисные функции элемента, выраженные через нор-

мированную локальную координату  $\xi$  из (4.11), находим

$$\frac{dN_i^e}{dx} = \frac{dN_i^e}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{h^e} \frac{dN_i^e}{d\xi}, \quad dx = \frac{h^e}{2} d\xi,$$

и, следовательно, можно записать

$$K_{lm}^e = \int_0^1 \left( \frac{2}{h^e} \frac{dN_l^e}{d\xi} \frac{dN_m^e}{d\xi} + \frac{h^e}{2} N_l^e N_m^e \right) d\xi.$$

В свою очередь это позволяет теперь вычислить приведенные матрицы элемента  $e$ , изображенного на рис. 4.2, для линейных, квадратичных и кубических базисных функций. При этом получаются следующие результаты (детали мы оставляем читателю):

*Для линейной базисной функции*

$$k^e \varphi^e = \begin{bmatrix} \frac{1}{h^e} + \frac{h^e}{3} & -\frac{1}{h^e} + \frac{h^e}{6} \\ -\frac{1}{h^e} + \frac{h^e}{6} & \frac{1}{h^e} + \frac{h^e}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{bmatrix}.$$

Здесь матрица тождественна полученной в примере 3.1.

*Для квадратичной базисной функции*

$$k^e \varphi^e = \begin{bmatrix} \frac{7}{3h^e} + \frac{2h^e}{15} & -\frac{8}{3h^e} + \frac{h^e}{15} & \frac{1}{3h^e} - \frac{h^e}{30} \\ -\frac{8}{3h^e} + \frac{h^e}{15} & \frac{16}{3h^e} + \frac{8h^e}{15} & -\frac{8}{3h^e} + \frac{h^e}{15} \\ \frac{1}{3h^e} - \frac{h^e}{30} & -\frac{8}{3h^e} + \frac{h^e}{15} & \frac{7}{3h^e} + \frac{2h^e}{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}.$$

*Для кубической базисной функции*

$$k^e \varphi^e = \begin{bmatrix} \frac{37}{10h^e} + \frac{8h^e}{105} & -\frac{189}{40h^e} + \frac{33h^e}{560} \\ -\frac{189}{40h^e} + \frac{33h^e}{560} & \frac{54}{5h^e} + \frac{27h^e}{70} \\ \frac{27}{20h^e} - \frac{3h^e}{140} & -\frac{297}{40h^e} - \frac{27h^e}{560} \\ -\frac{13}{40h^e} + \frac{19h^e}{1680} & \frac{27}{20h^e} - \frac{3h^e}{140} \\ \frac{27}{20h^e} - \frac{3h^e}{140} & -\frac{13}{40h^e} + \frac{19h^e}{1680} \\ -\frac{297}{40h^e} - \frac{27h^e}{560} & \frac{27}{20h^e} - \frac{3h^e}{140} \\ \frac{54}{5h^e} + \frac{27h^e}{70} & -\frac{189}{40h^e} + \frac{33h^e}{560} \\ -\frac{189}{40h^e} + \frac{33h^e}{560} & \frac{37}{10h^e} + \frac{8h^e}{105} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}.$$



В примере 3.1 при решении задачи использовались три линейных конечных элемента. Попытаемся теперь решить задачу, применяя только один элемент, но с базисными функциями в виде многочленов разных степеней.

При  $h^e = 1$  и заданных значениях  $\varphi_0 = 0$  и  $\varphi_1 = 1$  использование линейного элемента дает просто линейную интерполяцию и свободных неизвестных для уравнений метода взвешенных невязок не остается. Для квадратичного элемента и заданных значений  $\varphi_0 = 0$ ,  $\varphi_2 = 1$  имеется один неизвестный параметр  $\varphi_1$ . Учитывая краевые условия, имеем

$$(16/3 + 8/15)\varphi_1 = (8/3 - 1/15)\varphi_2,$$

и, таким образом,

$$\varphi_1 = 0.4432.$$

При аппроксимации кубическим многочленом появляются два неизвестных параметра  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  и результирующая система двух уравнений имеет решение

$$\varphi_1 = 0.2889, \quad \varphi_2 = 0.6101.$$

В случае использования квадратичного элемента можно вычислить  $\hat{\varphi}$  при  $x = 1/3$  и  $x = 2/3$ . Сравним полученные результаты.

	Три линейных элемента	Один квадратич- ный элемент	Один кубический элемент	Точное решение
$x = 1/3$	$\hat{\varphi} = 0.2885$	0.2828	0.2889	0.28892
$x = 2/3$	$\hat{\varphi} = 0.6098$	0.6162	0.6101	0.61024

Отметим, что аппроксимация одним кубическим элементом дает гладкое решение, существенно лучшее, чем получаемое использованием трех линейных элементов.

Рассмотренный пример показывает, что процесс получения матриц элементов для элементов высших степеней не отличается от использовавшегося для линейных элементов. Кроме того, лучшие результаты, как правило, удается получить даже при несколько меньшем числе неизвестных. В данном примере ансамблирование типичной матрицы для нескольких элементов высших степеней не проводилось, и такое ансамблирование предлагается провести читателю в качестве упражнения—применяемая здесь методика аналогична описанной в предыдущей главе. Однако можно сразу заметить, что внутренние узлы элемента связаны только с другими узлами того же элемента и, следовательно, могут быть

исключены на *элементарном уровне*. Этот факт достаточно полезен при вычислениях, поскольку тогда приведенную матрицу элемента  $k^e$  для элементов высших степеней из данного примера можно с помощью дополнительных вычислений представить просто как  $(2 \times 2)$ -матрицу. Чтобы усвоить эту процедуру, читателю рекомендуется решить упражнение 4.3.

## Упражнения

### 4.1. Уравнение

$$d(k \, d\varphi/dx)/dx + \alpha\varphi + Q = 0$$

решается методом взвешенных невязок с аппроксимацией по Галеркину. Найти матрицу элемента  $k^e$  и правую часть  $f^e$  для типичных квадратичного и кубического элементов.

4.2. В упражнении 4.1, производя процесс ансамблирования и для квадратичного, и для кубического элементов, найти уравнения, получающиеся а) во внутреннем узле элемента и б) в граничном узле элемента.

4.3. Решить задачу из примера 4.1, используя два квадратичных элемента. а) Ансамблировать матрицы элементов, полученные в примере 4.1, и вычислить решение. б) На элементарном уровне выразить значение  $\varphi_1$  во внутреннем узле через значения  $\varphi_0$  и  $\varphi_2$  в граничных узлах. Как следствие получить новую  $(2 \times 2)$ -матрицу элемента, оперирующую только с граничными узловыми значениями. Ансамблировать эти новые матрицы элементов и решить полученную систему. Показать, что решение тождественно найденному в п. а).

4.4. Повторить упражнение 4.3, используя два кубических элемента. В п. б) из приведенных матриц элементов исключить два внутренних узла.

4.5. Найти функцию  $Q$ , такую, что  $\varphi = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$  является решением уравнения

$$k \, d^2\varphi/dx^2 + \alpha\varphi + Q = 0,$$

где  $k$  и  $\alpha$  — постоянные. Ансамблировать уравнения метода взвешенных невязок с аппроксимацией по Галеркину для поля квадратичных элементов и, используя кусочное тестирование, показать, что аппроксимация точна для всех значений  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$ .

4.6. В упражнении 1.2 найти распределение изгибающего момента, используя сначала два квадратичных, а затем два кубических элемента. Сравнить ответы с полученными другими методами в предыдущих главах.

4.7. Снова рассмотреть одномерный пример стационарной теплопроводности из упражнения 2.5, используя а) два квадратичных элемента, б) два кубических элемента и в) смешанную конечно-элементную пару, состоящую из одного квадратичного и одного кубического элементов. Сравнить полученные в каждом случае ответы с точным решением.

## 4.5. Иерархические формы высших степеней для одномерных элементов с $C^0$ -гладкостью

### 4.5.1. Общие замечания

При введении в гл. 3 конечно-элементных базисных функций параметры  $a_m$  в разложении (4.5) отождествлялись с узловыми значениями аппроксимации  $\hat{\varphi}$ , т. е. полагалось  $a_m = \varphi_m$ . В пре-

дыдущем параграфе это отождествление с необходимостью привело к требованию выполнения равенств (4.9).

Подобное отождествление широко используется в литературе по методу конечных элементов, позволяя придавать «физический» смысл параметрам  $a_m$ . Такое «стандартное» определение конечно-элементных базисных функций имеет, однако, определенный недостаток.

Этот недостаток становится очевидным, если рассмотреть приведенные в (4.12) базисные функции для линейных, квадратичных и кубических многочленов и соответствующие матрицы элементов из примера 4.1. Базисные функции разных степеней существенно различаются по виду, и поэтому для разных порядков аппроксимации получатся совершенно различные матрицы элементов. Таким образом, если принимается решение о повторном решении задачи с использованием базисных функций высших степеней, то систему уравнений приходится полностью перевычислять.

Этот тип аппроксимации резко отличается от приближения гладкими функциями из гл. 2, где рассматривалось разложение стандартного вида

$$\hat{\varphi} = \psi + \sum_{m=1}^M a_m N_m \quad (4.13)$$

с уточнением решения посредством увеличения общего числа используемых базисных функций при остающейся неизменной форме базисных функций низших степеней. В результате для линейной задачи получается следующая последовательность аппроксимаций:

$$M = 1: \quad K_{11}a_1 = f_1, \quad (4.14a)$$

$$M = 2: \quad \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}, \quad (4.14b)$$

$$M = 3: \quad \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}. \quad (4.14b)$$

Нетрудно видеть, что здесь на каждом шаге уточнения аппроксимации полученные на предыдущем шаге матрицы встречаются вновь и нет необходимости их перевычислять.

Кроме того, если выбранные базисные функции строго ортогональны, то получаемые на каждом этапе уточнения матрицы теперь являются диагональными и обеспечивают лучшую обусловленность решаемой системы уравнений. Действительно, в примере 2.2 было установлено, что использование метода Галеркина применительно к системе полностью ортогональных базисных функций приводит к распадающейся системе линейных алгебраических

уравнений. При этом для последовательности аппроксимаций имеем

$$M = 1: \quad K_{11}a_1 = f_1, \quad (4.15a)$$

$$M = 2: \quad \begin{bmatrix} K_{11} & 0 \\ 0 & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}, \quad (4.15б)$$

$$M = 3: \quad \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}. \quad (4.15в)$$

На каждом шаге уточнения к результатам предшествующего решения просто добавляется слагаемое  $a_m N_m$ , где

$$a_m = K_{mm}^{-1} f_m. \quad (4.16)$$

В этом параграфе будет предложен способ генерирования конечных элементов высших степеней, учитывающий некоторые преимущества метода аппроксимации гладкими функциями из гл. 2. Теперь базисные функции будут определяться не с помощью условий вида (4.9), а посредством аддитивного уточнения. Такие базисные функции мы будем называть *иерархическими*.

Хотя в общем случае добиться строгой диагональности аппроксимирующих уравнений трудно или невозможно, попытаемся по возможности ослабить зависимость между различными этапами аппроксимации. Такой подход в вычислительном отношении предпочтителен, поскольку неизбежно возникающие в процессе решения больших задач значительные ошибки округления не будут существенно влиять на качество окончательного решения в силу последовательного уменьшения значимости  $a_m$  с ростом  $m$ .

#### 4.5.2. Иерархические многочлены

Рассмотрим еще раз генерирование базисных функций для элемента общего вида, изображенного на рис. 4.3. Ясно, что линейное представление на этом элементе может быть получено только с помощью базисных функций, приведенных на рис. 4.2,  $a$  (см. формулы (4.12a)), и не может быть улучшено, поскольку отождествление общих узлов смежных элементов гарантирует  $C^0$ -гладкость. Можно получить иерархическую форму представления на этом элементе, используя для модификации линейного представления некоторый квадратный многочлен.

Если  $a_2^e N_2^e$  представляет эту модификацию и функция  $N_2^e$  от локальной координаты элемента  $\xi$  определена как квадратичный многочлен вида

$$N_2^e = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 \quad (4.17)$$

с коэффициентами, выбранными таким образом, что  $N_2^e = 0$  при  $\xi = \pm 1$ , то требуемая  $C^0$ -гладкость аппроксимации  $\hat{\varphi}$  между элементами будет сохранена. Сформулированным условиям удовлетворяет симметричная парабола, соответствующим образом масштабированная.

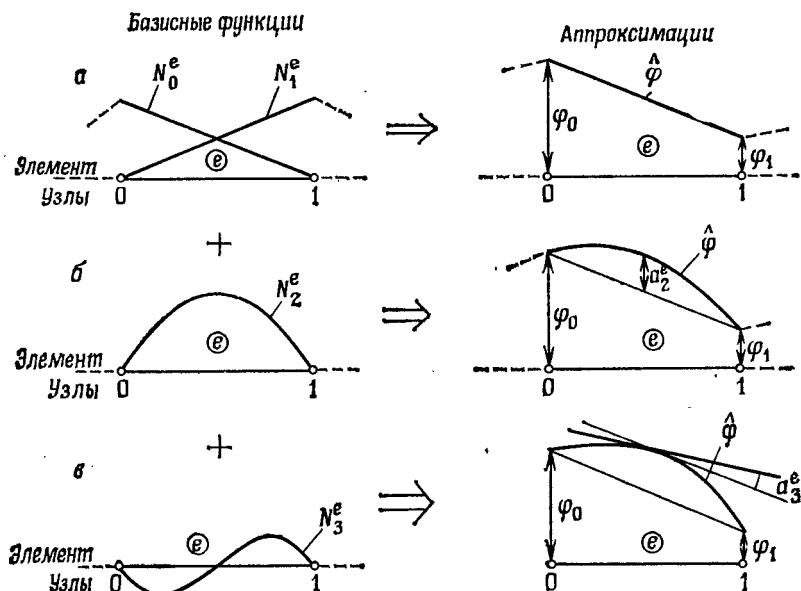


Рис. 4.3. Одномерные элементы и ассоциируемые с ними иерархические базисные функции и аппроксимации: линейная (а), квадратичная (б) и кубическая (в).

Таким образом, для аппроксимации квадратным многочленом на элементе  $e$  (рис. 4.3, б) можно записать

$$\hat{\varphi}^e = \varphi_0 N_0^e + \varphi_1 N_1^e + a_2^e N_2^e, \quad (4.18)$$

где (см. формулы (4.12а) и (4.12б))

$$N_0^e = -(\xi - 1)/2, \quad N_1^e = (\xi + 1)/2, \quad N_2^e = -(\xi - 1)(\xi + 1). \quad (4.19)$$

Нетрудно видеть, что в данном случае параметр  $a_2^e$  приобретает конкретное смысловое значение, а именно равняется величине отклонения от линейной аппроксимации  $\hat{\varphi}$  в центре элемента, поскольку в этой точке  $N_2^e$  принимает значение единица.

Аналогично для кубического элемента к квадратичному представлению (4.18) требуется добавить слагаемое  $a_3^e N_3^e$ , где  $N_3^e$  — к-

бический многочлен вида

$$N_3^e = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \alpha_3 \xi^3, \quad (4.20)$$

принимающий нулевое значение при  $\xi = \pm 1$  (т. е. в узлах 0 и 1). Из бесконечного числа возможностей выберем кубический многочлен, изображенный на рис. 4.3, в. Он принимает нулевое значение в центре элемента, причем в этой точке  $dN_3^e/d\xi = 1$ . Можно сразу положить

$$N_3^e = \xi(1 - \xi^2), \quad (4.21)$$

поскольку такой кубический многочлен обладает требуемыми свойствами. Теперь параметр  $\alpha_3^e$  обозначает отклонение наклона в центре элемента от наклона предшествующей аппроксимации.

Отметим, что аналогичным образом можно определить иерархическую базисную функцию элемента четвертой степени

$$N_4^e = \xi^2(1 - \xi^2), \quad (4.22)$$

однако теперь придать физический смысл параметрам затруднительно (да и в этом и нет особой необходимости).

Как уже было указано, приведенная выше система базисных функций не единственна и существует много других возможностей. Другая удобная система иерархических функций определяется равенствами

$$N_p^e(\xi) = \begin{cases} (1/p!) (\xi^p - 1), & p \text{ чётно,} \\ (1/p!) (\xi^p - \xi), & p \text{ нечётно,} \end{cases} \quad (4.23)$$

где  $p (\geq 2)$  — степень используемого многочлена [ $N_0^e$  и  $N_1^e$  — те же, что и выше. — *Ред.*]. Это дает систему базисных функций элемента

$$\begin{aligned} N_2^e &= (1/2) (\xi^2 - 1), & N_3^e &= (1/6) (\xi^3 - \xi), \\ N_4^e &= (1/24) (\xi^4 - 1), & N_5^e &= (1/120) (\xi^5 - \xi). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Нетрудно видеть, что все производные от  $N_p^e$  второго и более высоких порядков принимают нулевое значение при  $\xi = 0$ , за исключением  $d^p N_p^e / d\xi^p$ , равной в этой точке единице. Следовательно, при использовании базисных функций вида (4.23) входящие в аппроксимацию параметры можно отождествить со значениями соответствующих производных:

$$\alpha_p^e = d^p \hat{\varphi} / d\xi^p |_{\xi=0}, \quad p \geq 2. \quad (4.25)$$

Такое отождествление придает им физический смысл, но, разумеется, никоим образом не является обязательным.

#### 4.5.3. Иерархические многочлены почти ортогональной формы

Как было отмечено выше, оптимальной формой иерархических функций будет та, которая приводит к диагональной системе

уравнений. В ряде случаев это можно осуществить или точно, или с хорошим приближением.

Во многих обсуждавшихся в предыдущих главах задачах компоненты матрицы элемента  $K^e$  имели вид

$$K_{lm}^e = \int_{\Omega^e} k \frac{dN_l^e}{dx} \frac{dN_m^e}{dx} dx = \frac{2}{h^e} \int_{-1}^1 k \frac{dN_l^e}{d\xi} \frac{dN_m^e}{d\xi} d\xi. \quad (4.26)$$

Если могут быть найдены системы базисных функций, содержащих соответствующие многочлены, для которых такие интегралы обращаются в нуль при  $l \neq m$ , то требуемая ортогональность достигнута и система алгебраических уравнений распадается.

Примером такой системы многочленов, обладающей свойством ортогональности на отрезке  $-1 \leq \xi \leq 1$ , является множество многочленов Лежандра  $P_p(\xi)$ , и базисные функции могут быть выражены через интегралы от этих многочленов. Многочлен Лежандра степени  $p$  определен формулой

$$P_p(\xi) = \frac{1}{(p-1)!} \frac{1}{2^{p-1}} \frac{d^p}{d\xi^p} [(\xi^2 - 1)^p]. \quad (4.27)$$

Взяв интеграл от этого многочлена при  $p = 1, 2, 3, 4$ , находим

$$\begin{aligned} N_2^e &= \xi^2 - 1, & N_3^e &= 2(\xi^3 - \xi), \\ N_4^e &= (1/4)(15\xi^4 - 18\xi^2 + 3), & N_5^e &= 7\xi^5 - 10\xi^3 + 3\xi. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Эти базисные функции отличаются от функций (4.24) до  $N_3^e$  включительно только постоянными множителями, но для  $p \geq 4$  различие становится значительным. Читатель может легко проверить ортогональность производных этих функций — свойство весьма полезное при вычислениях. Графики этих функций и их производных приведены на рис. 4.4.

**Пример 4.2.** Снова рассмотрим задачу, обсуждавшуюся в примере 4.1, но на этот раз для составления матриц элементов используем иерархический подход. Применим базисные функции, заданные формулами (4.28), и еще раз воспользуемся выражением для матриц элементов

$$K_{lm}^e = \int_{-1}^1 \left( \frac{2}{h^e} \frac{dN_l^e}{d\xi} \frac{dN_m^e}{d\xi} + \frac{h^e}{2} N_l^e N_m^e \right) d\xi.$$

Для различных степеней аппроксимации получаем следующие соотношения:

*Линейная*

$$\mathbf{k}^e \boldsymbol{\varphi}^e = \begin{bmatrix} \frac{1}{h^e} + \frac{h^e}{3} & -\frac{1}{h^e} + \frac{h^e}{6} \\ -\frac{1}{h^e} + \frac{h^e}{6} & \frac{1}{h^e} + \frac{h^e}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{bmatrix}.$$

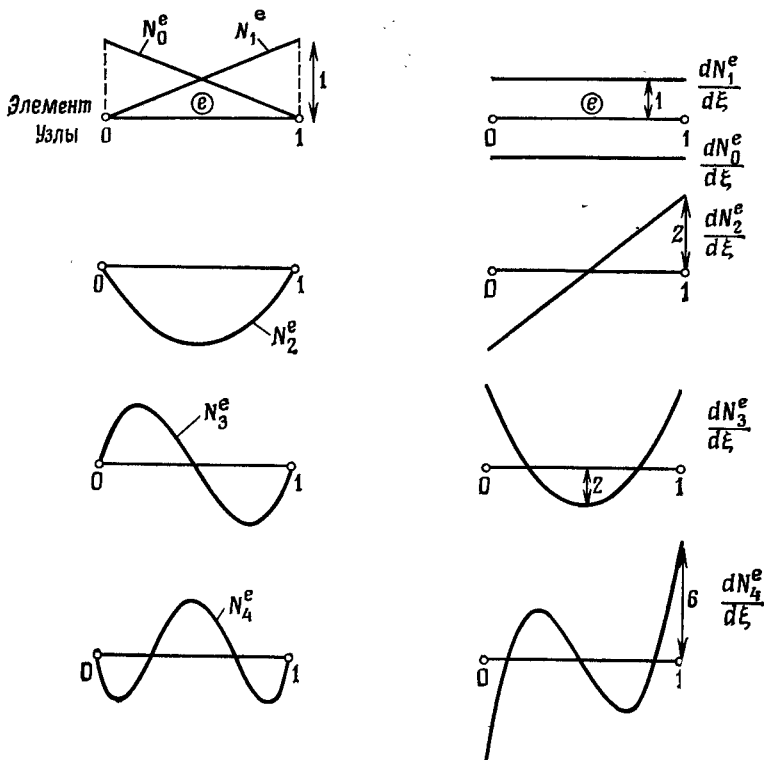


Рис. 4.4. Почти ортогональные иерархические базисные функции элемента и их производные.

Квадратичная

$$k^e \varphi^e = \begin{bmatrix} \frac{1}{h^e} + \frac{h^e}{3} & -\frac{1}{h^e} + \frac{h^e}{6} & -\frac{h^e}{3} \\ -\frac{1}{h^e} + \frac{h^e}{6} & \frac{1}{h^e} + \frac{h^e}{3} & -\frac{h^e}{3} \\ -\frac{h^e}{3} & -\frac{h^e}{3} & \frac{16}{3h^e} + \frac{8h^e}{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \alpha_2^e \end{bmatrix}$$

Кубическая

$$k^e \varphi^e = \begin{bmatrix} \frac{1}{h^e} + \frac{h^e}{3} & -\frac{1}{h^e} + \frac{h^e}{6} & -\frac{h^e}{3} & \frac{2h^e}{15} \\ -\frac{1}{h^e} + \frac{h^e}{6} & \frac{1}{h^e} + \frac{h^e}{3} & -\frac{h^e}{3} & -\frac{2h^e}{15} \\ -\frac{h^e}{3} & -\frac{h^e}{3} & \frac{16}{3h^e} + \frac{8h^e}{15} & 0 \\ \frac{2h^e}{15} & -\frac{2h^e}{15} & 0 & \frac{164}{5h^e} + \frac{32h^e}{105} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \alpha_2^e \\ \alpha_3^e \end{bmatrix}$$



Заметим теперь, что матрица каждой последующей аппроксимации содержит матрицы предыдущих аппроксимаций, причем зависимость между ними слабая. (Для данного примера имеет место приближенная ортогональность квадратичной и кубической аппроксимаций, однако полной ортогональности здесь нет, поскольку многочлены Лежандра обеспечивают, вообще говоря, только ортогональность производных, что проявляется в отсутствии членов вида  $1/h^e$  во внедиагональных элементах.)

Применяя еще раз общее выражение для нахождения одноэлементного решения задачи (т. е. при  $h^e = 1$ ), для квадратичной аппроксимации получаем

$$(16/3 + 8/15) a_2^e = 1/3,$$

что дает

$$a_2^e = 0.05682,$$

а для кубической аппроксимации

$$a_2^e = 0.05682, \quad a_3^e = 0.00403.$$

Вычисление приближения при  $x = 1/3$  и  $x = 2/3$  показывает, что достигаемая здесь точность совпадает с полученной в примере 4.1. В силу сказанного выше необходимо, однако, отметить простоту вычисления матриц и уменьшение влияния точности вычисления последовательных параметров.

## Упражнения

4.8. Повторить упражнение 4.1, используя иерархические квадратичные и кубические элементы.

4.9. В упражнении 1.2 найти распределение изгибающего момента, используя сначала два квадратичных, а затем два кубических иерархических элемента. Сравнить ответы с результатами, полученными в упражнении 4.6.

4.10. Повторить упражнение 4.7, используя иерархические элементы.

4.11. Найти приведенную матрицу элемента  $k^e$  из примера 4.2, используя иерархический элемент четвертой степени.

4.12. Вывести слабую форму уравнения метода взвешенных невязок для задачи об отклонении нагруженной балки на упругом основании, описанной в упражнении 1.20. Показать, что если решение ищется методом конечных элементов, то стандартная теория требует применения элементов с  $C^1$ -гладкостью. Найти кубические базисные функции для таких элементов, если аппроксимация на элементе берется в виде

$$\hat{\varphi}^e = \varphi_0 N_0^e + \varphi_1 N_1^e + d\varphi/dx|_0 M_0^e + d\varphi/dx|_1 M_1^e,$$

а узлы 0 и 1 находятся в концах элемента. Используя три равных элемента этого типа, получить как следствие решение упражнения 1.20. (Заметим, что  $N_0^e$  должно удовлетворять условиям  $N_0^e = 1$ ,  $dN_0^e/dx = 0$  при  $\xi = -1$  и  $N_0^e = dN_0^e/dx = 0$  при  $\xi = 1$ , тогда как для  $M_0^e$  должны выполняться условия  $M_0^e = 0$ ,  $dM_0^e/dx = 1$  при  $\xi = -1$  и  $M_0^e = dM_0^e/dx = 0$  при  $\xi = 1$ . Функции  $N_1^e$  и  $M_1^e$  определяются аналогично. Эти требования означают, что базисные функции могут быть выражены через многочлены Эрмита.)

### 4.6. Двумерные базисные функции высших степеней для прямоугольных конечных элементов

#### 4.6.1. Базисные функции стандартного типа для лагранжевых и серендиповых элементов

В § 3.7 уже рассматривался простой прямоугольный элемент с четырьмя узлами в углах. Стандартные базисные функции для этого элемента были получены просто как произведения соответствующих одномерных линейных базисных функций от  $x$  и  $y$  (рис. 4.5, а).

Ясно, что для таких элементов имеет место  $C^0$ -гладкость всех глобальных базисных функций, поскольку совпадение узловых

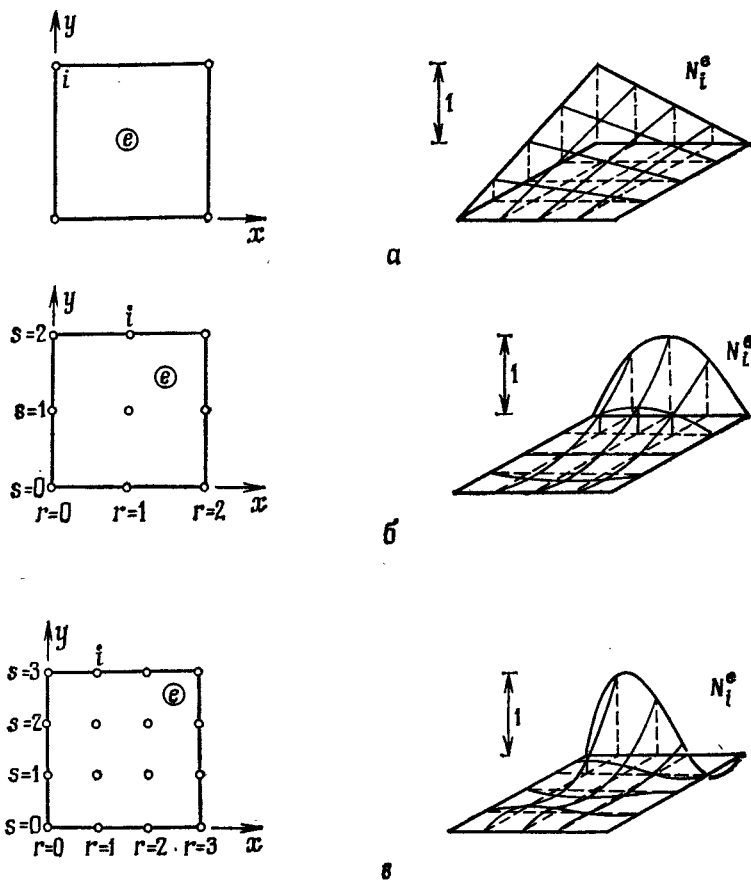


Рис. 4.5. Некоторые прямоугольные элементы и соответствующие им лагранжевы базисные функции.

значений в каждом из углов гарантирует однозначное линейное изменение вдоль любой стороны элемента.

Найти базисные функции высших степеней не составит никакого труда, если узлы элемента находятся в вершинах прямоугольной сетки. Например, для квадратичного элемента можно получить базисную функцию, соответствующую произвольному узлу сетки на рис. 4.5, б, перемножив отвечающие этому узлу стандартные одномерные базисные функции от  $x$  и  $y$ .

Действительно, если каждой точке сопоставить двойной индекс  $(r, s)$  (для квадратичного элемента  $r=0, 1, 2$ ;  $s=0, 1, 2$ ), то соответствующую узлу  $(r, s)$  базисную функцию элемента можно записать как

$$N_{rs}^e = \Lambda_r^p(x) \Lambda_s^p(y), \quad (4.29)$$

где для квадратичного элемента  $p=2$ . В приведенном соотношении  $\Lambda_r^p$  обозначает фундаментальный многочлен Лагранжа степени  $p$ , определенный равенством (4.10).

Приведенное выше соотношение является весьма общим: таким образом могут быть получены базисные функции элемента произвольной степени. На рис. 4.5, в показано соответствующее обобщение для кубического элемента. Отметим, что  $N_{rs}^e$  будет равно единице только в узле  $(r, s)$  и тождественно равно нулю во всех других узлах элемента.

Само собой разумеется, что для многочленных базисных функций элемента этого типа и произвольной степени обеспечена непрерывность глобальных базисных функций при переходе между соседними элементами, поскольку здесь ассоциируемого с каждой стороной числа параметров достаточно для однозначного определения многочлена. В свою очередь это гарантирует  $C^0$ -гладкость глобальной аппроксимации  $\hat{\phi}$ . Отметим, кроме того, что с другими элементами связаны только узлы вдоль сторон каждого элемента. Поэтому на элементном уровне внутренние узлы элемента могут быть исключены из матрицы элемента.

Интересно выяснить, какие члены входят в базисные функции элемента лагранжева типа степени  $p$ . Согласно (4.29), базисные функции получаются как произведения многочленов степени  $p$  отдельно от  $x$  и  $y$ . Ясно, что число членов в этом произведении превышает число членов, необходимое для воспроизведения многочлена степени  $p$  от  $x$  и  $y$ . На рис. 4.6, а построен известный треугольник Паскаля, по которому можно определить число членов в многочлене произвольной степени (например, 10 членов для кубического многочлена). На рис. 4.6, б выделены дополнительные шесть членов, появляющихся в кубической лагранжевой базисной функции определенного соотношением (4.29) типа. Это наводит на мысль, что число узлов, ассоциируемых с элементами более высоких степеней, можно уменьшить, попытавшись обеспе-

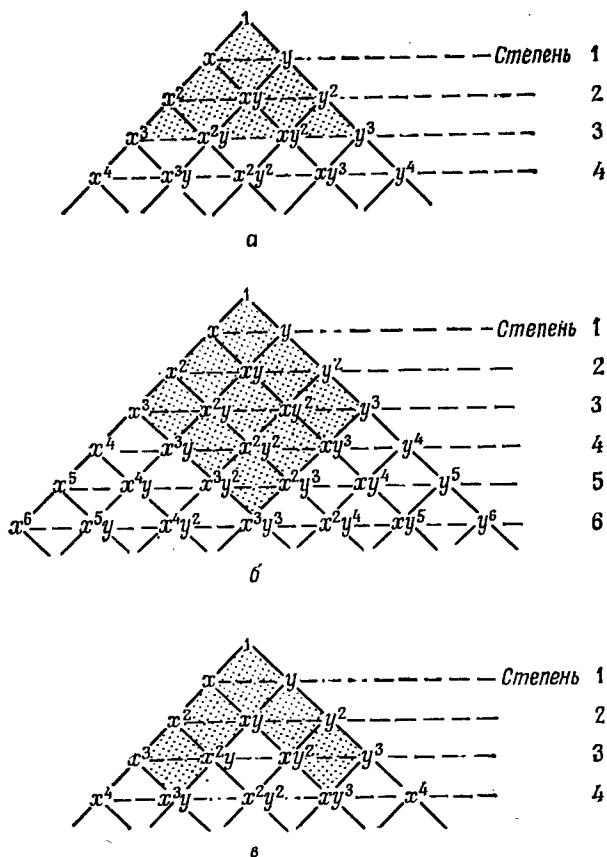


Рис. 4.6. *a* — треугольник Паскаля, где заштрихованные элементы образуют полный кубический многочлен; *б* — члены, образующие кубический лагранжев элемент; *в* — члены, образующие кубический серендипов элемент.

читать, чтобы базисные функции элемента в основном содержали бы только члены, входящие в многочлен соответствующей степени. С этой целью было получено семейство так называемых серендиповых элементов. Здесь узлы размещаются (по мере возможности) на границах элемента, а базисные функции получаются умножением членов степени  $p$  по одной переменной на линейные члены по другой переменной. Тогда на границах вид аппроксимации  $\hat{\phi}$  совпадает с получаемым для лагранжевых элементов и, таким образом, сохраняется  $C^0$ -гладкость аппроксимации.

Определим теперь две локальные нормированные координаты

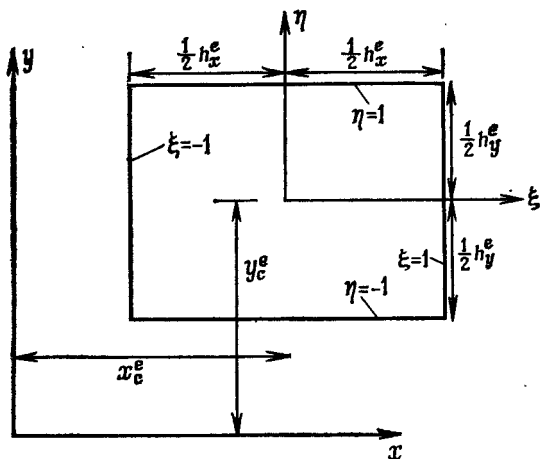


Рис. 4.7. Нормированные координаты  $(\xi, \eta)$  для прямоугольника в плоскости  $(x, y)$ .

элемента (см. рис. 4.7):

$$\begin{aligned}\xi &= 2(x - x_c^e)/h_x^e, & d\xi &= 2dx/h_x^e, \\ \eta &= 2(y - y_c^e)/h_y^e, & d\eta &= 2dy/h_y^e,\end{aligned}\quad (4.30)$$

где точка  $(x_c^e, y_c^e)$  — центр элемента в системе координат  $(x, y)$ .

Получение стандартной базисной функции серендипового типа для квадратичного элемента показано на рис. 4.8. Этот процесс почти не нуждается в пояснениях. Сначала, взяв соответствующий многочлен Лагранжа второй степени по одному направлению и умножив его на линейную функцию по другому направлению, непосредственно найдем базисные функции для узлов в серединах сторон. Это позволяет получить на сторонах многочлен нужной степени, и автоматически будет выполнено условие, что ассоциируемая с конкретным узлом базисная функция должна принимать значение единица в этом узле и равняться нулю во всех других узлах.

Для углового узла этот простой процесс не дает нужного результата, поскольку вдоль одной из сторон базисная функция будет отлична от нуля и поэтому в среднем узле этой стороны будет получаться ненулевое значение. Однако линейная комбинация билинейной базисной функции (3.45) и только что построенных для узлов в серединах сторон квадратичных базисных функций позволяет легко получить необходимую функцию.

Семейство серендиповых элементов показано на рис. 4.9, и ниже приведены базисные функции для первых трех его членов.

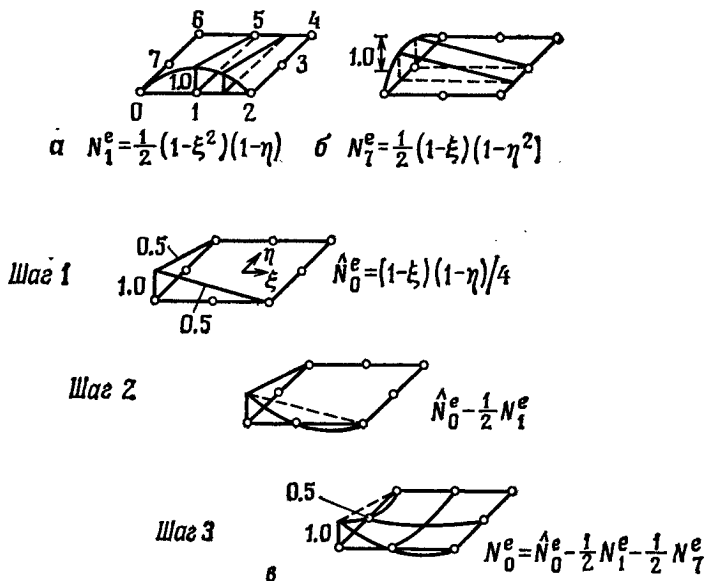


Рис. 4.8. Систематическое генерирование серендиповых базисных функций для прямоугольных элементов.

Чтобы не выписывать отдельное выражение для каждого узла, положим

$$\tilde{\xi}_l = \xi \xi_l, \quad \tilde{\eta}_l = \eta \eta_l, \quad (4.31)$$

где  $\xi_l$  и  $\eta_l$  — координаты узла  $l$ . Тогда базисные функции элемента запишутся следующим образом:

Для линейных элементов

$$N_l^e = (1/4)(1 + \tilde{\xi}_l)(1 + \tilde{\eta}_l), \quad l = 0, 1, 2, 3, \quad (4.32)$$

что совпадает с базисными функциями лагранжева элемента первой степени.

Для квадратичных элементов

Угловой узел  $N_l^e = (1/4)(1 + \tilde{\xi}_l)(1 + \tilde{\eta}_l)(\tilde{\xi}_l + \tilde{\eta}_l - 1),$   
 $l = 0, 2, 4, 6. \quad (4.33a)$

Узел в середине стороны  $N_l^e = (1/2)(1 - \xi^2)(1 + \tilde{\eta}_l), \quad l = 1, 5,$   
 $N_l^e = (1/2)(1 + \tilde{\xi}_l)(1 - \eta^2), \quad l = 3, 7. \quad (4.33b)$

Для кубических элементов

Угловой узел  $N_l^e = (1/32)(1 + \tilde{\xi}_l)(1 + \tilde{\eta}_l)[-10 + 9(\xi^2 + \eta^2)],$   
 $l = 0, 3, 6, 9, \quad (4.34a)$

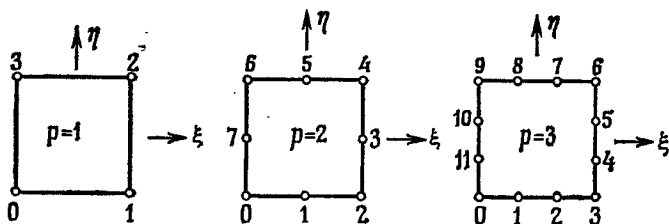


Рис. 4.9. Семейство серендиповых элементов. При  $p \geq 4$  требуются внутренние параметры.

Узел в середине стороны  $N_l^e = (9/32) (1 + \bar{\xi}_l) (1 - \eta^2) (1 + 9\bar{\eta}_l)$ ,  
 $l = 4, 5, 10, 11, (4.346)$

причем базисные функции, отвечающие оставшимся средним узлам сторон, получаются из этих выражений простой перестановкой переменных  $\xi$  и  $\eta$ . Члены, входящие тогда в аппроксимацию  $\hat{\phi}^e$  на типичном кубическом серендиповом элементе, показаны в треугольнике Паскаля на рис. 4.6, в.

Здесь целесообразно отметить, что число многочленных компонент, которые могут быть получены с помощью использования только граничных узлов, недостаточно, чтобы дать полное многочленное представление для  $\hat{\phi}^e$  при  $p \geq 4$ . Следовательно, для таких элементов высших степеней необходимо опять ввести внутренние узлы или просто соответствующую иерархическую степень свободы типа описываемой в следующем разделе.

#### 4.6.2. Базисные функции иерархического типа

При имеющемся наборе одномерных иерархических базисных функций генерирование иерархических базисных функций для прямоугольных элементов почти тривиально, поскольку:

- 1) функции для угловых узлов совпадают со стандартными билинейными функциями;
- 2) произведение иерархических функций типа определенных в разд. 4.5.2 и 4.5.3 в угловых узлах всегда равно нулю.

Отождествление (или увязывание) значений иерархических переменных, ассоциируемых с каждой стороной элемента, с теми же самыми значениями на соседнем элементе будет автоматически обеспечивать единственность аппроксимации  $\hat{\phi}$  вдоль этой стороны и гарантировать  $C^0$ -гладкость. Приемлемым оказывается любое произведение одномерной иерархической функции с локальной переменной вдоль стороны элемента, скажем  $\xi$ , и линейной (или иерархической) функции от другой локальной переменной элемента, скажем  $\eta$ ; многочленные компоненты (любой степени) могут быть получены образованием таких простых произведений. Например,

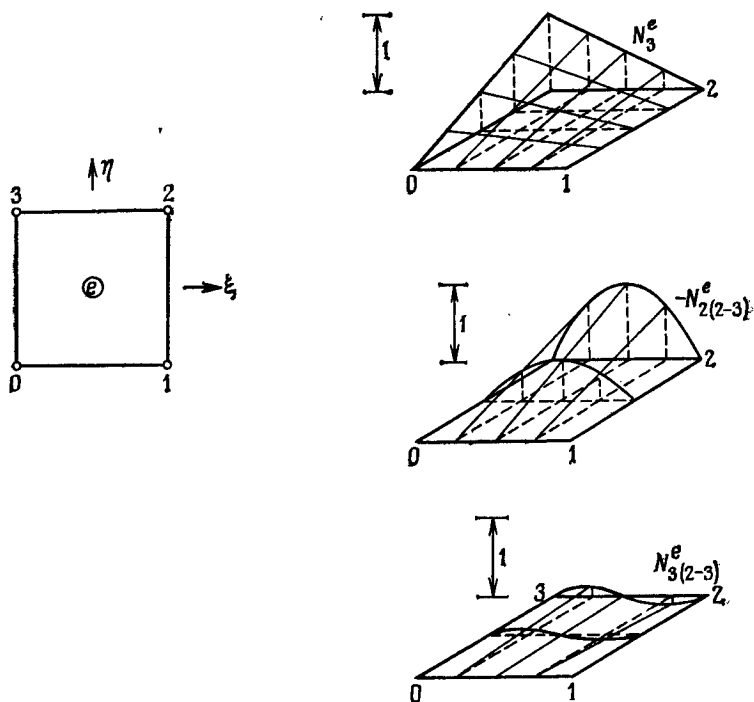


Рис. 4.10. Иерархические базисные функции для прямоугольного элемента.

используя одномерные функции (4.28), базисные функции для элемента, показанного на рис. 4.10, можно записать следующим образом:

Типичный  
угловой  
узел

$$N_3^e(\xi, \eta) = (1/4)(1 + \eta)(1 - \xi). \quad (4.35a)$$

Типичная  
сторона 2—3

$$\begin{aligned} N_{2(2-3)}^e(\xi, \eta) &= (1/4)(1 + \eta)(\xi^2 - 1), \\ N_{3(2-3)}^e(\xi, \eta) &= (1/6)(1 + \eta)(\xi^3 - \xi), \end{aligned} \quad (4.35b)$$

причем этот процесс может быть продолжен до любой нужной степени.

Как уже было указано применительно к серендиповым элементам, чтобы получить представление для  $\hat{\varphi}^e$ , которое является полным для степени  $p \geq 4$ , необходимо добавить базисные функции, ассоциируемые с параметром, не включенным в связи между элементами. Например, подходящей оказывается базисная функция

$$N_{2(l)}^e = (1/4)(\xi^2 - 1)(\eta^2 - 1), \quad (4.36)$$



которую можно использовать для добавления члена  $\xi^2\eta^2$  в выражение для  $\hat{\phi}$ .

Следует, между прочим, отметить, что при использовании иерархических элементов добавление многочленных компонент очень легко осуществить локально, чтобы добиться уточнения в области, где неизвестная функция изменяется особенно быстро и, следовательно, аппроксимация может давать наибольшие погрешности.

Вопрос о введении таких уточнений на конечно-элементной сетке затрагивается в последней главе, где обсуждаются так называемые процессы адаптивного уточнения.

Нумерация узлов и иерархических параметров в некоторой логической последовательности представляет интересную вычислительную задачу, поскольку обозначение, соответствующее иерархической степени свободы, может быть ассоциировано как со стороной элемента, так и с самим элементом.

## 4.7. Двумерные базисные функции для треугольников

### 4.7.1. Стандартные базисные функции; координаты площади<sup>1)</sup>

Если рассмотреть семейство треугольников произвольного вида (рис. 4.11) при условии, что узлы располагаются согласно модели треугольника Паскаля (рис. 4.6), т. е. в точках пересечения семейства прямых, проведенных параллельно сторонам треугольника, то каждый раз число полученных таким образом узлов оказывается как раз достаточным, чтобы генерировать семейство полных многочленов. Это обстоятельство в сочетании с простотой достаточно хорошей аппроксимации областей произвольной формы набором треугольников объясняет популярность выбора треугольных элементов при решении задач с двумя пространственными переменными.

Прежде чем переходить к обсуждению деталей, касающихся возможных базисных функций, желательно определить для таких элементов «естественную» систему координат. Такая удобная система координат  $L_0$ ,  $L_1$  и  $L_2$  может быть определена для элемента просто записью линейной зависимости между этими координатами и декартовыми координатами в виде

$$\begin{aligned}x &= L_0x_0 + L_1x_1 + L_2x_2, \\y &= L_0y_0 + L_1y_1 + L_2y_2, \\1 &= L_0 + L_1 + L_2.\end{aligned}\tag{4.37}$$

Здесь узлы с номерами 0, 1, 2 помещены в вершинах треугольника, а  $(x_i, y_i)$  — декартовы координаты узла  $i$ .

<sup>1)</sup> В отечественной литературе используются также термины «треугольные координаты» или «барицентрические координаты», — *Прим. перев.*

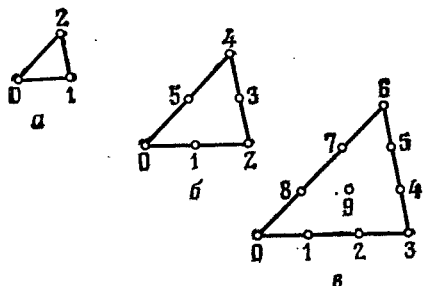


Рис. 4.11. Семейство стандартных треугольных элементов: линейный (а), квадратичный (б) и кубический (в).

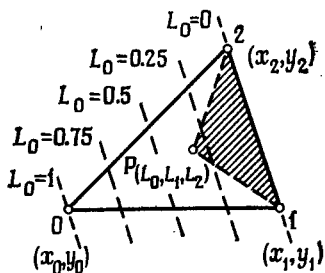


Рис. 4.12. Координаты площади для треугольного элемента.

Сразу видно, что  $L_0$  должна быть функцией, принимающей нулевое значение в вершинах 1 и 2 и значение единица в вершине 0—совершенно так же, как базисная функция для линейного элемента. Линии уровня этой функции показаны на рис. 4.12. Значение  $L_0$  в любой точке  $P$  фактически может быть определено как отношение площадей двух треугольников, т. е.

$$L_0|_P = \text{площадь } (P12) / \text{площадь } (012), \quad (4.38)$$

откуда и следует название «координаты площади» для системы  $(L_0, L_1, L_2)$ .

Соотношения (4.37) позволяют установить прямую зависимость координат площади  $(L_0, L_1, L_2)$  и декартовых координат  $(x, y)$ , поскольку

$$\begin{aligned} L_0 &= (\alpha_0^e + \beta_0^e x + \gamma_0^e y) / (2\Delta^e), \\ L_1 &= (\alpha_1^e + \beta_1^e x + \gamma_1^e y) / (2\Delta^e), \\ L_2 &= (\alpha_2^e + \beta_2^e x + \gamma_2^e y) / (2\Delta^e), \end{aligned} \quad (4.39)$$

где

$$\Delta^e = \frac{1}{2} \det \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \text{площадь } (012) \quad (4.40a)$$

и

$$\alpha_0^e = x_1 y_2 - x_2 y_1, \quad \beta_0^e = y_1 - y_2, \quad \gamma_0^e = x_2 - x_1, \quad (4.40b)$$

причем следует отметить соответствие с формулами (3.27).

Таким образом, для линейного треугольника с тремя базисными узлами функции элемента могут быть определены просто как

$$N_0^e = L_0, \quad N_1^e = L_1, \quad N_2^e = L_2. \quad (4.41)$$

Для треугольника общего вида с размещением узлов, как на рис. 4.13, выражение для базисной функции элемента, ассоции-

руемой с узлом  $i$  и обозначаемой числами  $I, J, K$  в системе координат  $(L_0, L_1, L_2)$ , можно записать в виде

$$N_i^e = \Lambda_I^I(L_0) \Lambda_J^J(L_1) \Lambda_K^K(L_2), \quad (4.42)$$

где  $\Lambda_I^I, \Lambda_J^J, \Lambda_K^K$  — фундаментальные многочлены Лагранжа, определенные равенством (4.10).

Это выражение отнюдь не очевидно. Читатель, однако, может легко проверить его справедливость, заметив, что

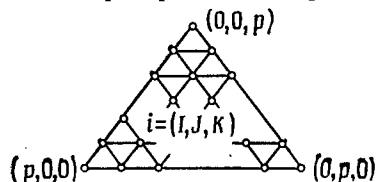


Рис. 4.13. Стандартный треугольный элемент общего вида.

1) из определения фундаментальных многочленов Лагранжа следует, что  $N_i^e = 1$  в узле  $i$  и  $N_i^e = 0$  во всех других узлах элемента;

2) так как  $I + J + K = p$  для данной триангуляции постоянно, то слагаемое наивысшей степени в  $N_i^e$  будет иметь вид  $L_0^I L_1^J L_2^K$  и поэтому в силу линейных соотношений (4.39) является многочленом степени  $p$  от  $x$  и  $y$ .

На рис. 4.14 показаны типичные базисные функции этого вида для линейных и квадратичных элементов.

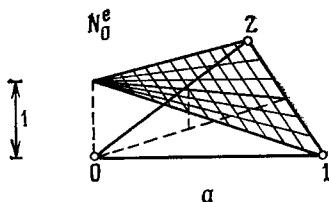
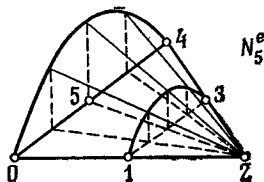
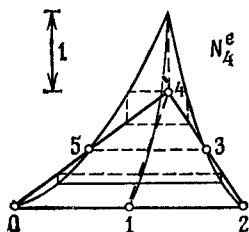


Рис. 4.14. Треугольные элементы и ассоциируемые с ними стандартные базисные функции линейного (а) и квадратичного (б) вида.



## 4.7.2. Базисные функции иерархического типа

Для треугольных элементов иерархические базисные функции с  $C^0$ -гладкостью находятся удивительно просто [2].

Возвращаясь к рис. 4.12, заметим, что  $L_0$  вдоль стороны 1—2 треугольника тождественно равна нулю, и, следовательно, в силу уравнений (4.37)

$$[L_1 + L_2]_{1-2} = 1. \quad (4.43)$$

Если  $\xi$  — обычная безразмерная локальная координата элемента типа использовавшейся при получении иерархических функций для одномерных элементов, измеряемая вдоль стороны 1—2 (рис. 4.12), то можно записать

$$L_1|_{1-2} = (1 - \xi)/2, \quad L_2|_{1-2} = (1 + \xi)/2, \quad (4.44)$$

откуда следует, что

$$\xi = (L_2 - L_1)_{1-2}. \quad (4.45)$$

Это наводит на мысль, что на треугольнике иерархические базисные функции можно было бы генерировать с помощью обобщения полученных ранее видов одномерных базисных функций. Например, используя выражения (4.23), ассоциируем со стороной 1—2

многочлен степени  $p$  ( $\geq 2$ ), определенный по правилу

$$N_{p(1-2)}^e = \begin{cases} \frac{1}{p!} [(L_2 - L_1)^p - (L_1 + L_2)^p], & p \text{ четно,} \\ \frac{1}{p!} [(L_2 - L_1)^p - (L_2 - L_1)(L_1 + L_2)^{p-1}], & p \text{ нечетно.} \end{cases} \quad (4.46)$$

Из соотношений (4.44) следует, что эти базисные функции равны нулю в узлах 1 и 2. Кроме того, нетрудно показать, что  $N_{p(1-2)}^e$  будет все время равна нулю на сторонах треугольника 0—1 и 0—2, и, таким образом, обеспечивается  $C^0$ -гладкость аппроксимации  $\hat{\phi}$ .

Следует отметить, что в этом случае при  $p \geq 3$  число иерархических функций, соответствующих узлам на сторонах элемента, недостаточно для определения полного многочлена степени  $p$  и требуются внутренние иерархические функции, тождественно равные нулю на границах; например, при  $p = 3$  можно было использовать функцию  $L_0 L_1 L_2$ , тогда как при  $p = 4$  можно было ввести три дополнительные функции  $L_0^2 L_1 L_2$ ,  $L_0 L_1^2 L_2$ ,  $L_0 L_1 L_2^2$ .

На рис. 4.15 показаны типичные иерархические линейная, квадратичная и кубическая базисные функции для треугольного элемента. Аналогичные иерархические базисные функции можно получить, исходя из альтернативной системы одномерных базисных функций, определенных равенствами (4.28).

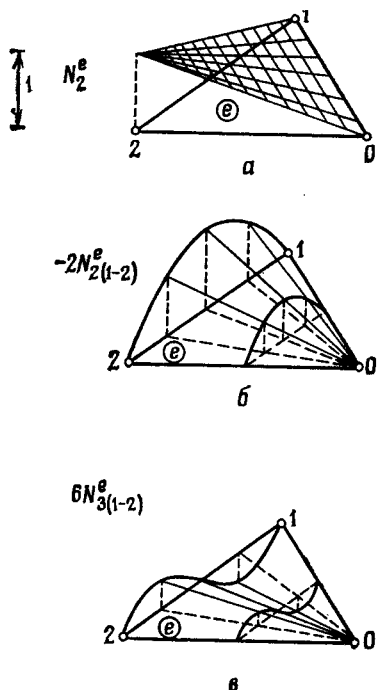


Рис. 4.15. Треугольные элементы и ассоциируемые с ними иерархические базисные функции линейного (а), квадратичного (б) и кубического (в) вида.

#### 4.8. Трехмерные базисные функции

Развитые в этой главе общие процедуры для одномерных и двумерных элементов легко приспособить для трехмерных элементов в виде правильных шестигранников или четырехгранников. Опять могут быть получены стандартные или иерархические базисные функции. Единственная деталь, которой получение таких функций незначительно отличается от предшествующего анализа, состоит в необходимости введения переменных для граней помимо переменных для ребер и элемента. На рис. 4.16 показаны типичные трехмерные элементы серендипова семейства. Читатель может попрактиковаться в нахождении соответствующих базисных функций элементов, решив упражнения в конце этой главы.

#### 4.9. Заключительные замечания

В этой главе было показано, как непосредственно получить базисные функции высших степеней для геометрически простых элементов. В частности, внимание читателя было привлечено к иерархическим формам, которые обладают важными достоинствами простоты и вычислительной легкости. По этой причине читателю еще придется столкнуться в дальнейшем (в конечно-элементных программах) с такими формами.

Очевидно, что для элементов фиксированного вида при последовательном возрастании степени многочлена  $p$  будет иметь место сходимость ( $p$ -сходимость). Однако отнюдь не ясно, будет ли эта сходимость быстрее, чем получаемая для элементов фиксированной степени при последовательном уменьшении величины  $h$  ( $h$ -сходимость). Недавние исследования показывают, что если сравнение производится при общем числе неизвестных параметров  $M$ , то скорость  $p$ -сходимости всегда выше. Этот факт может быть установлен из рассмотрения некоторых приведенных выше примеров,

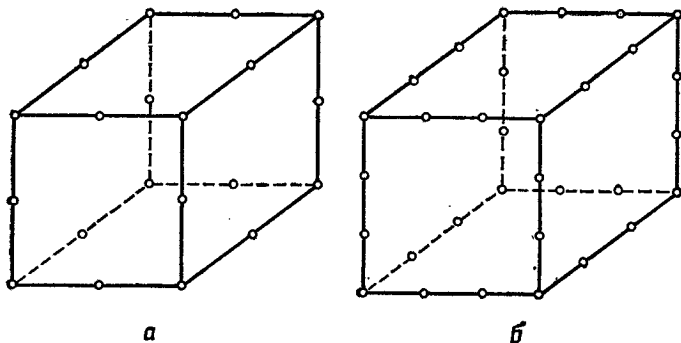


Рис. 4.16. Стандартные трехмерные серендиповы элементы квадратичного (а) и кубического (б) вида.

но его формальное доказательство представляется затруднительным<sup>1)</sup>.

На практике всегда необходим компромисс, поскольку малые элементы могут быть необходимы для моделирования границ и неоднородностей задачи. Таким образом, оптимальным выбором часто являются многочлены второй и третьей степени.

### Упражнения

4.13. Повторить упражнение 3.13, используя а) четыре квадратных серендиповых квадратичных элемента и б) четыре квадратных иерархических квадратичных элемента.

4.14. В упражнении 3.13 вычислить матрицы элемента для а) лагранжева кубического элемента и б) иерархического кубического элемента.

4.15. Решить задачу кручения из примера 1.5, исследуя четвертую часть сечения с двумя равными иерархическими квадратичными элементами.

4.16. Найти базисные функции для стандартного квадратичного элемента. Повторить задачу кручения из примера 1.5, используя сетку, состоящую из двух таких элементов. (Указание. Можно использовать формулу

$$\int_{\Delta^e} L_0^I L_1^J L_2^K d\Omega = \frac{|J|!|K|!}{(I+J+K+2)!} 2\Delta^e,$$

4.17. Пусть в упражнении 3.18 элементы 1 и 4 рассматриваются как квадратичные треугольные элементы, тогда как элементы 2 и 4 заменяются одним квадратичным серендиповым элементом. Составить результирующую систему уравнений для аппроксимации стационарного распределения температуры.

4.18. Вывести слабую форму уравнения метода извешенных невязок для описанной в упражнении 1.21 задачи об отклонении однородной тонкой упругой пластины. Показать, что если решение ищется методом конечных элементов, то стандартная теория требует элементов с  $C^1$ -гладкостью. Найти базис-

<sup>1)</sup> Не исключено, что в столь общей форме последнее утверждение вообще не может быть доказано.—Прим. ред.

ные функции элемента для прямоугольного кубического элемента с четырьмя узлами, обеспечивающего гладкость  $\hat{\phi}$ ,  $\partial\hat{\phi}/\partial x$ ,  $\partial\hat{\phi}/\partial y$ ,  $\partial^2\hat{\phi}/\partial x \partial y$  при переходе через границы элемента, и вычислить результирующие матрицы элементов. (Указание. Использовать базисные функции элемента, являющиеся произведениями многочленов Эрмита введенного в упражнении 4.12 вида.)

4.19. Повторить упражнение 3.19 для случая линейного треугольного элемента с тремя узлами и сравнить результаты с полученными в разд. 3.8.1. (Можно использовать формулу интегрирования из упражнения 4.16.)

4.20. Найти базисные функции элемента для а) квадратичных и кубических трехмерных серендиповых элементов, показанных на рис. 4.16, и б) стандартных квадратичных и кубических четырехгранных элементов. В случае а) вычислить соответствующие матрицы элементов для трехмерной задачи стационарной теплопроводности.

4.21. Найти иерархические базисные функции элемента для а) квадратичных и кубических шестигранных элементов и б) квадратичных и кубических четырехгранных элементов. В случае а) вычислить соответствующие матрицы элементов для трехмерной задачи стационарной теплопроводности.

## Литература

[1] Conte S. D., de Boor C. Elementary numerical analysis. — 2nd ed. — New York: McGraw-Hill, 1972.

[2] Peano A., Riccioni R., Pasini A., Sardella L. Adaptive approximations in finite element structural analysis. — Bergamo: ISMES, 1978.

## Рекомендуемая литература

Becker E. B., Carey G. F., Oden J. T. Finite elements: An introduction. Vol. 1. — Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1981.

Davies A. J. The finite element method. — Oxford: Clarendon Press, 1980.

Fried I. Numerical solution of differential equations. — New York: Academic Press, 1979.

Hinton E., Owen D.R.J. An introduction to finite element computations. — Swansea: Pineridge Press, 1979.

Zienkiewicz O., C. The finite element method. — 3rd ed. — London: McGraw-Hill, 1977.

## ОТОБРАЖЕНИЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

## 5.1. Понятие отображения

## 5.1.1. Общие замечания

Высокая степень точности, которая может быть достигнута с помощью введенных в предыдущей главе элементов высших степеней, означает, что приемлемые для практических целей решения часто могут быть получены при использовании весьма небольшого числа таких элементов. К сожалению, простота форм рассматривавшихся до сих пор элементов несколько ограничивает их применение при анализе практических задач, где часто требуется моделировать границы весьма сложного вида. Это ограничение было бы снято, если бы можно было «отобразить» простой элемент типа прямоугольника в локальной системе координат  $(\xi, \eta)$  в более сложную фигуру в глобальной системе координат  $(x, y)$ . Под *отображением* здесь понимается единственное взаимно-однозначное соответствие между координатами  $(\xi, \eta)$  и  $(x, y)$ . Характерные особенности такого преобразования квадратного элемента приведены на рис. 5.1, где показано, как происходит непрерывное искривление координатных прямых в плоскости  $(\xi, \eta)$ .

Читатель знаком, например, со связью между полярными и декартовыми координатами

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta. \quad (5.1)$$

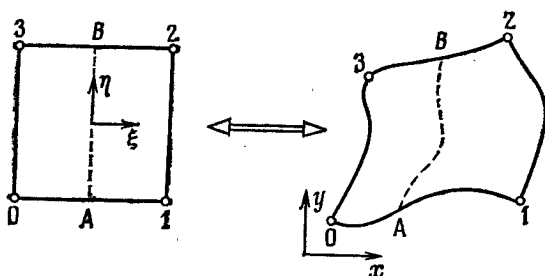
Это преобразование является не чем иным, как отображением, переводящим прямоугольник в плоскости  $(r, \theta)$  в область на плоскости  $(x, y)$ , изображенную на рис. 5.2.

Отображение обычно описывается некоторой функциональной зависимостью между двумя системами координат, которая в общем виде может быть выражена как

$$x = f_1(\xi, \eta), \quad y = f_2(\xi, \eta). \quad (5.2)$$

Если взят конкретный вид отображения и для каждого элемента координаты выбраны таким образом, что происходит их отображение в соприкасающиеся области, то базисные функции, записанные для локальной области  $(\xi, \eta)$  элемента, могут быть использованы для представления изменения функции на элементе в глобальной области  $(x, y)$  без нарушения межэлементных требований непрерывности.



Рис. 5.1. Общее отображение квадратного элемента в плоскости  $(\xi, \eta)$ .

При вычислении матриц элементов для различных дифференциальных уравнений, с которыми мы до сих пор имели дело, необходимо было найти производные от базисных функций по координатам  $(x, y)$ . Чтобы облегчить отыскание таких производных, заметим, что в предыдущей главе были определены базисные функции прямоугольного элемента в локальной системе координат  $(\xi, \eta)$  элемента, а именно  $N_i^e = N_i^e(\xi, \eta)$ . Согласно правилу дифференцирования сложной функции, всегда можно записать<sup>1)</sup>

$$\frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad (5.3)$$

и искомые производные  $\partial N_i^e / \partial x$  и  $\partial N_i^e / \partial y$  могут быть получены отсюда по правилу

$$\begin{bmatrix} \partial N_i^e / \partial x \\ \partial N_i^e / \partial y \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \partial N_i^e / \partial \xi \\ \partial N_i^e / \partial \eta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial y / \partial \xi \\ \partial x / \partial \eta & \partial y / \partial \eta \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

при условии, что матрица Якоби преобразования  $\mathbf{J}$  не вырождена.

Например, при переходе от полярных к декартовым координатам, задаваемом равенствами (5.1), имеем

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (5.5a)$$

и, таким образом,

$$\begin{bmatrix} \partial N_i^e / \partial x \\ \partial N_i^e / \partial y \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \partial N_i^e / \partial r \\ \partial N_i^e / \partial \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -(\sin \theta) / r \\ \sin \theta & (\cos \theta) / r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial N_i^e / \partial r \\ \partial N_i^e / \partial \theta \end{bmatrix}. \quad (5.5b)$$

Кроме того, компоненты матриц элементов (см., например, равенства (3.36)) обычно выражаются через интегралы в координатах  $(x, y)$ , и было бы полезно перейти в этих интегралах к ло-

<sup>1)</sup> В случае трех измерений аналогичные преобразования записываются просто с помощью добавления еще одной независимой переменной.

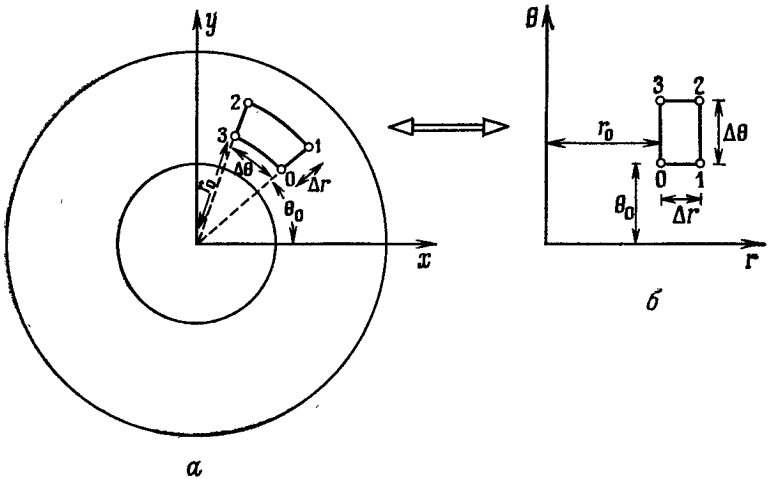


Рис. 5.2. Соответствие между декартовыми координатами  $(x, y)$  и полярными координатами  $(r, \theta)$ .

кальным координатам элемента  $(\xi, \eta)$ . Таким образом, элемент площади  $dx dy$  следует заменить эквивалентным элементом в системе координат  $(\xi, \eta)$ . Без доказательства [1]<sup>1)</sup> приведем соотношение

$$dx dy = \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta, \quad (5.6)$$

дающее в случае полярных координат, согласно (5.5а), известный результат

$$dx dy = r dr d\theta. \quad (5.7)$$

Теперь очевидно, что любой интеграл вида

$$I = \int_{\Omega^e} k(\partial N_i^e / \partial x) (\partial N_m^e / \partial x) dx dy \quad (5.8a)$$

можно преобразовать в интеграл по квадрату

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 k(\partial N_i^e / \partial x) (\partial N_m^e / \partial x) \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta, \quad (5.8b)$$

где  $\partial N_i^e / \partial x$  и  $\partial N_m^e / \partial x$  представляются функциями от  $\xi$  и  $\eta$  с помощью соотношений (5.4). Если эти интегралы достаточно просты, то таким образом можно вычислить все требующиеся при конечно-элементной аппроксимации матрицы элементов.

Теперь уже ясно, как практически использовать отображение при конечно-элементном анализе. Элементы могут быть определены их декартовыми координатами в плоскости  $(x, y)$ . Затем к каж-

<sup>1)</sup> См. также любой курс математического анализа. — Прим. ред.

дому элементу применяется отображение и результирующие матрицы элементов получаются использованием выражений типа приведенных в (5.8). После этого ансамблирование и решение задачи осуществляются с помощью в точности тех же самых процедур, что и для простых элементов.

**Пример 5.1.** В этом примере будет снова рассмотрена обсуждавшаяся в гл. 3 задача теплопроводности, описываемая общим уравнением (3.31) с полными матрицами элементов, заданными равенствами (3.36). Предположим, что исследуемая область лежит между двумя концентрическими окружностями радиусами  $r = a$  и  $r = b$ . Тогда для представления области в плоскости  $(x, y)$  удобно использовать простые секционные элементы. На рис. 5.2, а показан типичный элемент, ограниченный линиями  $\theta = \theta_0$ ,  $\theta = \theta_0 + \Delta\theta$ ,  $r = r_0$ ,  $r = r_0 + \Delta r$ , с узлами в углах 0, 1, 2 и 3. Прямоугольный элемент, получающийся при применении к этому элементу отображения в плоскость  $(r, \theta)$ , задаваемого соотношениями (5.1), изображен на рис. 5.2, б. Применение линейного отображения

$$\xi = 2(r - r_0)/\Delta r - 1, \quad \eta = 2(\theta - \theta_0)/\Delta\theta - 1$$

гарантирует, что отображенный элемент будет квадратом  $-1 \leq \xi, \eta \leq 1$ . На этом квадрате можно использовать простые билинейные базисные функции от  $\xi$  и  $\eta$ . Покажем теперь, как получаются компоненты первой строки приведенной матрицы элемента  $k^e$ . Компоненты этой строки в явном виде задаются формулой (см. равенство (3.44))

$$k_{0m}^e = \int_{\xi^e} \left( \frac{\partial N_0^e}{\partial x} k \frac{\partial N_m^e}{\partial x} + \frac{\partial N_0^e}{\partial y} k \frac{\partial N_m^e}{\partial y} \right) dx dy, \quad m = 0, 1, 2, 3.$$

Соответствующие базисные функции элемента на квадрате  $(\xi, \eta)$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} N_0^e &= (1 - \xi)(1 - \eta)/4, & N_1^e &= (1 + \xi)(1 - \eta)/4, \\ N_2^e &= (1 + \xi)(1 + \eta)/4, & N_3^e &= (1 - \xi)(1 + \eta)/4, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_0^e}{\partial r} &= -(1 - \eta)/(2\Delta r), & \frac{\partial N_0^e}{\partial \theta} &= -(1 - \xi)/(2\Delta\theta), \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial r} &= (1 - \eta)/(2\Delta r), & \frac{\partial N_1^e}{\partial \theta} &= -(1 + \xi)/(2\Delta\theta), \\ \frac{\partial N_2^e}{\partial r} &= (1 + \eta)/(2\Delta r), & \frac{\partial N_2^e}{\partial \theta} &= (1 + \xi)/(2\Delta\theta), \\ \frac{\partial N_3^e}{\partial r} &= -(1 + \eta)/(2\Delta r), & \frac{\partial N_3^e}{\partial \theta} &= (1 - \xi)/(2\Delta\theta). \end{aligned}$$

Зависимость между производными по  $x$  и  $y$ , входящими в выписанный выше интеграл, и производными по  $r$  и  $\theta$  следует из со-

отношений (5.5) и, например, в данном случае дает

$$\begin{aligned} \partial N_0^e / \partial x &= \cos \theta \partial N_0^e / \partial r - (\sin \theta / r) \partial N_0^e / \partial \theta, \\ \partial N_0^e / \partial y &= \sin \theta \partial N_0^e / \partial r + (\cos \theta / r) \partial N_0^e / \partial \theta. \end{aligned}$$

Наконец, используя равенство (5.7), имеем

$$\begin{aligned} k_{00}^e &= \frac{\Delta r \Delta \theta}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 k \left[ \left( \cos \theta \frac{\partial N_0^e}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial N_0^e}{\partial \theta} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left( \sin \theta \frac{\partial N_0^e}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial N_0^e}{\partial \theta} \right)^2 \right] r d\xi d\eta, \\ k_{01}^e &= \frac{\Delta r \Delta \theta}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 k \left[ \left( \cos \theta \frac{\partial N_0^e}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial N_0^e}{\partial \theta} \right) \left( \cos \theta \frac{\partial N_1^e}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial N_1^e}{\partial \theta} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left( \sin \theta \frac{\partial N_0^e}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial N_0^e}{\partial \theta} \right) \left( \sin \theta \frac{\partial N_1^e}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial N_1^e}{\partial \theta} \right) \right] r d\xi d\eta, \\ k_{02}^e &= \frac{\Delta r \Delta \theta}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 k \left[ \left( \cos \theta \frac{\partial N_0^e}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial N_0^e}{\partial \theta} \right) \left( \cos \theta \frac{\partial N_2^e}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial N_2^e}{\partial \theta} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left( \sin \theta \frac{\partial N_0^e}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial N_0^e}{\partial \theta} \right) \left( \sin \theta \frac{\partial N_2^e}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial N_2^e}{\partial \theta} \right) \right] r d\xi d\eta, \\ k_{03}^e &= \frac{\Delta r \Delta \theta}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 k \left[ \left( \cos \theta \frac{\partial N_0^e}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial N_0^e}{\partial \theta} \right) \left( \cos \theta \frac{\partial N_3^e}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial N_3^e}{\partial \theta} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left( \sin \theta \frac{\partial N_0^e}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial N_0^e}{\partial \theta} \right) \left( \sin \theta \frac{\partial N_3^e}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial N_3^e}{\partial \theta} \right) \right] r dr d\eta, \end{aligned}$$

где  $r = r_0 + (\xi + 1) \Delta r / 2$  и  $\theta = \theta_0 + (\eta + 1) \Delta \theta / 2$ .

Хотя вычисления и оказываются достаточно сложными, в § 5.2 будет показано, как можно просто организовать вычисление выражений такого вида на ЭВМ. Отметим, что использованные секционные элементы находят значительное практическое применение.

### 5.1.2. Параметрическое отображение

Весьма удобной формой отображения элемента является его параметрическое отображение, когда зависимость между локальными координатами элемента  $(\xi, \eta)$  и глобальными координатами  $(x, y)$  записывается с использованием интерполяции того же вида, что и применяемая для аппроксимации неизвестной функции  $\varphi$ . Если  $N_i^e(\xi, \eta)$  — стандартный тип конечно-элементной базисной функции для элемента с  $M + 1$  узлами в локальной области, то реализующую отображение зависимость (5.2) для каждого элемента

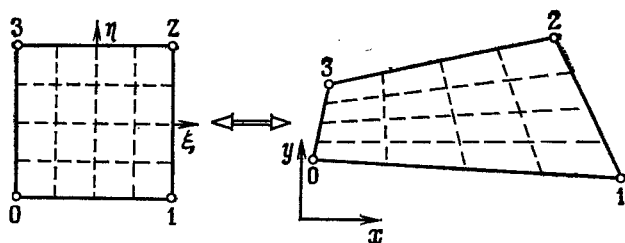


Рис. 5.3. Линейное изопараметрическое отображение.

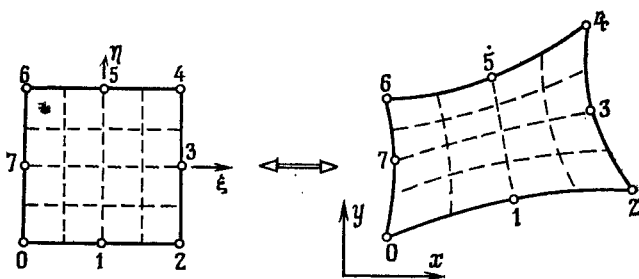


Рис. 5.4. Квадратичное изопараметрическое отображение.

можно записать как

$$x = N_0^e x_0 + N_1^e x_1 + \dots + N_M^e x_M, \quad N_l^e = N_l^e(\xi, \eta), \quad (5.9)$$

$$y = N_0^e y_0 + N_1^e y_1 + \dots + N_M^e y_M,$$

где  $(x_l, y_l)$  — глобальные  $(x, y)$  координаты точки, в которую требуется отобразить узел  $l$  элемента в плоскости  $(\xi, \eta)$ .

Ясно, что если используемые глобальные базисные функции обладают свойством межэлементной  $C^0$ -гладкости, то координатные отображения будут иметь ту же гладкость даже в том случае, когда для каждого элемента используются различные локальные начала координат. На рис. 5.3 и 5.4 показано, как с увеличением числа узлов элемента  $M+1$  квадратные элементы в плоскости  $(\xi, \eta)$  отображаются в последовательно усложняющиеся фигуры в глобальной плоскости  $(x, y)$ .

Если, как это делается здесь, отображение элемента и аппроксимация  $\hat{\varphi}$  на элементе определяются с помощью одних и тех же базисных функций, то отображение называется *изопараметрическим*.

Однако при необходимости отображение может производиться с использованием только специальным образом выбранных базис-

ных функций элемента. В общем случае при отображении квадратного элемента достаточно использовать только четыре или самое большее восемь узлов для получения отображенного элемента разумно общей формы. В первом случае получается элемент с прямолинейными сторонами, а во втором — элемент со сторонами в виде произвольных парабол.

Следует позаботиться о том, чтобы используемое параметрическое отображение не вырождалось. Это происходит в том случае, если в преобразуемой области якобиан (определитель матрицы Якоби) меняет знак. Известно, что при использовании четырехугольных элементов такое вырожденное отображение получается в том случае, когда внутренний угол элемента превосходит  $180^\circ$  или когда при использовании квадратичного отображения расстояние между центральным и угловым узлами меньше трети длины стороны четырехугольника.

Полученные ранее соотношения (5.4) и (5.6) могут быть использованы и при параметрическом отображении, хотя теперь техника вычислений такова, что обращение матрицы Якоби, нахождение ее определителя, а также интегрирование, необходимое для вычисления компонент матриц элементов, должны выполняться численно. Возможные процедуры численного интегрирования обсуждаются в следующем параграфе.

В практических приложениях весьма популярны элементы изопараметрического типа. Область решения задачи можно разбить на элементы соответствующего размера и формы с определением необходимых узловых координат. Выполнение требования межэлементной непрерывности осуществляется непосредственно, а вычисление интегралов по элементам проводится аналогично тому, как это делалось выше. Так как стороны элементов описываются многочленами, степень которых соответствует типу используемого элемента, содержащего выбранные узловые точки, то криволинейные границы достаточно точно аппроксимируются с помощью изопараметрических элементов. Как правило, внутри области нет необходимости использовать элементы с криволинейными границами, и стороны элементов обычно состояются из отрезков прямых. В этом случае требуется задавать только координаты угловых узлов, а координаты промежуточных узлов можно автоматически вычислить с помощью интерполяции.

Параметрическое отображение можно использовать и для трехугольных элементов (см. упражнения 5.8—5.11), а также для всех видов обсуждавшихся в предыдущей главе трехмерных элементов. В действительности наиболее широко оно используется именно в трехмерных задачах. На рис. 5.5 показано использование криволинейных шестигранных элементов для представления рассматриваемой области в некоторых трехмерных задачах.

Необходимо отметить, что параметрическое отображение об-

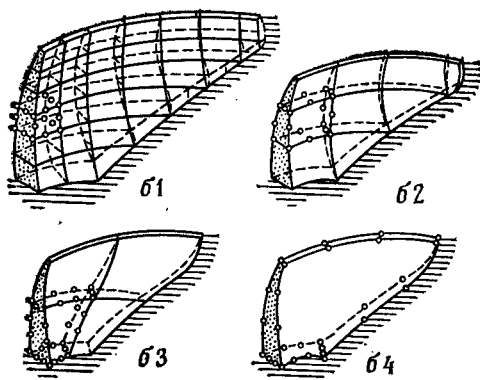
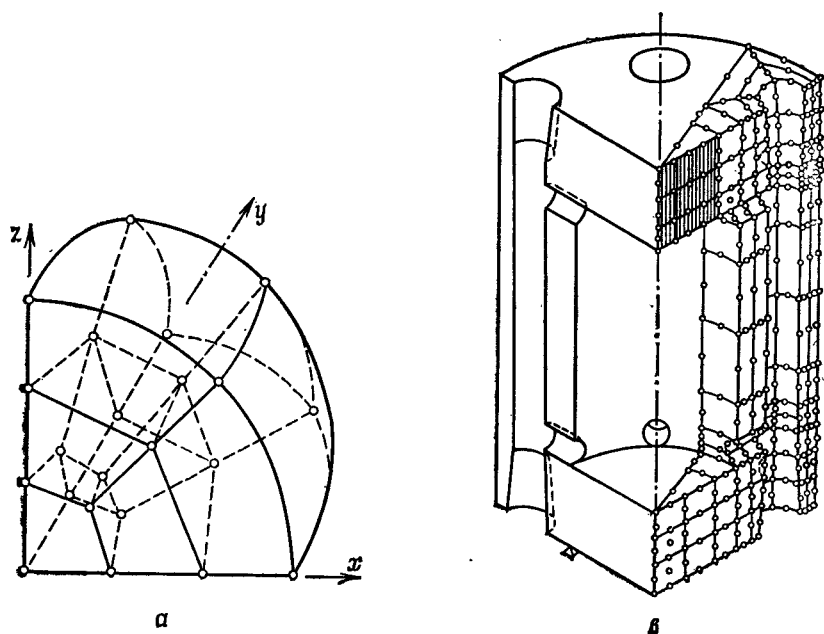


Рис. 5.5. Использование криволинейных шестигранных элементов в некоторых трехмерных задачах. *а* — представление части сферы с использованием семи квадратичных элементов; *б* — различные представления арочной плотины; *в* — представление части сосуда высокого давления.

суждалось здесь прежде всего применительно к стандартным, а не к иерархическим базисным функциям. Разумеется, последние также могут быть использованы, например, в случае, когда геометрия криволинейного элемента может быть представлена с помощью задания координат угловых узлов, отклонения средних точек от прямой линии и т. д. Такой подход, однако, чрезмерно сложен для практического использования.

После того как с помощью некоторого общего отображения элемент делается криволинейным, аппроксимация  $\hat{f}$  для неизвестной функции на элементе будет многочленом только от локальных координат  $(\xi, \eta)$  и не обязана быть многочленом от глобальных координат  $(x, y)$ . Сделанные в начале гл. 4 замечания о сходимости теперь применимы только со ссылкой на локальную, а не на глобальную систему координат. Однако при отыскании конечно-элементных решений часто бывает важно гарантировать способность метода точно воспроизводить решение, являющееся многочленом в системе координат  $(x, y)$ . К счастью, изопараметрическое представление может точно воспроизводить многочлен первой степени в координатах  $(x, y)$  [2], и недавно было показано, что квадратичные элементы, полученные на основе полного лагранжевого представления (с девятью узлами или эквивалентной иерархической формы), могут дать точное квадратичное представление при условии, что отображение реализуется только с помощью билинейных функций с узлами в углах, переводящих элемент в произвольный четырехугольник. Этим свойством не обладают серендиповы квадратичные элементы с восемью узлами, претерпевающие искажение.

## Упражнения

5.1. В плоскости  $(x, y)$  узлы в вершинах четырехугольного элемента  $\Omega^e$  имеют координаты  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0.4, 0.4)$ ,  $(0, 1)$ . Построить изопараметрическое отображение на квадратный билинейный элемент, определенный условием  $-1 \leq \xi, \eta \leq 1$ . Показать, что отображение не является допустимым, так как  $\det(\mathbf{J})$  меняет знак в преобразуемой области, и выяснить причину вырожденности отображения.

5.2. В локальной системе координат  $(\xi, \eta)$  рассмотреть квадратичный лагранжев квадратный элемент, показанный на рис. 4.5, б. В системе координат  $(x, y)$  узлы  $(r, s)$  определяются следующим образом:

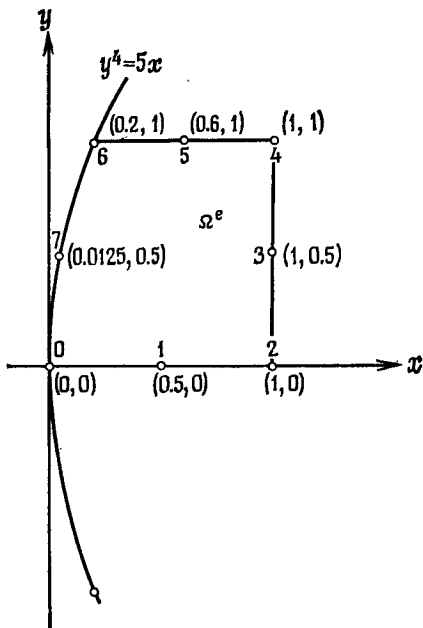
$r$	$s$	$x$	$y$
0	0	20	20
0	1	20	50
0	2	0	70
1	0	50	40
1	1	60	55
1	2	70	67
2	0	100	30
2	1	110	60
2	2	120	80

и применяется изопараметрическое отображение. Вычертить в плоскости  $(x, y)$  стороны элемента (т. е. прямые  $\xi = \pm 1$ ,  $\eta = \pm 1$ ) и несколько промежуточных контуров для равных  $\xi$  и  $\eta$ .



5.3. Для некоторого элемента  $\Omega^e$  с восемью узлами в плоскости  $(x, y)$  узлы в серединах сторон совпадают со средними точками отрезков прямых, соединяющих угловые узлы. Показать, что для изопараметрического отображения  $\Omega^e$  на квадратный серендипов элемент с восемью узлами, определенный условием  $-1 \leq \xi, \eta \leq 1$ , требуются только билинейные базисные функции, отвечающие угловым узлам.

5.4. При решении некоторой задачи область  $\Omega$  определена условием  $y^4 \leq 5x$ . Для конечно-элементной дискретизации  $\Omega$  применяется примыкающий к граничной кривой  $y^4 = 5x$  элемент  $\Omega^e$  с восемью узлами, координаты которых



показаны на рисунке. Построить изопараметрическое отображение  $\Omega^e$  на квадратный серендипов элемент с восемью узлами в локальной системе координат  $(\xi, \eta)$ . Сравнить форму криволинейной границы элемента  $\Omega^e$  с фактической границей области  $\Omega$ .

5.5. При конечно-элементных вычислениях интегралы по границе часто должны вычисляться вместе с интегралами по области типа интегралов (5.8). Пусть для некоторой двумерной задачи  $\Omega^e$  — элемент с восемью узлами, примыкающий к границе  $\Gamma$ , а  $\Gamma^e$  — та из сторон  $\Omega^e$ , которая проходит вдоль  $\Gamma$ . Изопараметрическое отображение  $\Omega^e$  на квадратный серендипов элемент с восемью узлами, для которого  $-1 \leq \xi, \eta \leq 1$ , осуществляется таким образом, что  $\Gamma^e$  отображается в прямую  $\eta = -1$  (см. рисунок). Показать, что если узлы на  $\Gamma^e$  занумерованы как 0, 1 и 2, то вдоль  $\Gamma$

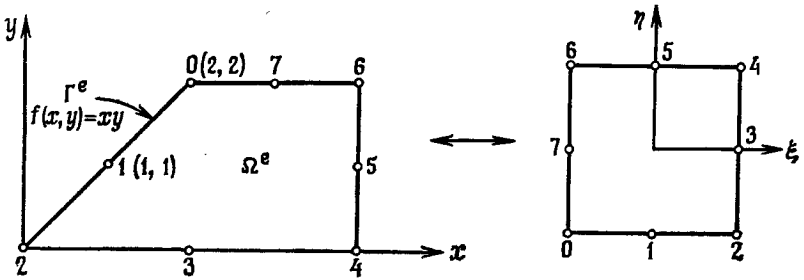
$$x = x(\xi) = x_0 N_0^e(\xi) + x_1 N_1^e(\xi) + x_2 N_2^e(\xi),$$

$$y = y(\xi) = y_0 N_0^e(\xi) + y_1 N_1^e(\xi) + y_2 N_2^e(\xi),$$

где  $(x_j, y_j)$  — координаты узла  $j$ , а  $N_0^e(\xi), N_1^e(\xi), N_2^e(\xi)$  — стандартные лагранжы одномерные квадратичные базисные функции вида (4.126). Доказать, что

$$\int_{\Gamma^e} f(x, y) d\Gamma = \int_{-1}^1 f(x(\xi), y(\xi)) \sqrt{(dx/d\xi)^2 + (dy/d\xi)^2} d\xi,$$

и проверить результат с помощью точного вычисления интегралов.



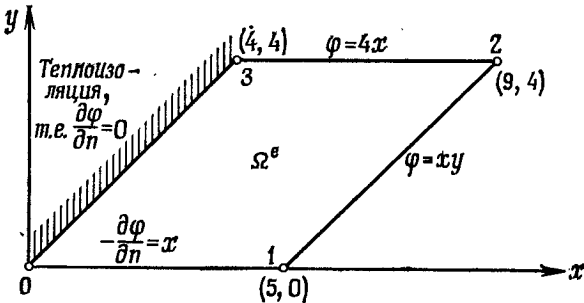
5.6. Показать, что матрица, обратная матрице Якоби  $J$  в (5.4), имеет вид

$$J^{-1} = \frac{1}{\det(J)} \begin{bmatrix} \partial y / \partial \eta & -\partial y / \partial \xi \\ -\partial x / \partial \eta & \partial x / \partial \xi \end{bmatrix},$$

а также доказать соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} &= \frac{1}{\det(J)} \frac{\partial y}{\partial \eta}, & \frac{\partial \eta}{\partial x} &= -\frac{1}{\det(J)} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} &= -\frac{1}{\det(J)} \frac{\partial x}{\partial \eta}, & \frac{\partial \eta}{\partial y} &= \frac{1}{\det(J)} \frac{\partial x}{\partial \xi}. \end{aligned}$$

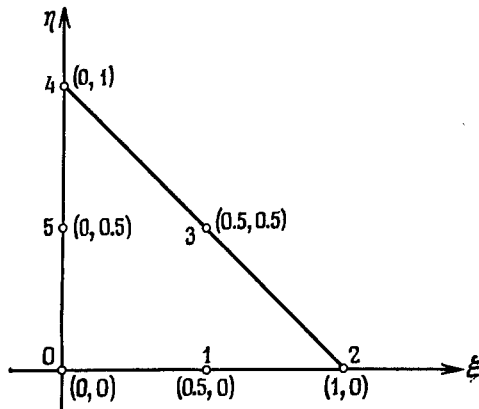
5.7. Для представления показанной на рисунке области  $\Omega^e$  используется один элемент с четырьмя узлами. Построить изопараметрическое отображение  $\Omega^e$  на квадратный билинейный элемент  $-1 \leq \xi, \eta \leq 1$ . Найти стационарное распределение температуры  $\varphi$  на  $\Omega^e$  при указанных на рисунке краевых условиях.



5.8. В системе координат  $(\xi, \eta)$  рассмотреть элемент, являющийся равнобедренным прямоугольным треугольником с узлами 0, 1 и 2 в точках  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  и  $(0, 1)$  соответственно. Показать, что базисные функции этого элемента можно записать как  $N_0^e = 1 - \xi - \eta = L_0$ ,  $N_1^e = \xi = L_1$ ,  $N_2^e = \eta = L_2$ .

Построить отображение произвольного треугольного элемента с тремя узлами на этот элемент.

5.9. Возвращаясь к разд. 3.8.1, найти интегральные выражения для матрицы элемента  $k^e$  и правой части  $f^e$  с помощью отображения произвольного треугольного элемента с тремя узлами на описанный в упражнении 5.8 равнобедренный прямоугольный треугольник.



5.10. На рисунке изображен квадратичный треугольный элемент с шестью узлами. Показать, что базисные функции этого элемента можно записать так:

$$\begin{aligned} N_0^e &= (1 - \xi - \eta)(1 - 2\xi - 2\eta), & N_1^e &= 4\xi(1 - \xi - \eta), \\ N_2^e &= \xi(2\xi - 1), & N_3^e &= 4\xi\eta, \\ N_4^e &= \eta(2\eta - 1), & N_5^e &= 4\eta(1 - \xi - \eta). \end{aligned}$$

В системе координат  $(x, y)$  элемент  $\Omega^e$  имеет шесть узлов 0, 1, 2, 3, 4 и 5 с координатами  $(1, 1)$ ,  $(5, 1)$ ,  $(8, 2)$ ,  $(7.5, 4)$ ,  $(4, 5)$  и  $(2, 3)$  соответственно. Построить изопараметрическое отображение  $\Omega^e$  на описанный выше равнобедренный прямоугольный треугольник с шестью узлами. Вычертить соответствующие криволинейные стороны области  $\Omega^e$ .

5.11. Построить являющийся равнобедренным прямоугольным треугольником элемент с десятью узлами и найти базисные функции этого элемента.

## 5.2. Численное интегрирование

### 5.2.1. Общие замечания

При получении матриц элементов для элементов высших степеней возрастает сложность подынтегральных выражений, что делает алгебраические выкладки весьма громоздкими. Если, кроме того, используется отображение области, изменяющее ее форму, то для вычисления производных, входящих в эти выражения, требуется обращение матриц Якоби (см. (5.4)) и интегралы становятся столь сложными, что точно вычислить их почти невозможно. В таких случаях приходится прибегать к численному интегрированию, при котором стандартный интеграл типа (5.8) заменяется квадратурной суммой.

При построении таких квадратурных сумм на одно-, дву- и трехмерных областях используется простое суммирование значений подынтегрального выражения, вычисленных в специальных точках области (в узлах) и умноженных на соответствующие веса, а именно

$$I = \int_{-1}^1 G(\xi) d\xi \approx W_0 G(\xi_0) + W_1 G(\xi_1) + \dots + W_n G(\xi_n), \quad (5.10a)$$

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx W_0 G(\xi_0, \eta_0) + W_1 G(\xi_1, \eta_1) + \dots + W_n G(\xi_n, \eta_n). \quad (5.10б)$$

Для построения методов такого типа в одномерном случае можно взять набор точек (узлов)  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ , а затем найти многочлен  $F_n(\xi)$  степени  $n$ , совпадающий с  $G(\xi)$  в каждой из этих точек. Для этого положим

$$F_n(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \dots + \alpha_n \xi^n \quad (5.11)$$

и однозначно определим коэффициенты  $\alpha_i$  как решение системы уравнений

$$\begin{aligned} G(\xi_0) &= \alpha_0 + \alpha_1 \xi_0 + \dots + \alpha_n \xi_0^n, \\ G(\xi_1) &= \alpha_0 + \alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_1^n, \\ &\vdots \\ &\vdots \\ G(\xi_n) &= \alpha_0 + \alpha_1 \xi_n + \dots + \alpha_n \xi_n^n. \end{aligned} \quad (5.12)$$

С помощью соотношения

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 G(\xi) d\xi \approx \int_{-1}^1 F_n(\xi) d\xi = \\ &= 2\alpha_0 + \frac{2\alpha_2}{3} + \dots + \frac{\alpha_n}{n+1} [1 - (-1)^{n+1}] \end{aligned} \quad (5.13)$$

можно аппроксимировать значение подлежащего вычислению интеграла, и если подставить в это выражение значения коэффициентов, полученные решением системы (5.12), то в итоге получится приближенное равенство вида (5.10а). Этот результат иллюстрируется рис. 5.6, где показано использование известной аппроксимации по правилу трапеций. Здесь берется  $\xi_0 = -1$ ,  $\xi_1 = 1$ , и

$$F_1(\xi) = (G(\xi_1) + G(\xi_0))/2 + [(G(\xi_1) - G(\xi_0))/2] \xi \quad (5.14)$$

оказывается линейной функцией, принимающей в этих двух узлах те же значения, что и  $G(\xi)$ .

Тогда подлежащий вычислению интеграл аппроксимируется

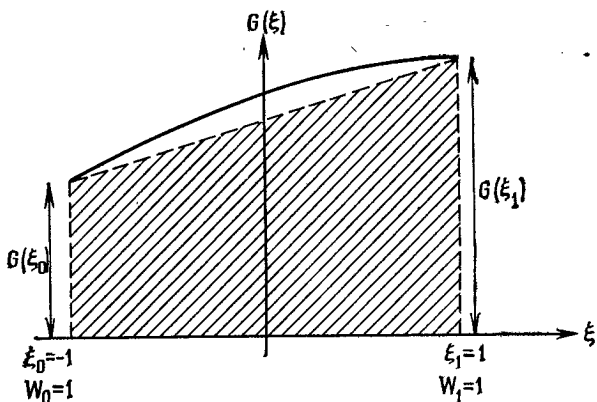


Рис. 5.6. Узлы и веса аппроксимации по правилу трапеций (трапеция заштрихована) для  $\int_{-1}^1 G(\xi) d\xi$ .

выражением

$$I = \int_{-1}^1 G(\xi) d\xi \approx \int_{-1}^1 F_1(\xi) d\xi = G(\xi_0) + G(\xi_1), \quad (5.15)$$

имеющим тот же вид, что и общая формула (5.10а) при  $n=1$ .

Детальное исследование погрешности аппроксимации [3] для формулы (5.13) показывает, что если  $n$  нечетно, то этот метод дает точный результат для любого многочлена степени не выше  $n$ . Если же  $n$  четно, то метод точен для любого многочлена степени не выше  $n+1$ <sup>1)</sup>.

В случае равноотстоящих узлов формулы этого типа известны под названием формул Ньютона—Котеса, и в общем случае в них требуется вычислять  $n+1$  значений функции  $G(\xi)$ . Вывод явного вида таких формул высших порядков предоставляется читателю, поскольку мы не рекомендуем использовать их в методе конечных элементов.

### 5.2.2. Квадратурные формулы Гаусса в случае одной переменной

Вместо того чтобы априори задавать положения точек, в которых вычисляется функция  $G(\xi)$ , как это делалось в предыдущем параграфе, было бы лучше попытаться определить координаты этих точек таким образом, чтобы аппроксимация давала точное значение интеграла каждый раз, когда  $G(\xi)$  — многочлен степени не выше  $p$ , где  $p (\geq n)$  также подлежит определению.

<sup>1)</sup> При условии что узлы расположены симметрично относительно точки  $\xi=0$ . — Прим. ред.

Записывая такой многочлен в виде

$$F_p(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \dots + \alpha_p \xi^p, \quad (5.16)$$

его можно проинтегрировать, используя аппроксимацию (5.10а), что дает

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 F_p(\xi) d\xi \approx \\ &\approx W_0(\alpha_0 + \alpha_1 \xi_0 + \dots + \alpha_p \xi_0^p) + W_1(\alpha_0 + \alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_p \xi_1^p) + \dots \\ &\quad \dots + W_n(\alpha_0 + \alpha_1 \xi_n + \dots + \alpha_p \xi_n^p). \end{aligned} \quad (5.17)$$

В то же время, согласно (5.13), точное значение этого интеграла задается выражением

$$I = 2\alpha_0 + 2\alpha_2/3 + \dots + [\alpha_p/(p+1)] [1 - (-1)^{p+1}]. \quad (5.18)$$

Из сравнения коэффициентов следует, что формула (5.10а) дает точное значение интеграла для любого такого многочлена  $F_p(\xi)$ , если

$$\begin{aligned} W_0 + W_1 + \dots + W_n &= 2, \\ W_0 \xi_0 + W_1 \xi_1 + \dots + W_n \xi_n &= 0, \\ &\vdots \\ &\vdots \\ W_0 \xi_0^p + W_1 \xi_1^p + \dots + W_n \xi_n^p &= [1/(p+1)] [1 - (-1)^{p+1}]. \end{aligned} \quad (5.19)$$

В приведенной выше системе  $p+1$  уравнений величины  $W_i$ ,  $\xi_i$ ,  $i=0, 1, \dots, n$ , являются неизвестными; естественно предположить (и это предположение верно), что такая система имеет решение только в том случае, когда число уравнений совпадает с числом неизвестных, т. е. когда

$$p+1 = 2(n+1). \quad (5.20)$$

Так как  $n$  — целое, то  $p$  всегда будет нечетным числом. Ниже приводится таблица изменения  $p$  для нескольких первых значений  $n$ .

Число узлов $n+1$	Степень точно интегрируемого многочлена $p$
1	1
2	3
3	5
4	7

Например, при вычислении трех значений функции можно точно проинтегрировать многочлен степени 5, тогда как при применении

обсуждавшихся в предыдущем параграфе формул Ньютона—Котеса в случае трех узлов можно точно проинтегрировать только многочлен степени 3. Такой метод вычисления интеграла обычно называется квадратурой Гаусса—Лежандра.

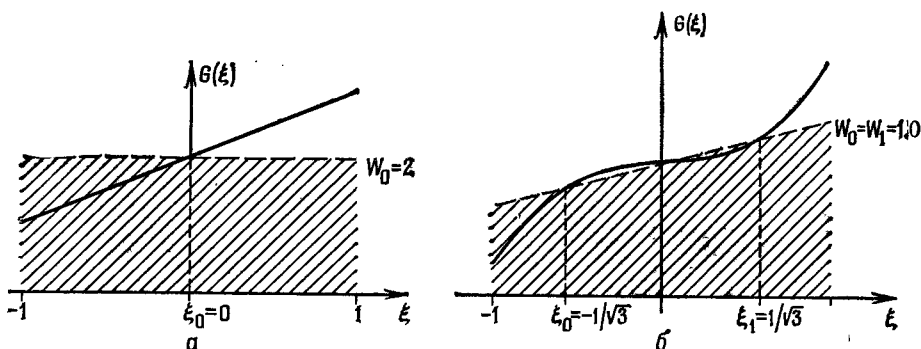


Рис. 5.7. Квадратура Гаусса—Лежандра. *a* — один узел, точность при  $\rho=1$ ; *b* — два узла, точность при  $\rho=3$ ; в обоих случаях заштрихована аппроксимация площади под кривой.

Для конкретных значений  $n$  можно вычислить координаты узлов и веса. Так, для  $n=0$  уравнения (5.19) записываются как

$$W_0 = 2, \quad W_0 \xi_0 = 0, \quad (5.21)$$

т. е.  $\xi_0 = 0$ . Можно было бы заранее предвидеть, что в случае одного узла наилучшие результаты получатся при его размещении в центре области. Этот метод точен для многочленов первой степени (рис. 5.7, *a*). Аналогично для  $n=1$  имеем

$$W_0 + W_1 = 2, \quad W_0 \xi_0 + W_1 \xi_1 = 0, \quad W_0 \xi_0^2 + W_1 \xi_1^2 = 2/3. \quad (5.22)$$

Эту нелинейную систему уравнений решить труднее, однако подстановкой читатель может проверить, что решение имеет вид

$$\xi_1 = -\xi_0 = 1/\sqrt{3} \approx 0.5773502692, \quad W_0 = W_1 = 1.0. \quad (5.23)$$

Этот метод можно использовать для точного интегрирования многочлена степени 3.

Полученное таким же образом решение шести уравнений, отвечающих случаю  $n=2$ , имеет вид

$$\xi_2 = -\xi_0 = \sqrt{3/5} \approx 0.7745966692, \quad \xi_1 = 0.0, \\ W_0 = W_2 = 5/9 \approx 0.5555555556, \quad W_1 = 8/9 \approx 0.8888888888. \quad (5.24)$$

Значения координат узлов (точек интегрирования) и соответствующих весов в формулах Гаусса—Лежандра для достаточно

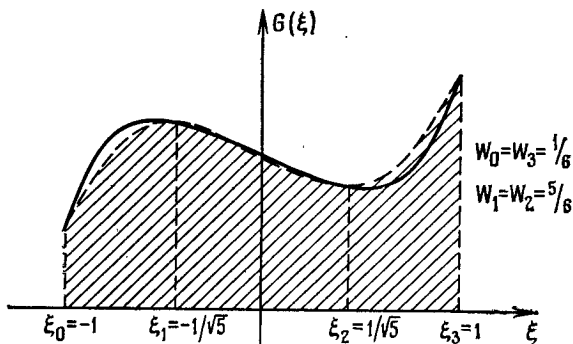


Рис. 5.8. Квадратура Гаусса — Лобатто с четырьмя узлами, точная при  $p=5$ . Заштрихована аппроксимация площади под кривой.

больших значений  $n$  приводятся во многих книгах по численному анализу [4].

Для численного интегрирования читатель может воспользоваться и другими возможностями. Например, хорошим решением может оказаться априорное фиксирование некоторых значений  $\xi_i$  с последующим определением остальных. В таком случае при заданном числе узлов степень многочлена, для которого метод точен, была бы не выше, чем для соответствующей квадратуры Гаусса — Лежандра, и не ниже, чем для соответствующей квадратуры Ньютона — Котеса. В частности, иногда может быть полезно фиксировать узлы в двух граничных точках области (т. е.  $\xi_n = -\xi_0 = 1$ ), но сохранить свободу выбора внутренних узлов. Такой подход приводит к так называемым квадратурам Гаусса — Лобатто<sup>1)</sup>.

В качестве примера рассмотрим случай трех узлов с  $\xi_2 = -\xi_0 = 1$ . В этом случае имеются четыре неизвестных  $\xi_1, W_0, W_1, W_2$  и четыре уравнения вида (5.19):

$$\begin{aligned} W_0 + W_1 + W_2 + W_3 &= 2, & W_0 + W_1 \xi_1^2 + W_2 &= 2/3, \\ -W_0 + W_1 \xi_1 + W_2 &= 0, & -W_0 + W_1 \xi_1^3 + W_2 &= 0; \end{aligned} \quad (5.25)$$

решение имеет вид

$$\xi_1 = 0, \quad W_0 = W_2 = 1/3, \quad W_1 = 4/3. \quad (5.26)$$

Полученное правило<sup>2)</sup> в точности совпадает с формулой интегрирования Ньютона — Котеса для трех равноотстоящих узлов и, как мы знаем, дает точный результат для многочленов третьей степени.

Следующим примером в этой серии был бы случай вычисления  $\xi_1, \xi_2, W_0, W_1, W_2$  и  $W_3$ , для чего требуется составить шесть

<sup>1)</sup> Эти квадратуры называют также квадратурами Маркова. — Прим. ред.

<sup>2)</sup> Это правило обычно называют формулой Симпсона. — Прим. ред.



уравнений и в итоге получить правило, точное для многочленов степени 5.

Читатель может проверить (см. рис. 5.8), что в этом случае решение имеет вид

$$\begin{aligned} \xi_3 = -\xi_0 = 1, \quad \xi_2 = -\xi_1 = 1/\sqrt{5}, \\ W_3 = W_0 = 1/6 \quad W_2 = W_1 = 5/6. \end{aligned} \quad (5.27)$$

В литературе известно много других квадратурных формул, но при конечно-элементных вычислениях особенно удобен подход Гаусса—Лежандра, так как в нем требуется наименьшее число вычислений для точного нахождения интегралов от многочленов.

### 5.2.3. Квадратурные формулы Гаусса в случае двух и трех переменных

В случае двух переменных мы сталкиваемся с задачей вычисления двойного интеграла вида (см. формулу (5.106))

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (5.28)$$

Так как интегрирование проводится по прямоугольнику, простейшим подходом здесь будет осуществление численного интегрирования независимо по переменным  $\xi$  и  $\eta$ . Таким образом, начиная с вычисления внутреннего интеграла и используя формулы предыдущего параграфа, получаем

$$\int_{-1}^1 G(\xi, \eta) d\xi \approx \sum_{i=0}^n W_i G(\xi_i, \eta). \quad (5.29)$$

Проводя аналогичное интегрирование по  $\eta$ , имеем

$$I \approx \int_{-1}^1 \left[ \sum_{i=0}^n W_i G(\xi_i, \eta) \right] d\eta \approx \sum_{j=0}^n \left[ W_j \sum_{i=0}^n W_i G(\xi_i, \eta_j) \right] \quad (5.30)$$

и окончательно получаем аппроксимацию

$$I \approx \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \bar{W}_{ij} G(\xi_i, \eta_j), \quad \bar{W}_{ij} = W_i W_j, \quad (5.31)$$

в которой  $(\xi_i, \eta_j)$  — координаты узлов, точное расположение которых определяется типом используемой формулы интегрирования.

Если формулы интегрирования отдельно по  $\xi$  и  $\eta$  точны для многочленов степени  $p$ , то выражение (5.31) будет давать точные значения для всех выражений вида  $\xi^{p_1} \eta^{p_2}$ , где  $p_1, p_2 \leq p$ . Стандартные квадратурные правила Гаусса—Лежандра такого типа иллюстрируются рис. 5.9. Очевидное обобщение квадратур на слу-

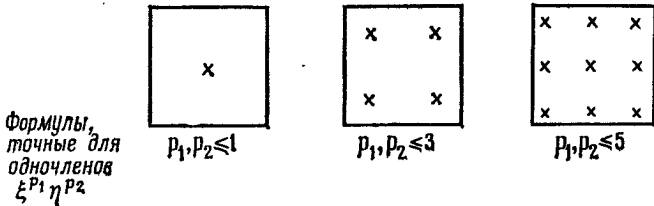


Рис. 5.9. Узлы квадратур Гаусса — Лежандра на четырехугольниках.

чай трех переменных для вычисления интегралов по кубу  $-1 \leq \xi, \eta, \xi \leq 1$  приводит к соотношениям вида

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G(\xi, \eta, \xi) d\xi d\eta d\xi \approx \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n W_{ijk} G(\xi_i, \eta_j, \xi_k),$$

$$\bar{W}_{ijk} = W_i W_j W_k. \tag{5.32}$$

Формулы этого типа называются мультипликативными и широко используются при двумерных и трехмерных конечно-элементных вычислениях. Читатель заметит, однако, что описанный выше процесс интегрирования будет точен и для членов, появляющихся

Число узлов	Элемент	Степень точно интегрируемого многочлена	Узлы	Треугольные координаты	Веса
1		1	0	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	1
3		2	0	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0$	$\frac{1}{3}$
			1	$0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
			2	$\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
4		3	0	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	} $-\frac{27}{48}$
			1	0,6,0,2,0,2	
			2	0,2,0,6,0,2	
			3	0,2,0,2,0,6	
7		4	0	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	} 0.2250000000
			1	$\alpha_1, \beta_1, \beta_1$	
			2	$\beta_1, \alpha_1, \beta_1$	
			3	$\beta_1, \beta_1, \alpha_1$	
			4	$\alpha_2, \beta_2, \beta_2$	
			5	$\beta_2, \alpha_2, \beta_2$	
			6	$\beta_2, \beta_2, \alpha_2$	

$$\alpha_1 = 0.0597150717$$

$$\beta_1 = 0.4701420641$$

$$\alpha_2 = 0.7974289853$$

$$\beta_2 = 0.1012885073$$

Рис. 5.10. Положения узлов и значения весов для треугольников.

дополнительно к полному многочлену степени  $p$  от независимых переменных  $\xi, \eta, \zeta$ . Следовательно, можно попытаться получить формулы, которые будут точны для полных многочленов некоторой степени и требуют несколько меньшего числа узлов, чем мультипликативные формулы. В ряде случаев такие формулы действительно могут быть получены [5]<sup>1)</sup>.

В случае двух переменных для треугольных областей опять может быть принят прямой подход. Таким образом, в случае одного узла ( $n=0$ ) имеются три неизвестные, определяющие координаты  $(\xi_0, \eta_0)$  и вес  $W_0$ . Ясно, что в этом случае полный многочлен первой степени можно проинтегрировать точно. При  $n=2$  точно может быть проинтегрирован многочлен степени 3 и т. д.

Координаты узлов и значения весов для  $n=0, 1, 2, 3$ , приведены на рис. 5.10 [6]. Снова возможно обобщение на трехмерный случай: имеются соответствующие правила интегрирования для областей типа тетраэдра [7].

## Упражнения

5.12. Вывести формулу Симпсона для аппроксимации  $\int_{-1}^1 G(\xi) d\xi$ , используя узлы  $\xi_0 = -1, \xi_1 = 0, \xi_2 = 1$ . Полагая  $G(\xi) = \xi^3$ , показать, что эта формула обеспечивает точное интегрирование кубического многочлена.

5.13. Вывести формулу Ньютона—Котеса с использованием четырех равностоящих узлов для аппроксимации  $\int_{-1}^1 G(\xi) d\xi$ .

5.14. При конечно-элементных вычислениях часто требуется находить интегралы вида  $\int_{\Omega^e} (\partial N_i^e / \partial x) (\partial N_j^e / \partial x) dx dy$  и  $\int_{\Omega^e} N_i^e N_j^e dx dy$  по элементам  $\Omega^e$ .

Найти число узлов, требующееся для точного вычисления этих интегралов при применении численного интегрирования, если  $\Omega^e$  является а) билинейным элементом с четырьмя узлами, б) серендиповым элементом с восемью узлами и в) лагранжевым элементом с девятью узлами. Рассмотреть метод Ньютона—Котеса и метод Гюссса—Лежандра.

5.15. В упражнении 5.9 показать, как с помощью квадратуры Гаусса получить компоненты матрицы  $k^e$  и правой части  $f^e$ .

5.16. Вывести формулу интегрирования, дающую точный результат для произвольной квадратичной функции на серендиповом квадратном элементе с восемью узлами и использующую узлы элемента в качестве узлов квадратуры. Показать, что то же самое требование в случае квадратного лагранжева элемента с девятью узлами определяет целое семейство формул интегрирования.

<sup>1)</sup> См. также Мысовских И. И., Интерполяционные кубатурные формулы.— М.: Наука, 1981.— Прим. ред.

### 5.3. Дополнительные сведения об отображении

#### 5.3.1. Общие замечания

В § 5.1 проводилось общее обсуждение отображения элементов и рассматривалось весьма простое параметрическое отображение, основывающееся на базисных функциях элементов. На практике применяются и многие другие виды отображений. Здесь будут указаны три такие интересные возможности, которые с успехом используются при конечно-элементных вычислениях.

Первая из них — это так называемый составной процесс<sup>1)</sup>, позволяющий с помощью непосредственной интерполяции отображать область произвольной формы в четырехугольник. Вторая возможность состоит в получении аналогичного отображения произвольной области посредством решения дополнительных дифференциальных уравнений. Третий вид отображения связан со встречающимися во многих практических задачах бесконечными областями и позволяет переводить их в конечные области. Этот вид отображения имеет очень большое практическое значение при решении многих инженерных и физических задач.

#### 5.3.2. Отображение с помощью составной функции

Начнем с весьма общей задачи, в которой требуется отобразить область  $A$  сложной формы (рис. 5.11, *a*) на стандартный квадрат  $(\xi, \eta)$  (рис. 5.11, *б*). Априори принимается некоторое соглашение о соответствии между граничными точками  $A$  и граничными точками  $B$ , т. е. каждой точке  $P$  на границе  $A$  ставится в соответствие единственный образ  $P'$  на границе  $B$ . В частности, образы угловых узлов задаются так, как показано на рисунке.

Искомое отображение устанавливает взаимно-однозначное соответствие между точками на границах в плоскости  $(\xi, \eta)$  и граничными точками фактической области  $A$  в плоскости  $(x, y)$ . На рис. 5.12 в перспективе изображены плоскость  $(\xi, \eta)$  и изменение  $x$  вдоль границы. Чтобы найти полное отображение, нужно построить гладкую поверхность, натянутую на эти краевые значения.

*Составной процесс* построения такой поверхности графически показан на рис. 5.13 и состоит из четырех этапов.

1. Нахождение функции, осуществляющей линейную интерполяцию по  $\eta$  между значениями  $x$ , заданными на прямых  $\eta = \pm 1$ .
2. Нахождение функции, осуществляющей линейную интерполяцию по  $\xi$  между значениями  $x$ , заданными на прямых  $\xi = \pm 1$ .
3. Сложение этих двух функций, дающее однозначно опреде-

<sup>1)</sup> В оригинале *blending process*. — *Прим. перев.*

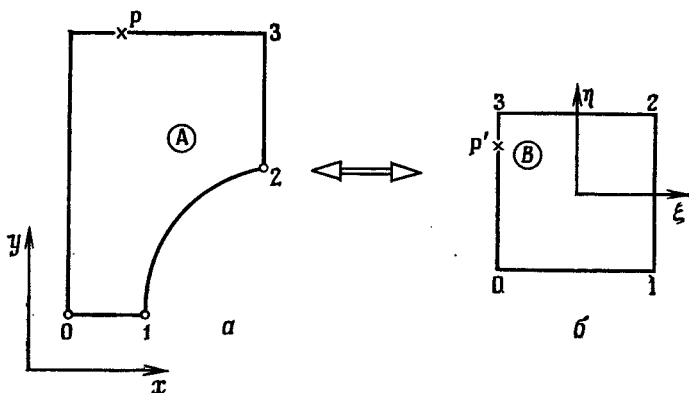
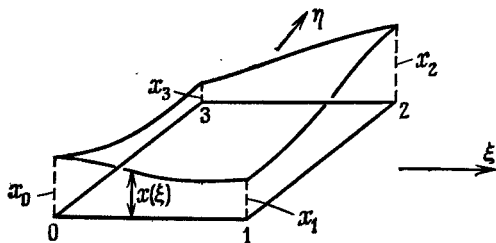


Рис. 5.11. Отображение рассматриваемой области.

Рис. 5.12. Изменения  $x$  вдоль границы в переменных  $(\xi, \eta)$ .

ленную непрерывную функцию, граничные значения которой отличаются от требуемых на линейную функцию.

4. Вычитание из полученной суммы функции стандартной билинейной интерполяции для точных угловых значений.

В результате этого процесса получается гладкая кривая  $f_1(\xi, \eta)$  из (5.2), определяющая координату  $x$  в любой точке плоскости  $(\xi, \eta)$ .

Мы не приводим никаких аналитических выражений для осуществляющих это отображение функций, поскольку выкладки тривиальны, если хорошо понят сам принцип построения (см. упражнения 5.19 и 5.20).

Аналогичная интерполяция для координаты  $y$  приводит к функции  $f_2(\xi, \eta)$  из (5.2), что и заканчивает построение отображения.

Такой процесс может быть обобщен на случай использования интерполяции многочленами высших степеней. Например, если помимо выполнения краевых условий требуется, чтобы какое-либо конкретное множество точек  $(x, y)$  принадлежало некоторым прообразам прямых, параллельных осям координат в плоскости  $(\xi, \eta)$ ,

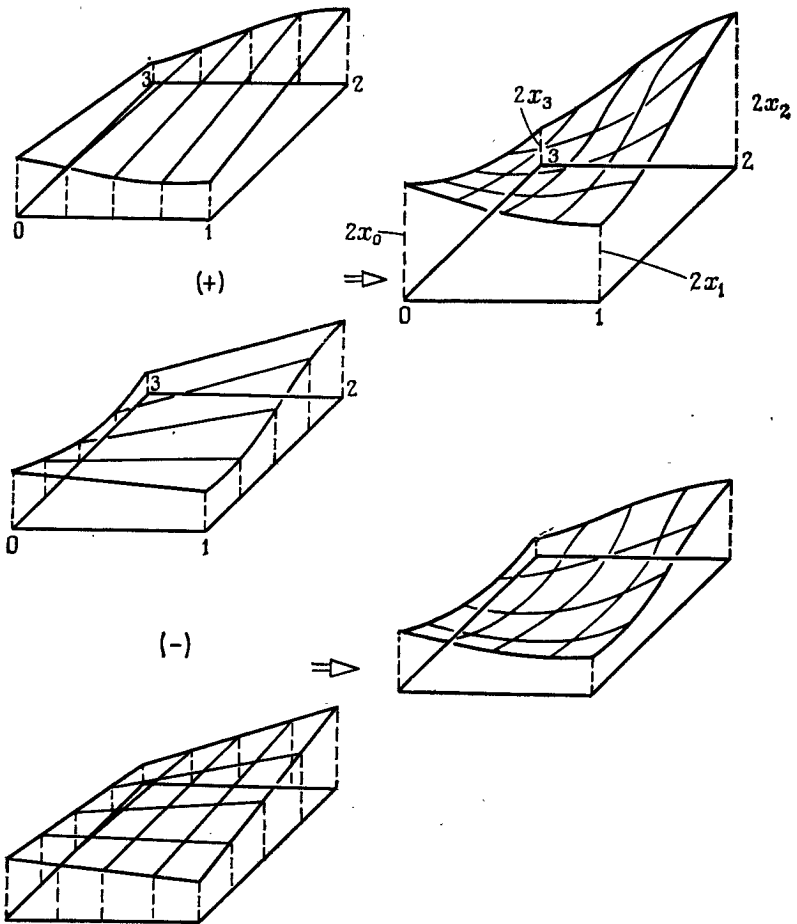


Рис. 5.13. Построение функции отображения с помощью процесса линейного составления.

то использованную выше линейную интерполяцию следует заменить квадратичной интерполяцией.

Эта процедура в принципе позволяет отобразить область произвольной формы (возможно, разбитую на подобласти или элементы произвольного вида) на квадрат (или на семейство квадратов). Чтобы получить такое отображение, необходимо с помощью соответствующих функций, описывающих поведение координат  $x$  и  $y$  на сторонах  $\xi = \pm 1$ ,  $\eta = \pm 1$ , определить внешние границы и границы между элементами. Этот процесс весьма полезен при отображении односвязной области сложной формы на квадрат, где

решения могут быть получены с помощью глобальных функций или—в случае необходимости—подразбиения на регулярные элементы стандартного типа. В действительности отображение такого рода позволяет использовать и конечно-разностную процедуру типа введенной в гл. 1 в простой регулярной области плоскости  $(\xi, \eta)$ . С помощью этой процедуры удается устранить основные недостатки конечно-разностного метода, поскольку задачу в области сложной формы можно решить непосредственным применением конечно-разностного метода к соответствующим образом преобразованному дифференциальному уравнению на получающемся квадрате в плоскости  $(\xi, \eta)$ .

### 5.3.3. Отображения с помощью решения дополнительных уравнений

Задачу построения отображения, сведенную в предыдущем параграфе к определению координат  $x$  или  $y$  (рис. 5.12) на квадратной области  $(\xi, \eta)$  с известными значениями вдоль прямых  $\xi = \pm 1$  и  $\eta = \pm 1$ , можно решить различными способами. Например, один из подходов состоит в определении  $x$  и  $y$  с помощью уравнений

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = 0, \quad -1 \leq \xi, \eta \leq 1. \quad (5.33)$$

Решение уравнений (5.33) на квадратной области с заданными значениями  $x$  и  $y$  на границах можно найти с помощью простых конечно-разностных (или эквивалентных конечно-элементных) алгоритмов. Вид уравнений (5.33) гарантирует, что получаемые решения  $x$  и  $y$  являются гладкими и обладают надлежащей структурой<sup>1)</sup>.

Возможно, покажется удивительным, что описанный здесь метод отображения может применяться на практике, поскольку при его использовании требуется дополнительно решить систему из двух уравнений, прежде чем отыскивать основное решение. Однако эти дополнительные вычисления проводятся на весьма простой области, и для некоторых сложных областей и уравнений преимущества могут оказаться значительными. Все описанные ранее достоинства отображения с помощью составных функций остаются в силе. Интересно отметить, что отображения этого и аналогичных типов часто используются при конечно-разностном решении задач в сложных областях [8]. Если координаты  $x$  и  $y$  вычисляются на регу-

<sup>1)</sup> Существуют специальные методы и комплексы стандартных программ для построения таких преобразований с наиболее подходящими свойствами; см. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики.— М.: Наука, 1976.— *Прим. ред.*

лярной сетке в области  $(\xi, \eta)$ , то для нахождения величин типа  $\partial x/\partial \xi$  можно использовать простые конечно-разностные формулы, и поэтому матрицы Якоби (см. (5.4)), необходимые для преобразования исходной задачи, могут быть найдены непосредственным образом.

### Упражнения

5.17. С помощью соотношений (5.33) сложная область типа изображенной на рис. 5.2 отображается на единичный квадрат  $-1 \leq \xi, \eta \leq 1$ . Координаты  $x$  и  $y$  определяются численно в каждом узле равномерной квадратной сетки с шагами  $\Delta \xi = \Delta \eta = 0.1$ . Требуется решить линейное уравнение теплопроводности  $k(\partial^2 T/\partial x^2) + k(\partial^2 T/\partial y^2) + Q = 0$  в исходной области. Показать, как в полученной после отображения области непосредственно применить метод конечных разностей. Рассмотреть вопрос об аппроксимации краевых условий в случае заданного на границе потока тепла (равенство (1.66)).

5.18. Повторить упражнение 5.17, используя метод конечных элементов и элементы с четырьмя узлами. (При вычислении якобиана можно использовать конечно-разностные выражения.)

5.19. Рассмотреть процесс отображения с помощью составных функций, иллюстрируемый рис. 5.13. Положить

$$\begin{aligned} N_0(\xi) &= (1 - \xi)/2, & N_1(\xi) &= (1 + \xi)/2, \\ P(\xi, \eta) &= x(\xi)|_{\eta=-1} N_0(\eta) + x(\xi)|_{\eta=1} N_1(\xi), \\ R(\xi, \eta) &= x|_{\xi=-1, \eta=-1} N_0(\xi) N_0(\eta) + x|_{\xi=1, \eta=-1} N_1(\xi) N_0(\eta) + \\ &+ x|_{\xi=-1, \eta=1} N_0(\xi) N_1(\eta) + x|_{\xi=1, \eta=1} N_1(\xi) N_1(\eta) \end{aligned}$$

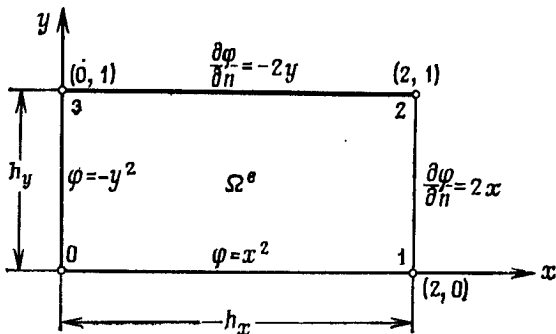
и показать, что искомое отображение задается функцией

$$x = P(\xi, \eta) + P(\eta, \xi) - R(\xi, \eta).$$

5.20. Требуется найти распределение температуры  $\varphi$  в прямоугольном элементе  $\Omega^e$  с четырьмя узлами, на сторонах которого заданы показанные на рисунке краевые условия (коэффициент теплопроводности равен единице). Показать, что если на  $\Omega^e$  функция  $\hat{\varphi}$  взята в виде

$$\hat{\varphi} = (1 - y/h_y) \varphi|_{y=0} + (1 - x/h_x) \varphi|_{x=0} - (1 - x/h_x)(1 - y/h_y) \varphi|_{x=y=0} + \varphi_2 N_2^e,$$

где  $N_2^e$  — стандартная билинейная базисная функция элемента, ассоциируемая с узлом 2, то  $\hat{\varphi}$  точно удовлетворяет заданным краевым условиям на прямых  $x=0$  и  $y=0$ . Используя это представление для  $\hat{\varphi}$  и метод взвешенных невязок





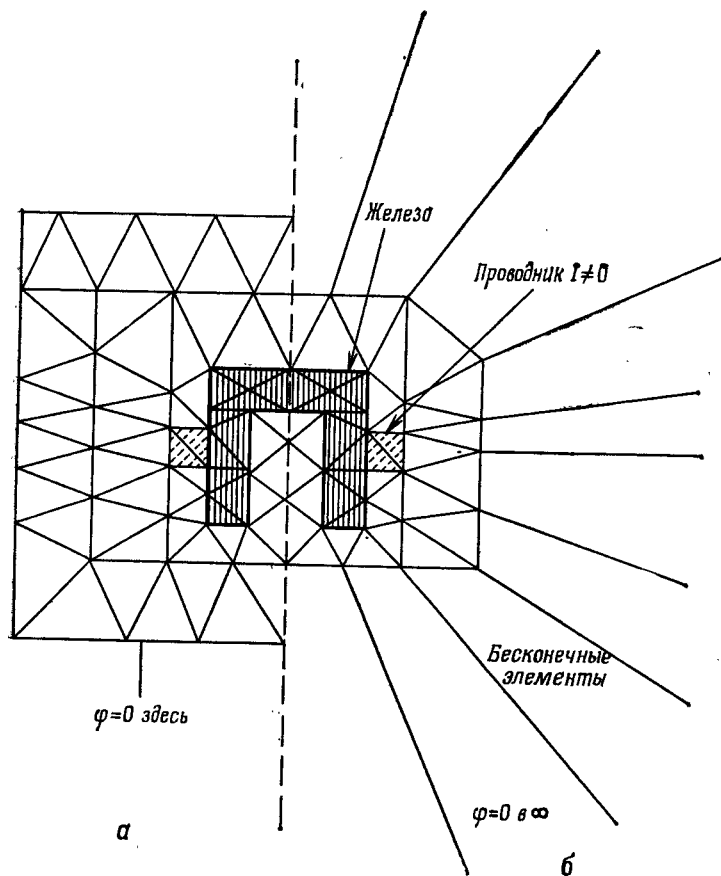


Рис. 5.14. Конечно-элементная сетка для исследования магнитного поля в области железо — воздух. *а* — при краевом условии, наложенном на большом, но конечном расстоянии; *б* — при краевом условии, наложенном на бесконечности с использованием бесконечных элементов.

с аппроксимацией по Галеркину, получить аппроксимацию значения  $\varphi_2$ . Сравнить результат со значением  $\varphi_2$ , полученным стандартной конечно-элементной билинейной интерполяцией для  $\hat{\varphi}$  на  $\Omega^e$ , а также с точным значением  $\varphi_2 = 3$ .

#### 5.3.4. Бесконечные элементы

Одним из наиболее интересных и практически полезных видов отображений является то, при котором бесконечная область переводится в конечную.

Во многих ситуациях, одна из которых показана на рис. 5.14, область решения задачи простирается до бесконечности. В иллю-

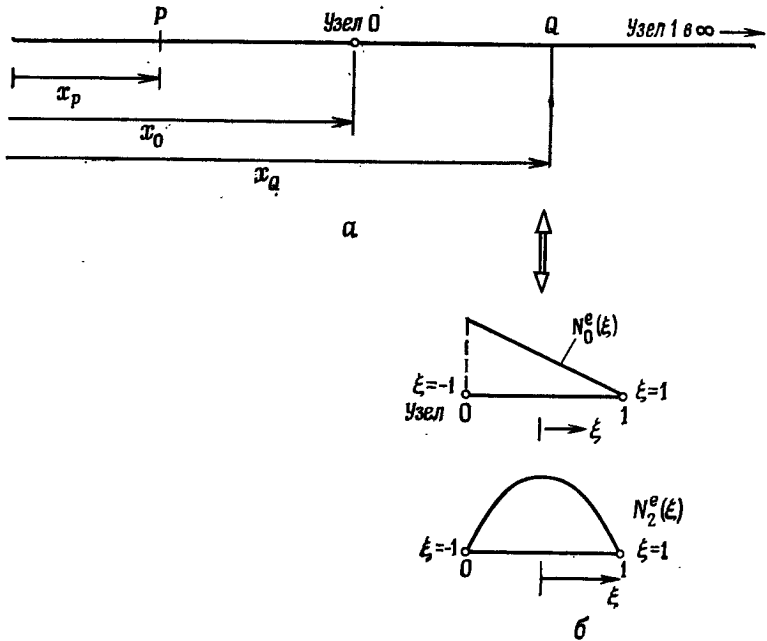


Рис. 5.15. Одномерный бесконечный элемент. а — фактическая область; б — полученный при отображении бесконечный элемент с иерархическими базисными функциями элемента.

стрируемом случае мы имеем дело с нахождением в области железо—воздух магнитного поля, индуцируемого проводниками с током плотностью  $I$ . Соответствующее уравнение аналогично уравнению теплопроводности и имеет вид

$$\partial(k \partial \varphi / \partial x) / \partial x + \partial(k \partial \varphi / \partial y) / \partial y + I = 0, \quad (5.34)$$

где  $\varphi$  — потенциал, который, согласно краевым условиям, должен обращаться в нуль на бесконечности<sup>1)</sup>.

Существуют два основных подхода к получению приближенного численного решения. В первом случае принимается прагматическая точка зрения и внешняя граница фиксируется на большом, но конечном расстоянии, а область дискретизируется только до этой внешней границы (рис. 5.14, а). Такая процедура требует большого числа узловых или сеточных точек, и возникает вопрос об определении величины этого большого расстояния. (Обычно для этого нужен некий численный эксперимент.)

<sup>1)</sup> Такая задача поставлена корректно в том случае, когда  $\int_{\Omega} I d\Omega = 0$ , т. е. когда имеет место баланс токов.

При втором подходе мы пытаемся работать непосредственно с областью, простирающейся до бесконечности. Здесь существуют разнообразные методы — от использования аналитического решения, справедливое на больших расстояниях, до простейшего метода, когда бесконечная область отображается в конечную. Эта последняя возможность и обсуждается в данном разделе.

Сначала рассмотрим возможность отображения одномерной области (или элемента), начинающейся в некоторой точке с координатой  $x_0$ , содержащей промежуточную точку с координатой  $x_Q$  и продолжающегося до бесконечности в  $x_1$  (рис. 5.15, а), в область  $-1 \leq \xi \leq 1$  (рис. 5.15, б).

Определим отображение формулой

$$x = \tilde{N}_P^e(\xi) x_P + \tilde{N}_Q^e(\xi) x_Q, \quad (5.35)$$

$$\tilde{N}_P^e = -\xi/(1-\xi), \quad \tilde{N}_Q^e = 1 + \xi/(1-\xi). \quad (5.36)$$

Эти выражения аналогичны по форме параметрическому отображению (5.9), но функции  $N$  специально выбраны так, чтобы они принимали бесконечное значение в точке 1 (т. е. при  $\xi = 1$ ); координата  $x_P$  пока что не определена.

Отметим, что в силу написанной выше формулы при  $\xi = 1$

$$x \equiv [\xi/(1-\xi)](x_Q - x_P) + x_Q = \infty, \quad \text{если } x_P \neq x_Q, \quad (5.37a)$$

а при  $\xi = 0$

$$x = x_Q, \quad (5.37б)$$

как и требуется; наконец, для точки  $\xi = -1$ , которую нужно отобразить в точку  $x_0$ , мы должны иметь

$$x \equiv x_0 = (1/2) x_P + (1/2) x_Q. \quad (5.37в)$$

Это соотношение определяет координату  $x_P$  через  $x_0$  и  $x_Q$ , и мы сразу видим, что точка  $x_0$  лежит в центре отрезка  $[x_P, x_Q]$ . Теперь отображение (5.35) можно непосредственно записать через  $x_0$  и  $x_Q$  как

$$x = (2x_0 - x_Q) \tilde{N}_P^e + x_Q \tilde{N}_Q^e = \frac{2(x_Q - x_0)\xi}{1-\xi} + x_Q, \quad (5.38)$$

и требуемое отображение, таким образом, полностью определено.

Хотя в (5.36) могут быть использованы многие другие виды функций, важно, чтобы выбранные для реализации отображения функции удовлетворяли соотношению

$$\tilde{N}_P^e + \tilde{N}_Q^e = 1. \quad (5.39)$$

Это условие тождественно выполняется для функций, определенных равенствами (5.36). Необходимость этого условия следует из

достаточно очевидного требования, что отображение должно оставаться неизменным при сдвиге начала отсчета  $x$ . Иначе говоря, если мы сместим начало отсчета  $x$  на  $\Delta x$  и запишем

$$X_P = x_P + \Delta x, \quad X_Q = x_Q + \Delta x, \quad (5.40)$$

то требуется, чтобы для заданного  $\xi$  выполнялось равенство  $X = x + \Delta x$ .

Используя формулу (5.35), имеем

$$X = X_P \tilde{N}_P^e + X_Q \tilde{N}_Q^e \quad (5.41)$$

и, подставляя сюда выражения (5.40), делаем вывод, что указанное выше требование выполняется, если

$$\Delta x = \Delta x (\tilde{N}_P^e + \tilde{N}_Q^e), \quad (5.42)$$

т. е. если выполняется условие (5.39)<sup>1)</sup>.

Теперь интересно выяснить, что произойдет, если для описания изменения неизвестной функции  $\hat{\varphi}$  в полученной с помощью отображения области будут использованы стандартные многочленные функции от  $\xi$ .

При использовании, например, базисных функций иерархического типа, показанных на рис. 5.15, б, условие  $\hat{\varphi}^e = 0$  при  $\xi = 1$  (или  $x = \infty$ ) автоматически выполняется, если положить узловое значение  $\varphi_1$  равным нулю и записать представление на элементе как многочлен

$$\hat{\varphi}^e = \varphi_0 N_0^e + \sum_{l=2}^p a_l^e N_l^e(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \dots + \alpha_p \xi^p, \quad (5.43)$$

степень которого  $p$  определяется числом использованных базисных функций.

Теперь соотношение (5.35) можно разрешить относительно  $\xi$ , выразив  $\xi$  через  $x$ , и, таким образом, обратное отображение определяется соотношением

$$\xi = 1 - 2(x_Q - x_P)/r, \quad (5.44)$$

где  $r (= x - x_P)$  — расстояние от точки  $x$  до точки  $P$  (рис. 5.15, а).

Подставляя это выражение для  $\xi$  в (5.43), получаем представление для  $\hat{\varphi}^e$  через глобальные координаты вида

$$\hat{\varphi}^e = \beta_0 + \frac{\beta_1}{r} + \frac{\beta_2}{r^2} + \dots + \frac{\beta_p}{r^p}, \quad (5.45)$$

<sup>1)</sup> Это условие неявно выполнялось и для использованных нами ранее стандартных конечно-элементных базисных функций; см., например, соотношение (3.48).

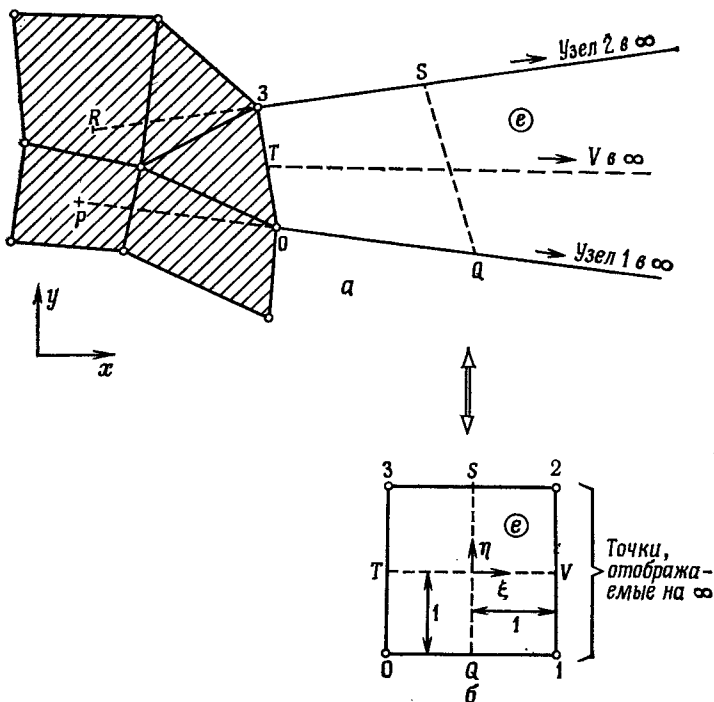


Рис. 5.16. Бесконечные элементы в двумерном случае. *а* — фактическая область; *б* — полученный при отображении бесконечный элемент.

где число членов опять зависит от степени использованного многочленного представления. (Читатель заметит, что если, как и в (5.43), поставить условие  $\hat{\varphi}^e = 0$  на  $\infty$ , то это приведет к требованию  $\beta_{0, r=0} = 0$ .)

Выражение вида (5.45) отражает типичное поведение точного решения на достаточно большом удалении во внешней области и может быть использовано для записи функции «затухания» с любой нужной степенью точности.

Ясно, что поскольку выбор точки  $x_Q$  (или  $x_0$ ) произволен, то, чтобы получить таким образом правильное конечно-элементное решение, нужно знать, как ведет себя решение на достаточно большом удалении и где приближенно начинается затухание.

Если одномерное отображение бесконечного элемента найдено, то распространить его на случай двух (или трех) измерений не составляет особого труда.

Рассмотрим, например, конечно-элементную область, выделенную штриховкой на рис. 5.16, *а*, и в частности сторону типичного линейного треугольного элемента, которая определяется узлами 0 и 3 и к которой примыкает бесконечный элемент *е*.

Сначала рассмотрим отображение прямой, проходящей через узел  $O$  и точку  $Q$  и образующей сторону бесконечного элемента. Ясно, что здесь можно применить одномерное отображение и записать (используя (5.38))

$$\begin{aligned}x &= (2x_0 - x_Q) \tilde{N}_P^e + x_Q \tilde{N}_Q^e \equiv x_P \tilde{N}_P^e + x_Q \tilde{N}_Q^e, \\y &= (2y_0 - y_Q) \tilde{N}_P^e + y_Q \tilde{N}_Q^e \equiv y_P \tilde{N}_P^e + y_Q \tilde{N}_Q^e,\end{aligned}\quad (5.46)$$

где координаты  $(x_P, y_P)$  точки  $P$  определяются, как и выше.

Нетрудно видеть, что относительно системы координат  $(X, Y)$  с началом в  $O$  имеем

$$X/Y = \tilde{N}_Q^e X_Q / (\tilde{N}_Q^e Y_Q) = X_Q / Y_Q, \quad (5.47)$$

и, следовательно, прямая, проходящая через  $P$ ,  $O$  и  $Q$ , соответствует получающемуся при отображении направлению оси  $\xi$ .

Если теперь положение точки  $S$  определено (при соответствующем начале затухания  $R$ ), то очевидно, что можно записать полное отображение бесконечного элемента  $e$ :

$$\begin{aligned}x &= N_0^e(\eta) [(2x_0 - x_Q) \tilde{N}_P^e(\xi) + x_Q \tilde{N}_Q^e(\xi)] + \\&\quad + N_S^e(\eta) [(2x_S - x_S) \tilde{N}_P^e(\xi) + x_S \tilde{N}_Q^e(\xi)]\end{aligned}\quad (5.48)$$

( $y$  определяется аналогично), где  $N_0^e(\eta)$  и  $N_S^e(\eta)$  — стандартные линейные одномерные базисные функции, задаваемые равенствами

$$N_0^e(\eta) = (1 - \eta)/2, \quad N_S^e(\eta) = (1 + \eta)/2. \quad (5.49)$$

Для представления изменения произвольной неизвестной функции в плоскости  $(\xi, \eta)$  снова можно использовать многочленные базисные функции, причем нетрудно видеть, что вдоль прямых  $0-1$  и  $3-2$  (и, следовательно, вдоль всех прямых  $\eta = \text{const}$ ) получаются выражения вида (5.45), где  $r$  — расстояние от соответствующим образом определенного полюса.

Возвращаясь к примеру, представленному на рис. 5.14, отметим, что там такой полюс, если он фиксирован вблизи центра области, фактически определяет представление, тождественное на больших расстояниях точному решению, и тогда при использовании таких элементов может быть получена превосходная аппроксимация.

**Пример 5.2.** Рассмотрим уравнение  $d^2\varphi/dx^2 = 2/x^3$  с крайними условиями  $\varphi = 1$  при  $x = 1$  и  $\varphi = 0$  при  $x = \infty$ . Будем искать решение, используя один бесконечный элемент. Тогда  $x_0 = 1$ , и если взять  $x_P = 0$ , то из формулы (5.37в) следует, что  $x_Q = 2$ . Соответственно требуемое отображение, согласно (5.38), задается равенством

$$x = 2\xi/(1 - \xi) \quad | \quad 2 = 2/(1 - \xi),$$

а обратное отображение (5.44) принимает вид

$$\xi = 1 - 2/x.$$

Использование квадратичного иерархического представления для аппроксимации  $\hat{\varphi}$  означает, что

$$\hat{\varphi} = \varphi_0 N_0^e + a_2 N_2^e,$$

где  $N_0^e = (1 - \xi)/2$ ,  $N_2^e = 1 - \xi^2$  и  $\varphi_0 = 1$ . Тогда уравнение метода взвешенных невязок с аппроксимацией по Галеркину, определяющее  $a_2$ , принимает вид

$$\int_1^{\infty} (d\hat{\varphi}/dx) (dN_2^e/dx) dx + 2 \int_1^{\infty} (N_2^e/x^3) dx = 0.$$

Используя реализующую отображение зависимость  $x$  от  $\xi$ , это соотношение можно переписать в виде

$$\varphi_0 \int_{-1}^1 \frac{dN_0^e}{d\xi} \frac{dN_2^e}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} d\xi + a_2 \int_{-1}^1 \left( \frac{dN_2^e}{d\xi} \right)^2 \frac{d\xi}{dx} d\xi + \frac{1}{4} \int_{-1}^1 (1 - \xi)^3 N_2^e \frac{dx}{d\xi} d\xi = 0.$$

Вычислив интегралы, получим  $a_2 = 0$ , и, таким образом, аппроксимация имеет вид

$$\hat{\varphi} = N_0^e = (1 - \xi)/2 = 1/x$$

и, как может проверить читатель, совпадает с точным решением.

Здесь нам посчастливилось с самого начала правильно выбрать значение  $x_p$ . Чтобы исследовать влияние выбора значения  $x_p$  на точность получаемой аппроксимации, можно снова рассмотреть решение того же самого дифференциального уравнения, но теперь с другими краевыми условиями, а именно  $\varphi = 1/2$  при  $x = 2$  и  $\varphi = 0$  при  $x = \infty$ . Как и ранее, точным решением будет  $\varphi = 1/x$ , но теперь при построении аппроксимации возьмем  $x_p = 1$ . Так как  $x_0 = 2$  и  $x_Q = 3$ , отображение принимает вид

$$x = (3 - \xi)/(1 - \xi),$$

а обратное отображение определяется равенством

$$\xi = (x - 3)/(x - 1).$$

Возьмем ту же, что и выше, аппроксимацию для  $\hat{\varphi}$  с  $\varphi_0 = 1/2$ ; тогда уравнение метода взвешенных невязок примет вид

$$\varphi_0 \int_{-1}^1 \frac{dN_0^e}{d\xi} \frac{dN_2^e}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} d\xi + a_2 \int_{-1}^1 \left( \frac{dN_2^e}{d\xi} \right)^2 \frac{d\xi}{dx} d\xi + 2 \int_{-1}^1 \left( \frac{1 - \xi}{3 - \xi} \right)^3 N_2^e \frac{dx}{d\xi} d\xi = 0.$$

Вычисление интегралов дает значение  $a_2 = 0.0715423$ , и в данном случае аппроксимация определяется формулой

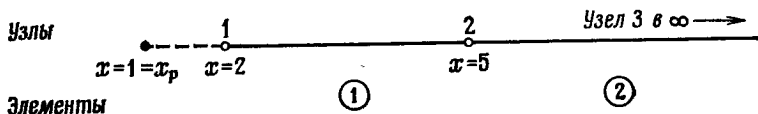
$$\hat{\varphi} = 0.32154 - 0.25(x-3)/(x-1) - 0.07154 [(x-3)/(x-1)]^2.$$

Сравнение этой аппроксимации с точным решением приведено в таблице.

$x$	Точное решение	Приближенное решение
2	0.5	0.5
3	0.3333	0.32154
4	0.25	0.23026
5	0.2	0.17866
10	0.1	0.08382
30	0.03333	0.02677

### Упражнения

5.21. Решить уравнение  $d^2\varphi/dx^2 = e^{-x}$  с краевыми условиями  $\varphi = e^{-1}$  при  $x=1$  и  $\varphi=0$  при  $x=\infty$ , используя один бесконечный элемент с полюсом  $x_p=0$ . Сравнить иерархические квадратичную и кубическую аппроксимации с точным решением.



5.22. Решить уравнение  $d^2\varphi/dx^2 = 2/x^3$  с краевыми условиями  $\varphi = 1/2$  при  $x=2$  и  $\varphi=0$  при  $x=0$ . Использовать показанную на рисунке конечно-элементную сетку, состоящую из двух квадратичных иерархических элементов, и сравнить полученную аппроксимацию с найденной в примере 5.2.

### 5.4. Построение сетки и заключительные замечания

В этой и предыдущей главах было показано:

1) как построить произвольные базисные функции в виде многочленов высших степеней для семейства прямоугольных и треугольных конечных элементов;

2) как с помощью алгоритмов отображения достаточно точно представить глобальную область почти любой сложной формы в виде ансамбля таких элементов;

3) как достаточно просто вычислить матрицы элементов посредством численного интегрирования.

Такие понятия, как отображение и численное интегрирование, применяются, конечно, не только при конечно-элементной аппрок-



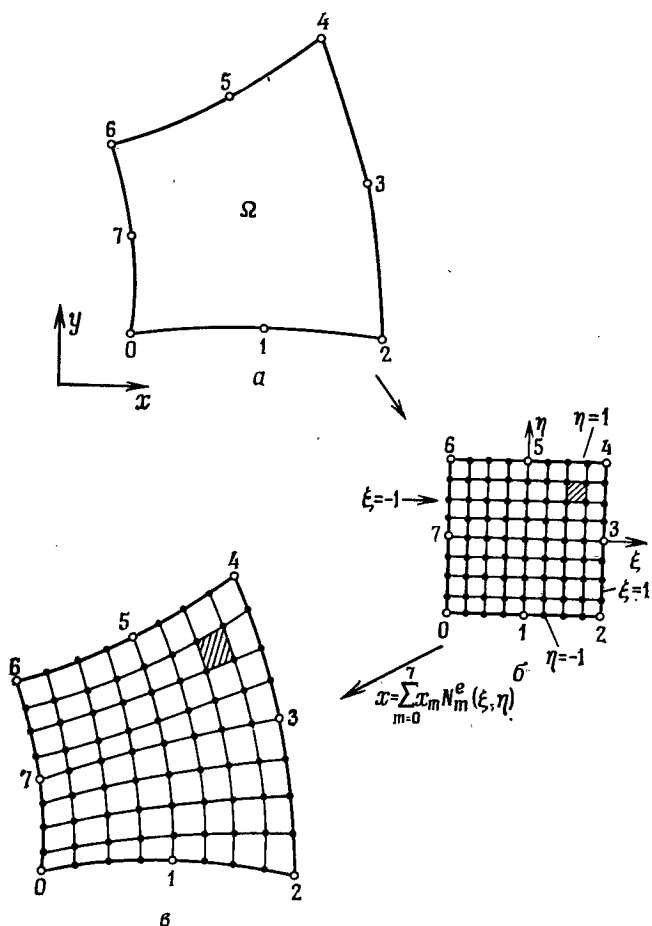


Рис. 5.17. Построение сетки с помощью отображения. а — фактическая область  $\Omega$ ; б — отображенная область с нанесенной на нее сеткой в плоскости  $(\xi, \eta)$ ; в — результирующая сетка на  $\Omega$ .

симации, и, следовательно, излагавшийся по этой теме материал является общезначимым. Например, составное отображение и составная интерполяция (разд. 5.3.2) в действительности впервые были введены для описания сложных форм кузовов автомобилей, а численное интегрирование было изобретено задолго до метода конечных элементов или других методов взвешенных невязок. Здесь имеется, однако, один дополнительный момент, который может представлять интерес для читателя. Он состоит в том, что идеи отображения не использовались не для получения конечно-

элементарной аппроксимации, а прежде всего просто для построения сеточного разбиения области достаточно общей формы. Очевидно, что построение такого разбиения вручную потребовало бы значительных вычислительных усилий.

С помощью различных процедур мы добились отображения областей достаточно произвольной формы в квадраты. В результате получались функции отображения, задающие на фактической плоскости координаты  $(x, y)$  посредством формул

$$x = f_1(\xi, \eta), \quad y = f_2(\xi, \eta), \quad -1 \leq \xi, \eta \leq 1. \quad (5.50)$$

Ясно, что построение равномерной сетки в квадратной области  $(\xi, \eta)$  весьма просто. Для каждого узла такой сетки можно непосредственно вычислить координаты эквивалентной точки в получаемой при отображении плоскости, так что мы располагаем всеми необходимыми средствами для построения сетки элементов произвольной формы. Такой процесс с использованием весьма простого отображения параметрического типа иллюстрируется рис. 5.17. Отметим, что все виды рассматривавшихся здесь отображений широко используются в практических программах автоматического построения сетки.

## Литература

- [1] Courant R. Differential and integral calculus. Vol. II.— London: Blackie and Sons, 1936. [Имеется перевод: Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 2.— 2-е изд.— М.: Наука, 1970.]
- [2] Zienkiewicz O. C. The finite element method.— 3rd ed.— New York: McGraw-Hill, 1977.
- [3] Fröberg C. E. Introduction to numerical analysis.— Reading: Addison-Wesley, 1965.
- [4] Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов.— 2-е изд.— М.: Наука, 1967.
- [5] Irons B. M. Quadrature rules for brick based finite elements.— Int. J. Num. Meth. Eng., 1971, v. 3, p. 293—294.
- [6] Cowper E. R. Gaussian quadrature formulae for triangles.— Int. J. Num. Meth. Eng., 1973, v. 7, p. 405—408.
- [7] Hammer P. C., Marlowe O.P., Stroud A. II. Numerical integration over simplexes and cones.— Math. Tables Aids Comp., 1956, v. 10, p. 130—137.
- [8] Примеры можно найти в следующих статьях: а) Thompson J. F., Thames F. C., Mastin C. W. TOMCAT - a code for numerical generation of boundary fixed curvilinear coordinate systems on fields containing any number of arbitrary two-dimensional bodies.— J. Comput. Phys., 1977, v. 24, p. 274—302; б) Pope S. B. The calculation of turbulent recirculating flows in general orthogonal coordinates.— J. Comput. Phys., 1978, v. 26, p. 197—217<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> См. также Дьяконов Е. Т. О некоторых модификациях проекционно-разностных методов.— Вестник МГУ, сер. вычисл. матем. и киберн., 1977, т. 1, № 2, с. 3—19.— Прим. ред.

**Рекомендуемая литература**

- Becker E. B., Carey G. F., Oden J. T. Finite elements: An introduction. Vol. 1.— Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1981.
- Bettess P. Infinite elements.— Int. J. Num. Meth. Eng., 1977, v. 11, p. 53—64.
- Davies A. J. The finite element method.— Oxford: Clarendon Press, 1980.
- Gordon W. J. Blending-function method of bivariate and multivariate interpolation and approximation.— SIAM J. Num. Anal., 1971, v. 8, p. 158—177.
- Gordon W. J. Hall C. A. Construction of curvilinear coordinate systems and application to mesh generation.— Int. J. Num. Meth. Eng., 1973, v. 7, p. 461—477.
- Hinton E., Owen D. R. J. An introduction to finite element computations.— Swansea: Pineridge Press, 1979.
- Smith R. E. (ed.) Numerical grid generation techniques.— NASA Conference Publication 2166, 1980.

## ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

### 6.1. Введение

В предыдущих главах было показано, что при исследовании многих физических систем требуется найти функцию, являющуюся решением дифференциального уравнения, которое описывает поведение рассматриваемой системы. В ряде случаев для конкретной интересующей нас задачи можно установить *естественный вариационный принцип*. Тогда для получения решения может быть принят альтернативный подход, состоящий в отыскании функции, доставляющей стационарное значение некоторому функционалу. Если будут установлены такие вариационные принципы, то мы сразу получим новые методы построения приближенных решений. При этом можно воспользоваться развитыми в предыдущих главах методами базисных функций или конечных элементов и попытаться получить стационарное значение функционала относительно изменения неизвестных параметров.

Некоторые физические задачи могут быть непосредственно сформулированы в виде вариационных. Очевидным примером является требование минимизации потенциальной энергии для получения равновесия механической системы. Однако вид естественного вариационного принципа не всегда очевиден. В действительности такой вариационный принцип может не существовать для многих непрерывных задач, допускающих корректную формулировку с помощью дифференциальных уравнений. По этой причине изложение будет начато с выяснения того, в каких ситуациях естественный вариационный принцип может быть получен из дифференциального уравнения. Затем будет выяснено, как сконструировать вариационные формулировки, если естественного вариационного принципа не существует. Такие формулировки будут основываться на использовании либо метода множителей Лагранжа, вводящего в рассмотрение дополнительные переменные, либо метода штрафных функций, либо метода наименьших квадратов.

### 6.2. Вариационные принципы

Пусть задан функционал  $\Pi$  в виде интеграла

$$\Pi(\varphi) = \int_{\Omega} F(\varphi, \partial\varphi/\partial x, \dots) d\Omega + \int_{\Gamma} G(\varphi, \partial\varphi/\partial x, \dots) d\Gamma, \quad (6.1)$$

где  $F$  и  $G$  — функции от  $\varphi(x, \dots)$  и ее производных, а  $\Gamma$  — кривая, ограничивающая замкнутую область  $\Omega$ . Попытаемся придать  $\Pi$  стационарное значение относительно вариаций по  $\varphi$  на *множестве допустимых функций*, удовлетворяющих общим краевым условиям типа введенных в (2.25):

$$B_1(\varphi) = 0 \quad \text{на } \Gamma_1, \quad (6.2a)$$

$$B_2(\varphi) = 0 \quad \text{на } \Gamma_2, \quad (6.2b)$$

где  $\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma$ . Для малых допустимых вариаций по  $\varphi$ , выражающихся в переходе от  $\varphi$  к  $\varphi + \delta\varphi$ , определим соответствующую первую вариацию  $\Pi$ :

$$\begin{aligned} \delta\Pi = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial F}{\partial \varphi} \delta\varphi + \frac{\partial F}{\partial (\partial\varphi/\partial x)} \delta \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) + \dots \right] d\Omega + \\ + \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial G}{\partial \varphi} \delta\varphi + \frac{\partial G}{\partial (\partial\varphi/\partial x)} \delta \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) + \dots \right] d\Gamma. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Тогда условие стационарности  $\Pi$  по  $\varphi$  требует [1], чтобы

$$\delta\Pi = 0. \quad (6.4)$$

Если после соответствующих преобразований равенство (6.3) можно переписать в виде

$$\delta\Pi = \int_{\Omega} A(\varphi) \delta\varphi d\Omega, \quad (6.5)$$

то в силу произвольности  $\delta\varphi$  из условия стационарности (6.4) следует, что

$$A(\varphi) = 0 \quad \text{на } \Omega. \quad (6.6)$$

Таким образом, мы имеем естественный вариационный принцип для нахождения решения  $\varphi$  дифференциального уравнения (6.6), подчиненного краевым условиям (6.2). Искомая функция доставляет функционалу  $\Pi(\varphi)$  стационарное значение относительно вариаций по  $\varphi$  на множестве функций, удовлетворяющих краевым условиям. Уравнение (6.6) называется уравнением Эйлера, соответствующим вариационному принципу, согласно которому требуется получить стационарное значение  $\Pi$ . Можно показать, что для любого вариационного принципа такого вида существует соответствующее уравнение Эйлера. К сожалению, обратное неверно, так как только некоторые виды дифференциальных уравнений можно рассматривать как уравнения Эйлера для вариационных функционалов.

<sup>1)</sup> Функции  $B_1(\varphi)$  и  $B_2(\varphi)$ , вообще говоря, могут зависеть не только от функции  $\varphi$ , но и от некоторых ее производных. — *Прим. ред.*

В некоторых случаях преобразования правой части равенства (6.3) [на множестве функций, удовлетворяющих условию (6.2a), но не обязательно удовлетворяющих условию (6.2б). — *Ред.*] приводят не к равенству (6.5), а к соотношению вида

$$\delta\Pi = \int_{\Omega} A(\varphi) \delta\varphi d\Omega + \int_{\Gamma_2} B_2(\varphi) \delta\varphi d\Gamma \quad (6.7)$$

и тогда согласно условию стационарности  $\Pi$  на  $\varphi$  будем иметь

$$A(\varphi) = 0 \quad \text{на } \Omega, \quad (6.8a)$$

$$B_2(\varphi) = 0 \quad \text{на } \Gamma_2. \quad (6.8б)$$

Краевое условие (6.2б) или (6.8б) на  $\Gamma_2$  теперь является *естественным краевым условием*, так как оно автоматически выполняется для функции  $\varphi$ , доставляющей функционалу  $\Pi$  стационарное значение. В этом случае множество допустимых функций является более широким, так как требуется только, чтобы любая функция, принадлежащая этому множеству, удовлетворяла *главному краевому условию* (6.2a). Это определение естественного краевого условия может показаться отличным от введенного в гл. 2, но в действительности они тождественны.

**Пример 6.1.** Пусть задан функционал

$$\Pi(\varphi) = \int_0^{L_x} [(T/2)(d\varphi/dx)^2 - \omega(x)\varphi] dx,$$

где  $T$  — постоянная, и требуется найти функцию  $\varphi$ , доставляющую  $\Pi$  стационарное значение. В качестве множества допустимых функций возьмем функции, удовлетворяющие условиям  $\varphi = 0$  при  $x = 0$  и  $\varphi = 0$  при  $x = L_x$ .

Взяв вариацию по  $\varphi$ , т. е. перейдя от  $\varphi$  к  $\varphi + \delta\varphi$ , имеем

$$\delta\Pi = \int_0^{L_x} [T(d\varphi/dx) \delta(d\varphi/dx) - \omega(x)\delta\varphi] dx$$

и так как  $\delta(d\varphi/dx) = d(\delta\varphi)/dx$ , то после интегрирования по частям получим

$$\delta\Pi = [(d\varphi/dx) \delta\varphi]_0^{L_x} - \int_0^{L_x} [T d^2\varphi/dx^2 + \omega(x)] \delta\varphi dx.$$

Теперь обе функции  $\varphi$  и  $\varphi + \delta\varphi$  являются допустимыми и, таким образом,  $\delta\varphi = 0$  при  $x = 0$  и  $x = L_x$ , откуда следует

$$\delta\Pi = - \int_0^{L_x} [T d^2\varphi/dx^2 + \omega(x)] \delta\varphi dx.$$

Согласно условию стационарности  $\Pi$  по  $\varphi$ , имеем  $\delta\Pi = 0$  для любой допустимой вариации  $\delta\varphi$ . Это может быть верно только в том случае, когда

$$T d^2\varphi/dx^2 + w(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq L_x.$$

Полученное уравнение является уравнением Эйлера для заданного вариационного принципа. Оно описывает малые вертикальные отклонения упругой струны с натяжением  $T$ , находящейся под действием вертикальной нагрузки  $w(x)$ . Потенциальная энергия такой системы состоит из потенциальной энергии деформаций  $U$  и энергии нагрузки  $V$ , определяемых формулами

$$U = \int_0^{L_0} (T/2)(d\varphi/dx)^2 dx, \quad V = - \int_0^{L_x} w(x) \varphi dx,$$

и, таким образом,

$$\Pi = U + V.$$

Следовательно, в данном случае  $\Pi$  можно придать конкретный физический смысл и искомая функция  $\varphi$  минимизирует потенциальную энергию системы.

Из сказанного выше следует, что если требуется только, чтобы допустимые функции удовлетворяли условию  $\varphi = 0$  при  $x = 0$ , то

$$\delta\Pi = (d\varphi/dx) \delta\varphi \Big|_{x=L_x} - \int_0^{L_x} (T d^2\varphi/dx^2 + w(x)) \delta\varphi dx.$$

Таким образом,  $\Pi$  принимает стационарное значение, если

$$T d^2\varphi/dx^2 + w(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq L_x, \\ d\varphi/dx \Big|_{x=L_x} = 0.$$

Следовательно, условие этого типа при  $x = L_x$  является естественным краевым условием для данной задачи.

**Пример 6.2.** Рассмотрим теперь двумерный пример, в котором функционал определен равенством

$$\Pi(\varphi) = \iint_{\Omega} \left[ \frac{k}{2} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{k}{2} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2 - Q\varphi \right] d\Omega + \int_{\Gamma_q} \bar{q}\varphi d\Gamma,$$

где функции  $k$  и  $Q$  зависят только от  $x$  и  $y$ , а граничная кривая  $\Gamma = \Gamma_q + \Gamma_\varphi$ . Множество допустимых функций будет состоять из тех функций, для которых выполнено условие  $\varphi = \bar{\varphi}$  на  $\Gamma_\varphi$ .

Теперь

$$\delta\Pi = \iint_{\Omega} \left[ k \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta\varphi) + k \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\delta\varphi) - Q\delta\varphi \right] d\Omega + \int_{\Gamma_q} \bar{q}\delta\varphi d\Gamma.$$

Применяя формулу Грина, можно переписать это соотношение в виде

$$\delta\Pi = \int_{\Gamma_\varphi + \Gamma_q} k \frac{\partial\varphi}{\partial n} \delta\varphi d\Gamma - \int \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right) + Q \right] \delta\varphi d\Omega + \int_{\Gamma_q} \bar{q} \delta\varphi d\Gamma,$$

и так как  $\varphi$  и  $\varphi + \delta\varphi$  — допустимые функции,  $\delta\varphi = 0$  на  $\Gamma_\varphi$ , то

$$\delta\Pi = - \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right) + Q \right] \delta\varphi d\Omega + \int_{\Gamma_q} \left( k \frac{\partial\varphi}{\partial n} + \bar{q} \right) \delta\varphi d\Gamma.$$

Таким образом,  $\Pi$  принимает на  $\varphi$  стационарное значение, если

$$\partial(k\partial\varphi/\partial x)/\partial x + \partial(k\partial\varphi/\partial y)/\partial y + Q = 0 \quad \text{на } \Omega$$

(это — уравнение Эйлера для вариационного принципа) и

$$k\partial\varphi/\partial n = -\bar{q} \quad \text{на } \Gamma_q$$

(это — естественное краевое условие для данной задачи).

Таким образом, использование рассматриваемого функционала дает нам альтернативный подход к задаче двумерной стационарной теплопроводности, в котором уравнение Эйлера является дифференциальным уравнением, описывающим процесс, а главное и естественные краевые условия на  $\Gamma_\varphi$  и  $\Gamma_q$  соответственно — стандартными краевыми условиями.

## Упражнения

6.1. Рассмотреть функционал

$$\Pi(\varphi) = \int_0^{L_x} [(T/2)(d\varphi/dx)^2 + (k/2)\varphi^2 - \omega(x)\varphi] dx,$$

где  $k$  и  $T$  — постоянные. Найти уравнение Эйлера и выяснить вид главных и естественных краевых условий при  $x = 0$  и  $x = L_x$ . Уравнение Эйлера описывает малые отклонения нагруженного троса, покоящегося на упругом основании жесткостью  $k$ . Показать, что функционал  $\Pi$  в том виде, как он определен здесь, равен потенциальной энергии системы.

6.2. Рассмотреть функционал

$$\Pi(\varphi) = \int_0^{L_x} [(EI/2)(d^2\varphi/dx^2)^2 - \omega(x)\varphi] dx,$$

где  $EI$  зависит только от  $x$ . Показать, что уравнением Эйлера будет уравнение, описывающее отклонение нагруженной балки с жесткостью  $EI$  на изгиб. Выяснить вид главного и естественного краевых условий.



## 6.3. Рассмотреть функционал

$$I(\varphi) = \int_{\Omega} [(k/2)(\partial\varphi/\partial x)^2 + (k/2)(\partial\varphi/\partial y)^2 - Q\varphi] d\Omega - \int_{\Gamma_q} [(\alpha/2)\varphi^2 - \bar{q}\varphi] d\Gamma,$$

где  $k$ ,  $Q$ ,  $\alpha$  и  $\bar{q}$  зависят только от  $x$  и  $y$ . Найти уравнение Эйлера и выяснить вид естественного краевого условия на  $\Gamma_q$ , если допустимые функции удовлетворяют условию  $\varphi = \bar{\varphi}$  на  $\Gamma_{\varphi} = \Gamma - \Gamma_q$ .

## 6.3. Конструирование естественных вариационных принципов

## 6.3.1. Симметричный оператор

В последнем параграфе было показано, что если задан вариационный принцип для некоторого функционала, то всегда можно получить соответствующее уравнение Эйлера. Однако часто поведение физической системы первоначально описывается дифференциальным уравнением, и тогда представляет интерес попытаться выяснить возможность вариационной формулировки задачи. Ограничимся рассмотрением линейных дифференциальных уравнений, так как общие правила для нелинейных уравнений весьма сложны [2]. Линейное дифференциальное уравнение в общем случае может быть записано в виде

$$\mathcal{L}\varphi + p = 0 \quad \text{на } \Omega, \quad (6.9)$$

где  $\mathcal{L}$  — линейный оператор, а  $p$  — известная функция. Пусть решение уравнения (6.9) подчинено краевому условию общего вида

$$\mathcal{M}\varphi + r = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (6.10)$$

где  $\mathcal{M}$  — линейный оператор, а  $r$  — заданная функция координат.

Рассмотрим множество функций  $\theta$ , удовлетворяющих на  $\Gamma$  однородному краевому условию этого вида, т. е. условию

$$\mathcal{M}\theta = 0 \quad \text{на } \Gamma. \quad (6.11)$$

Говорят, что оператор  $\mathcal{L}$  является *симметричным* относительно этого множества функций, определенных на  $\Omega$ , если для любых двух элементов этого множества  $\theta$  и  $\nu$  имеем

$$\int_{\Omega} \theta \mathcal{L}\nu d\Omega = \int_{\Omega} \nu \mathcal{L}\theta d\Omega. \quad (6.12)$$

Симметричный оператор  $\mathcal{L}$  называется *положительно определенным* относительно этого множества функций, если для любого элемента  $\theta$  из данного множества

$$\int_{\Omega} \theta \mathcal{L}\theta d\Omega \geq 0, \quad (6.13)$$

где равенство имеет место в том и только том случае, когда  $\theta$  тождественно равно нулю на  $\Omega$ .

**Пример 6.3.** Рассмотрим оператор  $-d^2/dx^2$  на отрезке оси  $x$   $0 \leq x \leq L_x$  и соответствующем множестве функций, обращающихся в нуль при  $x=0$  и  $x=L_x$ . Если  $v$  и  $\theta$ —две такие функции, то, используя интегрирование по частям, можно записать

$$\int_0^{L_x} \left( -\theta \frac{d^2 v}{dx^2} \right) dx = \left[ -\theta \frac{dv}{dx} \right]_0^{L_x} + \int_0^{L_x} \frac{d\theta}{dx} \frac{dv}{dx} dx.$$

Первый член в правой части этого равенства обращается в нуль, так как  $\theta=0$  при  $x=0$  и  $x=L_x$ . После интегрирования по частям второго слагаемого получаем

$$\int_0^{L_x} (-\theta d^2 v/dx^2) dx = \int_0^{L_x} (-v d^2 \theta/dx^2) dx,$$

и из соотношения (6.12) следует, что оператор  $-d^2/dx^2$  является симметричным относительно множества функций, определенных на отрезке  $0 \leq x \leq L_x$  и обращающихся в нуль при  $x=0$  и  $x=L_x$ .

Полагая в приведенном выше соотношении  $\theta=v$ , имеем

$$\int_0^{L_x} (-\theta d^2 \theta/dx^2) dx = \int_0^{L_x} (d\theta/dx)^2 dx \geq 0$$

и, следовательно,

$$\int_0^{L_x} (-\theta d^2 \theta/dx^2) dx = 0$$

только в том случае, когда  $d\theta/dx=0$ . Так как  $\theta=0$  при  $x=0$  и  $x=L_x$ , то отсюда следует, что этот интеграл равен нулю только тогда, когда  $\theta \equiv 0$  на отрезке  $0 \leq x \leq L_x$ . Таким образом, оператор  $-d^2/dx^2$  положительно определен относительно множества функций, обращающихся в нуль при  $x=0$  и  $x=L_x$ .

### Упражнения

Доказать, что следующие операторы являются симметричными и положительно определенными.

6.4. Оператор  $\mathcal{L} = -d^2/dx^2$  относительно множества функций, удовлетворяющих условиям  $d\varphi/dx + a\varphi = 0$  при  $x=0$  и  $d\varphi/dx + b\varphi = 0$  при  $x=L_x$ . Здесь  $a$  и  $b$ —заданные постоянные, такие, что  $a < 0$ ,  $b > 0$ .

6.5. Оператор  $\mathcal{L}$ , определенный равенством

$$\mathcal{L}\varphi = d^2 [a(x) d^2 \varphi/dx^2]/dx^2 + b(x) \varphi,$$

относительно множества функций, удовлетворяющих условиям  $\varphi = d\varphi/dx = 0$  при  $x=0$  и  $x=L_x$ . Здесь  $a(x) \geq 0$ ,  $b(x) \geq 0$ —заданные функции от  $x$ . Останется ли верным полученный результат, если условие при  $x=L_x$  заменить требованием

$$d^2 \varphi/dx^2 = d [a(x) d^2 \varphi/dx^2]/dx = 0 \text{ при } x=L_x?$$

## 6.6. Оператор

$$-\partial [a(x, y) \partial/\partial x]/\partial x - \partial [b(x, y) \partial/\partial y]/\partial y$$

относительно множества функций, определенных на двумерной области  $\Omega$ , ограниченной замкнутой кривой  $\Gamma$  и обращающихся в нуль на  $\Gamma$ . Здесь  $a(x, y) \geq 0$ ,  $b(x, y) \geq 0$  — заданные функции от  $x$  и  $y$ .

## 6.7. Оператор

$$\partial^4/\partial x^4 + 2\partial^4/\partial x^2 \partial y^2 + \partial^4/\partial y^4$$

относительно множества функций, определенных на двумерной области  $\Omega$ , ограниченной замкнутой кривой  $\Gamma$ , и удовлетворяющих условиям  $\varphi = \partial\varphi/\partial n = 0$  на  $\Gamma$ .

## 6.3.2. Вариационный принцип для симметричных операторов

Используя определенные в предыдущем параграфе свойства линейных симметричных операторов, можно получить нужный нам вариационный принцип [3]. Пусть  $\mathcal{L}$  — симметричный оператор относительно множества функций  $\theta$ , удовлетворяющих однородному краевому условию (6.11), а  $\psi$  — некоторая функция, для которой выполняется заданное на  $\Gamma$  условие, т. е.

$$\mathcal{M}\psi + r = 0 \quad \text{на } \Gamma. \quad (6.14)$$

Тогда функционал

$$\Pi(\varphi) = \int_{\Omega} \left[ (\varphi - \psi) \left\{ \frac{1}{2} \mathcal{L}(\varphi - \psi) + \mathcal{L}\psi + p \right\} \right] d\Omega \quad (6.15)$$

принимает стационарное значение относительно вариаций по функциям  $\varphi$ , удовлетворяющим краевому условию (6.10), на решении  $\varphi$  дифференциального уравнения (6.9) с этим краевым условием.

В самом деле, взяв малые допустимые вариации по  $\varphi$ , выражающиеся в переходе от  $\varphi$  к  $\varphi + \delta\varphi$ , можно показать, что уравнением Эйлера для этого вариационного принципа будет нужное нам дифференциальное уравнение. Поскольку оператор  $\mathcal{L}$  линейен, то

$$\delta\Pi = \int_{\Omega} \left[ \delta\varphi \left\{ \frac{1}{2} \mathcal{L}(\varphi - \psi) + \mathcal{L}\psi + p \right\} + \frac{1}{2} (\varphi - \psi) \mathcal{L}\delta\varphi \right] d\Omega. \quad (6.16)$$

В силу симметричности  $\mathcal{L}$  относительно множества функций, удовлетворяющих равенству (6.11),

$$\int_{\Omega} (\varphi - \psi) \mathcal{L}\delta\varphi d\Omega = \int_{\Omega} \delta\varphi \mathcal{L}(\varphi - \psi) d\Omega. \quad (6.17)$$

Это означает, что

$$\delta\Pi = \int_{\Omega} \delta\varphi (\mathcal{L}\varphi + p) d\Omega, \quad (6.18)$$

и так как  $\delta\varphi$  произвольно, то согласно условию стационарности  $\Pi$  получаем

$$\mathcal{L}\varphi + p = 0 \quad \text{на } \Omega, \quad (6.19)$$

т. е. в точности нужно нам дифференциальное уравнение.

До сих пор в этой главе не обсуждался характер стационарности  $\Pi$  (т. е. будет ли иметь место максимум, минимум или просто седловая точка). Однако в данном случае можно показать, что для любой допустимой функции  $\chi$  равенство (6.15) можно записать в виде

$$\Pi(\chi) = \int_{\Omega} (\chi - \varphi) \mathcal{L}(\chi - \varphi) d\Omega + \text{члены, содержащие } \varphi \text{ и } \psi, \quad (6.20)$$

где функция  $\varphi$  удовлетворяет уравнению (6.19) и доставляет стационарное значение  $\Pi$ . Если оператор  $\mathcal{L}$  положительно определен, то при изменении  $\chi$  в правой части этого равенства члены, содержащие  $\varphi$  и  $\psi$ , остаются постоянными, тогда как первый член будет всегда положителен, исключая случай  $\chi = \varphi$ , когда его значение равно нулю. Следовательно, здесь мы имеем

$$\Pi(\chi) \geq \Pi(\varphi) \quad (6.21)$$

для всех допустимых функций  $\chi$ , т. е. на  $\varphi$  функционал  $\Pi$  достигает минимума.

Следует отметить, что, раскрывая скобки, определенный равенством (6.15) функционал можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \Pi(\varphi) = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} (\varphi \mathcal{L}\varphi - \psi \mathcal{L}\varphi + \varphi \mathcal{L}\psi) + p\varphi \right] d\Omega + \\ + \text{члены, содержащие только } \psi. \end{aligned} \quad (6.22)$$

В ряде случаев можно также записать

$$\int_{\Omega} (\varphi \mathcal{L}\psi - \psi \mathcal{L}\varphi) d\Omega = 2 \int_{\Gamma} \mathcal{N}\varphi d\Gamma + \text{члены, содержащие только } \psi, \quad (6.23)$$

где  $\mathcal{N}$  — некоторый линейный оператор. Таким образом, приведенный выше вариационный принцип эквивалентен требованию, чтобы в случае фиксированной функции  $\psi$  новый функционал

$$\Pi(\varphi) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} \varphi \mathcal{L}'\varphi + p\varphi \right) d\Omega + \int_{\Gamma} \mathcal{N}\varphi d\Gamma \quad (6.24)$$

принимал стационарное значение на множестве функций  $\varphi$ , удовлетворяющих равенству (6.10). Теперь вариационный принцип не требует задания в явном виде функции  $\psi$ , удовлетворяющей уравнению (6.14). Функционал (6.24) аналогичен функционалу (6.1). Поэтому, как и ранее, можно выяснить вид естественных

краевых условий и таким образом расширить множество допустимых функций.

*Замечание.* Как правило, в случае, когда  $\mathcal{L}$  содержит производные порядка  $2d$ , краевое условие типа (6.10) будет естественным краевым условием, если  $\mathcal{M}$  содержит производные порядка не ниже  $d$ .

**Пример 6.4.** Рассмотрим задачу об определении малых отклонений нагруженной упругой струны с закрепленными концами. Отклонения струны описываются уравнением (пример 6.1)

$$T d^2\varphi/dx^2 + \omega(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq L_x$$

с краевыми условиями  $\varphi = 0$  при  $x = 0$  и  $\varphi = 0$  при  $x = L_x$ . Если записать это уравнение в виде

$$\mathcal{L}\varphi + p = -T d^2\varphi/dx^2 - \omega(x) = 0,$$

то оператор  $\mathcal{L}$  будет положительно определен относительно множества функций, обращающихся в нуль при  $x = 0$  и  $x = L_x$  (пример 6.3) и, следовательно, для получения вариационной формулировки задачи можно использовать равенство (6.15). Так как  $\psi \equiv 0$  удовлетворяет всем краевым условиям задачи, подлежащий минимизации функционал будет иметь вид

$$\Pi(\varphi) = \int_0^{L_x} [-(T/2) \varphi d^2\varphi/dx^2 - \omega\varphi] dx.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\Pi(\varphi) = -[\varphi d\varphi/dx]_0^{L_x} + \int_0^{L_x} [(T/2) (d\varphi/dx)^2 - \omega\varphi] dx,$$

и так как  $\varphi = 0$  при  $x = 0$  и  $x = L_x$ , то это выражение сводится к функционалу, введенному в примере 6.1.

**Пример 6.5.** Вернемся к двумерной задаче стационарной теплопроводности, рассмотренной в примере 6.2. Этот процесс описывается уравнением

$$\mathcal{L}\varphi + p = -\partial(k \partial\varphi/\partial x)/\partial x - \partial(k \partial\varphi/\partial y)/\partial y - Q = 0$$

с краевыми условиями

$$\varphi = \bar{\varphi} \quad \text{на } \Gamma_\varphi, \quad k \partial\varphi/\partial n = -\bar{q} \quad \text{на } \Gamma_q.$$

Так как коэффициент теплопроводности  $k$  положителен, то, используя результаты, полученные в упражнении 6.6, мы видим, что оператор  $\mathcal{L}$  положительно определен относительно множества функций, удовлетворяющих однородной форме этих условий, а именно условиям

$$\varphi = 0 \quad \text{на } \Gamma_\varphi, \quad k \partial\varphi/\partial n = 0 \quad \text{на } \Gamma_q,$$

и, таким образом, согласно (6.22) подходящим функционалом для этой задачи будет

$$\begin{aligned} \Pi(\varphi) = \int_{\Omega} \left[ -\frac{\varphi}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \frac{\varphi}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) - Q\varphi \right] d\Omega + \\ + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ \psi \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \psi \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) - \right. \\ \left. - \varphi \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \varphi \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right] d\Omega, \end{aligned}$$

где  $\psi$  — произвольная функция, удовлетворяющая полным неоднородным краевым условиям. Используя формулу Грина, второй интеграл можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ \psi \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \psi \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) - \varphi \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \varphi \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right] d\Omega = \\ = \int_{\Gamma_{\varphi}} \left( \psi k \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi k \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_q} \left( \psi k \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi k \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) d\Gamma. \end{aligned}$$

Но  $\varphi = \psi = \bar{\varphi}$  на  $\Gamma_{\varphi}$ , тогда как  $k\partial\varphi/\partial n = k\partial\psi/\partial n = -\bar{q}$  на  $\Gamma_q$ ; следовательно,

$$\begin{aligned} \Pi(\varphi) = \int_{\Omega} \left[ -\frac{\varphi}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \frac{\varphi}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) - Q\varphi \right] d\Omega + \\ + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{\varphi}} \bar{\varphi} k \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_q} \bar{\varphi} \bar{q} d\Gamma + \text{члены, не зависящие от } \varphi. \end{aligned}$$

Снова применяя формулу Грина к первому интегралу и пренебрегая членами, не зависящими от  $\varphi$ , находим, что искомая функция доставляет стационарное значение функционалу

$$\Pi(\varphi) = \int_{\Omega} \left[ (k/2) (\partial\varphi/\partial x)^2 + (k/2) (\partial\varphi/\partial y)^2 - Q\varphi \right] d\Omega + \int_{\Gamma_q} \bar{\varphi} \bar{q} d\Gamma$$

на множестве функций, удовлетворяющих полным неоднородным краевым условиям. В действительности это множество допустимых функций может быть расширено, так как с помощью вычисления первой вариации  $\delta\Pi$  (как в примере 6.2) краевое условие на  $\Gamma_q$  может быть идентифицировано как естественное краевое условие и, таким образом, нужную нам функцию  $\varphi$  можно искать на множестве функций, удовлетворяющих краевому условию на  $\Gamma_{\varphi}$ . Тот факт, что это краевое условие  $k\partial\varphi/\partial n = -\bar{q}$  является естественным, следует также из заключительных замечаний предыдущего параграфа. Так как здесь оператор  $\mathcal{L}$  включает дифференциро-

вание порядка 2 (т. е.  $d=1$ ), то краевое условие, включающее дифференцирование порядка 1, является естественным (см. замечание перед примером 6.4).

### Упражнения

6.8. На балку длиной  $L_x$  с зашеченными концами действует нагрузка  $w(x)$  на единицу длины; весом балки пренебрегают. Если  $R=EI$  — жесткость балки на изгиб, то отклонение  $\varphi$  удовлетворяет уравнению

$$d^2 [R(x) d^2\varphi/dx^2]/dx^2 = w(x)$$

с крайвыми условиями  $\varphi = d\varphi/dx = 0$  при  $x=0$  и  $x=L_x$ . Показать, что  $\varphi$  минимизирует функционал

$$\Pi(\varphi) = \int_0^{L_x} [R(x) (d^2\varphi/dx^2)^2 - 2w(x)\varphi] dx$$

на множестве функций, удовлетворяющих условиям  $\varphi = \partial\varphi/\partial n = 0$  при  $x=0$  и  $x=L_x$ . Каковы будут функционал и множество допустимых функций в случае, когда конец  $x=L_x$  свободен и, таким образом, краевые условия при  $x=L_x$  принимают вид  $d^2\varphi/dx^2 = d^3\varphi/dx^3 = 0$ ?

6.9. Если описанная в предыдущем упражнении балка покоится на упругом основании жесткостью  $k$  ( $> 0$ ), то дифференциальное уравнение принимает вид

$$d^2 [R(x) d^2\varphi/dx^2]/dx^2 + k\varphi = w(x).$$

Найти соответствующую вариационную формулировку этой задачи.

6.10. Найти вариационную формулировку задачи кручения, описанной в примере 2.8, т. е. задачу, описываемой уравнением

$$\partial^2\theta/\partial x^2 + \partial^2\theta/\partial y^2 = 0, \quad -3 \leq x \leq 3, \quad -2 \leq y \leq 2,$$

с условием  $\theta = (x^2 + y^2)/2$  на границах.

6.11. Показать, что решение уравнения стационарной теплопроводности из примера 6.5 с крайними условиями  $\varphi = 1$  на  $\Gamma_\varphi$  и  $\partial\varphi/\partial n = -h\varphi$  на  $\Gamma_q$ , где  $h$  — функция от  $x$  и  $y$ , минимизирует функционал

$$\Pi(\varphi) = \int_{\Omega} \left[ \frac{k}{2} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{k}{2} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2 - Q\varphi \right] d\Omega + \int_{\Gamma_q} h\varphi^2 d\Gamma.$$

Каково множество допустимых функций?

6.12. Отклонение  $\varphi$  тонкой упругой пластины описывается уравнением

$$d^4\varphi/dx^4 + 2d^4\varphi/dx^2 dy^2 + d^4\varphi/dy^4 = w/D \quad \text{на } \Omega,$$

где  $w$  — нагрузка на единицу площади, а  $D$  — жесткость пластины на изгиб. Показать, что если края пластины  $\Gamma$  жестко зашечены, так что  $\varphi = \partial\varphi/\partial n = 0$  на  $\Gamma$ , то  $\varphi$  минимизирует функционал

$$\Pi(\varphi) = \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \left( \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \right)^2 - 2 \frac{w}{D} \varphi \right] d\Omega$$

на множестве функций, удовлетворяющих условиям  $\varphi = \partial\varphi/\partial n = 0$  на  $\Gamma$ .

#### 6.4. Приближенное решение дифференциальных уравнений методом Релея — Ритца

Результаты предыдущего параграфа могут быть использованы для получения метода приближенного решения дифференциального уравнения (6.9) с общими линейными краевыми условиями (6.10) при условии, что  $\mathcal{L}$  — симметричный линейный оператор относительно множества функций, удовлетворяющих условию (6.11). Этот метод решения, аналогичный введенному в гл. 2 и 3, впервые был использован Релеем, а затем обобщен Ритцем. Определим некоторую функцию  $\psi$ , удовлетворяющую краевым условиям задачи, т. е. такую, что

$$\mathcal{M}\psi + r = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (6.25)$$

и выберем систему независимых базисных функций  $\{N_m, m = 1, 2, 3, \dots\}$ , такую, что

$$\mathcal{M}N_m = 0 \quad \text{на } \Gamma. \quad (6.26)$$

Тогда аппроксимация имеет вид

$$\varphi \approx \hat{\varphi} = \psi + \sum_{m=1}^M a_m N_m \quad (6.27)$$

и краевые условия на  $\Gamma$  автоматически выполняются для всех значений постоянных  $a_1, a_2, \dots, a_M$ . Суть метода Релея — Ритца состоит теперь в получении для

$$\Pi(\hat{\varphi}) = \int_{\Omega} \left[ (\hat{\varphi} - \psi) \left\{ \frac{1}{2} \mathcal{L}(\hat{\varphi} - \psi) + \mathcal{L}\psi + p \right\} \right] d\Omega \quad (6.28)$$

стационарного значения относительно параметров  $a_1, a_2, \dots, a_M$ .

Формально можно показать [3], что если оператор  $\mathcal{L}$  положительно определен, то этот процесс сходится в том смысле, что

$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (\varphi - \hat{\varphi})^2 d\Omega = 0$ , и из неравенства (6.21) следует, что в этом

случае  $\Pi(\hat{\varphi}) \geq \Pi(\varphi)$ .

Используя представление (6.27), функционал можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Pi(\varphi) = & \sum_{l=1}^M \sum_{m=1}^M (a_l a_m / 2) \int_{\Omega} N_l \mathcal{L}' N_m d\Omega + \\ & + \sum_{l=1}^M a_l \int_{\Omega} N_l (\mathcal{L}'\psi + p) d\Omega; \end{aligned} \quad (6.29)$$

это выражение принимает стационарное значение, если

$$\partial \Pi / \partial a_1 = \partial \Pi / \partial a_2 = \dots = \partial \Pi / \partial a_M = 0. \quad (6.30)$$



Вычислив эти производные от функционала (6.29), приходим к системе линейных уравнений

$$\sum_{m=1}^M a_m \int_{\Omega} N_l \mathcal{L} N_m d\Omega = - \int_{\Omega} N_l (\mathcal{L}\psi + p) d\Omega, \quad l=1, 2, \dots, M, \quad (6.31)$$

из которой можно найти постоянные  $a_1, a_2, \dots, a_M$ . Эта система уравнений записывается также в стандартной векторной форме

$$Ka = f, \quad (6.32)$$

где

$$K_{lm} = \int_{\Omega} N_l \mathcal{L} N_m d\Omega, \quad f_l = - \int_{\Omega} N_l (\mathcal{L}\psi + p) d\Omega. \quad (6.33)$$

Следует заметить, что в силу предположенных свойств оператора  $\mathcal{L}$  матрица  $K$  всегда симметрична. Читатель заметит также, что полученные здесь уравнения относительно параметров тождественны найденным в гл. 2 (формулы (2.33)) для решения этой задачи методом Галеркина (т. е. при  $W_l = N_l$ ). Таким образом, мы делаем вывод, что аппроксимации, получаемые методами Релея — Ритца и Галеркина для решения уравнений (6.9) и (6.10), будут тождественны, если оператор  $\mathcal{L}$  симметричен, т. е. если существует вариационная формулировка задачи. Метод Галеркина, естественно, может быть использован вне зависимости от того, можно ли найти такую вариационную формулировку, и, следовательно, имеет более широкую область применения.

**Пример 6.6.** Вернемся к задаче из примера 2.6, где отыскивается решение уравнения

$$-d^2\varphi/dx^2 + \varphi = 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

с краевыми условиями  $\varphi = 0$  при  $x=0$  и  $d\varphi/dx = 20$  при  $x=1$ . Читатель может показать, что оператор  $\mathcal{L}$ , фигурирующий в этой задаче, положительно определен относительно множества функций  $\theta$ , таких, что  $\theta = 0$  при  $x=0$ ,  $d\theta/dx = 0$  при  $x=1$ . Тогда согласно (6.22) эта задача эквивалентна нахождению функции  $\varphi$ , удовлетворяющей краевым условиям и минимизирующей функционал

$$\Pi(\varphi) = \int_0^1 [\varphi (-d^2\varphi/dx^2 + \varphi) - \psi (-d^2\varphi/dx^2 + \varphi) + \\ + \varphi (-d^2\psi/dx^2 + \psi)] dx,$$

где  $\psi$  — произвольная функция, удовлетворяющая краевым условиям задачи. Используя одномерный вариант анализа, проведенного в примере 6.5, делаем вывод, что эта задача эквивалентна

минимизации функционала

$$\Pi(\varphi) = \int_0^1 [(d\varphi/dx)^2 + \varphi^2] dx - 2[20\varphi]_{x=1}.$$

Оператор  $\mathcal{L}$  для этой задачи содержит дифференцирование порядка 2 и, таким образом, согласно замечанию перед примером 6.4 условие при  $x=0$  является главным краевым условием, а условие при  $x=1$  естественным краевым условием. Поступая, как в примере 2.6, строим аппроксимацию

$$\hat{\varphi} = a_1x + a_2x^2 + \dots + a_Mx^M,$$

автоматически удовлетворяющую главному условию при  $x=0$ , но не удовлетворяющую естественному условию при  $x=1$ . Постоянные теперь определяются по методу Релея—Ритца, исходя из минимизации  $\Pi$  по параметрам  $a_1, a_2, \dots, a_M$ .

Например, использование 2-элементной аппроксимации означает, что

$$\Pi(\hat{\varphi}) = \int_0^1 [(a_1 + 2a_2x)^2 + (a_1x + a_2x^2)^2] dx - 40(a_1 + a_2),$$

и этот функционал достигает своего минимального значения, если

$$\partial\Pi/\partial a_1 = 2 \int_0^1 [(a_1 + 2a_2x) + x(a_1x + a_2x^2)] dx - 40 = 0,$$

$$\partial\Pi/\partial a_2 = 2 \int_0^1 [2x(a_1 + 2a_2x) + x^2(a_1x + a_2x^2)] dx - 40 = 0.$$

Проводя интегрирование, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} (4/3)a_1 + (5/4)a_2 &= 20, \\ (5/4)a_1 + (23/15)a_2 &= 20. \end{aligned}$$

Как и следовало ожидать в соответствии с предшествующими замечаниями, эти уравнения в точности совпадают с уравнениями, получающимися при решении этой задачи методом Галеркина и, таким образом, повторно имеем решение примера 2.6:  $a_1 = 11.7579$ ,  $a_2 = 3.4582$ . Применение этой аппроксимации снова демонстрирует сходимость к естественному краевому условию для  $d\varphi/dx$  при  $x=1$ .

### Упражнения

6.13. Методом Релея—Ритца найти приближенное решение задачи одномерной стационарной теплопроводности с распределенным источником тепла, описываемой уравнением

$$d^2\varphi/dx^2 - e^{-x} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

с краевыми условиями  $\varphi=0$  при  $x=0$ ,  $d\varphi/dx=1$  при  $x=1$ . Использовать кусочно-линейные конечно-элементные базисные функции с расстоянием между последовательными узлами, равным  $1/3$ .

6.14. Вернемся к задаче из примера 3.4 о стержне, находящемся под действием аксиальной силы  $b$  на единицу объема, отклонение которого описывается уравнением

$$d(AE d\varphi/dx)/dx + Ab = 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

с краевыми условиями  $\varphi=0$  при  $x=0$ ,  $d\varphi/dx=0$  при  $x=1$ . Здесь  $A$ —площадь поперечного сечения стержня,  $E$ —модуль Юнга, а  $\varphi$ —перемещение произвольной точки. Показать, что вариационная формулировка этой задачи эквивалентна минимизации потенциальной энергии системы. Используя подходящие непрерывные базисные функции, найти приближенное решение задачи в случае, когда  $A$ ,  $E$  и  $b$  постоянны.

6.15. Отклонение балки единичной длины с единичной жесткостью на изгиб описывается уравнением

$$d^4\varphi/dx^4 = \sin \pi x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

(весом балки пренебрегают). Методом Релея—Ритца найти одноэлементную аппроксимацию, используя многочленные базисные функции. Рассмотреть случай, когда балка заземлена на концах, так что  $\varphi=d\varphi/dx=0$  при  $x=0$  и  $x=1$ . Сравнить эту аппроксимацию с точным решением задачи.

6.16. Пусть правый конец балки из упражнения 6.15 теперь свободен, т. е.  $d^2\varphi/dx^2=d^3\varphi/dx^3=0$  при  $x=1$ . Найти одноэлементную аппроксимацию, используя метод Релея—Ритца и удовлетворяя только главному краевому условию. Сравнить аппроксимацию с точным решением задачи, выяснить, с какой точностью выполняются естественные краевые условия.

## 6.5. Использование множителей Лагранжа

В предыдущих параграфах было показано, как получить решение линейного дифференциального уравнения (вида (6.9)) с общими краевыми условиями (6.10), отыскав функцию  $\varphi$ , доставляющую некоторому функционалу  $\Pi(\varphi)$  стационарное значение на множестве функций, удовлетворяющих соответствующим краевым условиям. Если рассматривать краевое условие как дополнительное ограничение на задачу нахождения стационарного значения  $\Pi(\varphi)$ , то можно воспользоваться принадлежащим Лагранжу подходом, когда рассматривается вариация нового функционала  $\Pi_1(\varphi, \lambda)$ . Этот новый функционал строится по правилу

$$\Pi_1(\varphi, \lambda) = \Pi(\varphi) + \int_{\Gamma} \lambda (\mathcal{M}\varphi + r) d\Gamma, \quad (6.34a)$$

где  $\lambda$ , так называемый множитель Лагранжа,— функция координат. Тогда первая вариация от  $\Pi_1$  задается выражением

$$\delta\Pi_1 = \delta\Pi + \int_{\Gamma} \delta\lambda (\mathcal{M}\varphi + r) d\Gamma + \int_{\Gamma} \lambda \mathcal{M}\delta\varphi d\Gamma. \quad (6.34b)$$

Если  $\Pi_1$  принимает стационарное значение, т. е.  $\delta\Pi_1 = 0$  для всех вариаций  $\delta\varphi$ ,  $\delta\lambda$ , то

$$\mathcal{M}\varphi + r = 0 \quad \text{на } \Gamma \quad (6.35a)$$

и, следовательно,

$$\mathcal{M}\delta\varphi = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (6.35б)$$

$$\delta\Pi = 0 \quad \text{на } \Omega. \quad (6.35в)$$

Ранее было показано, что для выполнения условия (6.35в) необходимо, чтобы

$$\mathcal{L}\varphi + p = 0 \quad \text{на } \Omega, \quad (6.36)$$

и, таким образом, функция  $\varphi$ , доставляющая  $\Pi_1$  стационарное значение, является решением этого уравнения и удовлетворяет краевому условию (6.35а).

Если аппроксимации для  $\varphi$  и  $\lambda$  строятся обычным образом как

$$\varphi \approx \hat{\varphi} = \sum_{m=1}^M a_m N_{m,1}, \quad \lambda \approx \hat{\lambda} = \sum_{m=1}^M b_m N_{m,2}, \quad (6.37)$$

где  $\hat{\varphi}$  теперь не обязательно удовлетворяет некоторым (или всем) краевым условиям для  $\varphi$ , то постоянные  $\{a_m, b_m; m = 1, 2, \dots, M\}$  можно определить из условия стационарности  $\Pi_1(\hat{\varphi}, \hat{\lambda})$ . Подставляя аппроксимации (6.37) в (6.34а), получаем

$$\Pi_1(\hat{\varphi}, \hat{\lambda}) = \Pi(\hat{\varphi}) + \int_{\Gamma} \left[ \sum_{m=1}^M b_m N_{m,2} \right] \left[ \left( \sum_{m=1}^M a_m \mathcal{M} N_{m,1} \right) + r \right] d\Gamma. \quad (6.38)$$

Для обеспечения стационарности этого функционала относительно вариаций по параметрам  $a_l, b_l$  необходимо, чтобы

$$\partial \Pi_1 / \partial a_l = \partial \Pi / \partial a_l + \int_{\Gamma} \left[ \sum_{m=1}^M b_m N_{m,2} \right] \mathcal{M} N_{l,1} d\Gamma = 0, \quad (6.39а)$$

$$\partial \Pi_1 / \partial b_l = \int_{\Gamma} N_{l,2} \left[ \left( \sum_{m=1}^M a_m \mathcal{M} N_{m,1} \right) + r \right] d\Gamma = 0. \quad (6.39б)$$

Первый член правой части (6.39а) задается с помощью исходного вариационного принципа, и можно положить

$$\partial \Pi / \partial a_l = \sum_{m=1}^M K_{lm} a_m - f_l, \quad (6.40)$$

где  $K_{lm}$  и  $f_l$  вычисляются по соответствующим формулам. Тогда система уравнений (6.39) в векторной записи принимает вид

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}_1 \\ \mathbf{K}_1^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{f}_1 \end{bmatrix}, \quad (6.41)$$

где

$$[\mathbf{K}_1]_{lm} = \int_{\Gamma} N_{m,2} \mathcal{M} N_{l,1} d\Gamma, \quad [\mathbf{f}_1]_l = - \int_{\Gamma} r N_{l,2} d\Gamma. \quad (6.42)$$

Сразу видно, что эта формулировка приводит к большему числу неизвестных параметров, чем исходная формулировка предыду-

щих параграфов. Более того, матрица, которую теперь требуется обратить, имеет нули на главной диагонали и этот факт должен приниматься в расчет при любом методе численного решения этой линейной системы.

Метод множителей Лагранжа может быть применен и для учета ограничений, отличных от краевых условий. Такое его использование в ряде случаев весьма удобно.

## Упражнения

6.17. Методом множителей Лагранжа найти решение задачи из примера 2.4.

6.18. Методом множителей Лагранжа найти 2-элементную аппроксимацию решения задачи из примера 2.5.

6.19. Найти решение задачи из примера 2.4, используя два линейных конечных элемента и применяя метод множителей Лагранжа. Сравнить значения  $\lambda$  при  $x=0$  и  $x=1$  с точными значениями  $-\partial\varphi/\partial n$  в этих точках. (Содержательный смысл этого сравнения поясняется в следующем разделе.)

### 6.5.1. Физический смысл множителей Лагранжа.

#### Модифицированные вариационные принципы

Множители Лагранжа были введены как средство учета определенных краевых условий, которые должны выполняться для исходного вариационного принципа, однако оказалось, что во многих физических задачах их можно отождествить с физическими величинами, имеющими важное значение для исходной математической модели. Этот факт лучше всего пояснить на конкретном примере, и мы снова рассмотрим решение двумерной задачи стационарной теплопроводности. Описывающее этот процесс уравнение будет тем же, что и в примере 6.5. Будем считать, что краевое условие состоит в задании температуры  $\varphi$  на граничной кривой  $\Gamma$ , т. е.

$$\varphi = \bar{\varphi} \quad \text{на } \Gamma. \quad (6.43)$$

Если это краевое условие рассматривается как ограничение на  $\varphi$ , то согласно предшествующей теории (см. пример 6.5) искомое решение доставляет функционалу

$$P_1(\varphi, \lambda) = \int_{\Omega} \left[ \frac{k}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{k}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - Q\varphi \right] d\Omega + \int_{\Gamma} \lambda (\varphi - \bar{\varphi}) d\Gamma \quad (6.44)$$

стационарное значение относительно вариаций по  $\varphi$  и  $\lambda$ . Взяв вариацию, имеем

$$\begin{aligned} \delta P_1 = & \int_{\Omega} \left[ k \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \varphi) + k \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\delta \varphi) - Q \delta \varphi \right] d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma} \delta \lambda (\varphi - \bar{\varphi}) d\Gamma + \int_{\Gamma} \lambda \delta \varphi d\Gamma; \end{aligned} \quad (6.45)$$

использование формулы Грина дает равенство

$$\delta\Pi_1 = -\int_{\Omega} \delta\varphi \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right) + Q \right] d\Omega + \int_{\Gamma} k \frac{\partial\varphi}{\partial n} \delta\varphi d\Gamma + \int_{\Gamma} \delta\lambda (\varphi - \bar{\varphi}) d\Gamma + \int_{\Gamma} \lambda \delta\varphi d\Gamma. \quad (6.46)$$

Если  $\Pi_1$  принимает стационарное значение для всех вариаций  $\delta\varphi$  и  $\delta\lambda$ , то отсюда следует, что

$$\varphi - \bar{\varphi} = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (6.47a)$$

$$\lambda + k \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (6.47b)$$

$$\partial(k \frac{\partial\varphi}{\partial x})/\partial x + \partial(k \frac{\partial\varphi}{\partial y})/\partial y + Q = 0 \quad \text{на } \Omega. \quad (6.47b)$$

Уравнения (6.47a) и (6.47b) показывают, что функция  $\varphi$ , доставляющая стационарное значение  $\Pi_1$ , является искомым решением, тогда как уравнение (6.47b) определяет соответствующее значение  $\lambda$ . Так как  $-k \frac{\partial\varphi}{\partial n}$  на  $\Gamma$  равно потоку тепла через границу, то мы получаем в этом случае физическую интерпретацию значения множителя Лагранжа. Эта идентификация множителя Лагранжа позволяет сформулировать модифицированный вариационный принцип, когда  $\lambda$  с самого начала заменяется тождественно равной ему величиной. Таким образом, для данного примера можно искать стационарное значение не функционала (6.44), а функционала

$$\Pi(\varphi) = \int_{\Omega} \left[ \frac{k}{2} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{k}{2} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2 - Q\varphi \right] d\Omega - \int_{\Gamma} k \frac{\partial\varphi}{\partial n} (\varphi - \bar{\varphi}) d\Gamma, \quad (6.48)$$

где  $\varphi$  опять не обязательно удовлетворяет каким-либо краевым условиям. Если приближенное решение  $\hat{\varphi}$  строится в обычной форме разложения по базисным функциям и стационарное значение  $\Pi(\hat{\varphi})$  отыскивается относительно вариаций по параметрам в этом разложении, то можно показать, что использование нового принципа возвращает нас к задаче с исходным числом неизвестных параметров. Таким образом, этот метод может быть предпочтительнее в вычислительном плане.

Вариационные принципы в такой формулировке используются во многих различных приложениях, причем особенно широко они применяются в строительной механике [4].

**Пример 6.7.** В примере 2.4 уравнение  $-d^2\varphi/dx^2 + \varphi = 0$  с краевыми условиями  $\varphi = 0$  при  $x = 0$ ,  $\varphi = 1$  при  $x = l$  решалось методом взвешенных невязок, причем разложение по базисным функциям не удовлетворяло априори краевым условиям задачи. Попытаемся теперь получить решение, используя то же самое разло-

жение по базисным функциям и вариационный метод в только что описанной форме.

Поступая аналогично тому, как это делалось при переходе от выражения (6.44) к выражению (6.48), читатель должен показать, что эта задача эквивалентна отысканию функции  $\varphi$ , доставляющей стационарное значение функционалу

$$\Pi(\varphi) = \int_0^1 \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + \varphi^2 \right] dx + \left[ \frac{d\varphi}{dx} \right]_{x=0} - \left[ \frac{d\varphi}{dx} (\varphi - 1) \right]_{x=1}.$$

Используя ту же, что и в примере 2.4, трехэлементную аппроксимацию

$$\hat{\varphi} = a_1 + a_2 x + a_3 x^2,$$

выберем постоянные  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  таким образом, чтобы получить стационарное значение  $\Pi(\varphi)$  относительно вариаций по этим величинам, т. е. потребуем, чтобы

$$\partial \Pi / \partial a_1 = \partial \Pi / \partial a_2 = \partial \Pi / \partial a_3 = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Pi(\varphi) = & \int_0^1 \frac{1}{2} [(a_2 + 2a_3 x)^2 + (a_1 + a_2 x + a_3 x^2)^2] dx + \\ & + [(a_2 + 2a_3 x)(a_1 + a_2 x + a_3 x^2)]_{x=0} - \\ & - [(a_2 + 2a_3 x)(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 - 1)]_{x=1}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \partial \Pi / \partial a_1 = & \int_0^1 (a_1 + a_2 x + a_3 x^2) dx + a_2 - (a_2 + 2a_3) = 0, \\ \partial \Pi / \partial a_2 = & \int_0^1 [(a_2 + 2a_3 x) + x(a_1 + a_2 x + a_3 x^2)] dx + a_1 - \\ & - (a_1 + a_2 + a_3 - 1) - (a_2 + 2a_3) = 0, \\ \partial \Pi / \partial a_3 = & \int_0^1 [2x(a_2 + 2a_3 x) + x^2(a_1 + a_2 x + a_3 x^2)] dx - \\ & - 2(a_1 + a_2 + a_3 - 1) - (a_2 + 2a_3) = 0. \end{aligned}$$

Выполнив интегрирование, получим систему линейных уравнений  $\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f}$ , где

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -5/3 \\ 1/2 & -2/3 & -7/4 \\ -5/3 & -7/4 & -37/15 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

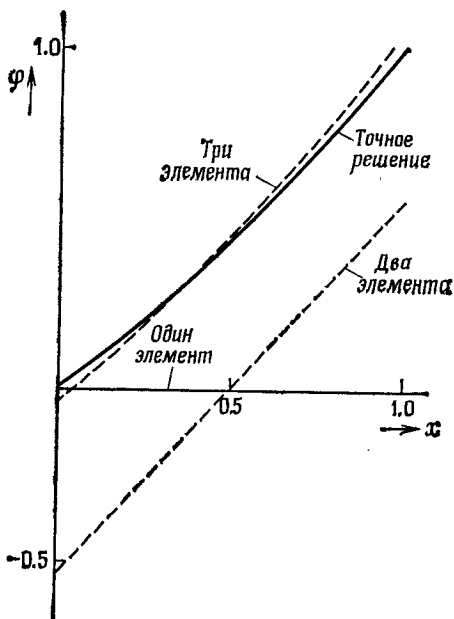


Рис. 6.1. Сравнение приближенного и точного решений задачи из примера 6.7.

Решение этой системы для трехэлементной аппроксимации имеет вид

$$a_1 = -0.0448, \quad a_2 = 0.8598, \quad a_3 = 0.2311.$$

На рис. 6.1 оно сравнивается с точным решением и соответствующими одно- и двухэлементной аппроксимациями.

### Упражнения

6.20. Вновь рассмотреть задачу об отклонении аксиально нагруженного стержня, решавшуюся в примере 3.4. Найти решение, используя метод множителей Лагранжа с подходящей системой непрерывных базисных функций.

6.21. Выяснить физический смысл множителя Лагранжа  $\lambda$  в упражнении 6.20 и заново решить задачу с помощью модифицированного вариационного принципа, в котором  $\lambda$  заменяется тождественно равной ему величиной.

6.22. Вернувшись к примеру 2.5, найти приближенное решение, используя ту же самую систему базисных функций и модифицированный вариационный принцип (6.48).

## 6.6. Общие вариационные принципы

Метод множителей Лагранжа ведет к очевидной процедуре получения вариационного принципа для общего дифференциального уравнения вида

$$\mathcal{L}\varphi + p = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (6.49)$$



где оператор  $\mathcal{L}$  не обязательно обладает свойствами, обеспечивающими существование естественного вариационного принципа. Рассматривая выписанное выше уравнение как ограничение, можно получить вариационную формулировку для этого уравнения, просто полагая

$$\Pi(\varphi, \lambda) = \int_{\Omega} \lambda (\mathcal{L}\varphi + p) d\Omega \quad (6.50)$$

и требуя, чтобы функционал  $\Pi$  принимал стационарное значение относительно всех вариаций  $\delta\varphi$  и  $\delta\lambda$  на множестве функций  $\varphi$ , удовлетворяющих краевым условиям задачи.

Взяв вариацию, что дает

$$\delta\Pi = \int_{\Omega} \delta\lambda (\mathcal{L}\varphi + p) d\Omega + \int_{\Omega} \lambda \mathcal{L} \delta\varphi d\Omega, \quad (6.51)$$

и введя сопряженный оператор  $\mathcal{L}^*$ , определяемый равенством

$$\int_{\Omega} \lambda \mathcal{L} \delta\varphi d\Omega = \int_{\Omega} \delta\varphi \mathcal{L}^* \lambda d\Omega, \quad (6.52)$$

можно показать, что  $\Pi$  принимает стационарное значение для всех таких вариаций  $\delta\varphi$ ,  $\delta\lambda$ , если, как и требуется,

$$\mathcal{L}\varphi + p = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (6.53)$$

$$\mathcal{L}^* \lambda = 0 \quad \text{в } \Omega. \quad (6.54)$$

Заметим, что сопряженный оператор, как он определен здесь, существует только для линейных задач [5].

Опять видно, что этот вариационный принцип введен ценой удвоения числа переменных, входящих в любое приближенное решение. Если использовать аппроксимации

$$\varphi \approx \hat{\varphi} = \varphi + \sum_{m=1}^M a_m N_{m,1}, \quad \lambda \approx \hat{\lambda} = \sum_{m=1}^M b_m N_{m,2} \quad (6.55)$$

и выполнить те же шаги, что и при выводе соотношений (6.38) — (6.42), то можно показать, что в данном случае окончательная система уравнений принимает вид

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (6.56)$$

где

$$K_{lm} = \int_{\Omega} N_{l,1} \mathcal{L}^* N_{m,1} d\Omega, \quad f_l = - \int_{\Omega} N_{l,2} (\mathcal{L}\varphi + p) d\Omega. \quad (6.57)$$

Очевидно, что эта система полностью распадается на отдельные уравнения и сначала можно независимо решить систему для параметров  $a_m$ , являющихся неизвестными в аппроксимации  $\hat{\varphi}$  и

представляющими основной интерес, не рассматривая параметры  $b_m$ . Следует заметить, что эта первая система уравнений тождественна уравнениям, получающимся в методе взвешенных невязок, и, таким образом, круг замыкается: из общего вариационного принципа получаются уравнения метода взвешенных невязок (см. гл. 2).

## 6.7. Штрафные функции

В § 6.5 был рассмотрен общий метод введения множителей Лагранжа, позволяющий получать вариационные принципы с увеличенным, как правило, полным числом неизвестных. Было также показано, что решение результирующей системы уравнений усложняется появлением нулевых диагональных элементов в подлежащей обращению матрице (см. уравнения (6.41)). В этом параграфе будет рассмотрен альтернативный метод учета ограничений, который, как будет показано, свободен от этих недостатков, связанных со стандартным подходом метода множителей Лагранжа.

Чтобы продемонстрировать этот метод, снова обратимся к рассмотренной в § 6.5 задаче минимизации некоторого функционала  $\Pi(\varphi)$  относительно функций, удовлетворяющих граничному условию

$$\mathcal{M}\varphi + r = 0 \quad \text{на } \Gamma. \quad (6.58)$$

Если определить модифицированный функционал  $\Pi_1(\varphi)$  по правилу

$$\Pi_1(\varphi) = \Pi(\varphi) + \alpha \int_{\Gamma} (\mathcal{M}\varphi + r)^2 d\Gamma, \quad (6.59)$$

где  $\alpha$  — параметр штрафа — достаточно большое положительное число, то очевидно, что функция, доставляющая  $\Pi_1$  стационарное значение, будет одновременно приближенно удовлетворять дифференциальному уравнению и ограничению (6.58). Чем больше берется значение  $\alpha$ , тем лучше удовлетворяется граничное условие и тем точнее оказывается аппроксимация для  $\varphi$ . Читатель заметит, что задача, включающая ограничение указанным выше образом, не вводит дополнительных неизвестных параметров. Более того, если исходный вариационный принцип таков, что минимизируется  $\Pi(\varphi)$ , то метод штрафных функций будет всегда давать строго положительно определенные матрицы.

**Пример 6.8.** Применение метода штрафных функций будет продемонстрировано с помощью повторного рассмотрения задачи из примера 6.7. Подлежащее решению уравнение имеет вид  $-d^2\varphi/dx^2 + \varphi = 0$  с краевыми условиями  $\varphi = 0$  при  $x = 0$  и  $\varphi = 1$  при  $x = 1$ . Согласно формуле (6.59) рассмотрим вариацию функционала

$$\Pi_1\varphi = \int_0^1 \frac{1}{2} [(d\varphi/dx)^2 + \varphi^2] dx + \alpha [\varphi^2]_{x=0} + \alpha [(\varphi - 1)^2]_{x=1},$$

где  $\alpha$  — параметр штрафа. Используя, как ранее, трехэлементную аппроксимацию

$$\hat{\varphi} = a_1 + a_2x + a_3x^2,$$

выберем постоянные  $a_1, a_2, a_3$  таким образом, чтобы получить стационарное значение  $\Pi_1$  относительно вариаций по  $a_1, a_2, a_3$ , т. е. потребуем, чтобы

$$\partial\Pi/\partial a_1 = \partial\Pi/\partial a_2 = \partial\Pi/\partial a_3 = 0.$$

Подставляя аппроксимацию и дифференцируя, получаем уравнения

$$\partial\Pi/\partial a_1 = \int_0^1 (a_1 + a_2x + a_3x^2) dx + 2\alpha a_1 + \alpha(2a_1 + 2a_2 + 2a_3 - 2) = 0,$$

$$\begin{aligned} \partial\Pi/\partial a_2 = \int_0^1 (a_2 + 2a_3x + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) dx + \\ + \alpha(2a_1 + 2a_2 + 2a_3 - 2) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial\Pi/\partial a_3 = \int_0^1 (2a_2x + 4a_3x^2 + a_1x^2 + a_2x^3 + a_3x^4) dx + \\ + \alpha(2a_1 + 2a_2 + 2a_3 - 2) = 0 \end{aligned}$$

и после вычисления интегралов приходим к системе линейных уравнений  $Ka = f$ , где

$$K = \begin{bmatrix} 2 + 4\beta & 1 + 2\beta & 2/3 + 2\beta \\ 1 + 2\beta & 8/3 + 2\beta & 5/2 + 2\beta \\ 2/3 + 2\beta & 5/2 + 2\beta & 46/15 + 2\beta \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} 2\beta \\ 2\beta \\ 2\beta \end{bmatrix}$$

и  $\beta = 2\alpha$ .

Задав значение  $\beta$ , можно решить эту систему уравнений. На рис. 6.2 аппроксимации, полученные соответственно при  $\beta = 1, 10, 1000$ , сравниваются с точным решением. Очевидно улучшение решения с возрастанием  $\beta$ . Этот факт демонстрируется также в следующей таблице, где показана сходимость трехэлементных аппроксимаций к заданным краевым условиям при  $x=0$  и  $x=1$

$\beta$	$\hat{\varphi} _{x=0}$	$\hat{\varphi} _{x=1}$
1	0.1841	0.4999
10	$0.67 \cdot 10^{-1}$	0.8899
$10^3$	$0.83 \cdot 10^{-2}$	0.8871
$10^6$	$0.85 \cdot 10^{-3}$	0.9987

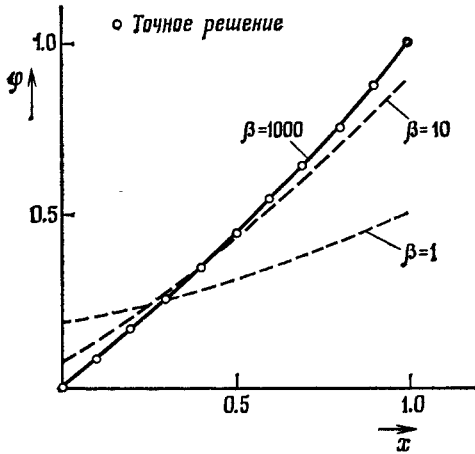


Рис. 6.2. Влияние увеличения параметра штрафа на приближенное решение задачи из примера 6.8.

### Упражнения

6.23. Методом штрафных функций получить распределение изгибающего момента для балки из упражнения 1.2. Использовать аппроксимацию, удовлетворяющую краевому условию при  $x=0$ , но не удовлетворяющую автоматически краевому условию при  $x=1$ . Исследовать влияние увеличения параметра штрафа  $\alpha$ .

6.24. Использовать метод штрафных функций для решения задачи кручения из примера 2.5. Применить аппроксимацию многочленом, удовлетворяющую заданному краевому условию при  $y = \pm 2$ , но не удовлетворяющую автоматически краевому условию при  $x = \pm 3$ . Исследовать влияние увеличения параметра штрафа  $\alpha$  на оценку крутящего момента и максимального значения касательного напряжения.

6.25. Вернувшись к упражнению 2.7, найти распределение температуры методом штрафных функций. Использовать аппроксимацию, удовлетворяющую только крайним условиям на сторонах  $x = \pm 1$ .

### 6.8. Метод наименьших квадратов

В § 6.6 было показано, как использовать метод множителей Лагранжа для построения общего вариационного принципа, рассматривая дифференциальное уравнение как ограничение, наложенное во всех точках области. Ясно, что ту же самую процедуру можно использовать применительно к описанному в предыдущем параграфе методу штрафных функций. Действительно, если решается уравнение

$$\mathcal{L}(\varphi) - p = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (6.60)$$

то решение можно определить с помощью отыскания стационарного значения функционала

$$\Pi(\varphi) = \alpha \int_{\Omega} (\mathcal{L}\varphi + p)^2 d\Omega, \quad (6.61)$$

где предполагается, что рассматриваемые функции  $\varphi$  удовлетворяют на  $\Gamma$  заданным краевым условиям. Интересно, что так как параметр  $\alpha$  теперь является просто множителем, то нет необходимости в его дальнейшем рассмотрении и он может быть опущен. Подставляя аппроксимацию  $\hat{\varphi}$  стандартного вида, нетрудно видеть, что получаемая формулировка в точности совпадает с формулировкой метода наименьших квадратов из гл. 2, где требовалось минимизировать сумму квадратов погрешностей аппроксимации по области  $\Omega$ .

Если

$$\hat{\varphi} = \psi + \sum_{m=1}^M a_m N_m, \quad (6.62)$$

то

$$\Pi(\hat{\varphi}) = \int_{\Omega} \left[ \mathcal{L}\psi + \left( \sum_{m=1}^M a_m \mathcal{L}N_m \right) + p \right]^2 d\Omega \quad (6.63)$$

и  $\Pi$  принимает минимальное значение при условии

$$2 \int_{\Omega} \left[ \mathcal{L}\psi + \left( \sum_{m=1}^M a_m \mathcal{L}N_m \right) + p \right] \mathcal{L}N_l d\Omega = 0, \quad l = 1, 2, \dots, M. \quad (6.64)$$

Следовательно, этот подход непосредственно дает векторное уравнение стандартной формы

$$K\mathbf{a} = \mathbf{f}, \quad (6.65)$$

где

$$K_{lm} = \int_{\Omega} (\mathcal{L}N_l)(\mathcal{L}N_m) d\Omega, \quad f_l = - \int_{\Omega} [(\mathcal{L}\psi)(\mathcal{L}N_l) + p\mathcal{L}N_l] d\Omega. \quad (6.66)$$

Методы наименьших квадратов такого типа являются весьма эффективной процедурой для получения интегральных формулировок, которые можно использовать для построения приближенных решений. Вариационный принцип наименьших квадратов может быть записан для произвольного дифференциального уравнения без введения дополнительных переменных. Однако, вычислив вариацию для конкретного примера, читатель заметит, что уравнение Эйлера будет теперь некоторой производной от исходного уравнения. В принципе это приводит к возможности появления ложных решений, если использовать неверные краевые условия. Кроме того, из равенства (6.66) следует, что в методе наименьших квадратов обычно нужно использовать базисные функции с более высокой гладкостью, и этот факт немаловажен, если при-

меняется конечно-элементная аппроксимация. Хотя в ряде случаев могут выявиться серьезные недостатки, чаще всего их удается преодолеть переходом к смешанной формулировке и заменой исходного уравнения системой уравнений более низкого порядка. Это, однако, опять приводит к необходимости введения дополнительных переменных.

**Пример 6.9.** Рассмотрим одномерную задачу линейной стационарной теплопроводности, обсуждавшуюся в примере 3.3. Описывающее физический процесс уравнение имеет вид

$$k d^2 \varphi / dx^2 + Q = 0,$$

где  $k=1$ ,  $Q=1$  для  $x < 1/2$ ,  $Q=0$  для  $x > 1/2$ , с краевыми условиями  $\varphi=0$  при  $x=0$ ,  $d\varphi/dx=0$  при  $x=1$ . Будем использовать метод наименьших квадратов и конечно-элементную аппроксимацию

$$\hat{\varphi} = \sum_{m=1}^M \varphi_m N_m;$$

тогда компоненты матрицы  $K$  системы (6.65) равны

$$K_{lm} = \int_0^1 (d^2 N_l / dx^2) (d^2 N_m / dx^2) dx.$$

Таким образом, для того чтобы появляющиеся здесь интегралы были определены, базисные функции должны обладать  $C^1$ -гладкостью. Если мы хотим использовать линейные элементы, которые имеют  $C^0$ -гладкость, то необходимо использовать смешанный подход, принятый в примере 3.3, и заменить выписанное выше уравнение двумя уравнениями первого порядка

$$k d\varphi / dx + q = 0, \quad dq / dx = Q.$$

Ранее было отмечено, что вводя вектор

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi \\ q \end{bmatrix},$$

эту пару уравнений можно записать как одно уравнение, и тогда мы будем иметь

$$\mathcal{L}\Phi + p = 0,$$

где

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} d/dx & 1 \\ 0 & d/dx \end{bmatrix}, \quad p = \begin{bmatrix} 0 \\ Q \end{bmatrix}.$$

Хотя анализ метода наименьших квадратов описан только для одного уравнения, он непосредственно обобщается на систему уравнений. В данном случае необходимо потребовать, чтобы функ-

ционал

$$\Pi(\Phi) = \int_0^1 (\mathcal{L}\Phi + p)^T (\mathcal{L}\Phi + p) d\Omega$$

достигал минимума. Используя сетку с показанными на рис. 3.7, а четырьмя равными элементами и линейными базисными функциями, можно построить конечно-элементные аппроксимации по правилу

$$\Phi \approx \hat{\Phi} = \sum_{m=1}^5 \Phi_m N_m = \sum_{m=1}^5 \begin{bmatrix} \Phi_m \\ q_m \end{bmatrix} N_m,$$

где  $\Phi_0 = q_5 = 0$  в силу краевых условий. Подставив эти разложения в приведенное выше выражение, можно показать, что  $\Pi(\hat{\Phi})$  принимает минимальное значение, когда

$$K\Phi = f,$$

где

$$\Phi^T = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5),$$

а подматрица  $K_{lm}$  матрицы  $K$  и подвектор  $f_l$  вектора  $f$  определены равенствами

$$K_{lm} = \int_0^1 \begin{bmatrix} \frac{dN_l}{dx} \frac{dN_m}{dx} & \frac{dN_l}{dx} N_m \\ N_l \frac{dN_m}{dx} & \frac{dN_l}{dx} \frac{dN_m}{dx} + N_l N_m \end{bmatrix} dx,$$

$$f_l = \int_0^1 \begin{bmatrix} 0 \\ Q \frac{dN_l}{dx} \end{bmatrix} dx.$$

Можно заметить, что, как и следовало ожидать, теперь достаточно, чтобы базисные функции имели  $C^0$ -гладкость. Приведенные матрица элемента и правая часть для типичного элемента  $e$  на рис. 3.7, б принимают вид

$$k^e = \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} \left(\frac{dN_l^e}{dx}\right)^2 & \frac{dN_l^e}{dx} N_l^e & \frac{dN_l^e}{dx} \frac{dN_j^e}{dx} & \frac{dN_l^e}{dx} N_j^e \\ N_l^e \frac{dN_l^e}{dx} & \left(\frac{dN_l^e}{dx}\right)^2 + (N_l^e)^2 & N_l^e \frac{dN_j^e}{dx} & \frac{dN_l^e}{dx} \frac{dN_j^e}{dx} + N_l^e N_j^e \\ \frac{dN_l^e}{dx} \frac{dN_j^e}{dx} & N_l^e \frac{dN_j^e}{dx} & \left(\frac{dN_j^e}{dx}\right)^2 & \frac{dN_j^e}{dx} N_l^e \\ N_j^e \frac{dN_j^e}{dx} & \frac{dN_l^e}{dx} \frac{dN_j^e}{dx} + N_l^e N_j^e & N_j^e \frac{dN_l^e}{dx} & \left(\frac{dN_j^e}{dx}\right)^2 + (N_j^e)^2 \end{bmatrix} dx,$$

$$f^e = \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} 0 \\ Q \frac{dN_i^e}{dx} \\ 0 \\ Q \frac{dN_j^e}{dx} \end{bmatrix} dx,$$

и после вычисления входящих в них величин и проведения процесса ансамблирования получаем

$$\begin{bmatrix} 1/h & -1/2 & -1/h & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/h + h/3 & 1/2 & -1/h + h/6 & 0 & 0 \\ -1/h & 1/2 & 2/h & 0 & -1/h & -1/2 \\ -1/2 & -1/h + h/6 & 0 & 2/h + 2h/3 & 1/2 & -1/h + h/6 \\ 0 & 0 & -1/h & 1/2 & 2/h & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1/h + h/6 & 0 & 2/h + 2h/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/h & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & -1/h + h/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1/h & -1/2 \\ 1/2 & -1/h + h/6 \\ 2/h & 0 \\ 0 & 2/h + 2h/3 \\ -1/h & 1/2 \\ -1/2 & -1/h + h/6 \\ -1/h & 1/2 \\ -1/2 & -1/h + h/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ q_1 \\ \varphi_2 \\ q_2 \\ \varphi_3 \\ q_3 \\ \varphi_4 \\ q_4 \\ \varphi_5 \\ q_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Решением этой системы уравнений являются

$$\begin{aligned} \varphi_2 = 0.09326, \quad \varphi_3 = 0.1244, \quad \varphi_4 = 0.1244, \quad \varphi_5 = 0.1244, \\ q_1 = -0.4974, \quad q_2 = 0.2487, \quad q_3 = 0, \quad q_4 = 0; \end{aligned}$$

результат решения задачи читателю следует сравнить с решением, полученным стандартным методом Галеркина в примере 3.3.



## Упражнения

6.26. Методом наименьших квадратов непосредственно получить решение задачи из примера 6.9, используя введенные в упражнении 4.12 конечные элементы с  $C^1$ -гладкостью.

6.27. Методом наименьших квадратов найти конечно-элементное решение задачи об отклонении балки из упражнения 6.15.

## 6.9. Заключительные замечания

В этой главе было показано, как сформулировать вариационные принципы для широкого класса задач и с помощью этих принципов получить дискретные аппроксимирующие уравнения. Действительно, такие уравнения тождественны уравнениям, получаемым прямым применением аппроксимации по Галеркину, описанной в гл. 2 и 3. Дает ли введение описанных здесь дополнительных понятий какие-либо преимущества? Ответ будет (отчасти) утвердительным по следующим соображениям.

1. Существование функционала гарантирует, что матрица системы уравнений, из которой находятся параметры задачи, является симметричной. Как неоднократно отмечалось, это выгодно в вычислительном отношении. С другой стороны, симметричность матрицы системы дискретных уравнений всегда влечет существование вариационного функционала.

2. Этот функционал часто представляет конкретную физическую величину (например, энергию поля). Если минимизация такого функционала ведет к точному решению, то гарантировано, что приближенное значение функционала будет оценкой сверху для минимального его значения. Иногда в ряде случаев это позволяет установить границы погрешности.

3. Понимание взаимосвязей между дифференциальными уравнениями и вариационными функционалами открывает новые перспективы в построении приближенных методов.

## Литература

[1] Courant R. Differential and integral calculus, Vol. II. London: Blackie and Son, 1936. [Имеется перевод: Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 2. — 2-е изд. — М.: Наука, 1970.]

[2] Вайнберг М. М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов. — М.: Гостехиздат, 1956.

[3] Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. — 2-е изд. — М.: Наука, 1970.

[4] Washizu K. Variational methods in elasticity and plasticity. — 2nd ed. — New York: Pergamon Press, 1975. [Готовится перевод 3-го изд.: Васидзу К. Вариационные методы теории упругости и пластичности. — М.: Мир, 1987.]

[5] Stakgold I. Boundary value problems of mathematical physics. — New York: Macmillan, 1967.

**Рекомендуемая литература**

Collatz L. The numerical treatment of differential equations. — Berlin: Springer, 1960. [Имеется перевод нем. изд. 1951 г: Коллатц Л., Численные методы решения дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ, 1953.]

Finlayson B. A. The method of weighted residuals and variational principles. — New York: Academic Press, 1972.

Fried I. Numerical solution of differential equations. — New York: Academic Press, 1979.

Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. — М.: Наука, 1965.

Richards T. H. Energy methods in stress analysis. — Chichester: Ellis Horwood, 1977.

Strang G., Fix G. J. An analysis of the finite element method. — Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1973. [Имеется перевод: Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. — М.: Мир, 1977.]

## ЧАСТИЧНАЯ ДИСКРЕТИЗАЦИЯ И НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ

### 7.1. Введение

При решении краевых задач в предыдущих главах рассматривался стационарный случай, т. е. искомое решение не зависело от времени. Однако в подавляющем большинстве практических задач условия нестационарны (т. е. зависят от времени) и требуется учитывать изменение решения со временем. Как правило, нам задано состояние системы в некоторый момент времени  $t=0$  и требуется определить состояние системы в некоторые последующие моменты времени. Задачи этого типа часто называют *задачами с начальными данными*. С ними часто приходится сталкиваться при исследовании процессов распространения тепла и распространения волн, а также динамического поведения конструкций. Например, в § 1.2 было показано, как при формулировке задачи теплопроводности естественным образом получается зависимость решения от времени, приводящая к описываемому процесс нестационарному уравнению (1.7).

В этой главе будут развиты методы решения задач с начальными данными. Хотя при решении таких задач можно провести дискретизацию всей пространственно-временной области, удобнее воспользоваться процедурой так называемой *частичной дискретизации*<sup>1)</sup>, при которой исходное дифференциальное уравнение с частными производными заменяется системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Полученная система может быть затем решена применением повторной дискретизации только по времени или с помощью других, чаще всего аналитических, процедур. Процессе частичной дискретизации сначала будет описан применительно к краевым задачам, а затем будет рассмотрено его использование для нестационарных задач.

### 7.2. Частичная дискретизация для краевых задач

В предыдущих главах в основном рассматривалось решение общей линейной краевой задачи, описываемой уравнением

$$\mathcal{L}\varphi + p = 0 \quad \text{в } \Omega \quad (7.1)$$

<sup>1)</sup> В ряде книг этот подход называется методом Канторовича [употребляется также термин «метод прямых». — *Перев.*].

с краевыми условиями

$$\mathcal{M}\varphi + r = 0 \quad \text{на } \Gamma. \quad (7.2)$$

Принятый для решения этой задачи подход состоял в использовании разложения по базисным функциям

$$\varphi \approx \hat{\varphi} = \psi + \sum_{m=1}^M a_m N_m, \quad (7.3)$$

где базисные функции  $N_m$  в совокупности зависели от всех независимых переменных задачи, а величины  $a_m$  предполагались постоянными. При этом получалась система линейных алгебраических уравнений, а именно система

$$Ka = f, \quad (7.4)$$

из которой можно было единственным образом найти множество значений постоянных  $\{a_m, m = 1, 2, \dots, M\}$ .

Однако для ряда задач может оказаться удобным другой подход. Например, если независимыми переменными являются  $x$ ,  $y$  и  $z$ , то можно считать величины  $a_m$  зависящими, скажем от  $y$ , а базисные функции с областью определения  $\bar{\Omega}$  зависящими только от  $x$  и  $z$ .

Таким образом, равенство (7.3) принимает вид

$$\varphi \approx \hat{\varphi} = \psi + \sum_{m=1}^M a_m(y) N_m(x, z), \quad (7.5)$$

где функции  $\psi$  и  $N_m$  теперь таковы, что  $\hat{\varphi}$  удовлетворяет главным краевым условиям на  $\bar{\Omega}$ . Тогда при применении метода взвешенных невязок производные от  $a_m$  по  $y$  сохраняются и полученные уравнения образуют систему обыкновенных дифференциальных уравнений с независимой переменной  $y$ . Следовательно, система (7.4) заменится системой

$$Ka + Cda/dy + \dots = f, \quad (7.6)$$

порядок которой зависит от порядка высшей производной по  $y$ , входящей в исходное уравнение (7.1).

Этот подход полезен, в частности, в том случае, когда область  $\bar{\Omega}$  является прямым цилиндром с образующей, параллельной оси  $y$  (такую область будем называть *призматической*). Если коэффициенты в системе (7.6) не зависят от  $y$ , то эту систему (хотя бы в принципе) можно непосредственно решить аналитически. Детали применения этого метода будут проиллюстрированы повторным решением задачи кручения на примере 1.5.

**Пример 7.1.** Напомним, что требуется решить уравнение  $\partial^2 \varphi / \partial x^2 + \partial^2 \varphi / \partial y^2 = -2$  в прямоугольнике  $-3 \leq x \leq 3$ ,  $-2 \leq y \leq 2$  с краевым условием  $\varphi = 0$ .

Будем искать <sup>4</sup> решение в виде

$$\varphi \approx \hat{\varphi} = \psi + \sum_{m=1}^M a_m(y) N_m(x).$$

Тогда областью  $\bar{\Omega}$  изменения  $x$  будет отрезок  $-3 \leq x \leq 3$ . Можно удовлетворить краевым условиям в двух граничных точках этого отрезка, взяв  $\psi = 0$  и потребовав, чтобы для базисных функций выполнялись равенства  $N_m = 0$  при  $x = \pm 3$ . Ранее было отмечено, что эта задача симметрична относительно  $x = 0$  и, таким образом, подходящие базисные функции могут быть определены по правилу <sup>1)</sup>

$$N_m(x) = x^{2(m-1)}(9-x^2), \quad m = 1, 2, \dots$$

Такой выбор гарантирует удовлетворение краевым условиям при  $x = \pm 3$ , а также учитывает симметрию задачи. Тогда аппроксимация принимает вид

$$\hat{\varphi} = \sum_{m=1}^M a_m(y) x^{2(m-1)}(9-x^2)$$

и краевые условия при  $y = \pm 2$  будут удовлетворены, если для функций  $a_m(y)$  выполняются равенства

$$a_m(y) = 0 \quad \text{при } y = \pm 2, \quad m = 1, 2, \dots, M.$$

Ограничиваясь рассмотрением одноэлементной аппроксимации, имеем невязку

$$R_{\bar{\Omega}} = \frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial y^2} + 2 = -2a_1 + (9-x^2) \frac{d^2 a_1}{dy^2} + 2.$$

Заметим, что теперь интегрирование производится только по области  $\bar{\Omega}$ , т. е. на отрезке  $-3 \leq x \leq 3$ . Таким образом, уравнение метода взвешенных невязок здесь записывается в виде

$$2 \int_0^3 \{-2a_1 + (9-x^2) d^2 a_1 / dy^2 + 2\} W_1(x) dx = 0,$$

причем весовые функции можно выбирать различным образом. Полагая  $W_1(x) = \delta(x-1.5)$ , получаем поточечную коллокацию с узлами  $x = \pm 1.5$ , т. е.

$$-2a_1 + (27/4) d^2 a_1 / dy^2 + 2 = 0.$$

Это уравнение можно проинтегрировать точно, что дает

$$a_1 = A \operatorname{ch} \sqrt{8/27} y + B \operatorname{sh} \sqrt{8/27} y + 1,$$

<sup>1)</sup> При больших значениях  $M$  для ослабления влияния вычислительной погрешности лучше взять  $N_m = T_{2m}(x/3)(9-x^2)$ , где  $T_n$  — многочлены Чебышева. — *Прим. ред.*

где  $A$  и  $B$  — постоянные. Так как согласно краевым условиям на  $a_1$  имеем

$$A = -\operatorname{sh} \sqrt{32/27}, \quad B = 0,$$

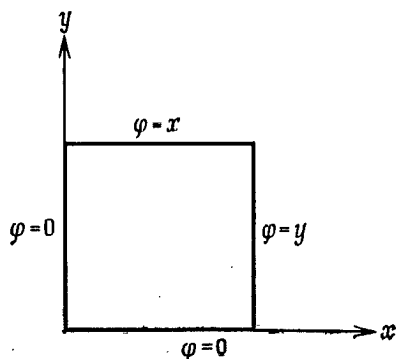
одноэлементная аппроксимация принимает вид

$$\hat{\varphi} = (1 - \operatorname{sh} \sqrt{32/27} \operatorname{ch} \sqrt{8/27} y) (9 - x^2).$$

Это дает значения 77.32 для крутящего момента и 3.901 для максимума касательного напряжения при точных значениях 76.4 и 2.96 соответственно.

## Упражнения

7.1. Повторно решить задачу из примера 7.1, используя одноэлементную аппроксимацию и метод Галеркина. Сравнить ответы с найденными методом поточечной коллокации.



К упражнению 7.2.

7.2. Решить задачу стационарной теплопроводности в квадрате  $0 \leq x, y \leq 1$ , когда температура  $\varphi$  удовлетворяет показанным на рисунке краевым условиям. Разбивая отрезок  $0 \leq x \leq 1$  на три равных конечных элемента, получить решение вида  $\hat{\varphi} = \sum_{m=1}^4 a_m(y) N_m(x)$ , где  $N_m(x)$  — кусочно-линейная базисная функция.

7.3. На отрезке  $0 \leq x \leq 1$  строится равномерная конечно-разностная сетка с узлами  $x_1, x_2, \dots, x_M$ , где  $x_1 = 0, x_M = 1$ . Эта сетка используется для решения задачи из упражнения 7.2, причем  $\varphi_j(y)$  означает изменение температуры на прямой  $x = x_j$ . Показать, что дифференциальное уравнение метода прямых, соответствующее  $x = x_j$ , можно записать в виде

$$d^2\varphi_j/dy^2 + (\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1})/\Delta^2 = 0,$$

где  $\Delta$  — шаг сетки. Найти решение для случая  $M = 4$ .

### 7.3. Частичная дискретизация для нестационарных задач

Для многих линейных нестационарных физических задач дифференциальное уравнение, описывающее процесс, можно представить в виде

$$\mathcal{L}\varphi + p - \alpha d\varphi/dt - \beta d^2\varphi/dt^2 = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (7.7)$$

где  $\mathcal{L}$  — линейный оператор, включающий дифференцирование только по пространственным переменным, а  $p$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  — заданные функции координат и времени. Приведем два примера задач, подпадающих под эту общую формулировку.

1. Поперечные колебания натянутой струны плотностью  $\rho$  с натяжением  $T$  описываются уравнением

$$\partial^2\varphi/\partial x^2 - (\rho/T) \partial^2\varphi/\partial t^2 = 0, \quad (7.8)$$

совпадающим с (7.7) при  $\alpha = \rho = 0$ ,  $\beta = \rho/T$  и  $\mathcal{L}\varphi = \partial^2\varphi/\partial x^2$ .

2. Линейный нестационарный процесс переноса тепла в двумерной области при теплоемкости  $\rho c$  и постоянном коэффициенте теплопроводности  $k$  описывается уравнением (1.7), принимающим вид

$$k(\partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2) + Q - \rho c \partial\varphi/\partial t = 0. \quad (7.9)$$

Это уравнение совпадает с (7.7) при  $\beta = 0$ ,  $\alpha = \rho c$ ,  $p = Q$  и  $\mathcal{L}\varphi = k(\partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2)$ .

Кроме того задаются значения функции  $\varphi$  и (если  $\beta \neq 0$ )  $\partial\varphi/\partial t$  во всех точках пространственной области  $\bar{\Omega}$  при  $t = 0$  (начальные условия) и краевые условия на границе  $\bar{\Gamma}$  пространственной области, выполняющиеся для всех  $t \geq 0$ . В предыдущем параграфе было показано, что метод частичной дискретизации особенно полезен для задач в призматических областях. Поэтому можно ожидать, что этот метод непосредственно применим к нестационарным задачам, если пространственная область  $\bar{\Omega}$  не меняется со временем.

Применение метода частичной дискретизации к решению уравнения (7.7) описывается почти так же, как в предыдущем параграфе. Используем базисные функции  $N_m$ , зависящие только от пространственных переменных, и запишем аппроксимацию в виде

$$\hat{\varphi} = \psi + \sum_{m=1}^M a_m(t) N_m(x, y, z), \quad (7.10)$$

где  $\psi$  и  $N_m$  выбираются таким образом, чтобы выполнялись главные краевые условия на  $\bar{\Gamma}^1$ ). Тогда использование метода взве-

<sup>1)</sup> Для повышения точности часто требуют чтобы  $N_m$  удовлетворяли всем краевым условиям. — Прим. ред.

шенных невязок позволяет получить систему дифференциальных уравнений, которая в векторной записи выглядит так:

$$\mathbf{M}d^2\mathbf{a}/dt^2 + \mathbf{C}d\mathbf{a}/dt + \mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f}. \quad (7.11)$$

Здесь компоненты отдельных матриц и правой части определяются равенствами

$$M_{lm} = \int_{\Omega} \beta W_l N_m d\Omega, \quad C_{lm} = \int_{\Omega} \alpha W_l N_m d\Omega, \\ K_{lm} = - \int_{\Omega} W_l \mathcal{L} N_m d\Omega, \quad f_l = \int_{\Omega} \left( p + \mathcal{L}\psi - \alpha \frac{\partial \psi}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) W_l d\Omega. \quad (7.12)$$

Остается решить эту систему обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными при  $t=0$  значениями  $\mathbf{a}$  и (если  $\beta \neq 0$ )  $d\mathbf{a}/dt$ . Это классическая задача теории обыкновенных дифференциальных уравнений, и в принципе ее можно решить точно.

**Пример 7.2.** Рассмотрим задачу нестационарной теплопроводности на отрезке  $0 \leq x \leq 1$ . Предполагается, что тепловые свойства заданы равенствами  $k = \rho c = 1$  и что для начального распределения температуры имеем  $\varphi = x(1-x)$ . На протяжении всего времени температура при  $x=0$  и  $x=1$  поддерживается равной нулю, и нужно определить результирующее распределение температуры в более поздние моменты времени. Таким образом, требуется решить одномерное нестационарное уравнение теплопроводности

$$\partial^2 \varphi / \partial x^2 - \partial \varphi / \partial t = 0$$

с начальными данными

$$\varphi = x(1-x) \quad \text{при } t=0$$

и краевыми условиями

$$\varphi = 0 \quad \text{при } x=0, 1 \quad \text{для } t \geq 0.$$

Используем метод конечных элементов и разобьем пространственную область (т. е. отрезок  $0 \leq x \leq 1$ ) на  $M$  элементов с нумерацией узлов и элементов, показанной на рис. 7.1, а. Затем применим метод частичной дискретизации, записывая аппроксимацию в конечно-элементной форме как

$$\hat{\varphi} = \sum_{m=1}^{M+1} \varphi_m(t) N_m(x),$$

где  $\varphi_m$  — зависящая от времени аппроксимация температуры в узле  $m$ , а  $N_m$  — стандартная линейная базисная функция, ассоциируемая с этим узлом (см. рис. 7.1, б). Главные краевые усло-



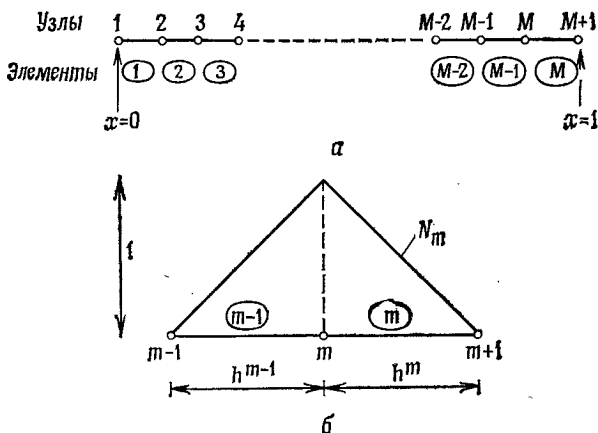


Рис. 7.1. *a* — нумерация элементов и узлов, использованная при решении задачи из примера 7.2; *б* — глобальная кусочно-линейная базисная функция, ассоциируемая с узлом  $m$ .

вия при  $x=0$  и  $x=1$  можно непосредственно записать в виде

$$\varphi_1 = \varphi_{M+1} = 0 \quad \text{для всех } t.$$

Однако ранее было показано, что на данном этапе удобнее рассматривать  $\varphi_1$  и  $\varphi_{M+1}$  в качестве неизвестных и учесть эти главные краевые условия после завершения процесса ансамблирования матриц и правых частей.

Уравнение метода взвешенных невязок с аппроксимацией по Галеркину имеет вид

$$\int_0^1 \left( \frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial x^2} - \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial t} \right) N_l dx = 0, \quad l = 1, 2, \dots, M+1.$$

Эквивалентная слабая форма, получаемая интегрированием по частям, записывается так:

$$\int_0^1 \left( \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x} \frac{dN_l}{dx} + \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial t} N_l \right) dx - \left[ N_l \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x} \right]_0^1 = 0, \quad l = 1, 2, \dots, M+1.$$

Подставляя сюда аппроксимацию  $\hat{\varphi}$ , приходим к системе уравнений

$$\sum_{m=1}^{M+1} \left( \int_0^1 \frac{dN_l}{dx} \frac{dN_m}{dx} dx \right) \varphi_m + \sum_{m=1}^{M+1} \left( \int_0^1 N_l N_m dx \right) \frac{d\varphi_m}{dt} = \left[ N_l \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x} \right]_0^1, \quad l = 1, 2, \dots, M+1,$$

которую можно представить в векторной форме (7.11), а именно в форме

$$C \, d\varphi/dt + K\varphi = f.$$

Здесь типичные компоненты матриц и правой части имеют вид

$$C_{lm} = \int_0^1 N_l N_m \, dx, \quad K_{lm} = \int_0^1 (dN_l/dx) (dN_m/dx) \, dx, \quad f_l = [(\partial\hat{\varphi}/\partial x) N_l]_0^1$$

и

$$\varphi^T = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_M, \varphi_{M+1}).$$

При использовании линейных элементов большинство компонент вектора-столбца  $f$  равно нулю. Единственными отличными от нуля компонентами будут

$$f_1 = -\partial\hat{\varphi}/\partial x|_{x=0} \quad \text{и} \quad f_{M+1} = \partial\hat{\varphi}/\partial x|_{x=1}.$$

Нетрудно вычислить приведенные матрицы элементов, типичный вид которых

$$c^e = h^e \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}, \quad k^e = \frac{1}{h^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

а затем с помощью стандартного процесса ансамблирования найти матрицы  $C$  и  $K$ . Наконец, следует учесть в системе главные краевые условия (с помощью вычеркивания уравнений, соответствующих узлам 1 и  $M+1$ , и замены их условиями  $\varphi_1 = \varphi_{M+1} = 0$ ). Тогда изменение температуры в узлах по времени можно найти с помощью решения результирующей системы дифференциальных уравнений.

Продемонстрируем этот процесс, ограничившись рассмотрением двух линейных элементов равной длины, т. е. положим  $M=2$ ,  $h^1 = h^2 = 1/2$ . Тогда ансамблированная система уравнений будет иметь вид

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\varphi_1}{dt} \\ \frac{d\varphi_2}{dt} \\ \frac{d\varphi_3}{dt} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial x}|_{x=0} \\ 0 \\ \frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial x}|_{x=1} \end{bmatrix}.$$

Учитывая главные краевые условия при  $x=0$  и  $x=1$ , получаем

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{d\varphi_2}{dt} \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial x}|_{x=0} \\ 0 \\ \frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial x}|_{x=1} \end{bmatrix};$$

в данном случае поведение неизвестной функции  $\varphi_2$  описывается вторым уравнением, а именно уравнением

$$(1/3) d\varphi_2/dt + 4\varphi_2 = 0,$$

решением которого является  $\varphi_2 = Ae^{-12t}$ , где  $A$  — постоянная. Так как  $\varphi_2$  принимает заданное значение при  $t=0$ , то  $A=1/4$ . Как было показано выше, в случае необходимости можно затем использовать первое и третье уравнения для того, чтобы найти аппроксимации изменения потока тепла на границах  $x=0$  и  $x=1$  по времени.

## Упражнения

7.4. Перемещение гибкой струны плотностью  $\rho$  с натяжением  $T$  описывается уравнением  $\partial^2\varphi/\partial x^2 = (\rho/T) \partial^2\varphi/\partial t^2$ . Концы струны закреплены в точках  $x=0$  и  $x=1$ ; первоначально струна находится в покое ( $\partial\varphi/\partial t|_{t=0}=0$ ) и имеет форму  $\varphi = \sin \pi x$ . Используя в качестве базисных функций многочлены от  $x$  и применяя метод частичной дискретизации, найти одноэлементное приближенное решение, описывающее последующие перемещения струны.

7.5. Повторить упражнение 7.4, используя три равных конечных элемента и кусочно-линейные базисные функции от  $x$ .

7.6. Поперечные колебания балки жесткостью на изгиб  $EI$  и плотностью  $\rho$  описываются уравнением  $\partial^4\varphi/\partial x^4 + [\rho/(ET)] \partial^2\varphi/\partial t^2 = 0$ , где  $\varphi$  — перемещение. Пусть балка имеет единичную длину и оба ее конца горизонтально зашпелены. Найти одноэлементное приближенное решение, если первоначально балка имеет форму  $\varphi = x^2(1-x)^2$  и  $\partial\varphi/\partial t|_{t=0}=0$ .

7.7. Пусть  $\varphi = (1-x^2)(1-y^2)$  — первоначальное распределение температуры в квадрате  $-1 \leq x, y \leq 1$ , причем на границе квадрата все время поддерживается нулевая температура. Найти одноэлементное приближенное решение, описывающее изменение температуры со временем.

7.8. Пусть в упражнении 7.7 на квадрате  $0 \leq x, y \leq 1$  используется билинейный элемент с четырьмя узлами. Найти аппроксимацию для изменения температуры со временем.

## 7.4. Процедуры аналитического решения

Выше было показано, что с помощью метода частичной дискретизации многие нестационарные задачи могут быть сведены к системе обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$M d^2a/dt^2 + C da/dt + Ka = f, \quad (7.13)$$

где при использовании метода Галеркина в общем случае матрицы  $M$ ,  $C$  и  $K$  являются симметричными. Рассмотрим теперь возможные методы решения таких систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В общем случае эта система уравнений может быть нелинейной (такой будет, например, система, получающаяся при решении задачи нестационарной теплопроводности в материале с коэффициентом теплопроводности, зависящим от температуры). Однако в данном параграфе мы ограничимся рассмотрением только линейных систем, поскольку такие системы в

принципе всегда могут быть решены аналитически. Хотя такое аналитическое решение и возможно, оно может оказаться достаточно сложным. Поэтому приходится обращаться к процедурам аппроксимации, рассматриваемым в следующем параграфе. Аналитический подход часто целесообразен также в том смысле, что он позволяет понять, как ведет себя решение рассматриваемой задачи, а это, как правило, полезно для исследователя.

#### 7.4.1. Решение однородного уравнения второго порядка

Если  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{f}$  равны нулю, то уравнение (7.13) упрощается, принимая вид

$$\mathbf{M}d^2\mathbf{a}/dt^2 + \mathbf{K}\mathbf{a} = 0. \quad (7.14)$$

Решение этого уравнения можно искать в виде

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \cos(\omega t - \delta). \quad (7.15)$$

Прямая подстановка показывает, что это будет решение уравнения (7.14), если

$$(-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K})\boldsymbol{\alpha} = 0. \quad (7.16)$$

Последнее соотношение является стандартной задачей на собственные значения, допускающей для  $\boldsymbol{\alpha}$  ненулевое решение только в том случае, когда  $\omega$  таково, что

$$\det(-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K}) = 0. \quad (7.17)$$

Если матрицы  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{M}$  имеют размер  $M \times M$ , то решением уравнения (7.17) будут  $M$  собственных значений  $\{\omega_m^2, m=1, 2, \dots, M\}$ , отвечающих собственным векторам  $\{\boldsymbol{\alpha}_m, m=1, 2, \dots, M\}$ . Если матрицы  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{M}$  положительно определены<sup>1)</sup>, то собственные значения уравнения (7.17) будут различными вещественными положительными числами. Они называются *собственными частотами* системы. Тогда общее решение уравнения (7.14) можно записать в виде линейной комбинации  $M$  решений типа (7.15), а именно в виде

$$\mathbf{a} = \sum_{m=1}^M \boldsymbol{\alpha}_m \cos(\omega_m t - \delta_m) \quad (7.18)$$

с некоторыми произвольными постоянными  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_M$ . Необходимо отметить, что собственные векторы определяются уравнением (7.16) не однозначно, а лишь с точностью до постоянного множителя. Часто их нормируют, требуя, чтобы

$$\boldsymbol{\alpha}_m^T \mathbf{M} \boldsymbol{\alpha}_m = 1, \quad (7.19)$$

<sup>1)</sup> Матрица  $\mathbf{A}$  размером  $M \times M$  положительно определена, если  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$  для всех векторов  $\mathbf{x} \neq 0$  размерности  $M$ .

и это обеспечивает однозначность определения собственных векторов<sup>1)</sup>. Можно показать также, что собственные векторы ортогональны относительно матриц  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{K}$ , т. е. что

$$\alpha_l^T \mathbf{M} \alpha_m = 0, \quad \alpha_l^T \mathbf{K} \alpha_m = 0, \quad l \neq m. \quad (7.20)$$

При фактическом нахождении собственных значений в конкретной задаче на практике редко решается непосредственно уравнение (7.17). Для этой цели известен ряд иных методов, рассчитанных на применение ЭВМ [1]<sup>2)</sup>.

Если  $\mathbf{f}$  равно нулю, а  $\mathbf{c}$  отлично от нуля, то уравнение (7.13) принимает вид

$$\mathbf{M} d^2 \mathbf{a} / dt^2 + \mathbf{C} da / dt + \mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (7.21)$$

и имеет нетривиальное решение

$$\mathbf{a} = \alpha e^{\lambda t}, \quad (7.22)$$

если

$$\det(\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{C} + \mathbf{K}) = 0. \quad (7.23)$$

Так как теперь собственные значения и собственные векторы в общем случае будут комплексными, эта задача на собственные значения значительно труднее задачи, рассмотренной выше в связи с уравнением (7.17).

#### 7.4.2. Решение однородного уравнения первого порядка

Если  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{f}$  равны нулю, то уравнение (7.13) принимает вид

$$\mathbf{C} da / dt + \mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (7.24)$$

и его нетривиальное решение вида (7.22) будет существовать, если

$$\det(\lambda \mathbf{C} + \mathbf{K}) = 0. \quad (7.25)$$

Если  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{C}$  — положительно определенные ( $M \times M$ )-матрицы, то все  $M$  решений этого уравнения  $\{\lambda_m, m = 1, 2, \dots, M\}$  будут вещественными и отрицательными. В этом случае общее решение является просто линейной комбинацией экспоненциально затухающих слагаемых.

<sup>1)</sup> В этом случае общее решение следует искать в виде

$$\mathbf{a} = \sum_{m=1}^M C_m \alpha_m \cos(\omega_m t - \delta_m),$$

где  $C_m$  — постоянные. — Прим. ред.

<sup>2)</sup> См. также Воеводин В. В. Вычислительные основы линейной алгебры. — М.: Наука, 1977. Прим. ред.

### 7.4.3. Нестационарные решения, получаемые с помощью разложения по модам

Рассмотрим теперь решение общего уравнения (7.13), где  $\mathbf{f}$  — произвольная функция времени. Если  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{C}$  равны нулю, то решение, как было показано выше, имеет вид (7.18). Для уравнения общего вида попытаемся представить решение в виде линейной комбинации собственных векторов уравнения (7.16) и будем искать решение в виде

$$\mathbf{a} = \sum_{m=1}^M \alpha_m \mathbf{y}_m(t). \quad (7.26)$$

Рассмотрим частный случай, когда матрица  $\mathbf{C}$  такова, что

$$\alpha_l^T \mathbf{C} \alpha_m = 0, \quad l \neq m. \quad (7.27)$$

Подставим (7.26) в уравнение (7.13); считая условие (7.19) выполненным и умножая слева полученное уравнение на  $\alpha_l^T$ , получаем систему независимых скалярных уравнений

$$d^2 y_l / dt^2 + 2\omega_l c_l' dy_l / dt + \omega_l^2 y_l = f_l, \quad l = 1, 2, \dots, M, \quad (7.28)$$

где

$$c_l = \alpha_l^T \mathbf{C} \alpha_l = 2\omega_l c_l', \quad f_l = \alpha_l^T \mathbf{f}. \quad (7.29)$$

В общем случае условие (7.27) не выполняется, так как входящие в него собственные векторы  $\alpha_m$  ортогональны лишь относительно матриц  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{M}$  (равенства (7.20)). Оно будет выполняться автоматически, если  $\mathbf{C}$  можно представить как линейную комбинацию  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{M}$ . (Следует заметить, что даже если  $\mathbf{C}$  нельзя выразить таким образом, систему все еще можно расщепить [2].)

Уравнение (7.28) является линейным неоднородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами и может быть решено с помощью стандартной методики.

Для системы уравнений (7.13) с  $\mathbf{M} = 0$  можно воспользоваться в точности аналогичными процедурами, используя на этот раз для построения решения вещественные собственные значения, определяемые из уравнения (7.25). При надлежащей нормализации собственных векторов результирующее расщепление приводит к системе независимых уравнений вида

$$dy_l / dt - \lambda_l y_l = f_l, \quad l = 1, 2, \dots, M, \quad (7.30)$$

тоже допускающей аналитическое решение.

**Пример 7.3.** Задача одномерной нестационарной теплопроводности с генерированием тепла на отрезке  $0 \leq x \leq 1$  описывается уравнением  $\partial \varphi / \partial t = k \partial^2 \varphi / \partial x^2 + e^{-t}$ . Температура  $\varphi$  сохраняет нулевое значение при  $x = 0$  и  $x = 1$  и первоначально  $\varphi = x(1-x)/2$ . Требуется определить приближенное решение, описывающее изме-

нение температуры со временем, используя четыре конечных элемента с кусочно-линейными базисными функциями от  $x$  и полагая  $k = 0.01$ .

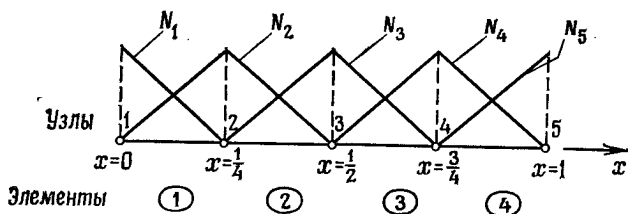


Рис. 7.2. Нумерация элементов и узлов, использованная при решении задачи из примера 7.3.

Поступая аналогично тому, как это делалось в примере 7.2, используем расположение конечных элементов и систему нумерации, показанные на рис. 7.2. Применение метода взвешенных невязок с аппроксимацией по Галеркину приводит к системе уравнений

$$C d\varphi/dt + kK\varphi = f,$$

где матрицы  $C$  и  $K$  — те же, что и в примере 7.2, а

$$f = e^{-t} \begin{bmatrix} 1/8 - k\hat{\varphi}/\partial x|_{x=0} \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/8 + k\hat{\varphi}/\partial x|_{x=1} \end{bmatrix}.$$

Учитывая краевые условия для  $\varphi_1$  и  $\varphi_5$  и вычеркивая первое и пятое уравнения, получаем систему

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\varphi_2}{dt} \\ \frac{d\varphi_3}{dt} \\ \frac{d\varphi_4}{dt} \end{bmatrix} + 4k \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \frac{e^{-t}}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Решение этой системы уравнений будет получено с помощью расщепления уравнений. Обращаясь к равенству (7.25), определим  $\lambda$ , такое, что

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{6} + 8k & \frac{\lambda}{24} - 4k & 0 \\ \frac{\lambda}{24} - 4k & \frac{\lambda}{6} + 8k & \frac{\lambda}{24} - 4k \\ 0 & \frac{\lambda}{24} - 4k & \frac{\lambda}{6} + 8k \end{bmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель и решая получающееся кубическое уравнение, находим собственные значения

$$\lambda_1 = -(48k/7)(10 - 6\sqrt{2}) = -10.3866k, \quad \lambda_2 = -48k, \\ \lambda_3 = -(48k/7)(10 + 6\sqrt{2}) = -126.7562k,$$

которым отвечают собственные векторы

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Теперь, используя равенство (7.26), запишем

$$\varphi = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) + \alpha_3 y_3(t).$$

Функция  $\varphi$  будет решением, если

$$C\alpha_1 dy_1/dt + C\alpha_2 dy_2/dt + C\alpha_3 dy_3/dt + kC\alpha_1 y_1 + kC\alpha_2 y_2 + kC\alpha_3 y_3 = f:$$

Умножая слева обе части этого уравнения соответственно на  $\alpha_1^T$ ,  $\alpha_2^T$  и  $\alpha_3^T$ , приходим к системе трех независимых уравнений

$$\frac{2}{3} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \frac{dy_1}{dt} + 16(2 - \sqrt{2})ky_1 = \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{4}\right)e^{-t}, \\ \frac{1}{3} \frac{dy_2}{dt} + 16ky_2 = 0, \\ \frac{2}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \frac{dy_3}{dt} + 16(2 + \sqrt{2})ky_3 = \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{4}\right)e^{-t},$$

решение которой может быть получено стандартными методами. В результате имеем

$$y_1 = A_1 e^{\lambda_1 t} - 1.0555e^{-t}, \quad y_2 = A_2 e^{\lambda_2 t}, \quad y_3 = A_3 e^{\lambda_3 t} + 1.2700e^{-t}.$$

Тогда изменение температуры в узлах со временем выражается формулами

$$\varphi_2 = (A_2 e^{\lambda_1 t} - 1.0555e^{-t}) + A_2 e^{\lambda_2 t} + (A_3 e^{\lambda_3 t} + 1.2700e^{-t}), \\ \varphi_3 = \sqrt{2}(A_1 e^{\lambda_1 t} - 1.0555e^{-t}) - \sqrt{2}(A_3 e^{\lambda_3 t} + 1.2700e^{-t}), \\ \varphi_4 = (A_1 e^{\lambda_1 t} - 1.0555e^{-t}) - A_2 e^{\lambda_2 t} + (A_3 e^{\lambda_3 t} + 1.2700e^{-t}),$$

где постоянные  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  можно определить из начальных данных. Потребовав, чтобы значения аппроксимации при  $t = 0$  совпадали с исходными значениями температуры в узловых точках, получим систему уравнений

$$0.09375 = A_1 - 1.0555 + A_2 + A_3 + 1.2700, \\ 0.12500 = \sqrt{2}(A_1 - 1.0555 - A_3 - 1.2700), \\ 0.09375 = A_1 - 1.0555 - A_2 + A_3 + 1.2700,$$



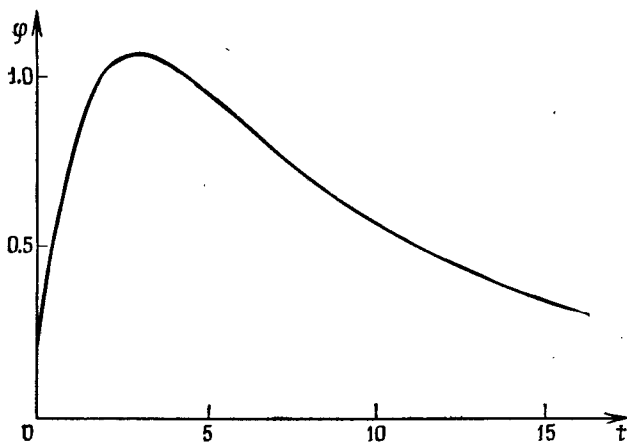


Рис. 7.3. Вычисленное изменение температуры по времени при  $x=1/2$  в примере 7.3.

имеющую решение

$$A_1 = 1.147, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = -1.267.$$

Получаемое изменение температуры  $\varphi_3$  в центре отрезка со временем показано на рис. 7.3.

### Упражнения

7.9. В упражнении 7.4 найти трехэлементную аппроксимацию перемещения гибкой струны.

7.10. В упражнении 7.4 найти перемещение, используя четыре конечных элемента с кусочно-линейными базисными функциями.

7.11. В упражнении 7.6 найти трехэлементную аппроксимацию перемещения колеблющейся балки.

### 7.5. Процедуры конечно-элементного решения во временной области

В предыдущем параграфе было показано, что для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, получающихся при применении метода частичной дискретизации ко многим нестационарным задачам, могут быть использованы процедуры аналитического решения. Хотя мы и обладаем такой техникой решения линейных задач, практическое ее применение может оказаться затруднительным, и такой подход совсем не приемлем при решении нелинейных задач. По этой причине в данном параграфе будет рассмотрено решение систем уравнений типа (7.13) методом базисных функций. Для представления временной области, которая считается продолжающейся до бесконечности, будут

использованы конечные элементы. Условия на конце первого элемента будут определяться с помощью дифференциального уравнения и начальных данных. Этот процесс затем повторяется для последующих элементов с использованием вновь вычисленной информации в качестве начальных данных для каждого очередного элемента.

Так как ранее уже были введены базисные функции от пространственных переменных, а теперь предполагается ввести базисные функции от времени, естественно спросить, почему базисные функции по пространству и времени не были введены непосредственно с самого начала. Для этого имеется достаточно много причин, из которых можно указать следующие. (1) В случае большой временной области задача становится чрезмерно громоздкой. (2) Получаемая система уравнений в общем случае несимметрична даже при применении методов типа Галеркина. (3) Геометрическая простота временной области не стимулирует использовать нерегулярное разбиение на пространственно-временные элементы. (4) При использовании базисных функций вида  $N_m(x, y, z)N_m(t)$  для произвольных областей результат был бы тем же самым, что и при последовательной дискретизации по пространству и по времени.

Здесь полезно отметить, что система уравнений (7.13) может быть записана как набор независимых уравнений для мод (7.28) или (при  $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ ) уравнений (7.30). В основном мы будем иметь дело с исходными векторными уравнениями, однако при обсуждении конкретных особенностей описываемых далее методов будут рассматриваться независимые уравнения для мод. Сначала ограничимся рассмотрением уравнений, имеющих первый порядок по времени, а затем получим методы для работы с уравнениями второго порядка.

### 7.5.1. Уравнения первого порядка

В предыдущих параграфах было показано, что применение метода частичной дискретизации к общему линейному уравнению первого порядка по времени вида

$$\mathcal{L}\varphi + p - \alpha d\varphi/dt = 0 \quad \text{в } \Omega \quad (7.31)$$

в предположении, что приближенное решение  $\hat{\varphi}$  имеет вид (7.10), приводит к системе уравнений

$$\mathbf{C}d\mathbf{a}/dt + \mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f}. \quad (7.32)$$

Согласно начальным данным в момент времени  $t=0$  значение  $\varphi$  известно всюду и, следовательно, известно начальное значение  $\mathbf{a}$ , скажем  $\mathbf{a}^0$ .

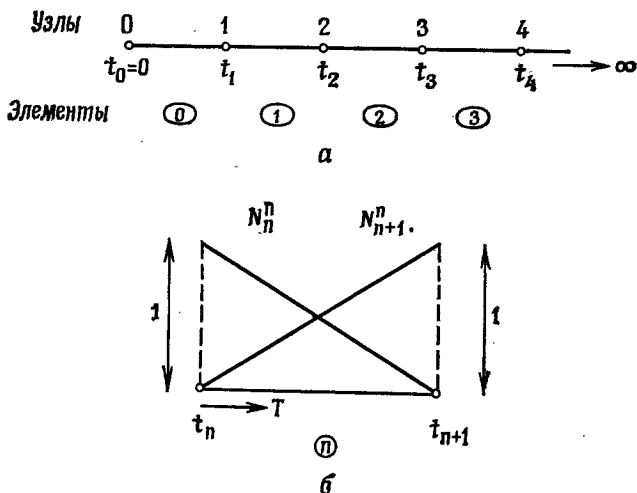


Рис. 7.4. а — разбиение временной области на линейные конечные элементы; б — базисные функции элемента  $n$ .

Предположим, что временная область разбивается на линейные элементы, как показано на рис. 7.4, а. Тогда, поступая стандартным «конечно-элементным» образом, можно записать

$$a \approx \hat{a} = \sum_{m=1}^{\infty} a^m N_m, \quad (7.33)$$

где  $a^m$  — значение аппроксимации  $\hat{a}$  в узле  $m$ , т. е. в момент времени  $t = t_m$ . Так как для представления изменения каждой компоненты  $a$  используются одни и те же базисные функции  $N_m$ , то в равенстве (7.33)  $N_m$  является скалярной функцией. Рассмотрим элемент  $n$  с узлами в  $t = t_n$  и  $t = t_{n+1}$ , изображенный на рис. 7.4, б. На этом элементе имеем

$$\hat{a} = a^n N_n^n + a^{n+1} N_{n+1}^n, \quad (7.34)$$

так как все остальные базисные функции на элементе  $n$  равны нулю. В равенстве (7.34)

$$\begin{aligned} N_n^n &= 1 - T, & dN_n^n/dt &= -1/\Delta t_n, \\ N_{n+1}^n &= T, & dN_{n+1}^n/dt &= 1/\Delta t_n, \\ T &= (t - t_n)/\Delta t_n, & \Delta t_n &= t_{n+1} - t_n. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Применяя к уравнению (7.32) стандартный метод взвешенных невязок, получаем

$$\int_0^{\infty} (C d\hat{a}/dt + K\hat{a} - f) W_n dt = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad (7.36)$$

рассматривая только такие весовые функции  $W_n$ , что

$$W_n = 0 \quad \text{при } t < t_n \text{ и } t > t_{n+1}, \quad (7.37)$$

эти соотношения можно переписать в виде

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} (C \hat{d}\hat{a}/dt + K\hat{a} - f(t)) W_n dt = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.38)$$

Здесь интегрирование производится только по элементу  $n$  и поэтому в полученном выражении можно подставить для  $\hat{a}$  значение (7.34). Тогда в силу соотношений (7.35) уравнение метода взвешенных невязок принимает вид

$$\int_0^1 [(C/\Delta t_n)(-a^n + a^{n+1}) + K\{a^n(1-T) + a^{n+1}T\} - f(t_n + T\Delta t_n)] W_n dT = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.39)$$

и если предположить, что матрицы  $C$  и  $K$  постоянны на элементе, то

$$\begin{aligned} & \left\{ (C/\Delta t_n) \int_0^1 W_n dT + K \int_0^1 T W_n dT \right\} a^{n+1} + \\ & + \left\{ - (C/\Delta t_n) \int_0^1 W_n dT + K \int_0^1 (1-T) W_n dT \right\} a^n = \\ & = \int_0^1 f(t_n + T\Delta t_n) W_n dT. \end{aligned} \quad (7.40)$$

Соотношение этого вида справедливо для каждого элемента  $n$  и при подходящем выборе весовой функции  $W_n$  может быть использовано для последовательного вычисления значений  $a^1, a^2, a^3, \dots$ , начиная с заданного начального значения  $a^0$ . Соотношение вида (7.20), связывающее только  $a^{n+1}$  и  $a^n$ , известно под названием *двухслойной схемы интегрирования по времени*. Далее будет показано, как аналогичным образом могут быть получены схемы с большим числом слоев.

Для произвольной весовой функции уравнение (7.40) может быть переписано в виде

$$(C/\Delta t_n + \gamma_n K) a^{n+1} + (-C/\Delta t_n + (1 - \gamma_n) K) a^n = \bar{f}^n, \quad (7.41)$$

где

$$\gamma_n = \int_0^1 W_n T dT / \int_0^1 W_n dT, \quad (7.42a)$$

$$\bar{f}^n = \int_0^1 W_n f(t_n + T\Delta t_n) dT / \int_0^1 W_n dT. \quad (7.42b)$$

Если известная функция  $f$  является гладкой по  $t$ , то в ряде случаев бывает удобно представить ее поведение на элементе  $n$  с помощью того же самого вида интерполяции, что и для  $\hat{a}$ ; если положить

$$f(t_n + T\Delta t_n) \approx f^n N_n^n(T) + f^{n+1} N_{n+1}^n(T), \quad 0 \leq T \leq 1, \quad (7.43)$$

то

$$\bar{f}_n = (1 - \gamma_n) f^n + \gamma_n f^{n+1} \quad (7.44)$$

и соотношение, определяющее  $a^{n+1}$  через  $a^n$  (равенство (7.41)), принимает вид

$$\{C/\Delta t_n + \gamma_n K\} a^{n+1} + \{-C/\Delta t_n + (1 - \gamma_n) K\} a^n = (1 - \gamma_n) f^n + \gamma_n f^{n+1}. \quad (7.45)$$

Если интерполяция (7.43) оказывается неприемлемой из-за характера изменения функции  $f$  на элементе  $n$  (как это имело бы место, например, в случае внезапного удара), то правую часть равенства (7.42б) следует вычислить точно.

### 7.5.2. Конкретные схемы для уравнений первого порядка

Рассматривая различные варианты выбора весовой функции  $W_n$  в равенстве (7.42а), можно получить целое семейство схем. Если взять для каждого элемента поточечную коллокацию при  $T = \theta$ , т. е. положить  $W_n = \delta(T - \theta)$  для  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , то интегрирование в (7.42а) можно выполнить непосредственно, получив  $\gamma_n = \theta$ , а соотношение (7.45) можно записать в виде

$$\{C/\Delta t_n + \theta K\} a^{n+1} + \{-C/\Delta t_n + (1 - \theta) K\} a^n = (1 - \theta) f^n + \theta f^{n+1}. \quad (7.46)$$

Мы получили это соотношение из уравнения (7.32), используя метод конечных элементов. Другой широко используемый подход состоит в применении непосредственно к уравнению (7.32) метода конечных разностей (см. гл. 1). Тогда, выбирая на оси  $t$  дискретное множество точек  $t_0, t_1, t_2, \dots$ , получаем в точности

$$C da/dt|_{n+\theta} + Ka^{n+\theta} = f^{n+\theta}, \quad (7.47)$$

где верхний индекс  $n + \theta$  означает вычисление в момент времени  $t = t_n + \theta \Delta t_n$ ,  $0 \leq \theta \leq 1$ . Используя разложения в ряд Тейлора вида (1.14) и (1.15), получаем

$$a^n = a^{n+\theta} - \theta \Delta t_n \left. \frac{da}{dt} \right|^{n+\theta} + \frac{\theta^2 \Delta t_n^2}{2} \left. \frac{d^2 a}{dt^2} \right|^{n+\theta} - \frac{\theta^3 \Delta t_n^3}{6} \left. \frac{d^3 a}{dt^3} \right|^{n+\theta}, \quad (7.48)$$

$$a^{n+1} = a^{n+\theta} + (1 - \theta) \Delta t_n \left. \frac{da}{dt} \right|^{n+\theta} + \frac{(1 - \theta)^2 \Delta t_n^2}{2} \left. \frac{d^2 a}{dt^2} \right|^{n+\theta} + \frac{(1 - \theta)^3 \Delta t_n^3}{6} \left. \frac{d^3 a}{dt^3} \right|^{n+\theta}. \quad (7.49)$$

Вычитая (7.48) из (7.49), получаем аппроксимацию

$$da/dt |^{n+\theta} \approx (a^{n+1} - a^n)/\Delta t_n \quad (7.50)$$

с погрешностью  $E$  вида

$$E = \{(1-\theta)^2 - \theta^2\} (\Delta t_n/2) d^2 a/dt^2 |^{n+\theta} + (\Delta t_n^2/6) \{(1-\theta)^3 d^3 a/dt^3 |^{n+\theta} + \theta^3 d^3 a/dt^3 |^{n+\theta}\}. \quad (7.51)$$

Отметим, что  $E$  имеет порядок  $O(\Delta t_n^2)$  при  $\theta = 1/2$  и  $O(\Delta t_n)$  в противном случае. Умножив равенство (7.48) на  $1-\theta$ , а (7.49) на  $\theta$  и сложив результаты, получим

$$a^{n+\theta} \approx (1-\theta) a^n + \theta a^{n+1}, \quad (7.52)$$

где погрешность имеет порядок  $O(\Delta t_n^2)$ .

Подставив в уравнение (7.47) аппроксимации (7.50) и (7.52) и применив для  $f^{n+\theta}$  то же представление, что и для  $a^{n+\theta}$  в (7.52), находим

$$\left\{ \frac{C}{\Delta t_n} + \theta K \right\} a^{n+1} + \left\{ -\frac{C}{\Delta t_n} + (1-\theta) K \right\} a^n = (1-\theta) f^n + \theta f^{n+1}. \quad (7.53)$$

Это соотношение в точности совпадает с равенством (7.46), полученным методом конечных элементов.

Таким образом, с помощью подходящего выбора точки коллокации  $\theta$  внутри каждого элемента соотношение (7.46) можно превратить в одну из следующих известных конечно-разностных схем для уравнения (7.32).

1. *Схема Эйлера (схема с разностью вперед)*. Эта схема получается подстановкой в равенство (7.46)  $\theta = 0$ , что дает

$$(C/\Delta t_n) a^{n+1} + (-C/\Delta t_n + K) a^n = f^n. \quad (7.54)$$

Если матрица  $C$  диагональна и, следовательно, элементы обратной матрицы  $C^{-1}$  могут быть получены непосредственно, то эта схема называется *явной*, так как  $a^{n+1}$  выражается в явном виде через  $a^n$  с помощью соотношения

$$a^{n+1} = \Delta t_n C^{-1} \{(C/\Delta t_n - K) a^n + f^n\}. \quad (7.55)$$

Далее будет показано, что вычислительные преимущества явной схемы этого типа обычно сопровождаются тем недостатком, что используемый шаг по времени  $\Delta t_n$  не должен превосходить некоторой заданной величины.

Матрица  $C$  будет диагональна при конечно-разностной дискретизации пространственной области. Однако если дискретизация по пространству осуществляется методом конечных элементов, то, как правило, матрица  $C$  будет отлична от диагональной (см. равенства (7.12)) и свойство явности этой схемы утрачивается. При практических вычислениях данный недостаток обычно устраняется посредством диагонализации матрицы  $C$ . Чтобы продемонст-

рировать этот процесс, рассмотрим задачу с одной пространственной переменной и предположим, что при дискретизации по пространству используются одномерные линейные элементы с двумя узлами. Тогда при применении метода Галеркина приведенная матрица элемента  $c^e$  для типичного элемента  $e$  с номерами узлов  $i$  и  $j$  задается равенством

$$c^e = \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} \alpha (N_i^e)^2 & \alpha N_i^e N_j^e \\ \alpha N_j^e N_i^e & \alpha (N_j^e)^2 \end{bmatrix} dx. \quad (7.56)$$

Если входящие в эту матрицу величины находить численным интегрированием, используя формулу типа (5.10а) с узлами на концах элемента, то

$$\int_{\Omega^e} \alpha N_i^e N_j^e dx = (h^e/2) [(\alpha N_i^e N_j^e)_{\text{узел } i} + (\alpha N_i^e N_j^e)_{\text{узел } j}] = 0, \quad (7.57)$$

так что матрица  $c^e$ , а следовательно, и глобальная матрица  $C$  диагонализуются. Описание иных процедур диагонализации и подробное их обсуждение можно найти в книге [2].

2. *Схема Кранка—Николсона (схема с центральной разностью)*. При  $\theta = 1/2$  равенство (7.46) принимает вид

$$\left(\frac{C}{\Delta t_n} + \frac{1}{2} K\right) a^{n+1} + \left(-\frac{C}{\Delta t_n} + \frac{1}{2} K\right) a^n = \frac{1}{2} f^n + \frac{1}{2} f^{n+1}. \quad (7.58)$$

Говорят, что эта схема является *неявной*, так как для нахождения  $a^{n+1}$  требуется решить систему уравнений, матрица которой отлична от диагональной.

3. *Схема с разностью назад*. Эта схема получается подстановкой в равенство (7.46)  $\theta = 1$ , что приводит к неявной схеме

$$(C/\Delta t_n + K) a^{n+1} - (C/\Delta t_n) a^n = f^{n+1}. \quad (7.59)$$

Очевидной альтернативой поточечной коллокации является применение на каждом элементе метода типа Галеркина, т. е. использование на элементе  $n$  равенства  $W_n = N_n^n$  или  $W_n = N_{n+1}^n$ . Этот способ введения весовых функций дает в точности частный случай равенства (7.46). Читатель может показать, что при  $W_n = N_{n+1}^n$  получающаяся схема идентична схеме получаемой применением поточечной коллокации при  $T = 2/3$  на каждом элементе.

### 7.5.3. Многослойные схемы для уравнений первого порядка

Если отказаться от ограничения (7.37) и рассматривать весовые функции  $W_n$ , отличные от нуля более чем на одном элементе, то можно получить схемы с любым числом слоев. Чтобы продемонстрировать этот процесс, вернемся к равенству (7.36) и непосредственно воспользуемся стандартным подходом Галеркина,

т. е. положим

$$W_n = N_n. \quad (7.60)$$

Так как

$$N_n = 0 \quad \text{при} \quad t \leq t_{n-1} \quad \text{и} \quad t \geq t_{n+1}, \quad (7.61)$$

то уравнение метода взвешенных невязок принимает вид

$$\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} (\mathbf{C} \hat{d}\mathbf{a}/dt + \mathbf{K}\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{f}(t)) N_n dt = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.62)$$

Применив используемый для  $\hat{\mathbf{a}}$  вид интерполяции также и для  $\mathbf{f}$  (см. равенство (7.43)), получим

$$\begin{aligned} & \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \{ \mathbf{C} (a^{n-1} dN_{n-1}/dt + a^n dN_n/dt) + \mathbf{K} (a^{n-1} N_{n-1} + a^n N_n) \} N_n dt + \\ & + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \{ \mathbf{C} (a^n dN_n/dt + a^{n+1} dN_{n+1}/dt) + \mathbf{K} (a^n N_n + a^{n+1} N_{n+1}) \} N_n dt = \\ & = \int_{t_{n-1}}^{t_n} (\mathbf{f}^{n-1} N_{n-1} + \mathbf{f}^n N_n) N_n dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} (\mathbf{f}^n N_n + \mathbf{f}^{n+1} N_{n+1}) N_n dt. \quad (7.63) \end{aligned}$$

Используя соотношения (7.35) и проводя интегрирование, получаем *трехслойную схему*

$$\left( \frac{\mathbf{C}}{2\Delta t} + \frac{\mathbf{K}}{6} \right) a^{n+1} + \frac{2}{3} \mathbf{K} a^n + \left( -\frac{\mathbf{C}}{2\Delta t} + \frac{\mathbf{K}}{6} \right) a^{n-1} = \frac{\mathbf{f}^{n+1}}{6} + \frac{2\mathbf{f}^n}{3} + \frac{\mathbf{f}^{n-1}}{6}, \quad (7.64)$$

где предполагается, что  $\Delta t_{n-1} = \Delta t_n = \Delta t$ , а  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{K}$  — постоянные матрицы. Вычисления организуются с помощью повторного использования такой схемы при условии, что известны два начальных значения  $a^0$  и  $a^1$ . Так как  $a^0$  задается с помощью начальных данных, то требуется каким-либо образом вычислить  $a^1$ . Это можно сделать, например, используя на исходном шаге одну из описанных выше двухслойных схем. Дальнейшие сведения о других схемах этого типа приводятся в [2].

**Пример 7.4.** Применим описанные выше схемы для интегрирования простейшего скалярного уравнения  $da/dt + \bar{\lambda}a = 0$  ( $\bar{\lambda}$  — положительная постоянная) с начальным условием  $a = 1$  в момент времени  $t = 0$ .

В этом случае общее уравнение (7.46) для двухслойной схемы упрощается, принимая вид

$$\left( \frac{1}{\bar{\lambda} \Delta t_n} + \theta \right) a^{n+1} + \left( -\frac{1}{\bar{\lambda} \Delta t_n} + (1 - \theta) \right) a^n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

причем согласно начальному условию  $a(t=0) = a^0 = 1$ .



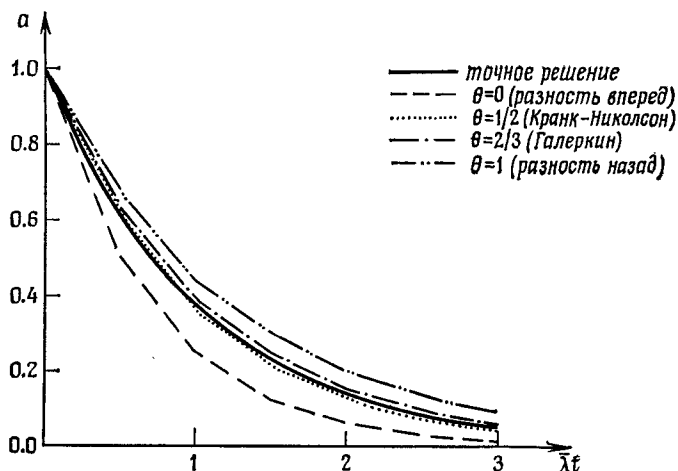


Рис. 7.5. Результат применения некоторых двухслойных схем к уравнению  $da/dt + \lambda a = 0$  при  $\bar{\lambda}\Delta t_n = 0.5$ .

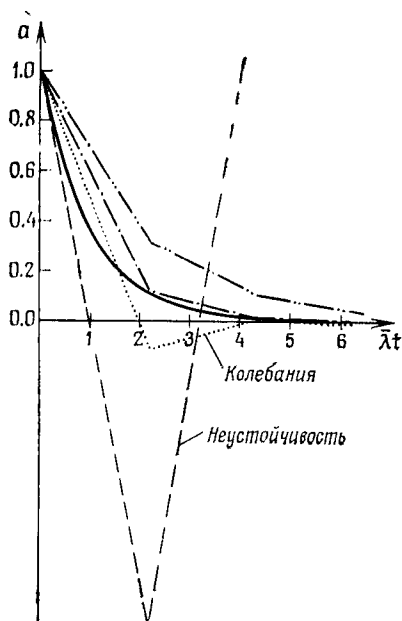


Рис. 7.6. Результат применения некоторых двухслойных схем к уравнению  $da/dt + \lambda a = 0$  при  $\bar{\lambda}\Delta t_n = 2.2$ . Обозначения те же, что на рис. 7.5.

На рис. 7.5 и 7.6 поведение точного решения сравнивается с поведением решения, полученного по этой схеме при  $\theta = 0$  (разность вперед),  $\theta = 1/2$  (схема Кранка—Николсона),  $\theta = 2/3$  (метод Галеркина) и  $\theta = 1$  (разность назад), для двух различных шагов по времени. Согласно рис. 7.5, результаты, полученные по всем схемам, дают правильную картину поведения решения, когда шаг по времени удовлетворяет соотношению  $\bar{\lambda} \Delta t_n = 0.5$ , причем наиболее точные результаты получаются при  $\theta = 1/2$ , т. е. по схеме Кранка—Николсона. Этого и следовало ожидать, так как нетрудно проверить, что погрешность аппроксимации  $da/dt|^{n+\theta}$  в этой схеме имеет порядок  $O(\Delta t_n^2)$ , а для других значений  $\theta$  порядок  $O(\Delta t_n)$  (см. равенство (7.51)).

Согласно рис. 7.6, при возрастании шага по времени до значения, определяемого соотношением  $\bar{\lambda} \Delta t_n = 2.2$ , поведение решения для некоторых схем заметно изменяется. Решение, получаемое по схеме с разностью вперед, дает колебания с нарастающей амплитудой. В этом случае говорят, что для данного значения шага по времени метод является неустойчивым. Схема Кранка—Николсона, хотя и остающаяся устойчивой, утрачивает свою высокую точность и обнаруживает склонность к колебаниям, отсутствующим в точном решении. Метод Галеркина и схема с разностью назад продолжают давать профили правильной формы с заметным снижением точности по сравнению с получаемой при меньшем значении шага по времени, как и следовало ожидать согласно (7.51). Обсуждение свойств устойчивости решений схем интегрирования по времени и возможности возникновения колебаний будет продолжено в следующем разделе.

Трехслойная схема (7.64) для этой задачи принимает вид

$$\left(\frac{1}{2\bar{\lambda}\Delta t_n} + \frac{1}{6}\right)a^{n+1} + \frac{2}{3}a^n + \left(-\frac{1}{2\bar{\lambda}\Delta t_n} + \frac{1}{6}\right)a^{n-1} = 0$$

и опять согласно начальным данным  $a^0 = 1$ .

Чтобы вычислить значение  $a^1$  и тем самым получить возможность рекуррентно применять трехслойную схему, можно воспользоваться какой-либо из описанных выше двухслойных схем.

В приведенной ниже таблице результаты, полученные применением трехслойной схемы, на исходном шаге которой используется двухслойная схема типа разности вперед, с шагом по времени, определяемым соотношением  $\bar{\lambda} \Delta t_n = 0.1$ , сравниваются с точным решением. Удастся получить хорошую точность приближения, хотя можно заметить, что найденные числовые значения колеблются около точного решения.

$\bar{\lambda}t$	Точное решение	Трехслойная схема
0	1.0	1.0
0.1	0.9048	0.9
0.2	0.8187	0.8194
0.3	0.7408	0.7362
0.4	0.6703	0.6715
0.5	0.6065	0.6021

#### 7.5.4. Характеристики устойчивости двухслойных схем

Общее уравнение первого порядка (7.32) с нулевой правой частью  $\mathbf{f}$  может быть решено численно с помощью двухслойной схемы (7.53), записываемой в виде

$$(1/\Delta t_n + \theta C^{-1}K) \mathbf{a}^{n+1} = (1/\Delta t_n - (1-\theta)C^{-1}K) \mathbf{a}^n. \quad (7.65)$$

Если  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M$  — собственные значения, а  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M$  — соответствующие собственные векторы задачи на собственные значения (см. разд. 7.4.2)

$$K\alpha + \lambda C\alpha = 0, \quad (7.66)$$

то в общем случае мы имеем

$$\mathbf{a}^n = \sum_{m=1}^M y_m^n \alpha_m, \quad \mathbf{a}^{n+1} = \sum_{m=1}^M y_m^{n+1} \alpha_m; \quad (7.67)$$

подставив эти выражения в (7.65), получим

$$y_m^{n+1} = \frac{1/\Delta t_n + (1-\theta)\lambda_m}{1/\Delta t_n - \theta\lambda_m} y_m^n. \quad (7.68)$$

Как было отмечено выше, в случае положительно определенных матриц  $K$  и  $C$  все собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M$  задачи (7.66) вещественны и неотрицательны.

Следовательно, точное решение затухает со временем и, согласно (7.67), то же самое поведение будет характерно для численного решения, если

$$|y_m^{n+1}| < |y_m^n|, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (7.69)$$

т. е. если

$$-1 < \frac{1/\Delta t_n + (1-\theta)\lambda_m}{1/\Delta t_n - \theta\lambda_m} < 1, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (7.70)$$

Это условие должно быть выполнено для *устойчивости* схем интегрирования по времени. Кроме того, схема будет свободна от колебаний, если каждая входящая в виде множителя в  $y_m^n$  мода имеет один и тот же знак на всех временных слоях  $n$ . В силу

равенства (7.68) это будет выполняться, если

$$\frac{y_m^{n+1}}{y_m^n} = \frac{1/\Delta t_n + (1-\theta)\lambda_m}{1/\Delta t_n - \theta\lambda_m} > 0, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (7.71)$$

Следовательно, двухслойная по времени схема (7.65) будет устойчива и свободна от колебаний, если

$$0 < \frac{1/\Delta t_n + (1-\theta)\lambda_m}{1/\Delta t_n - \theta\lambda_m} < 1, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (7.72)$$

Условие (7.70) или (7.71) при заданном значении  $\theta$  обычно будет вводиться как ограничение на максимальный размер шага по времени, который может быть использован в той или иной конкретной задаче.

**Пример 7.5.** Рассмотрим свойства устойчивости двухслойных схем, применявшихся для интегрирования задачи из примера 7.4, и возможность возникновения колебаний. Здесь будет рассмотрено решение одного уравнения  $da/dt + \bar{\lambda}a = 0$  с использованием схемы вида

$$(1/\Delta t_n + \bar{\lambda}\theta)a^{n+1} + (-1/\Delta t_n + \bar{\lambda}(1-\theta))a^n = 0.$$

Для данного случая одного уравнения решение системы (7.66) тривиально и мы имеем  $\lambda = -\bar{\lambda}$ . Тогда условие устойчивости (7.70) сводится к двойному неравенству

$$-1 < \frac{1/\Delta t_n - \bar{\lambda}(1-\theta)}{1/\Delta t_n + \bar{\lambda}\theta} < 1.$$

Второе из этих неравенств автоматически выполняется, а для выполнения первого требуется, чтобы

$$(1-2\theta)\bar{\lambda}\Delta t_n < 2.$$

Это условие всегда выполняется для  $\theta \geq 1/2$  каково бы ни было значение  $\Delta t_n$ . О таких схемах говорят, что они являются *безусловно устойчивыми*. При  $0 \leq \theta \leq 1/2$  устойчивость является условной, и требуется, чтобы шаг по времени  $\Delta t_n$ , используемый на каждом этапе процесса, удовлетворял ограничению

$$\bar{\lambda}\Delta t_n < 2/(1-2\theta).$$

В данном случае схема, свободная от колебаний, может быть получена при условии, что выполняется соотношение (7.72), т. е. если

$$\frac{1/\Delta t_n - \bar{\lambda}(1-\theta)}{1/\Delta t_n + \bar{\lambda}\theta} > 0,$$

а это эквивалентно требованию

$$(1 - \theta) \bar{\lambda} \Delta t_n < 1.$$

Данное условие всегда выполняется для схемы с разностью назад  $\theta = 1$  каково бы ни было значение шага по времени  $\Delta t_n$ . Однако для всех других значений  $\theta$  при достаточно больших значениях шага по времени будут возникать колебания. Из приведенного неравенства следует, что использованный при анализе примера 7.4 шаг по времени, определяемый соотношением  $\bar{\lambda} \Delta t_n = 2.2$ , таков, что обеспечено возникновение колебаний для схемы Кранка — Николсона ( $\theta = 1/2$ ), но при этом метод Галеркина ( $\theta = 2/3$ ) будет свободен от них (см. рис. 7.6). Таким образом, при использовании достаточно больших значений шага по времени математически более точная схема Кранка — Николсона на практике может давать численные результаты менее точные, чем получаемые по другим схемам. На рис. 7.7 показаны области неустойчивости и наличия колебаний в плоскости  $(\theta, \bar{\lambda} \Delta t_n)$  для рассматриваемых в данном случае двухслойных схем.

В разд. 7.4.3 было показано, как с помощью разложения по модам перейти от векторного уравнения

$$C da/dt + Ka = 0 \quad (7.73)$$

к системе независимых уравнений вида (7.30):

$$dy_l/dt - \lambda_l y_l = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, M. \quad (7.74)$$

Следовательно, можно получить информацию об ожидаемом поведении решения, получаемого применением к уравнению (7.73) двухслойной схемы, рассматривая применение этой схемы к каждому уравнению вида (7.74). Это в свою очередь можно сделать, повторив проведенные в примере 7.5 рассуждения для каждого из этих независимых уравнений. Можно ожидать, что решение будет свободно от колебаний, если

$$\Delta t_n < 1/[(1 - \theta) |\lambda_l|], \quad (7.75)$$

и будет устойчивым, если

$$(1 - 2\theta) |\lambda_l| \Delta t_n < 2 \quad (7.76)$$

для любого значения  $\lambda_l$ . Если используется безусловно устойчивая схема (т. е. выбирается такое  $\theta$ , что неравенство (7.76) выполняется автоматически) и некоторый шаг по времени  $\Delta t_n^*$ , только частично удовлетворяющий неравенству (7.75) {например, шаг по времени  $\Delta t_n^*$  может быть таким, что

$$\Delta t_n^* < 1/[(1 - \theta) |\lambda_l|], \quad l = 1, 2, \dots, p, \quad (7.77)$$

но

$$\Delta t_n^* > 1/[(1 - \theta) |\lambda_l|], \quad l = p + 1, p + 2, \dots, M, \quad (7.78)$$

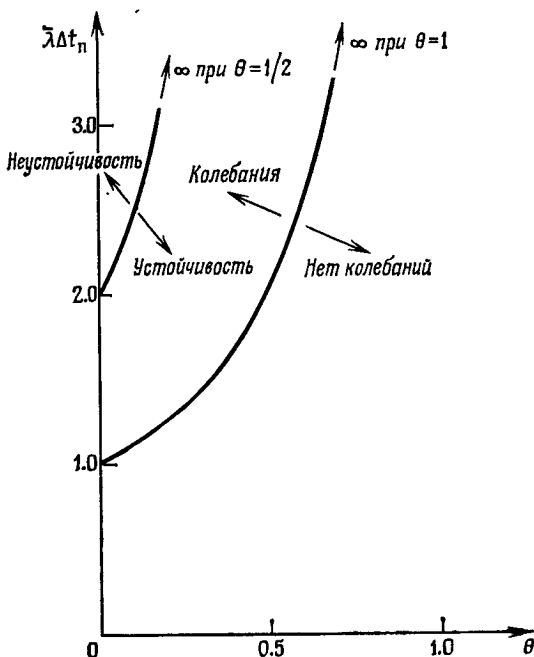


Рис. 7.7. Области неустойчивости и колебаний для двухслойных схем, применяемых к уравнению  $da/dt + \bar{\lambda}a = 0$ .

то моды для малых значений  $|\lambda_i|$  будут свободны от колебаний, но для мод с большими значениями  $|\lambda_i|$  колебания будут возникать. Очевидным выходом из положения было бы уменьшение шага по времени до такого значения, чтобы неравенство (7.75) выполнялось для всех  $\lambda_i$ , однако для этого может потребоваться слишком много машинного времени. Поэтому на практике иногда применяется иной подход, состоящий в сохранении имеющегося значения шага по времени  $\Delta t_n^*$  и использовании какой-либо численной процедуры для исключения колебаний от высокочастотных мод. Обычно такие процедуры состоят в каком-либо осреднении вычисленных значений последовательно на каждом шаге по времени.

Условно устойчивые схемы всегда будут приводить к неустойчивости, если используемый шаг по времени  $\Delta t_n$  не удовлетворяет неравенству (7.76), в котором за  $\lambda_i$  взято максимальное по абсолютной величине собственное значение задачи (7.66). Это существенно ограничивает использование явного метода (7.55). Однако необходимость использования при применении этого метода достаточно большого числа малых шагов по времени часто компенси-

руется ненадобностью обращения матрицы, что существенно экономит вычислительные усилия.

Согласно проведенному в этом разделе анализу устойчивости процесс получения оценки для максимального шага по времени, который может быть использован в условно устойчивой схеме, с необходимостью требует решения полной задачи на собственные значения (7.66):

$$K\alpha + \lambda C\alpha = 0. \quad (7.79)$$

Однако можно показать [3], что если дискретизация по пространству осуществляется методом конечных элементов, то наибольшее глобальное собственное значение всегда должно быть меньше наибольшего локального собственного значения элемента. Эти собственные значения элемента нетрудно получить из уравнения (7.79), заменив в нем глобальные матрицы приведенными матрицами элемента. Тогда можно провести оценку максимального допустимого шага по времени. Следует заметить, однако, что такая оценка будет заниженной (особенно для задач, в которых используется дискретизация на неравномерной сетке<sup>1)</sup>).

**Пример 7.6.** Используем двухслойную схему типа разности вперед (т. е. с  $\theta = 0$ ) для решения уравнения  $C da/dt + Ka = f$ , получающегося при применении метода конечных элементов по пространственной переменной к задаче из примера 7.2. Тогда ненулевые компоненты типичных приведенных матриц элементов  $c^e$  и  $k^e$  имеют вид

$$c^e = h^e \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}, \quad k^e = \frac{1}{h^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

В данном случае задача на собственные значения для элемента записывается как

$$\det(k^e + \lambda c^e) = 0.$$

Подставляя сюда приведенные выше выражения для матриц элементов, получаем уравнение

$$\det \begin{bmatrix} 1 + \lambda (h^e)^2/3 & -1 + \lambda (h^e)^2/6 \\ -1 + \lambda (h^e)^2/6 & 1 + \lambda (h^e)^2/3 \end{bmatrix} = 0,$$

решение которого дает

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -12/(h^e)^2.$$

Таким образом, условие устойчивости (7.76) выполняется, если

<sup>1)</sup> В случае равномерной сетки эта оценка иногда не допускает существенного улучшения.— *Прим. ред.*

принимаемый шаг по времени  $\Delta t_n$  таков, что

$$\Delta t_n < (h^e)^2/6$$

для всех пространственных элементов  $e$ . Для явной (диагонализированной) схемы, используя равенство (7.57), имеем

$$c^e = h^e \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix},$$

и в этом случае собственными значениями элемента будут

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -4/(h^e)^2.$$

Таким образом, критерий устойчивости имеет вид

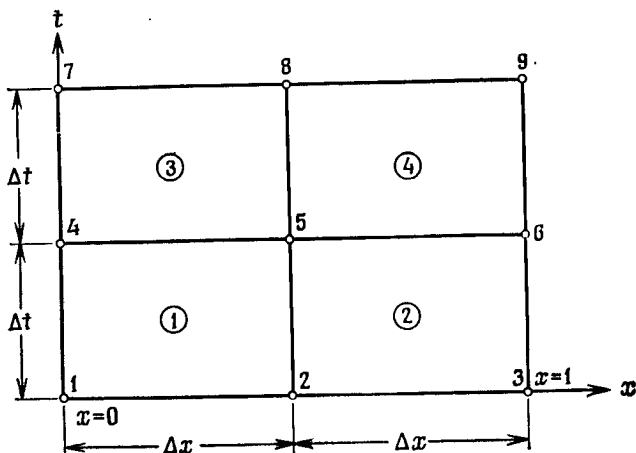
$$\Delta t_n < (h^e)^2/2$$

и, следовательно, для данной задачи диагонализированная схема допускает использование шага по времени, в три раза большего, чем при недиагонализированной матрице  $C$ .

### Упражнения

7.12. Для уравнения (7.32) получить двухслойную по времени схему, используя метод наименьших квадратов и минимизируя  $I = \int_{t_n}^{t_{n+1}} R^2 dt$  относительно  $a^{n+1}$ . Показать, что входящие в схему матрицы являются симметричными даже в том случае, когда матрицы  $C$  и  $K$  несимметричны.

7.13. Применить метод наименьших квадратов для решения уравнения из примера 7.4. Исследовать устойчивость получающейся схемы, выяснить возможность возникновения колебаний. Сравнить результаты, получаемые по этой схеме при  $\lambda \Delta t_n = 0.5$ , с аналогичными результатами для других методов, приведенными на рис. 7.5.



К упражнению 7.16.



7.14. Решить уравнение  $C d\varphi/dt + kK\varphi = f$  из примера 7.3 явным методом, используя подходящее значение шага по времени. Реализовать несколько шагов процесса и сравнить вычисленное изменение температуры в центре отрезка с показанным на рис. 7.3.

7.15. С помощью обобщения использованной в (7.57) техники получить диагонализированные матрицы элементов  $c^e$  при  $\alpha = 1$  для следующих элементов: а) одномерный лагранжев кубический элемент, узлы которого совпадают с узлами квадратурной формулы Гаусса—Лобатто (5.27); б) квадратный билинейный элемент с четырьмя узлами; в) треугольный элемент с тремя узлами из упражнения 5.8; г) серендипов элемент с восемью узлами из упражнения 5.16; д) лагранжев элемент с девятью узлами из упражнения 5.16.

7.16. Решить задачу из примера 7.3, используя одновременную конечно-элементную дискретизацию по пространственно-временной области, показанной на рисунке. Найти значение решения в узле 8, используя подходящее значение для  $\Delta t$ .

### 7.5.5. Уравнения второго порядка

Общее уравнение второго порядка (7.11)

$$M d^2a/dt^2 + C da/dt + Ka = f \quad (7.80)$$

может быть решено с помощью обобщения методов предыдущих параграфов.

Если попытаться решить это уравнение непосредственно, как это было сделано в разд. 7.5.1 для уравнений первого порядка, то можно опять положить

$$a \approx \hat{a} = \sum_{m=1}^{\infty} a^m N_m(t). \quad (7.81)$$

Отметим, однако, что теперь базисные функции  $N_m(t)$  должны иметь степень не ниже второй, так как в уравнение входят вторые производные по времени. Поэтому рассмотрим типичный квадратичный элемент  $n$  по времени с тремя узлами, помещенными в точки  $t_{2n}$ ,  $t_{2n+1}$  и  $t_{2n+2}$ , как показано на рис. 7.8. На этом элементе имеем

$$\hat{a} = a^{2n} N_{2n}^n + a^{2n+1} N_{2n+1}^n + a^{2n+2} N_{2n+2}^n, \quad (7.82)$$

так как все остальные базисные функции на элементе  $n$  равны нулю. Здесь

$$\begin{aligned} N_{2n}^n &= \frac{T(1-T)}{2}, & \frac{dN_{2n}^n}{dt} &= \frac{-1/2+T}{\Delta t_n}, & \frac{d^2N_{2n}^n}{dt^2} &= \frac{1}{\Delta t_n^2}, \\ N_{2n+1}^n &= 1-T^2, & \frac{dN_{2n+1}^n}{dt} &= -\frac{2T}{\Delta t_n}, & \frac{d^2N_{2n+1}^n}{dt^2} &= -\frac{2}{\Delta t_n^2}, \\ N_{2n+2}^n &= \frac{T(1+T)}{2}, & \frac{dN_{2n+2}^n}{dt} &= \frac{1/2+T}{\Delta t_n}, & \frac{d^2N_{2n+2}^n}{dt^2} &= \frac{1}{\Delta t_n^2}, \\ T &= \frac{t-t_{2n+1}}{\Delta t_n}, & \Delta t_n &= t_{2n+2}-t_{2n+1}, & \Delta t_n &= t_{2n+1}-t_{2n}. \end{aligned} \quad (7.83)$$

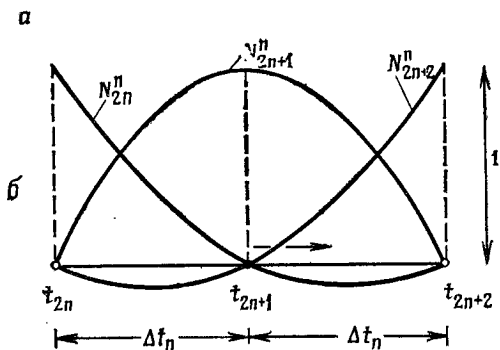
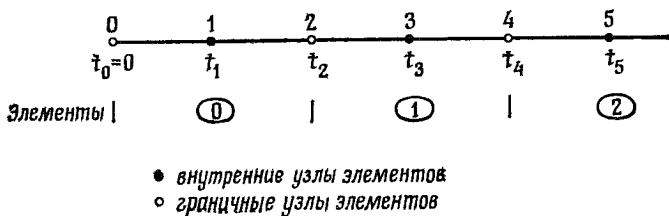


Рис. 7.8. а — разбиение временной области на квадратичные конечные элементы; б — базисные функции элемента  $n$ .

Применение к уравнению второго порядка (7.80) стандартного метода взвешенных невязок дает

$$\int_0^{\infty} \left( \mathbf{M} \frac{d^2 \hat{\mathbf{a}}}{dt^2} + \mathbf{C} \frac{d \hat{\mathbf{a}}}{dt} + \mathbf{K} \hat{\mathbf{a}} - \mathbf{f} \right) W_n dt = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.84)$$

Если ограничиться рассмотрением весовых функций  $W_n$ , отличных от нуля только на элементе  $n$ , то эти уравнения принимают вид

$$\int_{t_{2n}}^{t_{2n+2}} \left( \mathbf{M} \frac{d^2 \hat{\mathbf{a}}}{dt^2} + \mathbf{C} \frac{d \hat{\mathbf{a}}}{dt} + \mathbf{K} \hat{\mathbf{a}} - \mathbf{f} \right) W_n dt = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.85)$$

Используя соотношения (7.83) и проводя рассуждения, аналогичные использованным при выводе уравнения (7.45), эти равенства можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} & [\mathbf{M} + \gamma \Delta t_n \mathbf{C} + \beta \Delta t_n^2 \mathbf{K}] \mathbf{a}^{2n+2} + \\ & + [-2\mathbf{M} + (1 - 2\gamma) \Delta t_n \mathbf{C} + (1/2 - 2\beta + \gamma) \Delta t_n^2 \mathbf{K}] \mathbf{a}^{2n+1} + \\ & + [\mathbf{M} - (1 - \gamma) \Delta t_n \mathbf{C} + (1/2 - \beta - \gamma) \Delta t_n^2 \mathbf{K}] \mathbf{a}^{2n} = \mathbf{f}^n \Delta t_n^2, \end{aligned} \quad (7.86)$$

где

$$\gamma = \int_{-1}^1 (T + 1/2) W_n dT,$$

$$\beta = \int_{-1}^1 (1/2) T(T+1) W_n dT / \int_{-1}^1 W_n dT, \quad (7.87)$$

$$\bar{f}^n = \int_{-1}^1 W_n f(t_{2n+1} + T \Delta t_n) dT / \int_{-1}^1 W_n dT,$$

а матрицы  $M$ ,  $C$ ,  $K$  предполагаются постоянными.

Интерполирую  $f$  тем же самым способом, что и  $a$ , получим

$$\bar{f}^n = \beta f^{2n+2} + (1/2 - 2\beta + \gamma) f^{2n+1} + (1/2 + \beta - \gamma) f^{2n}. \quad (7.88)$$

Уравнение (7.86) соответствует общему алгоритму, впервые полученному Ньюмарком [4], и является одним из наилучших известных

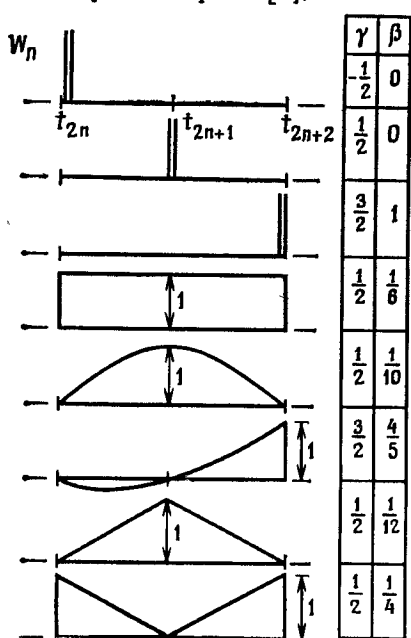


Рис. 7.9. Весовые функции для некоторых трехслойных схем для уравнений второго порядка.

рекуррентных соотношений для уравнений второго порядка<sup>1)</sup>.

На рис. 7.9 приведены значения  $\beta$  и  $\gamma$ , соответствующие весовым функциям различных видов. Ньюмарк рекомендует в общем случае брать значение  $\gamma = 1/2$ , что, как можно заметить, соответствует симметричным весовым функциям всех видов. Если  $\beta = 0$  и матрицы  $M$  и  $C$  диагональны, то для определения  $a^{2n+2}$  не требуется никакого обращения матриц и схема является явной. Однако тогда (точно так же, как и в случае уравнений первого порядка) можно показать, что устойчивость будет условной и шаг по времени  $\Delta t_n$  должен быть надлежащим образом ограничен.

Согласно уравнению (7.86), в трехслойных схемах для начала вычислений требуются два исходных значения  $a^0$  и  $a^1$ , тогда как чаще всего начальные данные задаются в виде

$$a|_{t=0} = a^0, \quad da/dt|_{t=0} = b^0. \quad (7.89)$$

<sup>1)</sup> Заметим, что в (7.83) предполагается постоянство шага по времени.—  
Прим. ред.

В этом случае опять можно применить различные стартовые схемы, позволяющие найти требуемое значение  $\mathbf{a}^1$  по начальным данным (7.89).

### 7.5.6. Устойчивость трехслойных схем для уравнений второго порядка

Для простоты ограничимся рассмотрением задачи устойчивости трехслойных схем для уравнений второго порядка с отсутствующей первой производной [5]. Как и в разд. 7.5.4, рассмотрим однородное уравнение (т. е. положим  $\mathbf{f} = 0$ ). Тогда расчетная схема (7.86) упрощается, принимая вид

$$[1 + \beta \Delta t_n^2 \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}] \mathbf{a}^{2n+2} + [-2 + (1/2 - 2\beta + \gamma) \Delta t_n^2 \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}] \mathbf{a}^{2n+1} + [1 + (1/2 + \beta - \gamma) \Delta t_n^2 \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}] \mathbf{a}^{2n} = 0. \quad (7.90)$$

Если  $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_M^2$  — собственные значения, а  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M$  — соответствующие собственные векторы задачи на собственные значения (см. разд. 7.4.1)

$$\mathbf{K}\alpha - \omega^2 \mathbf{M}\alpha = 0, \quad (7.91)$$

то в общем случае

$$\mathbf{a}^{2n} = \sum_{m=1}^M y_m^{2n} \alpha_m \quad (7.92)$$

и согласно (7.90) имеем

$$[1 + \beta \Delta t_n^2 \omega_m^2] y_m^{2n+2} + [-2 + (1/2 - 2\beta + \gamma) \Delta t_n^2 \omega_m^2] y_m^{2n+1} + [1 + (1/2 + \beta - \gamma) \Delta t_n^2 \omega_m^2] y_m^{2n} = 0. \quad (7.93)$$

Будем искать решение в виде

$$y_m^{2n} = A \mu^{2n}, \quad (7.94)$$

где  $A$  — некоторая постоянная; из подстановки этого решения в (7.93) следует, что решение такого вида существует при  $\mu = \mu_1$  или  $\mu = \mu_2$ , где  $\mu_1$  и  $\mu_2$  — корни квадратного уравнения

$$[1 + \beta \Delta t_n^2 \omega_m^2] \mu^2 + [-2 + (1/2 - 2\beta + \gamma) \Delta t_n^2 \omega_m^2] \mu + [1 + (1/2 + \beta - \gamma) \Delta t_n^2 \omega_m^2] = 0. \quad (7.95)$$

Ранее мы отмечали, что если матрицы  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{M}$  являются положительно определенными, то собственные значения уравнения (7.91) будут различными вещественными положительными числами, и в этом случае точное решение (формула (7.18)) имеет вид незатухающих устойчивых колебаний. Численное решение типа (7.94) будет иметь вид колебаний в том случае, когда  $\mu_1$  и  $\mu_2$  — комплексные числа, причем колебания остаются ограниченными, если модули этих комплексных значений удовлетворяют неравенству

$$|\mu_i| \leq 1, \quad i = 1, 2. \quad (7.96)$$

Таким образом, численное решение будет устойчивым и будет иметь вид незатухающих колебаний, как это и требуется, если

$$|\mu_i| = 1, \quad i = 1, 2. \quad (7.97)$$

В то же время численное решение будет оставаться устойчивым, но искусственно затухающим, если

$$|\mu_i| < 1, \quad i = 1, 2. \quad (7.98)$$

Решение уравнения (7.95) можно записать в виде

$$\mu = [2 - g \pm \sqrt{(2 - g)^2 - 4(1 + h)}] / 2, \quad (7.99)$$

где

$$g = \frac{(1/2 + \gamma) \omega_m^2 \Delta t_n^2}{1 + \beta \omega_m^2 \Delta t_n^2}, \quad h = \frac{(1/2 - \gamma) \omega_m^2 \Delta t_n^2}{1 + \beta \omega_m^2 \Delta t_n^2}, \quad (7.100)$$

и эти корни будут комплексными, если

$$4(1 + h) > (2 - g)^2, \quad (7.101)$$

т. е. если

$$-\omega_m^2 \Delta t_n^2 [4\beta - (1/2 + \gamma)^2] < 4. \quad (7.102)$$

Модуль этих корней равен

$$|\mu| = \sqrt{\mu \mu^*} = \sqrt{1 + h}, \quad (7.103)$$

и согласно неравенству (7.96) требуется, чтобы

$$-1 < h \leq 0. \quad (7.104)$$

Анализируя неравенства (7.102) и (7.104), можно заметить, что трехслойная схема будет безусловно устойчива, если

$$\beta > (1/4)(1/2 + \gamma)^2, \quad \gamma \geq 1/2, \quad 1/2 + \gamma + \beta > 0. \quad (7.105)$$

При невыполнении этих условий устойчивость все еще может быть получена, если выбранный шаг по времени таков, что выполняется неравенство (7.102).

Нетрудно проверить, что из приведенных на рис. 7.9 схем только две ( $\gamma = 3/2$ ,  $\beta = 1$  и  $\gamma = 1/2$ ,  $\beta = 1/4$ ) являются безусловно устойчивыми. Все схемы, для которых  $\gamma = 1/2$  и  $\beta \geq 1/4$ , являются безусловно устойчивыми и не дают искусственного затухания, тогда как для схем с  $\gamma > 1/2$  такое числовое затухание является заметным и приводит к неточности результатов при больших значениях  $\Delta t_n$ <sup>1)</sup>. Этот факт иллюстрируется рис. 7.10, где построен график зависимости  $|\mu|$  от  $\omega \Delta t_n / (2\pi)$  для различных схем интегрирования уравнения  $d^2 a / dt^2 + \omega^2 a = 0$  и заметно резкое затухание  $|\mu|$  с ростом  $\Delta t_n$ . Затухание высокочастотных мод часто же-

<sup>1)</sup> Само по себе отсутствие затухания не всегда гарантирует малую погрешность затухания. — *Прим ред.*

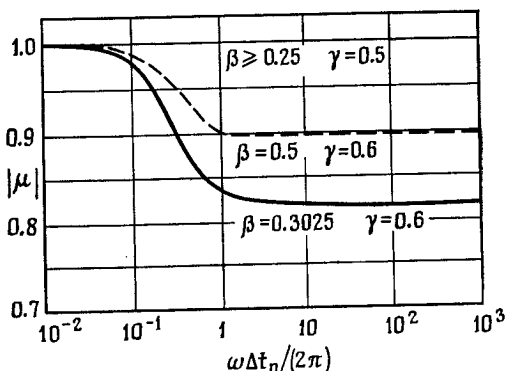


Рис. 7.10. Зависимость  $|\mu|$  от  $\omega\Delta t_n/(2\pi)$  для некоторых трехслойных схем, применяемых к уравнению  $a^2 a/dt^2 + \omega^2 a = 0$ .

лательство, так как оно помогает уменьшить паразитные колебания в этих модах. Для основных мод обычно принимается критерий типа  $\omega_m \Delta t_n/(2\pi) < 10^{-1}$ , и тогда для таких мод влияние числового затухания незначительно.

### 7.5.7. Нелинейные нестационарные задачи

Основной областью применения численных методов является решение нелинейных нестационарных задач, когда компоненты матриц в системах (7.32) или (7.80) зависят от неизвестного вектора  $\mathbf{a}$ . Здесь оказывается неприемлемым подход, описанный в § 7.4, где использовались процедуры аналитического решения. В случае уравнений первого и второго порядков можно воспользоваться общими уравнениями (7.36) и (7.84) метода взвешенных невязок, однако получающиеся при этом двух- и трехслойные схемы будут отличны от (7.41) и (7.86). Для совместности полученных уравнений необходимо полное (численное) интегрирование уравнения метода взвешенных невязок и в общем случае требуются итерации на каждом шаге по времени.

Во многих практических приложениях трудности, связанные с интегрированием по времени, удастся устранить с помощью применения процедур поточечной коллокации; например, подставляя непосредственно в равенство (7.39)  $W_n = \delta(T - \theta)$ , имеем

$$\frac{c(a^{n+\theta})}{\Delta t_n} (-a^n + a^{n+1}) + K(a^{n+\theta}) [(1-\theta)a^n + \theta a^{n+1}] = f^{n+\theta}, \quad (7.106)$$

где  $a^{n+\theta}$  и  $f^{n+\theta}$  могут быть вычислены с помощью аппроксимации (7.52), и полученное уравнение может быть решено итеративно для  $a^{n+1}$ .

Для нелинейных уравнений не будет справедлив и анализ устойчивости, проводившийся в предыдущих параграфах, однако некоторую информацию о вероятных характеристиках численных схем можно получить с помощью локальной линеаризации уравнения на одном шаге по времени. Тогда, например, в случае уравнений первого порядка можно было бы рассмотреть устойчивость на интервале по времени  $[t_n, t_{n+1}]$  двухслойной схемы (7.65) применительно к линейному уравнению<sup>1)</sup>

$$C(a^n) da/dt + K(a^n) a = 0. \quad (7.107)$$

Максимальный размер шага по времени  $\Delta t_n$  для обеспечения устойчивости и предотвращения возникновения колебаний будет теперь зависеть от решения и меняться вместе с ним.

## Упражнения

7.17. Исследовать характеристики устойчивости трехслойной схемы, использованной в примере 7.4.

7.18. Перемещение  $\varphi$  груза, подвешенного на пружине, описывается уравнением  $d^2\varphi/dt^2 + \varphi = 0$  с начальными данными  $\varphi = 0$ ,  $d\varphi/dt = 1$  при  $t = 0$ . Сравнить точное решение с результатами, получаемыми применением трехслойной схемы (7.86) для различных значений  $\beta$  и  $\gamma$ .

7.19. Показать, что общее уравнение второго порядка

$$M d^2a/dt^2 + C da/dt + Ka = f$$

можно записать как

$$C_1 dc/dt + Kc = f_1,$$

где  $c^T = (a, b)$ ,  $b = da/dt$ . Найти вид  $C_1$ ,  $K_1$  и  $f_1$ . Построить явную двухслойную схему для нахождения последовательных значений  $c$  и показать, что эта схема безусловно неустойчива, если она применяется к одному уравнению  $d^2a/dt^2 + \omega^2 a = 0$ .

7.20. Колебания натянутой струны с закрепленными концами описываются уравнением  $d^2\varphi/dx^2 = (1/c^2) d^2\varphi/dt^2$ , где  $c$  — постоянная, а  $\varphi$  — перемещение. Пусть струна единичной длины с  $c = 1$  первоначально находится в покое ( $d\varphi/dt|_{t=0} = 0$ ) и имеет форму  $\varphi = x(1-x)$ . Использовать представление решения с помощью трех линейных конечных элементов и показать, как можно получить решение, используя схему (7.86) при  $\beta = 0$  и  $\gamma = 1/2$ ; реализовать несколько шагов процесса с подходящим значением шага по времени.

7.21. Исследовать свойства устойчивости трехслойной схемы (7.86), применяемой к одному уравнению  $d^2a/dt^2 + \omega^2 a = 0$  при  $\gamma = 1/2$  и  $\beta = 1/6$ . Найти максимальное допустимое значение шага по времени, если эта схема используется для решения задачи из упражнения 7.20.

7.22. Перемещение груза, подвешенного на нелинейно упругой пружине, описывается уравнением  $d^2\varphi/dt^2 + \varphi(1 + \varphi) = 0$  с начальными данными  $\varphi = 1$ ,  $d\varphi/dt = 0$  при  $t = 0$ . Найти решение, используя схему (7.86) с  $\gamma = 1/2$ ,  $\beta = 0$ .

7.23. Исследовать возможность использования билинейных пространственно-временных конечных элементов с четырьмя узлами для решения задачи из упражнения 7.20.

<sup>1)</sup> Хотя непосредственная локальная линеаризация приводит к несколько более сложному уравнению, на практике в большинстве случаев целесообразно ограничиться рассмотрением именно уравнения (7.107). — *Прим. ред.*

## Литература

[1] Обсуждение таких методов здесь не проводится; интересующийся ими читатель может обратиться к книге Wilkinson J. H. The algebraic eigenvalue problem.— Oxford: Clarendon, 1965. [Имеется перевод: Уилкинсон Дж. Х., Алгебраическая проблема собственных значений.— М.: Наука, 1970.]

[2] Zienkiewicz O. C. The finite element method.— 3rd ed.— New York: McGraw-Hill, 1977.

[3] а) Irons B. M. Applications of a theorem on eigenvalues to finite element problems.— Depart. of Civil Eng., Swansea, Rep. CR/132/70, 1970; б) Irons B. M., Ahmad S. Techniques of finite elements.— Chichester: Ellis Horwood, 1979.

[4] Newmark N. M. A method for computation of structural dynamics.— Proc. Amer. Soc. Civ. Eng., 1959, v. 85, EM3, p. 67—94.

[5] Более полное обсуждение устойчивости трехслойных схем для общих уравнений второго порядка читатель может найти в следующих статьях: а) Fox L., Goodwin E. T. Some new methods for the numerical integration of ordinary differential equations.— Proc. Camb. Philos. Soc., 1949, v. 49, p. 373—388; Bathe K. J., Wilson E. L. Stability and accuracy analysis of direct integration methods.— Int. J. Earthquake Eng. Struct. Dynam., 1973, v. 1, p. 283—291.

## Рекомендуемая литература

Crandall S. H. Engineering analysis.— New York: McGraw-Hill, 1956.

Fried I. Numerical solution of differential equations.— New York: Academic Press, 1979.

Mitchell A. R., Griffiths D. F. The finite difference method in partial differential equations.— Chichester: Wiley, 1980.

Smith G. D. Numerical solution of partial differential equations.— Oxford: Oxford University Press, 1971.



## ОБОБЩЕННЫЕ КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ, ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ И ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

### 8.1. Обобщенный метод конечных элементов

Основная цель этой книги состоит в том, чтобы показать единство различных процессов аппроксимации, используемых при численном исследовании физических задач, описываемых соответствующими дифференциальными уравнениями. Если сначала казалось, что аппроксимация конечными разностями (гл. 1) не имеет ничего общего с аппроксимацией непрерывными базисными функциями (гл. 2), то использование в гл. 3 локальных базисных функций в рамках классического метода конечных элементов позволило ликвидировать этот разрыв. Там было показано не только, что конечно-разностные и конечно-элементные аппроксимации простого вида в ряде случаев приводят к одним и тем же аппроксимирующим выражениям, но и что при соответствующих локальных разложениях любые конечно-разностные выражения можно рассматривать как частные случаи конечно-элементных аппроксимаций базисными функциями.

Кроме того, тесно связанными с данными процессами оказываются процедуры граничного решения (затронутые в гл. 2 и часто выделяемые в независимую категорию). Общим звеном всех этих процессов аппроксимации является представление неизвестной функции через базисные функции и неизвестные параметры и нахождение этих параметров из системы уравнений метода взвешенных невязок. В связи с растущей популярностью метода конечных элементов и его реализаций в виде систематических и хорошо документированных процедур мы считаем возможным ввести понятие обобщенного метода конечных элементов, охватывающего все упомянутые выше различные подходы. Это позволяет с единых методологических позиций рассматривать формулировку, теорию и организацию вычислительных программ для всех процессов аппроксимации. Кроме того бессмысленными становятся тривиальные (и мало обоснованные) доводы в пользу, скажем, конечных разностей по сравнению с конечными элементами, так как в конкретных ситуациях каждый из этих подклассов имеет свои достоинства.

В самом деле, теперь становится возможным сочетать различные типы аппроксимации в одной унифицированной вычислительной программе для ЭВМ, и в этой области уже имеются опреде-

ленные достижения. Типичным примером является совместное использование аппроксимаций граничного типа, дающих прекрасные результаты при моделировании сингулярностей и бесконечных областей, и стандартных классических аппроксимаций конечными элементами в областях, где геометрию задачи удастся детальнее промоделировать с помощью нерегулярного измельчения сетки [1].

Еще одну возможность открывает одновременное использование глобальных и локальных базисных функций. На простых примерах было показано, что глобальные базисные функции типа применявшихся в гл. 2 часто дают хорошие результаты даже при несколько меньшем числе параметров, чем соответствующие локальные аппроксимации, основанные на стандартных конечно-элементных или конечно-разностных выражениях. Если задача лишь незначительно отличается от такой, в которой глобальное решение дает хорошую аппроксимацию, то в качестве иерархического уточнения может служить локальное конечно-элементное выражение [2].

Итоговым примером возрастающих преимуществ, связанных с унификацией понятий, является, пожалуй, современное использование конечно-разностных аппроксимаций на нерегулярной сетке. Здесь нельзя воспользоваться простым разностным оператором из гл. 1, но можно построить локальные многочленные базисные функции, основывающиеся на соседних узловых точках, и получить нужную аппроксимацию с помощью коллокации или какой-либо другой разновидности метода взвешенных невязок. Этот единообразный подход к приближенному численному решению реальных физических задач позволяет систематическим образом рассматривать наиболее важные в практическом плане вопросы анализа: 1) насколько точным является полученное решение? 2) как получить решение с нужной точностью? Ответам на эти вопросы посвящены остальные параграфы этой главы.

## 8.2. Погрешность дискретизации в численном решении

Погрешность приближенного численного решения задачи обусловливается тремя основными причинами. Прежде всего это использование аппроксимации базисными функциями, приводящее к тому, что дифференциальные уравнения и соответствующие им краевые условия удовлетворяются неточно, возникающая при этом погрешность носит название *погрешности дискретизации* (или аппроксимации). Кроме того, на любом этапе вычислений может быть запомнен только конечный объем информации, и это приводит к вычислительной погрешности. Третий вид погрешности связан с тем, что выбранная для численного решения математическая модель лишь приближенно описывает физическое явление. Возрастание точности современных ЭВМ позволяет уменьшить вторую

из этих погрешностей, вопрос же о погрешности математической модели выходит за рамки данной книги (здесь считается, что решение математической модели является «точным»). Поэтому все внимание будет сосредоточено на погрешности дискретизации, возникающей при реализации описанных выше процессов аппроксимации.

До сих пор при обсуждении погрешностей мы ограничивались формулировками (см. равенства (1.17) и (4.2)), в которых порядок погрешности дискретизации выражался через характерный шаг сетки. Такой подход сам по себе не позволяет определить величину ошибки дискретизации. Однако если имеется последовательность решений, на сетках с равномерно убывающим шагом, то можно получить приближенную оценку точности найденного решения. Как правило, на практике желательно иметь как можно больше информации о возможных погрешностях, чтобы лучше распорядиться полученной аппроксимацией. Идеальной, очевидно, была бы ситуация, когда для каждого дискретного решения с твердой уверенностью можно было бы утверждать, что погрешность не превосходит некоторого заданного значения, являющегося разумной оценкой реальной погрешности. Это позволило бы с помощью последовательного уточнения продолжить решение до достижения нужной точности и в то же время повысило бы доверие к процессам численной аппроксимации.

Хотя такая цель может первоначально показаться утопической (и действительно кое-кто считает ее недостижимой, так как точное знание погрешности предполагает знание точного решения), в этом направлении уже имеются существенные успехи, и в настоящее время оценки погрешностей могут использоваться для реальных дискретных вычислений. Имея такую оценку, пользователь может заключить, являются ли полученные им результаты удовлетворительными или необходимо дальнейшее уточнение решения. Как правило, можно ожидать, что сведения о распределении погрешности определяют методику проведения такого уточнения, и тогда это уточнение может быть осуществлено автоматически. Процедуры такого рода, называемые *адаптивными*, позволяют с помощью ЭВМ эффективно проводить уточнение сетки до достижения требуемой точности. Очевидно, что могут быть использованы различные стратегии уточнения; некоторые из них более экономичны в вычислительном отношении, но все они ведут к достижению одной и той же цели. Мы не будем обсуждать далее эти вопросы: заинтересовавшийся ими читатель может обратиться к литературе [3], здесь же вкратце рассматривается лишь основной вопрос об оценках погрешностей.

### 8.3. Мера погрешности дискретизации

На протяжении большей части этой книги рассматривалось решение общей краевой задачи о нахождении неизвестной функции  $\varphi$ , удовлетворяющей дифференциальному уравнению

$$\mathcal{L}\varphi + p = 0 \quad \text{в } \Omega \quad (8.1a)$$

с краевыми условиями

$$\mathcal{M}\varphi + r = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (8.1b)$$

где  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{M}$  — линейные дифференциальные операторы общего вида, а  $p$  и  $r$  — заданные функции.

Приближенное решение строилось в виде разложения по базисным функциям

$$\hat{\varphi} = \sum_{m=1}^M a_m N_m. \quad (8.2)$$

Очевидно, что локальная погрешность  $E$  определяется просто по правилу

$$E = \varphi - \hat{\varphi}, \quad (8.3)$$

где  $\varphi$  — точное решение.

Так как поточечное вычисление погрешности затруднительно, можно воспользоваться некоторыми иными мерами для  $E$ . Одной из таких удобных мер является так называемая *энергетическая норма*, определяемая по формуле

$$\|E\| = \left[ \int_{\Omega} E \mathcal{L}E \, d\Omega \right]^{1/2}. \quad (8.4)$$

Применение формулы Грина или интегрирования по частям показывает, что величина этой нормы позволяет судить о точности представления производных (например, напряжений в задачах теории упругости).

Величина (8.4) тесно связана с невязкой  $R_{\Omega}$ , задаваемой равенством

$$R_{\Omega} = \mathcal{L}\hat{\varphi} + p, \quad (8.5)$$

причем простоты ради предполагается, что разложение (8.2) точно удовлетворяет краевым условиям. Чтобы установить эту связь подставим в (8.4) выражение (8.3) для  $E$ :

$$\|E\|^2 = \int_{\Omega} (\varphi \mathcal{L}\varphi + \hat{\varphi} \mathcal{L}\hat{\varphi} - \varphi \mathcal{L}\hat{\varphi} - \hat{\varphi} \mathcal{L}\varphi) \, d\Omega. \quad (8.6)$$

Согласно методу Галеркина,

$$\int_{\Omega} \hat{\varphi} \mathcal{L}\varphi \, d\Omega = - \int_{\Omega} \hat{\varphi} p \, d\Omega. \quad (8.7)$$

Учитывая этот результат и уравнение (8.1а), равенство (8.6) можно переписать в виде

$$\|E\|^2 = - \int_{\Omega} (\varphi - \hat{\varphi})(\mathcal{L}\hat{\varphi} + p) d\Omega, \quad (8.8a)$$

а это в силу (8.3) и (8.5) равносильно равенству

$$\|E\| = - \int_{\Omega} ER_{\Omega} d\Omega. \quad (8.8b)$$

В следующем параграфе будет показано, как используется выражение такого вида для практического вычисления оценки погрешности дискретизации.

#### 8.4. Оценка погрешности дискретизации

Для заданной конечно-элементной аппроксимации  $\hat{\varphi}$  легко найти невязку  $R_{\Omega}$ . В общем случае ее естественно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$R_{\Omega} = R_1 + R_2. \quad (8.9)$$

Первое слагаемое,  $R_1$ , определяется стандартным образом внутри каждого элемента; второе слагаемое,  $R_2$ , имеет вид дельта-функции Дирака на границах между элементами, где иногда, как было показано выше, некоторые из производных, входящих в  $\mathcal{L}\hat{\varphi}$ , не определены. В таком случае можно выполнить интегрирование по частям, и если  $n$  и  $t$  — направления нормали и касательной к границе  $I^e$  элемента  $e$ , то

$$\int_{\Omega} R_2 d\Omega = \sum_{I^e \in \Gamma} \int_{I^e} \Theta dt, \quad (8.10)$$

где  $\Theta$  — величина разрыва соответствующей производной на границе и суммирование проводится по границам элементов, не содержащимся в  $\Gamma$ . Например, если мы имеем дело с оператором Лапласа, то эта величина принимает вид

$$\Theta = \partial\varphi/\partial n|_{I^e}. \quad (8.11)$$

Аналогичным образом в задачах теории упругости  $\Theta$  представляет разрыв касательного напряжения на границах элементов.

Если невязки известны, то для оценки погрешности можно использовать выражение (8.8). При измельчении сетки таким образом, что характерный размер  $h$  элемента стремится к нулю, порядок погрешности аппроксимации достаточно гладкой функции многочленом в пределе будет на единицу выше степени самого аппроксимирующего многочлена; чтобы убедиться в этом, достаточно разложить функцию в ряд Тейлора.

Рассмотрим разложение вида (8.2) с параметрами  $a_1, a_2, \dots, a_M$  и сделаем иерархическую добавку в виде еще одной базисной функции  $N_{M+1}$  и параметра  $a_{M+1}$ , где  $N_{M+1}$  представляет интерполяцию следующего порядка; например, если решение основывается на линейных элементах, то  $N_{M+1}$  будет квадратичной иерархической модой. На носителе этого дополнительного слагаемого можно приближенно представить погрешность в виде

$$E \approx a_{M+1} N_{M+1} \quad (8.12)$$

и найти аппроксимацию для  $a_{M+1}$  с помощью уравнения метода взвешенных невязок

$$\int_{\Omega} N_{M+1} [\mathcal{L}(\hat{\varphi} + a_{M+1} N_{M+1}) + p] d\Omega, \quad (8.13)$$

считая, что параметры  $a_1, a_2, \dots, a_M$  остаются без изменения. (Здесь интеграл следует понимать в обобщенном смысле, так как уже было отмечено, что  $\mathcal{L}N_m$  может не существовать.) Таким образом,

$$a_{M+1} = - \left[ \int_{\Omega} N_{M+1} (\mathcal{L}N_{M+1}) d\Omega \right]^{-1} \int_{\Omega} N_{M+1} R_{\Omega} d\Omega. \quad (8.14)$$

В ряде случаев первый сомножитель в правой части после интегрирования по частям можно представить просто как

$$\left[ \int_{\Omega} N_{M+1} (\mathcal{L}N_{M+1}) d\Omega \right]^{-1} = K_{M+1, M+1}^{-1}, \quad (8.15)$$

т. е. он будет обратным для соответствующей компоненты матрицы. Используя равенство (8.8б), получаем выражение для оценки погрешности

$$\|E\|^2 = - \int_{\Omega} a_{M+1} N_{M+1} R_{\Omega} d\Omega = K_{M+1, M+1}^{-1} \left[ \int_{\Omega} N_{M+1} R_{\Omega} d\Omega \right]^2. \quad (8.16)$$

Так как иерархические функции могут добавляться на каждом элементе, в общем случае можно вычислить такие члены на каждом элементе, а затем просуммировать вклад отдельных элементов.

Как было указано выше, эта оценка справедлива только в асимптотическом смысле при  $h$ , стремящемся к нулю, и, к сожалению, в общем случае не верна на фиксированных сетках. Например, функция  $N_{M+1}$  может оказаться ортогональной к невязке и тогда оценка погрешности будет равна нулю. Мы предположили также, что при добавлении члена  $a_{M+1} N_{M+1}$  к аппроксимации исходные параметры  $a_1, a_2, \dots, a_M$  остаются без изменения, и тем самым пренебрегли взаимным влиянием новой моды и исходного решения. Тем не менее равенство (8.16) чрезвычайно полезно, так как оно *показывает*, где следует с наибольшим эффектом провести

следующее уточнение иерархического типа, и с этой целью широко используется в процессах адаптивного уточнения.

Чтобы получить более достоверную оценку погрешности, рассмотрим конкретный случай, а именно уравнение

$$-d^2\varphi/dx^2 + p = 0, \quad (8.17)$$

и будем искать решение, используя линейные конечные элементы.

При обсуждавшихся выше предположениях погрешность здесь будет постоянна на каждом элементе, а иерархическая мода  $N_{M+1}$  является квадратичной функцией, обращающейся в нуль в узлах; таким образом, сингулярная часть погрешности исключается. Равенство (8.16) теперь можно переписать в виде

$$\|E\|^2 = K_{M+1, M+1}^{-1} R_{\Omega}^2 \left[ \int_{\Omega} N_{M+1} d\Omega \right]^2. \quad (8.18)$$

Вычислив среднее значение  $R_{\Omega}^2$ , можно рассмотреть более общий случай переменных погрешностей, приводящий к формуле

$$\|E\|^2 = K_{M+1, M+1}^{-1} \left[ \int_{\Omega} N_{M+1} d\Omega \right]^2 \left[ \int_{\Omega} R_{\Omega}^2 d\Omega \right] \left[ \int_{\Omega} d\Omega \right]^{-1}, \quad (8.19)$$

и таким образом обеспечить получение ненулевой оценки погрешности для линейных элементов. В гл. 4 было также отмечено, что для задачи, описываемой уравнением (8.17), иерархические моды при соответствующем их выборе могут давать диагональные вклады в результирующую матрицу, т. е. исключается взаимное влияние мод. Следовательно, оценка (8.19) будет «асимптотически точна» при  $h$ , стремящемся к нулю.

В качестве упражнения предоставляем читателю показать, что при подстановке в равенство (8.19) функции  $N_{M+1} = (x/h^e)(1 - x/h^e)$  формула оценки погрешности на элементе  $e$  дает

$$\|E\|_{[\Omega^e]}^2 = [(h^e)^2/12] \int_0^{h^e} R_{\Omega^e}^2 dx. \quad (8.20)$$

Остается непростая задача показать, что эти оценки будут также справедливы для дифференциальных уравнений более общего вида, когда имеют место эффекты взаимодействия мод. (Интересующему этой задачей читателю рекомендуется обратиться к соответствующему источнику [4].) Для решения практических задач в случае двух переменных с известным успехом применялась следующая формула оценки погрешности на элементе общего вида  $e$  при использовании не вырождающихся сеток из четырехугольных элементов с четырьмя узлами:

$$\|E\|_{[\Omega^e]}^2 = [(h^e)^2/24] \int_{\Omega^e} (R_{\Omega^e} - \bar{R}_e)^2 d\Omega + (h_e/24) \int_{I^e} \Theta^2 dt. \quad (8.21)$$

Энергетическая норма погрешности для всей сетки получается суммированием по всем элементам. Здесь  $\bar{R}_e$  — среднее значение  $R_{\Omega e}$  на элементе и учитываются как регулярная часть невязки, так и ее сингулярная часть, поскольку иерархическая квадратичная мода включает и рассматриваемую на элементе внутреннюю функцию, и граничную моду, общую для смежных элементов. Это среднее значение вычитается для того, чтобы в известной мере «самоуравновесить» невязки на границе и внутри элемента, хотя бы в том смысле, что

$$\int_{\Omega} R_{\Omega} N_m d\Omega = 0. \quad (8.22)$$

Действительно, предполагалось, что на практике в выражении (8.21) должен рассматриваться только граничный член, так как если задача является достаточно гладкой, то первым слагаемым можно пренебречь. Это в некоторой степени оправдывает эвристические рассуждения о том, что разрывы производных в (8.10) или разрывы касательных напряжений в задачах теории упругости могут служить некоторой мерой погрешности конечно-элементного решения.

Рассмотренные здесь оценки погрешности называются апостериорными, так как они основываются на конечно-элементном решении, которое подставляется в исходное дифференциальное уравнение с тем, чтобы получить невязку  $R_{\Omega}$ . Такие оценки интенсивно изучаются во многих текущих исследованиях [3]. Известны обобщения таких оценок на случай элементов высших степеней. При этом очевидным образом в оба равенства (8.20) и (8.21) необходимо включить множитель  $d^{-\alpha}$ , где  $d$  — степень полного многочлена на элементе, а  $\alpha$  — постоянная порядка  $2^1$ ). Приближается время, когда практический анализ будет давать достоверную оценку погрешности. В приведенных ниже примерах сначала будет рассмотрена простая задача, которую можно решить вычислениями вручную, а затем задача, имеющая практическое значение.

**Пример 8.1.** Рассмотрим уравнение

$$-d^2\varphi/dx^2 + Q = 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

с краевыми условиями  $\varphi = 0$  при  $x = 0$  и  $\varphi = 0$  при  $x = 1$ .

Предположим сначала, что  $Q = -1$ , и попытаемся решить задачу, используя один линейный конечный элемент. Для линейного элемента равенство (8.5) даст  $R_{\Omega} = Q = -1$  и, согласно оценке

<sup>1</sup>) По-видимому, авторы установили этот факт на основании результатов расчетов. — *Прим. ред.*



погрешности (8.20), имеем

$$\|E\| = (h^2/12) \int_0^h R_\Omega^2 d\Omega,$$

т. е.  $\|E\|^2 = 1/12$ .

Чтобы выяснить, насколько точна эта оценка, необходимо знать точную величину погрешности. Точное решение, найденное интегрированием дифференциального уравнения с учетом краевых условий, имеет вид

$$\varphi = x(1-x)/2.$$

Так как для конечного элемента оба узловых параметра будут равны нулю, из (8.3) сразу следует

$$E = x(1-x)/2.$$

Прямая подстановка в равенство (8.8) дает точное значение энергетической нормы погрешности

$$\|E\|_{\text{точная}}^2 = - \int_{\Omega} ER_{\Omega} d\Omega,$$

откуда

$$\|E\|_{\text{точная}}^2 = 1/12.$$

Таким образом, формула оценки погрешности (как и следовало ожидать для случая линейных элементов и постоянной невязки  $R_{\Omega}$ ) дает точное значение.

Предположим теперь, что  $Q = -x$ , и рассмотрим опять погрешность для одного линейного элемента. Тогда, согласно равенству (8.5),  $R_{\Omega} = Q = -x$  и оценка погрешности задается выражением

$$\|E\|^2 = (1/12) \int_0^1 x^2 dx,$$

т. е.

$$\|E\|^2 = 1/36.$$

Точным решением в данном случае является

$$E = x(1-x^2)/6,$$

и, следовательно, для точной энергетической нормы погрешности имеем

$$\|E\|_{\text{точная}}^2 = - \int_{\Omega} (x/6)(1-x^2)(-x) dx,$$

откуда  $\|E\|_{\text{точная}}^2 = 1/45$ . Здесь оценка погрешности дает ограничение сверху для энергетической нормы погрешности.

Пусть к решению этой задачи добавляется иерархическая квадратичная функция, т. е. конечный элемент становится квад-

ратичным. Тогда конечно-элементное решение имеет вид

$$\hat{\varphi} = x(1-x)/4.$$

Выражение (8.5) для невязки в данном случае принимает вид

$$R_{\Omega} = -d^2\varphi/dx^2 + Q = 1/2 - x;$$

применяя равенство (8.20) с дополнительным множителем  $d^{-2}$  для квадратичного элемента, получаем

$$\|E\|^2 = (1/12) \times (1/2^2) \int_0^1 (1/2 - x)^2 dx = 0.0017.$$

Как и выше, точная энергетическая норма погрешности задается выражением

$$\begin{aligned} \|E\|_{\text{точная}}^2 &= - \int_0^1 ER_{\Omega} dx = \\ &= - \int_0^1 [-x^3/6 + x/6 - (x/4)(1-x)] (1/2 - x) dx, \end{aligned}$$

что дает  $\|E\|_{\text{точная}}^2 = 0.0014$ .

Оценка погрешности опять достаточно точна для практических целей.

**Пример 8.2.** В качестве заключительного практического примера приведем конечно-элементное исследование плотины, использующее адаптивный алгоритм и двумерную формулу оценки погрешности, основанную на компонентах иерархической функции, обсуждавшихся в этой главе. Сетка билинейных конечных элементов, использованная для нахождения исходного решения, изображена на рис. 8.1. К этим элементам добавлялись новые иерар-

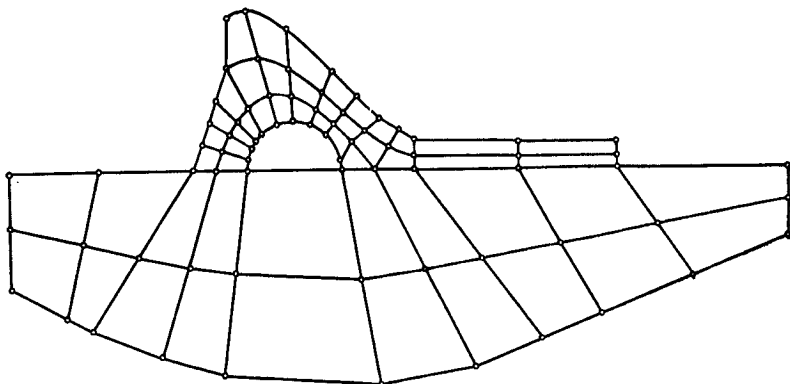


Рис. 8.1. Базисная конечно-элементная сетка для иерархического исследования плотины.

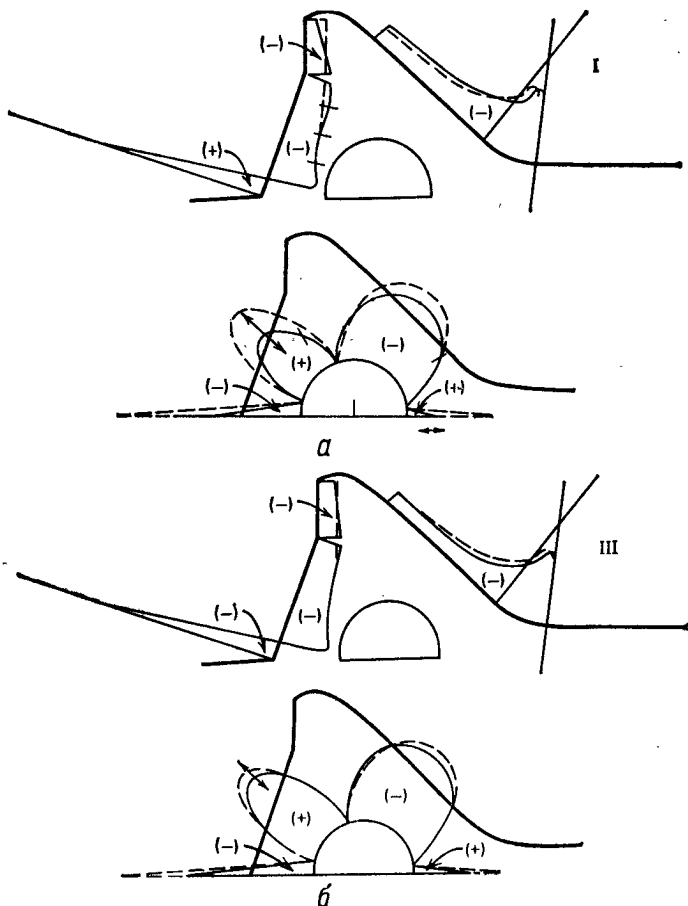


Рис. 8.2. Сходимость решений задачи о плотине, изображенной на рис. 8.1. *а* — исходный шаг, использующий линейные элементы. Погрешности в процентах к полной энергетической норме:  $\|E\| \leq 14.6$  (точная),  $\|E\| = 7.3$  (полученная с помощью оценок) и  $\|E^*\| \leq 21.6$  (полученная с помощью корректирующих оценок верхней грани погрешности). Число неизвестных = 118. *б* — третий шаг. Ошибки в процентах к полной энергетической норме:  $\|E\| \leq 6.0$  (точная),  $\|E\| = 3.6$  (полученная с помощью оценок) и  $\|E^*\| = 7.8$  (полученная с помощью корректирующих оценок верхней грани погрешности). Число неизвестных = 206.

хические моды, так что получалась последовательность решений. Применялся специальный адаптивный алгоритм, в котором к сетке добавлялись только те степени свободы, которые позволяли быстрее всего уменьшать оцененную погрешность решения. Таким образом, на получающейся в итоге сетке степени аппроксимирующих многочленов менялись от элемента к элементу, но при этом сохраня-

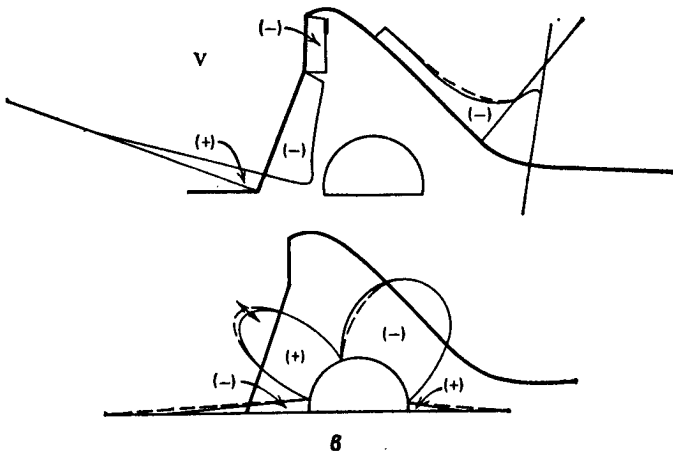


Рис. 8.2. Продолжение. *в* — пятый шаг адаптивного процесса уточнения. Ошибки в процентах к полной энергетической норме:  $\|E\| \leq 3.0$  (точная),  $\|E\| = 2.9$  (полученная с помощью оценок) и  $\|E^*\| = 4.8$  (полученная с помощью корректирующих оценок верхней грани погрешности). Число неизвестных = 365.

лась совместность, гарантированная тем фактом, что вдоль каждой границы между соседними элементами степени многочленов совпали [5].

На рис. 8.2 вычерчено максимальное главное напряжение на внешней поверхности плотины и на внутренней поверхности полости на трех этапах процесса. Предсказанная энергетическая норма погрешности  $\|E\|$  приводится вместе со второй оценкой, являющейся верхней гранью погрешности. Была найдена также оценка максимальной погрешности в напряжении, построенная для каждого из решений.

Сравнение трех решений показывает быструю сходимость конечно-элементного решения для напряжения к «точному» решению, соответствующему штриховой кривой. Это «точное» решение было получено при использовании конечно-элементной сетки с очень малым шагом. Очевидна также одновременная сходимость к нулю энергетической нормы погрешности и оценки погрешности.

## Упражнения

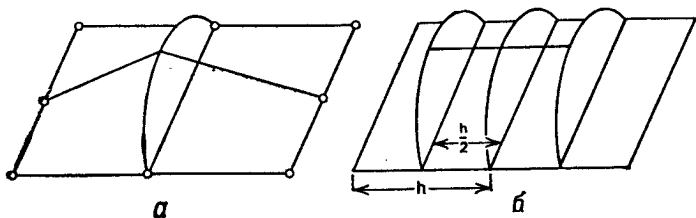
8.1. Доказать, что  $\|E\|^2 = - \int_{\Omega} \varphi R_{\Omega} d\Omega$  (см. § 8.3).

8.2. Повторить исследование, проведенное в примере 8.1, но для дифференциального уравнения  $-d^2\varphi/dx^2 + \varphi = -Q$ . Выяснить точность формулы (8.20) оценки погрешности.

8.3. Рассмотреть линейный элемент с четырьмя узлами, применяемый для

решения двумерного уравнения Лапласа  $\partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2 = 0$  в  $\Omega$  при  $\varphi = \bar{\varphi}$  на  $\Gamma_\varphi$  и  $\partial\varphi/\partial n = \bar{q}$  на  $\Gamma_q$ .

а) Показать, что регулярная часть невязки равна нулю. б) Попытаться найти второй член в выражении (8.21), исходя из формулы (8.16) и используя



на границе между элементами квадратичную иерархическую базисную функцию, построенную на рисунке а. При этом должно получиться то же самое выражение, но вместо 24 будет стоять 28.8. в) Повторить вычисления п. б), используя на этот раз в формуле (8.16) цилиндрическую квадратичную функцию  $N_{M+1}$ , построенную на рисунке б. Теперь должен получиться коэффициент 24.

### 8.5. Заключение

В этой книге сделана попытка познакомить читателя с основными понятиями численной аппроксимации, используемыми при практическом решении задач, описываемых дифференциальными уравнениями. Многие детали и разработки вообще не упомянуты, и сведения о них следует искать в больших по объему монографиях и текущей литературе. Надеемся, однако, что с помощью полученного аппарата читатель сможет яснее представить себе достижения и цели современных исследований и в то же время со знанием дела применять уже зарекомендовавшие себя методы.

Конечные цели — построение наиболее эффективной численной дискретизации для новых физических задач, с которыми сталкивается читатель, и возможное создание процедур, автоматически производящих «уточнение» до заранее заданной точности, всегда будут представлять трудности, бросающие вызов воображению. Мы надеемся, однако, что содержащийся в этой книге материал дает достаточную основу для разумного подхода к их преодолению.

### Литература

[1] Zienkiewicz O. C., Kelly D. W., Bettess P. Marriage à la mode—The best of both worlds (finite elements and boundary integrals).— In: Energy methods in finite element analysis. Ed. by R. Glowinski, E. Y. Rodin, O. C. Zienkiewicz.— New York: Wiley-Interscience, 1979.

[2] Mote C. D. Global-local finite element.— Int. J. Num. Mech. Eng., 1971, v. 3, p. 565—574.

[3] См. литературу в статье Zienkiewicz O. C., Kelly D. W., Gago J., Babuška I. Hierarchical finite element approaches, error estimates and adaptive refinement.— In: The mathematics of finite elements and applications. Ed. by J. Whiteman.— New York: Academic Press, 1981.

[4] Babuška I., Rheinboldt W. C. A posteriori error estimates for the finite element method.— Int. J. Num. Meth. Eng., 1978, v. 12, p. 1597—1615, а также Babuška I., Rheinboldt W. C. Adaptive approaches and reliability estimations in finite element analysis.— Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 1979, v. 17-18, p. 519—540.

[5] Подробное обсуждение этой задачи, детали алгоритмов и оценку погрешности читатель может найти в статье Kelly D. W., Gago J., Zienkiewicz O. C., Babuška I. A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method.— Int. J. Num. Meth. Eng. (в печати).

### Рекомендуемая литература

Gago J. P. de S. R., Kelly D. W., Zienkiewicz O. C. A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method.— Dept. of Civil Eng., Univ. College Swansea rep. C/R/364/80, 1980.

Gago J. P. de S. R. A posteriori error analysis and adaptivity for the finite element method.— Ph. D. thesis, Univ. of Wales, 1982.

## Дополнительная литература <sup>1)</sup>

### *Математическая теория метода конечных элементов*

- Деклу Ж. Метод конечных элементов.— М.: Мир, 1976.  
Корнеев В. Г. Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1977.  
Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы.— М.: Наука, 1981.  
Обэн Ж. П. Приближенное решение эллиптических краевых задач.— М.: Мир, 1977.  
Оганесян Л. А., Руховец Л. А. Варнационнно-разностные методы решения эллиптических уравнений.— Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1979.  
Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач.— М.: Мир, 1980.

### *Решение задач механики сплошных сред*

- Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках.— М.: Мир, 1984.  
Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы.— М.: Мир, 1984.  
Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике.— М.: Мир, 1975.  
Зенкевич О., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред.— М.: Недра, 1974.  
Коннор Дж., Бреббиа К. Метод конечных элементов в механике жидкости.— Л.: Судостроение, 1979.  
Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред.— М.: Мир, 1976.  
Уманский С. Э. Оптимизация приближенных методов решения краевых задач механики.— Киев: Наукова думка, 1983.

### *Техника программирования метода конечных элементов*

- Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов.— М.: Мир, 1981.  
Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов.— М.: Мир, 1979.

### *Конкретные технические приложения*

- Ержанов Ж. С., Каримбаев Т. Д. Метод конечных элементов в задачах механики горных пород.— Алма-Ата: Наука, 1975.  
Квитка А. Л., Ворошко П. П., Бобрицкая С. Д. Напряженно-деформированное состояние тел вращения.— Киев: Наукова думка, 1977.  
Методы расчета стержневых систем, пластин и оболочек с использованием ЭЦВМ/Под ред. А. Ф. Смирнова. В 2-х частях.— М.: Стройиздат, 1976.  
Морозов Е. М., Никишков Г. П. Метод конечных элементов в механике разрушения.— М.: Наука, 1980.

---

<sup>1)</sup> Поскольку списки литературы, приведенные в конце глав, содержат в основном работы на английском языке, мы сочли целесообразным добавить при переводе список книг на русском языке.— *Прим. ред.*

Немчинов Ю. И. Расчет пространственных конструкций (метод конечных элементов).— Киев: Будивельник, 1980.

Постнов В. А., Хархурин И. Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций.— Л.: Судостроение, 1974.

Постнов В. А. Численные методы расчета судовых конструкций.— Л.: Судостроение, 1977.

Розин Л. А. Расчет гидротехнических сооружений на ЭЦВМ. Метод конечных элементов.— Л.: Энергня, 1971.

Розин Л. А. Основы метода конечных элементов в теории упругости.— Л.: Изд-во ЛПИ, 1972.

Розин Л. А. Стержневые системы как системы конечных элементов.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1976.

Розин Л. А. Метод конечных элементов в применении к упругим системам.— М.: Стройиздат, 1977.

Синицын А. Н. Метод конечных элементов в динамике сооружений.— М.: Стройиздат, 1978.

Слесарев И. С., Сироткин А. М. Вариационно-разностные схемы в теории переноса нейтронов.— М.: Атомиздат, 1978.

Шабров Н. Н. Метод конечных элементов в расчетах деталей тепловых двигателей.— Л.: Машностроение, 1983.



## Именной указатель

Агошков В. И. 304  
Андреев А. Б. 122  
Андреев В. Б. 36

Баттерфилд Р. 304  
Бахвалов Н. С. 19, 122  
Бенерджи П. 304  
Березин И. С. 19  
Бобрицкая С. Д. 304  
Бреббиа К. (Brebbia C. A.) 92, 304

Вайнберг М. М. 250  
Васидзу (Washizu K.) 250  
Воеводин В. В. 262  
Ворошко П. П. 304

Галлагер Р. 304  
Годунов С. К. 208  
Гудьер (Goodier J. N.) 91, 92

Даутов Р. З. 122  
Деклу Ж. 304  
Дьяконов Е. Т. 219

Егер (Jaeger J. C.) 39  
Ержанов Ж. С. 304

Жидков Н. П. 19

Забродни А. В. 208  
Зенкевич (Zienkiewicz O. C.) 5, 39,  
91, 153, 184, 219, 289, 302—304

Иванов М. Я. 208

Каримбаев Т. Д. 304  
Карслоу (Carslaw H. S.) 39  
Квитка А. Л. 304  
Келли (Kelly D. W.) 8, 91, 302, 303  
Коллатц (Collatz L.) 92, 251  
Коннор Дж. 304  
Корнеев В. Г. 304  
Крайко А. Н. 208  
Крылов В. И. 219  
Кузнецов Ю. А. 122  
Курант (Courant R.) 91, 219, 250

Лазарев Р. Д. 122

Марчук Г. И. 37, 304  
Митчелл (Mitchell A. R.) 39, 153, 289  
Михлин С. Г. 43, 91, 250, 251  
Морозов Е. М. 304  
Мысовских И. П. 204

Немчинов Ю. И. 305  
Никишков Г. П. 304  
Николаев Е. С. 30, 36  
Норри Д. 304

Обэн Ж. П. 304  
Оганесян Л. А. 304  
Оден (Oden J. T.) 152, 184, 220, 304

Постнов В. А. 305  
Прокопов Г. П. 208

Рознн Л. А. 305  
 Руховец Л. А. 305

Самарский А. А. 19, 30, 36  
 Сегерлинд Л. 304  
 Синницын А. Н. 305  
 Сироткин А. М. 305  
 Слесарев И. С. 305  
 Смирнов А. Ф. 304  
 Смолицкий Х. Л. 251  
 Стренг (Strang G.) 92, 251  
 Сьярле Ф. 304

Тимошенко С. П. 91, 92  
 Треффц (Trefftz E.) 91

Уилкинсон (Wilkinson J. H.) 289  
 Уманский С. Э. 304  
 Уокер (Walker S.) 92  
 Уэйт (Wait R.) 39, 153

Фикс (Fix G. J.) 92, 251  
 Фриз де Ж. 304

Харти М. Е. 122  
 Хархурин И. Я. 305  
 Хейгеман (Hageman L. A.) 39

Чанг И. 304

Шабров Н. Н. 305  
 Шайдуров В. В. 37

Янг (Young D. M.) 39

Ahmad S. 289

Babuška I. 303  
 Bathe K. J. 289  
 Becker E. B. 152, 184, 220  
 Bettess P. 91, 220, 302  
 Boor de C. 184

Carey G. F. 152, 184, 220  
 Clough R. W. 153  
 Conte S. D. 184  
 Cowper E. R. 219  
 Crandall S. H. 39, 92, 289

Davies A. J. 153, 184, 220

Finlayson B. A. 91, 251  
 Fox L. 289  
 Fried I. 39, 153, 184, 251, 289  
 Fröberg C. E. 219

Gago J. P. de S. R. 303  
 Glowinski R. 91, 302  
 Goodwin E. T. 289  
 Gordon W. J. 220  
 Griffiths D. F. 39, 289

Hall C. A. 220  
 Hammer P. C. 219  
 Hinton E. 153, 184, 220  
 Huebner K. H. 153

Irons B. M. 152, 219, 289

Marlowe O. P. 219  
 Martin H. C. 153  
 Mastin C. W. 219  
 Mote C. D. 302

Newmark N. M. 289

Owen D.R.J. 153, 184

Pasini A. 184

Parker I. B. 92

Peano A. 184

Pope S. B. 219

Potter D. 39

Rheinboldt W. C. 303

Riccioni R. 184

Richards T. H. 92, 251

Rodin E. Y. 91, 302

Sardella L. 184

Smith G. D. 39, 289

Smith R. E. 220

Sokolnikoff I. S. 39

Stackgold I. 250

Stroud A. H. 219

Thames F. C. 219

Thompson J. F. 219

Thornton E. A. 153

Tong P. 152

Topp L. J. 153

Turner M. J. 153

Whiteman J. 303

Wilson E. L. 289

## Предметный указатель

- Адаптивное уточнение 178, 292, 296  
Адаптивные процедуры 292—301  
Адаптивный алгоритм 299, 300  
Аналитическая функция 72, 73  
Ансамблирование 188, 217  
— в одномерном случае 106, 108—115, 162, 163, 249, 259  
— для прямоугольных элементов 134, 138—140  
— — треугольных элементов 123—126, 132, 134—138, 157—178  
Аппроксимация порядком 154  
Аппроксимация базисными функциями 9, 111, 154, 155, 290, 291, 293  
— — кусочно-линейными 96—100, 104—146  
— — кусочно-постоянными 94—100, 114, 115  
— — решений дифференциальных уравнений 51, 156, 233—251, 253—255  
— — нелинейных уравнений 87—90  
— — — нестационарных задач 256—288  
— — — системы уравнений 75—87  
— высшего порядка 154—184  
— — глобальная 96, 172  
— по *Галеркину* 163, 210, 216, 250, 258, 264. *См. также Галеркина метод*  
— производных 14—17, 28, 32, 38, 52, 156  
— функции методом взвешенных невязок 44—51, 97—107  
— — интерполяции 41  
— — конечных элементов 93—107  
— — поточечной коллокации 45—46  
— — рядом *Фурье* 43, 47—48
- Базисные функции 40, 76, 93, 147, 164, 165, 167, 174, 185, 186, 248, 253, 254, 256, 266—268, 290, 291  
— — билинейные 126—128, 132—135, 138—140, 174, 188, 193, 209, 299  
— — высшего порядка 154—184, 217  
— — глобальные 94—96, 105, 123, 128, 171, 190, 208, 291  
— — иерархические 154, 163—170, 176—178, 181, 192, 213, 216, 217, 295—299  
— — квадратичные 195, 196  
— — кусочно-линейные 95, 100, 104—146, 154, 215, 236, 257, 258  
— — кусочно-определенные 93, 142, 154, 215  
— — кусочно-постоянные 94, 100, 104—146, 154  
— — локальные 290, 291  
— — непрерывные (гладкие) 40, 91, 164, 165, 236, 239, 241, 246, 247, 253, 254, 260, 290  
— — от координат и времени 267, 282, 288  
— — разрывные 41, 147  
— — симметричные 56, 84, 254  
— — четные 56—57, 61  
— — элемента 95, 108, 123, 126, 131, 132, 158—164, 167, 168, 172, 173, 186, 188, 190, 191, 195, 196, 205
- Баланс токов 211
- Вариационные принципы естественные 222—241  
— — модифицированные 238—241  
— — общие 241—243, 245
- Вектор граничной нагрузки 144  
Векторная запись дифференциального уравнения 253, 257, 259—288  
— — системы алгебраических уравнений *см.* Линейных уравнений система
- Весовые функции 45—90, 97, 102, 103, 110, 120, 129, 143, 147, 157, 269, 272, 283  
— — граничные 59, 63, 64, 72, 74, 110, 120, 153  
— — симметричные 284
- Взвешенных невязок метод 44—91, 97, 101, 104—122, 129—150, 156, 157, 209, 218, 239, 243, 253, 254,

# Оглавление

От редактора перевода . . . . .	5
Предисловие . . . . .	7
<b>Глава 1. Непрерывные краевые задачи и необходимость численной дискретизации. Конечно-разностные методы</b> . . . . .	<b>9</b>
1.1. Введение . . . . .	9
1.2. Некоторые примеры непрерывных задач . . . . .	10
1.3. Конечные разности в одномерном случае . . . . .	13
1.4. Задача Неймана . . . . .	21
1.5. Нелинейные задачи . . . . .	24
1.6. Конечные разности в многомерном случае . . . . .	27
1.7. Задачи для областей неправильной формы . . . . .	34
1.8. Нелинейные задачи в многомерном случае . . . . .	36
1.9. Аппроксимация и сходимость . . . . .	36
1.10. Заключительные замечания . . . . .	38
Литература . . . . .	39
<b>Глава 2. Методы взвешенных невязок. Использование непрерывных базисных функций</b> . . . . .	<b>40</b>
2.1. Введение. Аппроксимация базисными функциями . . . . .	40
2.2. Аппроксимации с помощью взвешенных невязок . . . . .	44
2.3. Аппроксимация решений дифференциальных уравнений и использование базисных функций; виды взвешенных невязок. Выполнение краевых условий с помощью базисных функций . . . . .	51
2.4. Одновременная аппроксимация решений дифференциальных уравнений и краевых условий . . . . .	58
2.5. Естественные краевые условия . . . . .	64
2.6. Методы граничного решения . . . . .	71
2.7. Системы дифференциальных уравнений . . . . .	75
2.8. Нелинейные задачи . . . . .	87
2.9. Заключительные замечания . . . . .	90
Литература . . . . .	91
<b>Глава 3. Кусочно-определенные базисные функции и метод конечных элементов</b> . . . . .	<b>93</b>
3.1. Введение. Понятие конечного элемента . . . . .	93
3.2. Некоторые типичные локально определенные базисные функции с минимальными носителями . . . . .	94
3.3. Аппроксимация решений дифференциальных уравнений и тре-	

бования гладкости . . . . .	100
3.4. Слабая формулировка и метод Галеркина . . . . .	103
3.5. Некоторые одномерные задачи . . . . .	104
3.6. Стандартная дискретная система. Физический аналог процесса ансамблирования уравнения . . . . .	116
3.7. Обобщение конечно-элементных алгоритмов на двумерные и трехмерные задачи . . . . .	123
3.8. Метод конечных элементов для двумерных задач теплопроводности . . . . .	129
3.9. Анализ двумерных задач теории упругости в напряжениях с использованием треугольных элементов . . . . .	142
3.10. Является ли метод конечных разностей частным случаем метода конечных элементов? . . . . .	147
3.11. Заключительные замечания . . . . .	150
Литература . . . . .	152

#### Глава 4. Конечно-элементные аппроксимации высшего порядка . . . . . 154

4.1. Введение . . . . .	154
4.2. Степень многочленов, составляющих базисные функции, и скорость сходимости . . . . .	155
4.3. Кусочное тестирование . . . . .	157
4.4. Стандартные базисные функции высших степеней для одномерных элементов с $C^0$ -гладкостью . . . . .	158
4.5. Иерархические формы высших степеней для одномерных элементов с $C^0$ -гладкостью . . . . .	163
4.6. Двумерные базисные функции высших степеней для прямоугольных конечных элементов . . . . .	171
4.7. Двумерные базисные функции для треугольников . . . . .	178
4.8. Трехмерные базисные функции . . . . .	182
4.9. Заключительные замечания . . . . .	182
Литература . . . . .	184

#### Глава 5. Отображение и численное интегрирование . . . . . 185

5.1. Понятие отображения . . . . .	185
5.2. Численное интегрирование . . . . .	196
5.3. Дополнительные сведения об отображении . . . . .	205
5.4. Построение сетки и заключительные замечания . . . . .	217
Литература . . . . .	219

#### Глава 6. Вариационные методы . . . . . 221

6.1. Введение . . . . .	221
6.2. Вариационные принципы . . . . .	221
6.3. Конструирование естественных вариационных принципов . . . . .	226
6.4. Приближенное решение дифференциальных уравнений методом Рунге—Рунца . . . . .	233
6.5. Использование множителей Лагранжа . . . . .	236
6.6. Общие вариационные принципы . . . . .	241
6.7. Штрафные функции . . . . .	243
6.8. Метод наименьших квадратов . . . . .	245
6.9. Заключительные замечания . . . . .	250
Литература . . . . .	250

<b>Глава 7. Частичная дискретизация и нестационарные задачи</b>	<b>252</b>
7.1. Введение . . . . .	252
7.2. Частичная дискретизация для краевых задач . . . . .	252
7.3. Частичная дискретизация для нестационарных задач . . . . .	256
7.4. Процедуры аналитического решения . . . . .	260
7.5. Процедуры конечно-элементного решения во временной области	266
Литература . . . . .	289
<b>Глава 8. Обобщенные конечные элементы, оценки погрешности и заключительные замечания</b>	<b>290</b>
8.1. Обобщенный метод конечных элементов . . . . .	290
8.2. Погрешность дискретизации в численном решении . . . . .	291
8.3. Мера погрешности дискретизации . . . . .	293
8.4. Оценка погрешности дискретизации . . . . .	294
8.5. Заключение . . . . .	302
Литература . . . . .	302
Дополнительная литература . . . . .	304
Именной указатель . . . . .	306
Предметный указатель . . . . .	309

## **Уважаемый читатель!**

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., 2, издательство «Мир».