

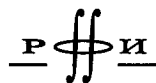
МЕХАНИКА КОНТАКТНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

*Под редакцией
И.И. Воровича и В.М. Александрова*



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ
2001

УДК 539.3
ББК 22.2
М 55



Издание осуществлено при поддержке
Российского фонда фундаментальных
исследований по проекту 01-01-14063

Авторы:

Айзикович С.М., Александров В.М., Аргатов И.И., Бабешко В.А., Бабин А.П., Бардзокас Д.Я., Белоконь А.В., Белянкова Т.И., Бурак В.Ю., Бурак И.И., Ватульян А.О., Ворович Е.И., Глаговский В.Б., Горшков А.Г., Горячева И.Г., Гришин С.А., Зеленцов В.Б., Зернин М.В., Златина И.Н., Златин А.Н., Кадомцев И.Г., Калинин В.В., Коваленко Е.В., Кравчук А.С., Маневич Л.И., Манжиров А.В., Морозов Е.М., Морозов Н.Ф., Назаров С.А., Наседкин А.В., Никишин В.С., Нуллер Б.М., Павлик Г.Н., Пановко М.Я., Петров Ю.В., Пожарский Д.А., Пряжина О.Д., Селезнев М.Г., Сенник Н.А., Симонов И.В., Смирнов В.И., Солдатенков И.А., Сумбалян М.А., Тарлаковский Д.В., Тукодова О.М., Филиппова Л.М., Чебаков М.И., Чекина О.Г., Шматкова А.А.

Механика контактных взаимодействий. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 672 с. — ISBN 5-9221-0154-4.

Книга содержит обзор основных достижений по методам решения и результатам решения задач механики контактных взаимодействий деформируемых тел, полученных российскими исследователями за последние 25 лет. По мере необходимости в книге также нашли отражение исследования зарубежных авторов. Книга состоит из семи глав. Первая глава посвящена изложению методов решения контактных задач. Во второй главе рассмотрены статические контактные задачи в неклассической постановке. Третья и четвертая главы соответственно посвящены рассмотрению стационарных и нестационарных динамических контактных задач. В пятой, шестой и седьмой главах соответственно нашли отражение контактные задачи в трибологии, контактные задачи для сложных сред и вопросы разрушения при контактном взаимодействии.

Для научных работников, инженеров, аспирантов и студентов, интересующихся проблемами механики сплошных сред.

Табл. 11. Ил. 126. Библиогр. 1996 назв.

Ответственные редакторы:

академик РАН Ворович И.И.
действительный член РАЕН Александров В.М.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	6
ГЛАВА 1. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ	9
§ 1. Асимптотические методы в механике контактных взаимодействий. <i>В. М. Александров</i>	10
§ 2. Двухсторонний асимптотический метод решения контактных задач. <i>С. М. Айзикович</i>	20
§ 3. Асимптотические методы в нестационарных динамических контактных задачах. <i>В. Б. Зеленцов</i>	30
§ 4. Об одном асимптотическом методе в контактных задачах для анизотропных тел. <i>Л. И. Маневич</i>	55
§ 5. Метод сращиваемых разложений для задач с малыми зонами контакта. <i>И. И. Аргатов, С. А. Назаров</i>	73
§ 6. Метод фиктивного поглощения в динамических контактных задачах. <i>В. А. Бабешко, О. Д. Пряжина</i>	83
§ 7. Метод вариационных неравенств в контактных задачах. <i>А. С. Кравчук</i>	93
§ 8. Метод парных уравнений в контактных задачах. <i>А. Н. Златин, И. Н. Златина</i>	116
§ 9. Развитие метода ортогональных функций. <i>Е. В. Коваленко</i>	125
ГЛАВА 2. СТАТИЧЕСКИЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ	137
§ 1. Контактные задачи для полупространства, сложные в плане области контакта. <i>А. А. Шматкова</i>	138
§ 2. Контактные задачи для тел конечных размеров. <i>М. И. Чебаков</i> ..	157
§ 3. Пространственные контактные задачи для упругих тел сложной геометрии. <i>Д. А. Пожарский</i>	181
§ 4. Статические контактные задачи для неоднородного по глубине основания. <i>С. М. Айзикович</i>	199
§ 5. Статические контактные задачи для многослойных упругих тел. <i>В. С. Никишин</i>	213
§ 6. Статические контактные задачи для тел с начальными напряжениями. <i>Т. И. Белянкова, Л. М. Филиппова</i>	233
§ 7. Контактные задачи со сцеплением и уточненным условием контакта. <i>И. А. Солдатенков</i>	242
§ 8. Взаимодействие фундаментных плит с линейно-упругим основанием. <i>Г. Н. Павлик</i>	254

ГЛАВА 3. СТАЦИОНАРНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ	277
§ 1. Высокочастотная асимптотика в динамических контактных задачах. <i>М. А. Сумбатян</i>	278
§ 2. Динамические контактные задачи для тел с начальными напряжениями. <i>В. В. Калинин</i>	289
§ 3. Динамические контактные задачи для анизотропных тел. <i>А. О. Ватulyян</i>	303
§ 4. Динамические контактные задачи для многослойных сред с дефектами. <i>М. Г. Селезнев</i>	311
§ 5. Изолированные резонансы при контактном взаимодействии массивных тел с полуограниченными средами. <i>О. Д. Прякина, Е. И. Ворович, О. М. Тукодова</i>	320
§ 6. Взаимодействие движущихся штампов с упругими и вязкоупругими телами. <i>А. В. Белоконь, А. В. Наседкин</i>	331
ГЛАВА 4. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ	349
§ 1. Нестационарные колебания упругого полупространства при заданных поверхностных нагрузках. <i>А. Г. Горшков, Д. В. Тарлаковский</i>	350
§ 2. Контактные задачи с фиксированными границами. <i>А. Г. Горшков, Д. В. Тарлаковский</i>	369
§ 3. Контактные задачи с подвижными границами. <i>А. Г. Горшков, Д. В. Тарлаковский</i>	378
§ 4. Взаимодействие упругих тел с упругим полупространством. <i>А. Г. Горшков, Д. В. Тарлаковский</i>	389
§ 5. Удар и проникание тел в жидкость. <i>А. Г. Горшков, Д. В. Тарлаковский</i>	395
§ 6. Удар о грунт. <i>А. Г. Горшков, Д. В. Тарлаковский</i>	409
ГЛАВА 5. КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ В ТРИБОЛОГИИ	417
§ 1. Механика дискретного контакта. <i>И. Г. Горячева, О. Г. Чекина</i> ..	418
§ 2. Контактные задачи с учетом износа. <i>И. Г. Горячева, И. А. Солдатенков</i>	438
§ 3. Контактные задачи для тел с покрытиями. <i>Е. В. Коваленко</i>	459
§ 4. Контактные задачи с учетом тепловыделения от трения. <i>Е. В. Коваленко</i>	476
§ 5. Контактные задачи с односторонними связями и учетом сил трения. <i>А. С. Кравчук</i>	491
§ 6. Плоские и пространственные задачи контактно-гидродинамической теории смазки. <i>М. Я. Пановко</i> ..	499

ГЛАВА 6. КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СЛОЖНЫХ СРЕД	523
§ 1. Упругопластический динамический контакт тел. <i>И. Г. Кадомцев</i> ..	524
§ 2. Контактные задачи нелинейной теории ползучести (степенная нелинейность). <i>С. А. Гришин</i>	539
§ 3. Контактные задачи для неоднородных стареющих вязкоупругих тел. <i>А. В. Манжиров</i>	549
§ 4. Контактные задачи теории консолидации. <i>В. Б. Глазовский, Б. М. Нуллер</i>	566
§ 5. Контактные задачи электроупругости. <i>Д. Я. Бардзокас, Н. А. Сенюк</i>	583
§ 6. Контактные задачи механики наращиваемых тел. <i>А. В. Манжиров</i>	607
ГЛАВА 7. РАЗРУШЕНИЕ ПРИ КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ	623
§ 1. Механика разрушения тел при контактном взаимодействии. <i>М. В. Зернин, Е. М. Морозов</i>	624
§ 2. Об эрозионном разрушении твердых тел. <i>Н. Ф. Морозов, В. И. Смирнов, Ю. В. Петров</i>	640
§ 3. Моделирование многократного разрушения при изнашивании. <i>О. Г. Чекина</i>	651
§ 4. Контактные задачи расклинивания упругих тел. <i>И. В. Симонов</i> ..	654

ПРЕДИСЛОВИЕ

Хорошо известно, что передача усилий и давлений от одних деталей и агрегатов механизмов и машин к другим происходит вследствие контактных взаимодействий. В последние годы эта проблема приобрела особое значение для машиностроения и строительства.

Именно контактными взаимодействиями определяются процессы износа в современном машиностроении, а ввиду повышения относительных скоростей величина контактных давлений становится определяющим фактором, влияющим на долговечность конструкций. Важное значение приобретает фактор разрушения материалов в зоне контакта, определяющийся также условиями контакта. Наконец, контактные явления приобретают особое значение при расчете прочности и разрушения фундаментных сооружений.

Все эти обстоятельства придают большую важность разработке методов расчета контактных взаимодействий и исследованию конкретных контактных проблем.

В математическом плане контактные задачи относятся к классу задач механики сплошных сред со смешанными граничными условиями и сводятся, как правило в общем случае, к необходимости решения интегральных уравнений. Часто в конечном счете удается получить эффективные числовые решения важных контактных задач, чему и посвящена предлагаемая книга.

В 1976 г. была опубликована коллективная обзорная книга «Развитие теории контактных задач в СССР» (М.: Наука, 1976. 493 с.). С момента ее выхода прошел большой срок и механика контактных взаимодействий (Contact Mechanics) получила дальнейшее существенное развитие. Вместе с тем значительно расширилась и область практических приложений теории, особенно в новейших областях современной техники.

Данная книга призвана подытожить полученные за прошедшие годы результаты, разбросанные в настоящее время по многочисленным публикациям различных авторов. Здесь в основном приведены результаты российских авторов. Однако в некоторых разделах книги представлены результаты исследователей из ближнего и дальнего зарубежья, что продиктовано необходимостью более полного освещения рассматриваемых проблем.

Над созданием книги работал коллектив из 46 известных специалистов в данной области механики. Весь материал в соответствии с содержанием

статей логически распределен по семи главам.

Основную тяжесть работы над книгой взяли на себя сотрудники Института проблем механики Российской академии наук и Научно-исследовательского института механики и прикладной математики Ростовского государственного университета.

Мы надеемся, что предлагаемая вниманию читателей книга «Механика контактных взаимодействий» послужит полезным пособием для научных работников, инженеров, аспирантов и студентов. Мы надеемся также, что издание ее положит начало полезной традиции периодического выпуска обобщающих трудов, подводящих итоги развития науки в той или иной области за довольно длительный период.

Книга написана при финансовой поддержке Федеральной целевой программы «Интеграция» и Российского фонда фундаментальных исследований.

*И. И. Ворович
В. М. Александров*

Глава 1

Методы решения контактных задач

§ 1. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В МЕХАНИКЕ КОНТАКТНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

В. М. Александров

Успехи, достигнутые за последние 25 лет при решении сложных задач механики контактных взаимодействий, во многом связаны с широким применением для их изучения регулярных и сингулярных асимптотических методов.

Преимущества асимптотических методов перед другими методами состоят в их универсальности — применимости как к плоским, так и к пространственным задачам (в частности, осесимметричным), как к линейным, так и нелинейным; а также в возможности аналитического представления решения и простоте его последующего качественного и количественного исследования.

Поскольку задачи механики контактных взаимодействий, как правило, сводятся к решению интегральных уравнений, то последние как раз и служат здесь объектом изучения с точки зрения использования их для исследования асимптотических методов. Далее рассмотрим несколько типичных интегральных уравнений (ИУ) [1–10, 13].

1. Плоские задачи и ряд пространственных задач. Рассмотрим ИУ

$$\int_{-1}^1 \varphi(\xi) k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi = \pi f(x), \quad (1)$$

$$|x| \leq 1, \quad \lambda \in (0, \infty), \quad f(x) \in H_1^\alpha(-1, 1), \quad \alpha > 1/2.$$

Здесь $H_m^\alpha(-\beta, \beta)$ — пространство функций, m -е производные которых удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α при $|x| \leq \beta$, а ядро имеет вид

$$k(t) = \int_0^\infty \frac{L(u)}{u} \cos ut \, du. \quad (2)$$

Функция $L(u)$ непрерывна и положительна при $u \in (0, \infty)$, причем для нее справедливы асимптотические равенства

$$L(u) = Au + O(u^3) \quad (u \rightarrow 0, \quad A = \text{const} > 0), \quad (3)$$

$$L(u) = 1 + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{B_i}{u^i} + O\left(\frac{1}{u^N}\right) \quad (u \rightarrow \infty, \quad B_i = \text{const}).$$

Кроме того, допустим, что $L(u)u^{-1}$ и $u[L(u)]^{-1}$ как функции комплексного переменного $w = u + iv$ соответственно регулярны в полосе $|v| \leq \gamma_1$ и в полосе $|v| \leq \gamma_2$. Отсюда, в частности, следует, что ядро $k(t)$ убывает на бесконечности не слабее, чем $\exp(-\gamma_1|t|)$.

Введя в рассмотрение гильбертово пространство $H(-1, 1)$ с нормой

$$\|\varphi\|_H^2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \varphi(x) \varphi(\xi) k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) dx d\xi = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L(\alpha\lambda)}{\alpha} |\Phi(\alpha)|^2 d\alpha, \quad (4)$$

где $\Phi(\alpha)$ — интегральное преобразование Фурье функции $\varphi^*(x)$ (где $\varphi^*(x) = \varphi(x)$ при $|x| \leq 1$ и $\varphi^*(x) = 0$ при $|x| > 1$), на основании теоремы

Рисса о форме линейного и ограниченного функционала можно показать, что решение ИУ (1), (2) в $H(-1, 1)$ существует и единственно при любом $\lambda \in (0, \infty)$, причем оно имеет вид

$$\varphi(x) = \omega(x)(1-x^2)^{-1/2}, \quad \omega(x) \in C(-1, 1), \quad (5)$$

и справедливо соотношение корректности

$$\|\omega\|_C \leq m \|f\|_{H_1^\alpha}. \quad (6)$$

На основании (3) для ядра (2) можно установить представление

$$k(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^{2i} + |t| \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^{2i} + \ln |t| \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^{2i}, \quad (7)$$

где a_i, b_i и c_i — постоянные, причем $c_0 = -1$, и ряды равномерно сходятся при $|t| < \rho$, $\rho \leq \infty$ (величина ρ определяется для каждой конкретной задачи). На основании структуры (7) ядра $k(t)$ можно заключить, что при достаточно больших значениях λ решение ИУ (1) имеет вид

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{N-i} \sum_{j=0}^i \varphi_{ij}(x) \lambda^{-i} (\ln \lambda)^j + O[\lambda^{-N} (\ln \lambda)^N]. \quad (8)$$

Подставляя (7) и (8) в (1), получаем для последовательного определения функций $\varphi_{ij}(x)$ систему ИУ типа

$$-\int_{-1}^1 \varphi(\xi) \ln \left| \frac{\xi-x}{\lambda} \right| d\xi = \pi g(x) \quad (|x| \leq 1). \quad (9)$$

Такие уравнения для всякой функции $g(x) \in H_1^\alpha(-1, 1)$ решаются в замкнутом виде, именно

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}} \left[P - \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi^2} g'(\xi)}{\xi-x} d\xi \right], \quad P = \frac{1}{\ln 2\lambda} \int_{-1}^1 \frac{g(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi, \quad (10)$$

поэтому регулярное асимптотическое разложение (8) реально может быть построено с любой желаемой точностью. Для практических целей обычно можно ограничиться удержанием членов порядка λ^{-4} , при этом решение ИУ (1) в форме (8) покрывает диапазон $\lambda \geq \sup(2, 2/\rho)$.

Рассмотрим систему двух ИУ

$$\int_{-1}^{\infty} \varphi_1(\xi) k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi = \pi f_1(x) + \int_{-\infty}^{-1} \varphi_2(\xi) k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi \quad (-1 \leq x < \infty), \quad (11)$$

$$\int_{-\infty}^1 \varphi_2(\xi) k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi = \pi f_2(x) + \int_1^{\infty} \varphi_1(\xi) k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi \quad (-\infty < x \leq 1).$$

Функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ таковы, что

$$\begin{aligned} f_1(x) &= O(e^{-\alpha_1 x}) \quad (x \rightarrow \infty, \alpha_1 > 0), \\ f_2(x) &= O(e^{\alpha_2 x}) \quad (x \rightarrow -\infty, \alpha_2 > 0), \\ f_1(x) + f_2(x) &= f(x) \quad (|x| \leq 1). \end{aligned} \quad (12)$$

При выполнении последнего из условий (12) решение ИУ (1) найдем как сумму решений ИУ (11), т.е.

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) \quad (|x| \leq 1). \quad (13)$$

Отметим, что в силу первых двух условий (12), как можно показать, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= O(e^{-\beta_1 x}) \quad (x \rightarrow \infty, \beta_1 > 0), \\ \varphi_2(x) &= O(e^{\beta_2 x}) \quad (x \rightarrow -\infty, \beta_2 > 0). \end{aligned} \quad (14)$$

Если функция $f(x)$ в ИУ (1) четная или нечетная, то

$$f_1(x) = \pm f_2(-x), \quad \varphi_1(x) = \pm \varphi_2(-x). \quad (15)$$

В обоих этих случаях система уравнений (11) очевидными заменами переменных сводится к одному ИУ

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \psi(\tau) k(\tau-t) d\tau &= \pi h(t) \pm \int_{2/\lambda}^\infty \psi(\tau) k\left(\frac{2}{\lambda} - t - \tau\right) d\tau \quad (0 \leq t < \infty), \\ \psi(t) &= \varphi_1(\lambda t - 1), \quad h(t) = \lambda^{-1} f_1(\lambda t - 1). \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь и ниже плюс берется для четного случая, минус — для нечетного.

Из разложения (7) видно, что ядро $k(t)$ имеет логарифмическую особенность в нуле. Кроме того, оно экспоненциально исчезает на бесконечности. С учетом этих факторов, а также первого соотношения (14) можно показать, что справедлива равномерная по t асимптотическая оценка

$$\int_{2/\lambda}^\infty \psi(\tau) k\left(\frac{2}{\lambda} - t - \tau\right) d\tau = O(e^{-2\beta_1/\lambda}). \quad (17)$$

Согласно (17), ИУ (16) можно решать при малых λ методом последовательных приближений, отбрасывая в нулевом приближении интеграл в его правой части. При этом на каждой итерации нужно искать решение ИУ типа

$$\int_0^\infty \psi(\tau) k(\tau-t) d\tau = \pi l(t) \quad (0 \leq t < \infty). \quad (18)$$

Такие ИУ в замкнутом виде решаются методом Винера–Хопфа [14], поэтому сингулярное асимптотическое разложение решения ИУ (1) при малых λ в форме

$$\varphi(x) = \psi\left(\frac{1+x}{\lambda}\right) \pm \psi\left(\frac{1-x}{\lambda}\right) \quad (19)$$

может быть реально построено с любой желаемой точностью. Для практических целей обычно можно ограничиться нулевым приближением, т.е. в (19) нужно взять в качестве $\psi(t)$ решение ИУ (18) при $l(t) \equiv h(t)$. Такое приближенное решение покрывает диапазон $\lambda \leq \sup(2, 2/\rho)$.

Изложим несколько иную схему асимптотического метода при малых λ , когда невозможно или затруднено представление функции $f(x)$ в форме (12).

Рассмотрим систему трех ИУ

$$\begin{aligned} \int_{-1}^\infty \varphi_+(\xi) k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi &= \pi f(x) + \int_{-\infty}^{-1} [\varphi_-(\xi) - \varphi_0(\xi)] k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi \quad (-1 \leq x < \infty), \\ \int_{-\infty}^1 \varphi_-(\xi) k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi &= \pi f(x) + \int_1^\infty [\varphi_+(\xi) - \varphi_0(\xi)] k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi \quad (-\infty < x \leq 1), \\ \int_{-\infty}^\infty \varphi_0(\xi) k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi &= \pi f(x) \quad (-\infty < x < \infty). \end{aligned} \quad (20)$$

Складывая первые два уравнения и вычитая последнее на общем участке $|x| \leq 1$, убедимся, что решением ИУ (1) является линейная суперпозиция решений ИУ (20), т.е.

$$\varphi(x) = \varphi_+(x) + \varphi_-(x) - \varphi_0(x) \quad (|x| \leq 1). \quad (21)$$

Можно показать, что справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \varphi_+(\xi) - \varphi_0(\xi) &= O(e^{-\gamma_+ x}) \quad (x \rightarrow \infty, \gamma_+ > 0), \\ \varphi_-(\xi) - \varphi_0(\xi) &= O(e^{\gamma_- x}) \quad (x \rightarrow -\infty, \gamma_- > 0). \end{aligned} \quad (22)$$

Если функция $f(x)$ в ИУ (1) четная или нечетная, то

$$\varphi_+(x) = \pm \varphi_-(x), \quad \varphi_0(x) = \pm \varphi_0(-x). \quad (23)$$

В обоих случаях система первых двух уравнений (20) очевидными заменами переменных сводится к одному ИУ

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \Psi(\tau) k(\tau-t) d\tau &= \pi h(t) \pm \\ &\pm \int_{2/\lambda}^\infty [\Psi(\tau) - \Phi(\tau)] k\left(\frac{2}{\lambda} - t - \tau\right) d\tau \quad (0 \leq t < \infty), \\ \Psi(\tau) &= \varphi_+(\lambda\tau - 1), \quad h(t) = \lambda^{-1} f(\lambda t - 1), \quad \Phi(\tau) = \varphi_0(\lambda\tau - 1). \end{aligned} \quad (24)$$

Аналогично (17) с учетом первого соотношения (22) можно показать, что справедлива равномерная по t асимптотическая оценка

$$\int_{2/\lambda}^\infty [\Psi(\tau) - \Phi(\tau)] k\left(\frac{2}{\lambda} - t - \tau\right) d\tau = O(e^{-2\gamma_+/\lambda}). \quad (25)$$

Согласно (25), ИУ (24) можно решать при малых λ , как и уравнение (16), методом последовательных приближений, отбрасывая в нулевом приближении интеграл в его правой части. При этом на каждой итерации вновь будет решаться ИУ Винера–Хопфа (18). Решение третьего ИУ (20) находится применением теоремы о свертке для интегрального преобразования Фурье. Таким образом сингулярное асимптотическое разложение решения ИУ (1) при малых λ в форме (21) может быть реально построено с любой желаемой точностью.

Для практических целей обычно можно ограничиться нулевым приближением (главным членом асимптотики)

$$\varphi(x) \approx \varphi_+^{(0)}(x) + \varphi_-^{(0)}(x) - \varphi_0(x) \quad (|x| \leq 1). \quad (26)$$

Такое приближенное решение, как и выше, покрывает диапазон $\lambda \leq \sup(2, 2/\rho)$.

Важно еще отметить, что главный член асимптотики можно также представить в форме

$$\varphi(x) \approx \varphi_+^{(0)}(x) \varphi_-^{(0)}(x) \varphi_0^{-1}(x), \quad (27)$$

которая асимптотически эквивалентна форме (26).

2. Осесимметричные задачи и первая гармоника. Рассмотрим ИУ

$$\int_0^1 \varphi(\rho) k_n\left(\frac{\rho}{\lambda}, \frac{r}{\lambda}\right) \rho d\rho = \lambda f(r); \quad (28)$$

$$0 \leq r \leq 1; \quad \lambda \in (0, \infty); \quad n = 0, 1; \quad f(r) \in H_1^{1-0}(S);$$

ядро которого имеет вид

$$k_n(\mu, \nu) = \int_0^\infty L(u) J_n(\mu u) J_n(\nu u) du. \quad (29)$$

Здесь S — круг единичного радиуса, $J_n(x)$ — функция Бесселя, функция $L(u)$ обладает описанными выше свойствами.

Введя в рассмотрение гильбертово пространство $H(S)$ с нормой

$$\|\varphi\|_H^2 = \frac{1}{\lambda} \int_0^1 \int_0^1 \varphi(r) \varphi(\rho) k_n\left(\frac{\rho}{\lambda}, \frac{r}{\lambda}\right) r \rho dr d\rho = \int_0^\infty L(\alpha \lambda) \Phi^2(\alpha) d\alpha, \quad (30)$$

где $\Phi(\alpha)$ — интегральное преобразование Ганкеля функции $\varphi^*(r)$ (где $\varphi^*(r) = \varphi(r)$ в S и $\varphi^*(r) = 0$ вне S), на основании теоремы Рисса можно показать, что решение ИУ (28), (29) в $H(S)$ существует и единственно при любом $\lambda \in (0, \infty)$, причем оно имеет форму

$$\varphi(r) = \omega(r)(1-r)^{-1/2}, \quad \omega(r) \in C(S), \quad (31)$$

и справедливо соотношение корректности типа (6).

ИУ (28), (29) при $n = 0$ может быть приведено к эквивалентному ИУ вида

$$\int_{-1}^1 \psi(\xi) m\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi = \pi \lambda g(x) \quad (|x| \leq 1) \quad (32)$$

с ядром

$$m(t) = \int_0^\infty L(u) \cos ut du, \quad (33)$$

причем четные функции $\psi(x)$ и $g(x)$ связаны с $\varphi(r)$ и $f(r)$ соотношениями

$$\varphi(r) = -\frac{2}{\pi} \frac{d}{dr} r \int_r^1 \frac{\psi(\xi) d\xi}{\xi \sqrt{\xi^2 - r^2}}, \quad g(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\rho f(\rho) d\rho}{\sqrt{x^2 - \rho^2}}. \quad (34)$$

При $n = 1$ ИУ (28), (29) также может быть приведено к эквивалентному ИУ (32), (33), причем теперь нечетные функции $\psi(x)$ и $g(x)$ связаны с $\varphi(r)$ и $f(r)$ соотношениями

$$\varphi(r) = -\frac{2}{\pi} \frac{d}{dr} \int_r^1 \frac{\psi(\xi) d\xi}{\sqrt{\xi^2 - r^2}}, \quad g(x) = \frac{d}{dx} x \int_0^x \frac{f(\rho) d\rho}{\sqrt{x^2 - \rho^2}}. \quad (35)$$

Построение асимптотических решений ИУ (32), (33) при больших и малых значениях λ , покрывающих в совокупности весь диапазон изменения λ , может быть произведено так же, как это описано для ИУ (1), (2). В частности, заметим, что при учете (3) для ядра (33) может быть получено представление

$$m(t) = \pi \delta(t) + \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{a}_i t^{2i} + |t| \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{b}_i t^{2i} + \ln |t| \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{c}_i t^{2i}, \quad (36)$$

где ряды равномерно сходятся при $|t| < \rho$, $\rho \leq \infty$, $\delta(t)$ — дельта-функция. Из (36) видно, что в случае больших λ решение ИУ (32) по-прежнему нужно искать в форме (8); вместе с тем теперь отпадает необходимость в решении ИУ типа (9).

В случае малых λ удобно возмутить ядро ИУ (32) таким образом, что

$$m_\varepsilon(t) = \int_0^\infty \frac{L_\varepsilon(u)}{u} \cos ut du, \quad L_\varepsilon(u) = L(u) \sqrt{u^2 + \varepsilon^2}, \quad (37)$$

и искать затем главный член асимптотики решения ИУ (32) с ядром (37) в мультипликативной форме (сравни с (27))

$$\varphi(x) \approx \mu \varphi_+^{(0)}(x) \varphi_-^{(0)}(x) \varphi_0^{-1}(x), \quad (38)$$

где корректирующий множитель μ отыскивается [12] из условия удовлетворения ИУ (32) с ядром (37) функцией (38) при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\lambda \rightarrow 0$.

Заметим еще, что согласно теореме 41.2 из [13] решение ИУ (28) при любом $n \geq 2$ может быть построено, если известно решение этого же ИУ при $n = 0$.

3. Пространственные задачи. Рассмотрим ИУ

$$\iint_{\Omega} \varphi(\xi, \eta) k\left(\frac{R}{\lambda}\right) d\xi d\eta = 2\pi\lambda f(x, y), \quad (39)$$

$$(x, y) \in \Omega, \quad R = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}, \quad \frac{1}{2} \max_{\Omega} R = 1, \quad (x, y) \in H_1^{1-0}(\Omega),$$

ядро которого имеет вид

$$k(t) = \int_0^{\infty} L(u) J_0(ut) du. \quad (40)$$

Функция $L(u)$ обладает описанными выше свойствами, область Ω односвязна, а контур L области Ω имеет непрерывную кривизну.

Введя в рассмотрение гильбертово пространство $H(\Omega)$ с нормой

$$\|\varphi\|_H^2 = \frac{1}{\lambda} \iint_{\Omega} \iint_{\Omega} \varphi(x, y) \varphi(\xi, \eta) k\left(\frac{R}{\lambda}\right) dx dy d\xi d\eta =$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L(\gamma\lambda)}{\gamma} |\Phi(\alpha, \beta)|^2 d\alpha d\beta \quad (\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}), \quad (41)$$

где $\Phi(\alpha, \beta)$ — двумерное интегральное преобразование Фурье функции $\varphi^*(x, y)$ ($\varphi^*(x, y) = \varphi(x, y)$ в Ω и $\varphi^*(x, y) = 0$ вне Ω), на основании теоремы Рисса можно показать, что решение ИУ (39), (40) в $H(\Omega)$ существует и единственно при любом $\lambda \in (0, \infty)$, причем оно имеет форму

$$\varphi(x, y) = \omega(x, y) [N(x, y)]^{-1/2}, \quad \omega(x, y) \in C(\Omega), \quad (42)$$

где $N(x, y) = 0$ — нормированное уравнение [15] контура L , $N(x, y) > 0$ в Ω . Кроме того, справедливо соотношение корректности типа (6).

На основании (3) для ядра (40) можно установить представление

$$k(t) = t^{-1} + \sum_{i=0}^{\infty} a_i^* t^{2i} + t \sum_{i=0}^{\infty} b_i^* t^{2i} + \ln t \sum_{i=0}^{\infty} c_i^* t^{2i}, \quad (43)$$

где ряды равномерно сходятся при $t < \rho$, $\rho \leq \infty$. Подставляя (43) в (39), приходим к выводу, что при достаточно больших значениях λ решение $\varphi(x, y)$ ИУ (39) будет иметь вид, отличающийся от (8) заменой $\varphi_{i,j}(x)$ на $\varphi_{i,j}(x, y)$, если для данной области Ω может быть найдено решение (хотя бы приближенное) более простого, нежели (39), ИУ

$$\iint_{\Omega} \frac{\varphi(\xi, \eta)}{R} d\xi d\eta = 2\pi g(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad g(x, y) \in H_1^{1-0}(\Omega). \quad (44)$$

Для практических целей в выражении для функции $\varphi(x, y)$ обычно можно ограничиться членами порядка λ^{-4} , при этом покрывается диапазон $\lambda \geq \sup(2, 2/\rho)$.

Случай малых λ для уравнения (39) непосредственно не может быть рассмотрен, ибо должен быть мал не сам параметр λ , а некоторый параметр μ ($\mu \geq \lambda$), связанный с геометрией области Ω .

Пусть область Ω — выпуклая (случай невыпуклой области Ω более сложен и нужно воспользоваться результатами работы [2]) и a — минимальный радиус кривизны ее контура L . Тогда введем μ соотношением $\mu = \lambda/a$. Заметим, что $\mu = \lambda$ только в случае круговой области Ω .

Введем в рассмотрение области Ω_0 и Ω_ε , являющиеся геометрическим местом точек, лежащих в области Ω и отстоящих от ее контура по нормали, соответственно, не менее, чем на $a(1 - 0)$ и $a(1 - \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. При малых значениях μ может быть построено вырожденное решение ИУ (39) в форме

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi\lambda^3} \left\{ \iint_{\Omega} f(\xi, \eta) l\left(\frac{R}{\lambda}\right) d\xi d\eta + O\left[\exp\left(-\frac{1-\varepsilon}{\mu} \gamma_2\right)\right] \right\}, \quad (45)$$

$$(x, y) \in \Omega_\varepsilon, \quad l(t) = \int_0^{\infty} \frac{u^2}{L(u)} J_0(ut) du.$$

Последний интеграл понимается в обобщенном смысле.

Для построения решения типа погранслоя в области $\Omega - \Omega_0$ перепишем ИУ (39) в виде

$$\iint_{\Omega - \Omega_0} \varphi(\xi, \eta) k\left(\frac{R}{\lambda}\right) d\xi d\eta + \iint_{\Omega_0} \varphi(\xi, \eta) k\left(\frac{R}{\lambda}\right) d\xi d\eta = 2\pi\lambda f(x, y) \quad (46)$$

и рассмотрим точки $(x, y) \in \Omega - \Omega_\varepsilon$. Тогда для последнего интеграла в (46) получим оценку

$$\iint_{\Omega_0} \varphi(\xi, \eta) k\left(\frac{R}{\lambda}\right) d\xi d\eta = O\left[\frac{1}{\mu} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\mu} \gamma_1\right)\right]. \quad (47)$$

Проведем из точки $A(x, y) \in \Omega - \Omega_0$ нормаль к контуру L . Пусть длина этой нормали n , а точка пересечения ее с контуром $B(x_1, y_1)$. Выберем на контуре L какую-либо точку $O(x_0, y_0)$ в качестве начала отсчета и измерим расстояние s между точками O и B по контуру L . Величины n и s примем за новые координаты точки A в криволинейной системе координат (n, s) . При условии $-1/2 < s \leq l/2$ (l — периметр контура L) каждой паре чисел (x, y) в области $\Omega - \Omega_0$ будет соответствовать только одна пара чисел (n, s) , и наоборот.

В системе координат (n, s) ИУ (46) при учете (47) запишем в виде

$$\int_0^{1/\mu} d\beta \int_{-k/\mu}^{k/\mu} \varphi(\beta, \gamma) k(r) d\gamma + O\left[\frac{1}{\mu^3} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\mu} \gamma_1\right)\right] = \frac{2\pi}{\lambda} f(b, c), \quad (48)$$

$$0 \leq b \leq \frac{1}{\mu}, \quad |c| \leq \frac{k}{\mu}, \quad b = \frac{n}{\lambda}, \quad c = \frac{s}{\lambda}, \quad k = \frac{l}{2a},$$

$$r = \sqrt{(\beta - b)^2 + (\gamma - c)^2}, \quad \varphi(\beta, \gamma) \equiv \varphi(\xi, \eta), \quad f(b, c) \equiv f(x, y).$$

Устремим теперь μ к нулю в ИУ (48) и получим следующее ИУ для определения решения типа пограничного слоя:

$$\int_0^{\infty} d\beta \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\beta, \gamma) k(r) d\gamma = \frac{2\pi}{\lambda} f(b, c) \quad (0 \leq b < \infty, |c| < \infty). \quad (49)$$

ИУ (49) решается в замкнутом виде путем применения интегрального преобразования Фурье по c с последующим использованием метода Винера-Хопфа.

Введем относительную толщину пограничного слоя $H = b_0/\lambda$, где b_0 можно, например, определить из условия

$$\max_c \frac{|\varphi(b_0, c) - \varphi^*(b_0, c)|}{|\varphi^*(b_0, c)|} = 0,025, \quad (50)$$

причем $\varphi^*(b, c)$ — главная часть функции $\varphi(b, c)$ при $b \rightarrow \infty$, совпадающая с $\varphi(x, y)$ вида (45). Очевидно, пограничный слой должен полностью укладываться в области $\Omega - \Omega_0$, отсюда для диапазона изменения μ получим следующее ограничение: $\mu < H^{-1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если вместо второй формулы (3) имеет место соотношение

$$L(u) = 1 + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{C_i}{u^{2i}} + O\left(\frac{1}{u^{2N}}\right) \quad (u \rightarrow \infty, C_i = \text{const}), \quad (51)$$

то в формулах (7), (36), (43) соответственно равны нулю b_i, \bar{b}_i, b_i^* . При этом в случае достаточно больших значений λ решение уравнений (1); (28) и (39) нужно вместо (8) искать в форме

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=0}^i \varphi_{ij} \lambda^{-2i} (\ln \lambda)^j + O(\lambda^{-2N} (\ln \lambda)^N). \quad (52)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если вместо второй формулы (3) имеет место соотношение

$$L(u) = 1 + \sum_{i=1}^{N-1} D_i e^{-\kappa i u} + O(e^{-\kappa N u}) \quad (u \rightarrow \infty, D_i = \text{const}), \quad (53)$$

то в формулах (7), (36), (43) соответственно равны нулю b_i и c_i, \bar{b}_i и \bar{c}_i, b_i^* и c_i^* , кроме того $\rho = \kappa$. При этом в случае достаточно больших значений λ решение уравнений (1), (28) и (39) нужно вместо (8) искать в форме

$$\varphi = \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_i \lambda^{-2i} + O(\lambda^{-2N}). \quad (54)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Асимптотические методы нашли также широкое использование при изучении задач механики разрушения и теории концентрации напряжений вблизи трещин, тонких включений и подкреплений (см., например, [11]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В. М. Асимптотические методы в контактных задачах теории упругости // ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 4. С. 672–683.
2. Александров В. М. Асимптотическое решение контактной задачи для тонкого упругого слоя // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 1. С. 61–73.
3. Александров В. М. Асимптотические методы в смешанных задачах теории упругости // Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976. С. 96–100.
4. Александров В. М. Асимптотические методы в задачах вязкоупругости со смешанными граничными условиями // Математические методы механики деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1986. С. 4–9.
5. Александров В. М. Асимптотические методы в задачах механики сплошной среды со смешанными граничными условиями // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 2. С. 102–108.
6. Alexandrov V. M. Asymptotic Methods in Contact Mechanics // Math. Comput. Modelling. 1998. Vol. 28. No. 4–8. P. 29–36.
7. Александров В. М., Коваленко Е. В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 334 с.
8. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
9. Александров В. М., Пожарский Д. А. Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. М.: Факториал, 1998. 288 с.
10. Александров В. М., Ромалис Б. Л. Контактные задачи в машиностроении. М.: Машиностроение, 1986. 174 с.
11. Александров В. М., Сметанин Б. И., Соболев Б. В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Наука, 1993. 223 с.
12. Александров В. М., Чебаков М. И. Смешанные задачи механики сплошных сред, связанные с интегральными преобразованиями Ханкеля и Мелера-Фока // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 3. С. 494–504.
13. Ворovich И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
14. Нобл Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: ИЛ, 1962. 279 с.
15. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев: Наук. думка, 1982. 551 с.

§ 2. ДВУХСТОРОННИЙ АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ

С. М. Айзикович

Хорошо известны приближенные решения контактных задач, являющиеся асимптотически точными [17, 20, 26]. В большинстве случаев это решения асимптотически точные либо при большом, либо при малом значении характерного геометрического параметра задачи. Метод построения приближенного решения контактных задач, которому посвящен данный параграф, позволяет получить решение одновременно асимптотически точное как при больших, так и при малых значениях характерного геометрического параметра задачи. При решении контактных задач теории упругости для неоднородных тел [2, 3, 6, 8] возникает класс парных уравнений, являющийся обобщением класса уравнений, изученного ранее в работе В. М. Александрова [15]. Для этих уравнений решение, построенное на основе метода, изложенного в вышеупомянутой работе [15], путем сведения задачи к конечным алгебраическим системам, является двухсторонне асимптотически точным по характерному геометрическому параметру задачи. В качестве примера рассматриваются интегральные уравнения, порождаемые преобразованиями Фурье и Ганкеля.

1. Пусть дано интегральное преобразование

$$g(x) = \int_a^b G(\gamma) B(\gamma, x) d\gamma, \quad G(\gamma) = \int_a^\beta g(\xi) M(\gamma, \xi) d\xi, \quad (1)$$

или разложение

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} G_k B(\gamma_k, x), \quad G_k = \int_a^\beta g(\xi) M(\gamma_k, \xi) d\xi, \quad (2)$$

и функция $B(\gamma, x)$ — решение линейного дифференциального уравнения второго порядка по x

$$(L - \gamma^2) B(\gamma, x) = 0, \\ L_\gamma B = r(x) [s(x) B']' + t(x) B \quad (a \leq x \leq b). \quad (3)$$

Здесь $s(x) > 0$ при $x \in (a, b)$, $r(x)$ — знакоопределенная при $x \in (a, b)$ функция.

Пусть также при $x \rightarrow b$ функции B и B' ограничены, а при $x = a$ имеем $\alpha_1 B + \alpha_2 B' = 0$. Кроме того, числа γ_k составляют счетное множество нулей некоторого трансцендентного уравнения, причем $\alpha \leq \gamma_k < \gamma_{k+1} \leq b$.

Считаем, что уравнение (3) удовлетворяет условиям теоремы Фукса [22], т.е. коэффициент $p_i(x)$ при $d^{2-i}y/dx^{2-i}$ имеет вид $(x - \alpha)^{-i} P_i(x - \alpha)$, где функция $P_i(x - \alpha)$ голоморфна в области точки α (условие теоремы Фукса необходимо и достаточно для того, чтобы уравнение (3) имело два независимых интеграла, правильных в области точки α).

Рассмотрим парное интегральное уравнение (парный ряд-уравнение)

$$\int_a^\beta Q(\gamma) \rho(\gamma) K(\gamma \lambda) B(\gamma, x) dh(\gamma) = f(x), \quad c \leq x \leq d, \\ \int_a^\beta Q(\gamma) B(\gamma, x) dh(\gamma) = 0, \quad \alpha \leq x < c, \quad d < x \leq \beta, \quad (4)$$

где для (1) функция $h(\gamma) \equiv \gamma$, а для (2)

$$h(\gamma) \equiv \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} [1 + \operatorname{sgn}(\gamma - \gamma_k)]. \quad (5)$$

Здесь функция $\rho(\gamma)$ такова, что при $K(\lambda\gamma) = 1$ решение уравнения (4) известно.

Пусть [6] имеет место

$$K(\gamma) = A + B\gamma + O(\gamma^2), \quad \gamma \rightarrow 0; \\ K(\gamma) = 1 + D\gamma^{-1} + O(\gamma^{-2}), \quad \gamma \rightarrow \infty. \quad (6)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $K(\gamma)$ принадлежит классу Π_N, Σ_M , или $S_{N,M}$, если она соответственно имеет вид

$$\Pi_N: K(\lambda\alpha) = K_N(\lambda\alpha) \equiv \prod_{i=1}^N \frac{\alpha^2 + A_i^2 \lambda^{-2}}{\alpha^2 + B_i^2 \lambda^{-2}}, \quad (7)$$

$$\Sigma_M: K(\lambda\alpha) = K_M^\Sigma(\lambda\alpha) \equiv \sum_{k=1}^M \frac{C_k \lambda^{-1} |\alpha|}{\alpha^2 + D_k^2 \lambda^{-2}}, \quad (8)$$

$$S_{N,M}: K(\lambda\alpha) = K_N(\lambda\alpha) + K_M^\Sigma(\lambda\alpha). \quad (9)$$

Здесь A_i, B_i ($i = 1, 2, \dots, N$), C_k, D_k ($k = 1, \dots, M$) — некоторые постоянные.

Имеет место [3] следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $K(\gamma)$ обладает свойствами (6), тогда она допускает аппроксимацию выражением вида

$$K(\lambda\gamma) = K_N(\lambda\gamma) + K_M^\Sigma(\lambda\gamma). \quad (10)$$

В соответствии с (1)

$$Q(\gamma) = \int_c^d q(\xi) N(\gamma, \xi) d\xi, \quad N(\gamma, \xi) = M(\gamma, \xi) \quad \text{при} \quad \rho(\gamma) = 1. \quad (11)$$

Подставляя (11) в (4), имеем

$$\int_a^\beta \int_c^d q(\xi) \rho(\gamma) K(\lambda\gamma) N(\gamma, \xi) B(\gamma, x) d\xi dh(\gamma) = f(x), \quad c \leq x \leq d. \quad (12)$$

Ниже интегральный оператор, соответствующий функции $K(\gamma)$, принадлежащей классу X , будем также обозначать через X . Используя (10), перепишем (12) в операторном виде

$$\Pi_N q + \Sigma_\infty q = f. \quad (13)$$

В (13) оператор Π_N соответствует в (10) функции $K(\gamma)$ вида (7), а Σ_∞ — функции $K(\gamma)$ вида (8).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что для уравнения (4) выполнено условие A , если для него при $K(\gamma) \in \Pi_N$ можно построить замкнутое решение, следуя [15].

Будем обозначать это решение

$$q = \Pi_N^{-1} f, \quad x \in (c, d). \quad (14)$$

Иными словами, условие A означает, что для функций $f(x)$, принадлежащих некоторому классу $W(c, d)$, существует функция $q(x)$, принадлежащая некоторому классу $V(c, d)$, такая, что имеет место равенство (14).

Из представления (14) следует, что

$$\|q\|_{V(c,d)} \leq m(\Pi_N) \|f\|_{W(c,d)}, \quad m(\Pi_N) = \text{const}. \quad (15)$$

Ниже будем обозначать через $m(X)$ некоторую постоянную, зависящую от конкретного вида принадлежащей X функции.

2. На основании теоремы Хана — Банаха [23] покажем, что при выполнении некоторых условий выражение (14) представляет собой асимптотически точное решение уравнения (13) при $\lambda \rightarrow 0$ и $\lambda \rightarrow \infty$.

Предварительно рассмотрим вопрос о существовании и единственности решения парного уравнения (4) для функции $K(\gamma)$ класса $S_{N,M}$; в этом случае его можно записать в виде

$$\Pi_N q + \Sigma_M q = f. \quad (16)$$

Определим условия, при которых оператор $\Pi_N^{-1} \Sigma_M$ уравнения (4) является оператором сжатия [23], для этого используем следующие утверждения.

ЛЕММА 1. Для билинейной формы вида

$$\alpha_{ia}(\xi, x) \equiv \int_a^b \frac{\gamma \rho(\gamma) M(\gamma, \xi) B(\gamma, x)}{\gamma^2 + a^2} dh(\gamma), \quad (17)$$

если $\gamma \rho(\gamma) = r^{-1}(\gamma)$, $M(\gamma, x) = B(\gamma, x)$, а a — вещественное число, имеет место представление

$$\alpha_{ia}(\xi, x) = \begin{cases} B_-(ia, \xi) B_+(ia, x), & \xi < x, \\ B_+(ia, \xi) B_-(ia, x), & x < \xi, \end{cases} \quad (18)$$

где $B_-(ia, x)$ и $B_+(ia, x)$ — линейно независимые решения уравнения (3), такие, что $B_-(ia, \xi) \rightarrow 0$, а $B_+(ia, \xi) \rightarrow \infty$ при $a \rightarrow \infty$.

Утверждение леммы 1 следует из леммы 28.1 работы [21], для этого достаточно в лемме 28.1 положить $\gamma_r = ia$.

Не нарушая общности, положим в (16) $M = 1$.

ЛЕММА 2. Если для уравнения (4) выполнены условие A и условия леммы 1, то оператор $\Sigma_1 q$ в (16) можно представить [25] в виде ряда ($\Sigma_1 q$ соответствует $K_1^\Sigma(\lambda \gamma)$)

$$\Sigma_1 q = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k B(\gamma_k, x),$$

где

$$\beta_k(a) = \frac{c_r \lambda^{-1}}{\gamma_k^2 - a^2} \left[C(a) \int_c^d q(\xi) B(\gamma_k, \xi) d\xi - s(c) W_c^a(B_+, B) I_- + s(d) W_d^a(B_-, B) I_+ \right], \quad (19)$$

$$I_\pm = \int_c^d q(\xi) B_\pm(a, \xi) d\xi, \quad a = i \frac{D}{\lambda}, \quad (20)$$

$$W_b^a(A, B) = A(a, b) B'(\gamma_k, b) - B(\gamma_k, b) A'(a, b). \quad (21)$$

Здесь $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \dots$ — совокупность всех собственных значений задачи (3) при соответствующих граничных условиях, $B(\gamma_k, x)$ — соответствующие нормированные собственные функции, $C(a)$ — некоторая фиксированная для каждого уравнения (3) ограниченная постоянная, связанная с определителем Вронского $W(B_+, B_-)$ функций $B_+(a, x)$ и $B_-(a, x)$ соотношением

$$W(B_+(a, x), B_-(a, x)) = C(a) s^{-1}(x). \quad (22)$$

Для доказательства леммы 2 выпишем представление коэффициентов разложения β_k :

$$\beta_k(a) = \frac{c_r}{\lambda} \int_c^d q(\xi) A_k(a, \xi) d\xi, \quad A_k(a, \xi) = \int_c^d \alpha_a(\xi, x) \frac{B(\gamma_k, x)}{r(x)} dx. \quad (23)$$

Используя лемму 1 и известное свойство решений дифференциального уравнения второго порядка [16],

$$\int_c^d \frac{B(a, x) B(ib, x)}{r(x)} dx = \left[\frac{s(x)}{a^2 + b^2} (B'(a, x) B(ib, x) - B(a, x) B'(ib, x)) \right]_c^d, \quad (24)$$

где $B(a, x)$, $B(ib, x)$ — любые два решения уравнения (3), соответствующие $\gamma = a$ и $\gamma = ib$, второе выражение (23) можно переписать в виде

$$A_k(a, \xi) = \frac{1}{\gamma_k^2 - a^2} \begin{cases} s(x) B_-(a, \xi) [B_+(a, x) B'(\gamma_k, x) - B(\gamma_k, x) B'_+(a, x)] \Big|_c^\xi, & \xi < x, \\ s(x) B_+(a, \xi) [B_-(a, x) B'(\gamma_k, x) - B(\gamma_k, x) B'_-(a, x)] \Big|_\xi^d, & x < \xi, \end{cases} \quad (25)$$

откуда следует утверждение леммы 2.

3. Рассмотрим уравнение (3), положим $y(x) = B(x)\sqrt{s(x)}$. Относительно $y(x)$ получим уравнение

$$y'' - \gamma^2 q(x)y = 0; \quad q(x) = p(x) - R(x)\gamma^{-2}, \quad (26)$$

$$p(x) = (rs)^{-1}, \quad R(x) = t(rs)^{-1} - s''(2s)' + \frac{1}{4}(s's^{-1})^2. \quad (27)$$

ЛЕММА 3. Оператор $\Pi_N^{-1}\Sigma_M$ уравнения (4) является оператором сжатия в пространстве $V(c, d)$ при выполнении условий леммы 2, в случае, если 1) функция $q''(x)$ непрерывна при $x \in (a, b)$, 2) $q(x) \geq 0$ при $x \in (a, b)$ для $0 < \lambda < \lambda^*$, где λ^* — некоторое фиксированное значение λ .

Для доказательства оценим по λ коэффициенты β_k в (19). Используем обозначения

$$F_{\pm}(a, e) = B_{\mp}(a, \xi)W_e^a(B_{\pm}, B) \quad (e = c, d). \quad (28)$$

В соответствии с теоремой 2 из [28, с. 401], при выполнении условий 1 и 2 уравнение (26) имеет решение вида

$$y_{1,2}(x, \gamma) = q^{-1/4}(x)E_{\pm}(x_0, x)[1 + \gamma^{-1}\varepsilon_{1,2}(x, \gamma)], \quad (29)$$

$$E_{\pm}(x_0, x) = \exp\left[\pm\gamma \int_{x_0}^x \sqrt{q(t)} dt\right]. \quad (30)$$

Для функций $\varepsilon_{1,2}$ справедливы оценки

$$|\varepsilon_j(x, \gamma)| \leq c, \quad x \in [a, b], \quad \gamma \geq \gamma_0 > 0, \quad j = 1, 2, \quad (31)$$

где постоянная c не зависит от x, γ .

Асимптотику (30) можно дифференцировать, т.е.

$$y'_{1,2}(x, \gamma) = \pm\gamma q^{1/4}(x)E_{\pm}(x_0, x)[1 + \gamma^{-1}\varepsilon_{1,2}(x, \gamma)], \quad (32)$$

где для функций $\varepsilon_{1,2}$ имеют место оценки вида (31). Используя (30), (32) и учитывая, что в (26) $\gamma = D_1\lambda^{-1}$, делаем следующее заключение: так как $c < \xi$, поведение функции $F_{\pm}(\gamma, c)$ определяет множитель вида $E_{\pm}(c, \xi)$ и найдется такое γ_0 , что $F_{\pm}(\gamma, c) \rightarrow 0$ при $\gamma \geq \gamma_0 > 0$.

Аналогично предыдущему, так как $d > \xi$, благодаря множителю $E_{\pm}(\xi, d)$ найдется такое γ_0 , что $F_{\pm}(\gamma, d) \rightarrow 0$ при $\gamma \geq \gamma_0 > 0$. Таким образом, при $0 < \lambda < \lambda_1$ ($\lambda_1 = D_1\gamma_0^{-1}$), учитывая, что коэффициенты разложения (19) имеют вид (23), функции $B(\gamma_k, x)$ ортонормированы, получаем оценку

$$\|\Sigma_1 q\|_{V(c,d)} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\| \leq \lambda M^*, \quad \lambda \rightarrow 0 \quad (0 \leq \lambda \leq \lambda_1), \quad (33)$$

где постоянная M^* не зависит от λ . Отсюда следует, что λ можно выбирать таким образом, что оператор $\Pi_N^{-1}\Sigma_M$ будет оператором сжатия [23] при условиях данной леммы.

4. Исследуем, при каких условиях решение (11) является асимптотически точным решением уравнения (4) при $\lambda \rightarrow \infty$ ($\gamma \rightarrow 0$). Для этого, следуя схеме, изложенной ранее, определим условия, при которых оператор $\Pi_N^{-1}\Sigma_M$ уравнения (4) будет оператором сжатия.

Всюду далее считаем, что решения уравнения (3) удовлетворяют условию симметрии:

$$B(\gamma, x) = B(x, \gamma). \quad (34)$$

В соответствии с условием (34) поведение $B(\gamma, x)$ при $\gamma \rightarrow 0$ определяется поведением соответствующего решения уравнения (3) при $x \rightarrow 0$.

Приведем уравнение (3) с самосопряженному виду, для этого домножим его на функцию $r^{-1}(x)$. Получим из (3)

$$L_{\gamma} B(\gamma, x) = [s(x)B']' - Q(x)B = 0, \quad s(x) > 0, \quad a \leq x \leq b, \quad (35)$$

где

$$Q(x) = [t(x) - \gamma^2]r^{-1}(x).$$

Предположим, что коэффициенты $s(x)$ и $Q(x)$ уравнения (35) аналитичны в круге $|x| < R$. Тогда всякое решение $B(x)$ уравнения (35) аналитично в этом круге, т.е. разлагается в степенной ряд, сходящийся в круге $|x| < R$ [24].

ЛЕММА 4. Оператор $\Pi_N^{-1}\Sigma_M$ уравнения (4) является оператором сжатия в пространстве $V(c, d)$, если коэффициенты $s(x)$ и $Q(x)$ уравнения (35) аналитичны в круге $|x| < R$ для $\lambda > \lambda^a$, где λ^a — некоторое фиксированное значение λ , и выполнено условие симметрии (34).

Для доказательства леммы оценим по λ коэффициенты β_k в (19). Из условия леммы и условия симметрии (34) следует, что найдется такое λ^a , что при $\lambda > \lambda^a$ решения $B_{\pm}(a, x)$ можно представить в виде ряда по степеням λ^{-1} , сходящегося в круге $|\lambda| > \lambda^a$. Отсюда следует, что

$$\|\Sigma_1 q\|_{V(c,d)} \leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k < \frac{M^a}{\lambda}, \quad \lambda \rightarrow \infty \quad (\lambda > \lambda^a), \quad (36)$$

где постоянная M^a не зависит от λ .

Таким образом, λ можно выбирать так, что оператор $\Pi_N^{-1}\Sigma_M$ будет оператором сжатия [23] при условии данной леммы ($\lambda^a = M^a$).

Отдельно рассмотрим случай, когда точка $x = 0$ для уравнения (35) является регулярной особой точкой, т.е.

$$s(x) = x\varphi(x), \quad \varphi(0) \neq 0, \quad (37)$$

где $\varphi(x) > 0$ — функция, непрерывная на $[a, b]$. Заметим, что функция $s(x)$ вида (37) удовлетворяет условиям теоремы Фукса.

Имеет место лемма [27, с. 628]).

ЛЕММА 5. Пусть $B_+(x)$ и $B_-(x)$ — два линейно независимых решения уравнения (35), коэффициент которого $s(x)$ удовлетворяет условию (37). Тогда, если $B_+(0) \neq 0$, то $B_-(x)$ имеет при $x = 0$ логарифмическую особенность. Если $B_+(x)$ имеет при $x = 0$ нуль n -го порядка ($n > 0$), то $B_-(x)$ имеет при $x = 0$ полюс n -го порядка.

ЛЕММА 6. Пусть коэффициент $s(x)$ уравнения (35) имеет вид (37), причем выполнено условие (34), и, кроме того,

$$s(c)B(\gamma_k, c) = s(d)B(\gamma_k, d). \quad (38)$$

В этом случае оператор $\Pi_N^{-1} \Sigma_M$ уравнения (4) является оператором сжатия в пространстве $V(c, d)$ для $\lambda > \lambda^a$, где λ^a — некоторое фиксированное значение λ .

Оценим коэффициенты β_k в (19). Из леммы 5 и условия (34) следует существование такого λ^a , что при $\lambda > \lambda^a$, если $B_+(0) \neq 0$,

$$\|\Sigma_1 q\|_{V(c,d)} \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \leq \frac{M_1 \ln \lambda}{\lambda}, \quad \lambda \rightarrow \infty \quad (\lambda > \lambda^a), \quad (39)$$

и если $B_+(x)$ имеет при $x = 0$ нуль n -го порядка, то в оценке (39) $M_1 \lambda^{-1} \ln \lambda$ заменяется на $M_2 \lambda^{-1}$.

На основании лемм 3, 4 и 6, применяя к уравнению

$$q + \Pi_N^{-1} \Sigma_M q = \Pi_N^{-1} f \quad (40)$$

принцип сжатых изображений, получаем доказательство существования и единственности решения уравнения (16) при наложенных ограничениях.

Таким образом, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Уравнение (4) однозначно разрешимо в пространстве $V(c, d)$ при $K(\gamma)$ класса $S_{N,M}$ при выполнении условий леммы 3, 4 или 6 и имеет место оценка

$$\|q(x)\|_{V(c,d)} \leq m(\Pi_N, \Sigma_M) \|f\|_{W(c,d)}. \quad (41)$$

Более того, имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Уравнение (4) однозначно разрешимо в пространстве $V(c, d)$ для $K(\gamma)$, обладающих свойствами (6) при $\gamma\rho(\gamma) = r^{-1}(\gamma)$, выполнении условия А и условий 1) и 2) леммы 3, если $0 < \lambda < \lambda^*$, а также для $\lambda > \lambda^a$ при выполнении условий леммы 4 или 6 (λ^* , λ^a — некоторые фиксированные значения λ) и имеет место оценка (41) при замене Σ_M на Σ_∞ .

Теорема 3 следует из утверждений теорем 1 и 2 и доказывается при помощи известного в теории возмущений приема, основанного на методе последовательных приближений, также, как и в работе [19].

5. Примеры представлений вида (19).

Пример 1. $t(x) = 0$, $r(x) = s(x) = \text{const}$ в (3):

$$B(\alpha, \xi) = \cos \alpha \xi, \\ B_-(iD, \xi) = 1/2 \pi D^{-1} \exp(-D\xi), \quad B_+(iD, x) = \text{ch } Dx, \quad (42)$$

$$a_k \left(\frac{iD}{\lambda} \right) = \frac{4\pi c \lambda^{-1}}{(\pi)^2 + D^2 \lambda^{-2}} \times \\ \times \left\{ \int_0^1 q(\xi) \left[\cos k\pi \xi - \exp\left(-\frac{D}{\lambda}\right) \cos k\pi \text{ch } \frac{D}{\lambda} \xi \right] d\xi \right\}. \quad (43)$$

Здесь выполнены условия лемм 3 и 4. Пространство $V(c, d) = C_{1/2}^{(0)+}(-1, 1)$, где $C_{1/2}^{(0)+}$ — пространство четных функций, непрерывных с весом $\sqrt{1-x^2}$ с нормой [19]

$$\|f\|_{C_{1/2}^{(0)+}(-1,1)} = \max_{x \in [-1,1]} f(x) \sqrt{1-x^2}, \quad (44)$$

а $W(c, d)$ — пространство функций, имеющих на отрезке $[-1, 1]$ производные первого порядка, удовлетворяющие условию Гельдера с показателем $\frac{1}{2} + \epsilon$, с обычной нормой [19].

Пример 2. $r(x) = x^{-1}$, $s(x) = x$, $t(x) = -n^2 x^{-2}$ в (3):

$$B(\alpha, \xi) = J_n(\alpha \xi), \quad B_-(iD, \xi) = K_n(D\xi), \quad B_+(iD, x) = I_n(Dx) \quad (n = 0, 1). \quad (45)$$

Здесь $J_n(x)$ — функция Бесселя, $I_n(x)$, $K_n(x)$ — модифицированные функции Бесселя. Имеем

$$a_k \left(\frac{iD}{c} \right) = \frac{2c \lambda^{-1}}{J_{n+1}^2(\mu_k)(\mu_k^2 + D^2 \lambda^{-2})} \times \\ \times \left\{ \int_0^1 q(\rho) \rho \left[J_n(\mu_k \rho) - K_n\left(\frac{D}{\lambda}\right) \mu_k J_{1-n}(\mu_k) I_n\left(\frac{D}{\lambda} \rho\right) \right] d\rho \right\}, \quad (46)$$

где $n = 0, 1$, причем $V(c, d) = C_{1/2}^{(0)+}(-1, 1)$ при $n = 0$ и $V(c, d) \equiv C_{1/2}^{(0)-}(-1, 1)$ при $n = 1$, где $C_{1/2}^{(0)-}$ — пространство нечетных функций, непрерывных с весом $\sqrt{1-x^2}$. Соответствующее пространство $W(c, d)$ определено в [3]. Здесь при $n = 0$ выполнены условия леммы 3 и имеет место оценка (39), соответственно при $n = 1$ также выполняются условия леммы 3 и имеет место оценка (39) при замене $M_1 \lambda^{-1} \ln \lambda$ на $M_2 \lambda^{-1}$.

Заметим, что с помощью метода работы В. М. Александрова [15], может быть построено двусторонне асимптотически точное решение парных интегральных уравнений, порождаемых: 1) контактной задачей для полосы, лежащей без трения на жестком основании или защемленной по основанию, 2) контактной задачей для клина с защемленной гранью (плоская постановка); 3) осесимметричной задачей о действии кольцевого штампа на полупространство, 4) осесимметричной задачей о взаимодействии упругого банджа с упругим цилиндром [18]. Полоса, клин,

полупространство, цилиндр могут быть однородными, слоистыми или непрерывно неоднородными [10, 11, 14]. Примеры использования изложенного выше двухстороннего асимптотического метода имеются в работах [1, 4, 5, 7–9, 12, 13].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзикович С. М. Кручение круглым штампом неоднородного полупространства. // Расчет оболочек и пластин. Ростов-на-Дону: Изд-во РИСИ, 1978. С. 156–169.
2. Айзикович С. М. Сдвиг штампом упругого неоднородного полупространства специального вида. // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 5. С. 74–80.
3. Айзикович С. М. Асимптотические решения контактных задач теории упругости для неоднородных по глубине сред. // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 1. С. 148–158.
4. Айзикович С. М. Контактные задачи теории упругости для полупространства и полуплоскости, неоднородных по глубине. // Статические и динамические смешанные задачи теории упругости. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ. 1983. С. 121–131.
5. Айзикович С. М. Асимптотическое решение задачи о взаимодействии пластины с неоднородным по глубине основанием. // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 4. С. 688–697.
6. Айзикович С. М., Александров В. М. О свойствах функций податливости соответствующих слоистому и непрерывно-неоднородному полупространству. // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266. № 1. С. 40–43.
7. Айзикович С. М., Александров В. М. Осесимметрическая задача о вдавливании круглого штампа в упругое, неоднородное по глубине полупространство. // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 2. С. 73–82.
8. Айзикович С. М., Александров В. М. Асимптотические решения контактных задач теории упругости для полупространства и полуплоскости, неоднородных по глубине. // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1986. Т. 39. № 3. С. 13–28.
9. Айзикович С. М., Александров В. М. Распределение напряжений под ленточным фундаментом на неоднородном основании. // Исследование по теории сооружений. М: Стройиздат, 1987. Т. 25. С. 82–92.
10. Айзикович С. М., Трубочик И. С. Асимптотические свойства приближенного решения одного класса парных интегральных уравнений. // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 5. С. 850–856.
11. Айзикович С. М., Трубочик И. С. Об асимптотических свойствах приближенного решения одного класса парных интегральных уравнений. // Докл. АН СССР. 1989. Т. 307. № 2. С. 316–320.
12. Айзикович С. М., Трубочик И. С. Расчет круглой плиты на неоднородном по глубине основании. // Строительная механика и расчет сооружений. 1992. № 3. С. 24–29.
13. Айзикович С. М., Трубочик И. С. Об определении формы осадки поверхности неоднородного по глубине полупространства при внедрении в него кругового штампа. // Докл. РАН. 1993. Т. 332. № 6. С. 702–705.
14. Айзикович С. М., Трубочик И. С., Шклярова Е. В. Внедрение штампа в неоднородную по глубине полосу. // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 1. С. 61–71.
15. Александров В. М. О решении одного класса парных уравнений. // Докл. АН СССР. 1973. Т. 210. № 1. С. 55–58.

16. Александров В. М. Об одном методе сведения парных интегральных уравнений и парных рядов — уравнений к бесконечным алгебраическим системам. // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 2. С. 324–332.
17. Александров В. М., Коваленко Е. В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 336 с.
18. Александров В. М., Ромалис Б. Л. Контактные задачи в машиностроении. М.: Машиностроение, 1986. 176 с.
19. Бабешко В. А. Интегральные уравнения свертки первого рода на системе отрезков, возникающие в теории упругости и математической физике. // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 1. С. 88–99.
20. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
21. Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
22. Гурса Э. Курс математического анализа. М.; Л.: Гостехиздат, 1933. Т. 2. Ч. 1. 271 с.; Т. 2. Ч. 2. 287 с.
23. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.
24. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958. 474 с.
25. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Введение в спектральную теорию: Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1970. 671 с.
26. Развитие теории контактных задач в СССР. / Под ред. Л.А.Галина. М.: Наука, 1976. 493 с.
27. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
28. Федорюк М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985. 350 с.

§ 3. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ

В. Б. Зеленцов

1. Плоская задача.

1.1. Исследование динамики контактного взаимодействия деформируемых твердых тел является наиболее сложной, как в механическом, так и в математическом плане, задачей и поэтому, по всей видимости, наименее изученной задачей механики деформируемого твердого тела. Свидетельством этому является достаточно малое количество аналитических решений, полученных для этого класса задач. К ним в первую очередь относятся аналитические решения плоских нестационарных динамических контактных задач (НДКЗ) для упругой полуплоскости. Впервые решение НДКЗ для полубесконечного штампа на упругой полуплоскости было дано Флитманом [21]. Там же указывался путь решения НДКЗ для конечного штампа. Позднее в [11] Костровым был развит другой подход к решению этого класса задач. Работа Робинсона и Томпсона [25] также посвящена исследованию этого класса задач. Другие, более поздние работы, можно найти в монографии Горшкова и Тарлаковского [6].

Асимптотические методы решения этого класса задач не получили такого развития для решения НДКЗ, какое они получили в свое время при решении статических и стационарных динамических контактных задач [4, 5].

Основными преимуществами асимптотических методов решения НДКЗ являются: компактность (обозримость) получаемых с их помощью аналитических результатов; доступность их анализа и дальнейшего использования; расширение класса решаемых в аналитической форме контактных задач. На настоящий момент времени работ, связанных с разработкой асимптотических методов решения НДКЗ или систематически их применяющих для решения этих задач, мало, как в отечественной научной литературе, так и в зарубежной. Различные авторы в той или другой форме в ходе решения рассматриваемого класса задач, в основном, эпизодически используют асимптотический подход к их решению. Так, например, в работах [7, 22] для решения динамических задач применяется метод асимптотически эквивалентных функций, что позволило получить обозримые приближенные решения рассмотренных там задач.

Наиболее часто в настоящее время решение НДКЗ сводится к решению того или другого одномерного интегрального уравнения (ИУ) численными методами с использованием асимптотических и других свойств ядер этих уравнений. К таким работам можно отнести [19, 20], а библиографию этой схемы можно найти в [6].

Другой подход к решению НДКЗ заключается в том, что решение полуплоскостного интегрального уравнения НДКЗ строится по некоторой бесконечной системе функций, часто с выделением неподвижных особенностей в решении, что в свою очередь приводит к необходимости решения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. К такого типа методам можно отнести большое количество работ, начиная с [18], а в [3, 12] дана достаточно полная библиография этого направления.

Анализ достаточно большого количества работ показывает, что первым этапом поиска асимптотических решений НДКЗ является сведение ее к решению одномерного интегрального уравнения (системы интегральных уравнений) относительно трансформанты (трансформант) Лапласа неизвестных контактных напряжений, возникающих между штампом и упругой средой; на втором этапе осуществляется построение асимптотических или приближенных решений интегрального уравнения (системы интегральных уравнений), представленных, как правило, в виде разложения по характерному параметру задачи; на третьем этапе на основе полученного асимптотического или приближенного решения интегрального уравнения (системы интегральных уравнений) строятся асимптотические решения НДКЗ, справедливые в некоторой области изменения характерного параметра и времени. К такого типа работам можно отнести [2, 8–10, 18]. В работе [2] на основании решения интегральных уравнений плоских и пространственных осесимметричных НДКЗ предложен подход построения решений рассматриваемых задач при большом времени контактного взаимодействия, когда приложенное к штампу усилие при достаточно большом времени возрастает по экспоненциальному закону. Работа [10] посвящена поиску асимптотического решения антиплоской и плоской НКДЗ для полуплоскости на основании асимптотических решений интегральных уравнений рассматриваемых задач. В работе [8] с помощью полученных там асимптотических решений НКДЗ о штампе на предварительно напряженной полуплоскости исследовалось влияние преднапряжения на контактные напряжения и на характер движения плоского штампа. В этой же работе предложен метод решения интегрального уравнения НДКЗ, основанный на специальной аппроксимации символа ядра. В [9] дается общий подход к решению интегральных уравнений НДКЗ, в основу которого положена специальная аппроксимация символа ядра этих уравнений.

Ниже на примере решения плоской НДКЗ дается общая схема одного из подходов к получению асимптотических решений рассматриваемого класса задач.

1.2. Постановка простейшей нестационарной динамической контактной задачи является классической и в плоском случае в терминах теории упругости формулируется в следующем виде: жесткий штамп ширины $2a$

($|x| \leq a$) внедряется в упругую полуплоскость ($-\infty < x < \infty, y \geq 0$) с начальной скоростью v_0 . Силы трения и сцепления в зоне контакта штампа с полуплоскостью не учитываются. Форма штампа и закон его внедрения в полуплоскость дается функцией $f(x, t)$, ($|x| \leq a, t \geq 0$). В начальный момент времени, учитывая, что до момента внедрения упругая среда находится в покое, смещения упругой среды $u = u(x, y, t)$ и $v = v(x, y, t)$ и их скорости $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial v}{\partial t}$ равны нулю. На бесконечности при $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$ упругие смещения среды u, v и напряжения $\sigma_{xx}(x, y, t)$, $\sigma_{yy}(x, y, t)$, $\sigma_{xy}(x, y, t)$ исчезают.

В принятых обозначениях смешанные граничные условия при $t \geq 0$ имеют вид

$$\sigma_{xy}(x, 0, t) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad (1)$$

$$\sigma_{yy}(x, 0, t) = 0, \quad -\infty < x < a, \quad a < x < \infty, \quad (2)$$

$$v(x, 0, t) = f(x, t), \quad -a < x < a. \quad (3)$$

1.3. С помощью интегральных преобразований [15] Лапласа (по времени t) и Фурье (по координате x) смешанная краевая задача сводится к решению интегрального уравнения (ИУ) 1-го рода типа свертки относительно трансформанты Лапласа $\varphi^L(x, p)$, неизвестных контактных напряжений $\varphi(x, t)$ ($\sigma_{yy}(x, 0, t) = -\varphi(x, t)$)

$$\int_{-1}^1 \varphi^L(\xi, p) k\left(\frac{\xi-x}{\Lambda}\right) d\xi = 2\pi f_0^L(x, p), \quad |x| \geq 1, \quad (4)$$

$$k(t) = \int_{\Gamma} K(\alpha) e^{i\alpha t} d\alpha, \quad (5)$$

$$K(\alpha) = 2(1-\beta^2)\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} R^{-1}(\alpha), \quad (6)$$

$$R(\alpha) = (2\alpha^2 + 1)^2 - 4\alpha^2\sqrt{\alpha^2 + 1}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad (7)$$

$$f_0^L(x, p) = 2(1-\beta^2)\mu\alpha^{-1} f^L(x, p), \quad (8)$$

$$\Lambda = \frac{c_2}{\rho}, \quad \beta^2 = \frac{c_2^2}{c_1^2}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (9)$$

Здесь λ, μ — постоянные Ламе, ρ — плотность материала полуплоскости, c_1, c_2 — скорости продольной и поперечной упругих волн, $f^L(x, p)$ — трансформанта Лапласа функции $f(x, t)$, контур Γ в комплексной плоскости $\alpha = \sigma + i\tau$ проходит под углом $-\arg p$ по отношению к действительной оси.

1.4. Символ ядра интегрального уравнения — функция $K(\alpha)$ [4, 5], является функцией четной, вещественной на действительной оси. Поведение $K(\alpha)$ в нуле и на бесконечности дается соотношениями

$$K(\alpha) = |\alpha|^{-1} + O(|\alpha|^{-3}), \quad |\alpha| \rightarrow \infty, \quad (10)$$

$$K(\alpha) = K(0) + O(\alpha^2), \quad \alpha \rightarrow 0, \quad K(0) = 2\beta(1-\beta^2). \quad (11)$$

В комплексной плоскости $\alpha = \sigma + i\tau$ функция $K(\alpha)$ имеет четыре точки ветвления $\alpha = \pm i, \alpha = \pm i\beta$ и два полюса $\alpha = \pm i\eta_0$ (полюсы Релея). Для однозначного представления функции $K(\alpha)$ в комплексной плоскости α проводятся конечные разрезы, соединяющие точки ветвления $\alpha = i, \alpha = i\beta$ и $\alpha = -i, \alpha = -i\beta$, или полубесконечные разрезы, уходящие от точек ветвления $\alpha = i, \alpha = i\beta$ на $+i\infty$ вдоль положительной части ($\text{Im } \alpha \geq 0$) мнимой оси и от точек ветвления $\alpha = -i, \alpha = -i\beta$ до $-i\infty$ вдоль отрицательной части ($\text{Im } \alpha \leq 0$) мнимой оси. В разрезанной таким образом комплексной плоскости α с выколотыми точками полюсов Релея $\alpha = \pm i\eta_0$ функция $K(\alpha)$ является аналитической [4] включая полосу $|\text{Im } \alpha| < \beta, \beta < 1 < \eta_0$.

1.5. Для построения нулевого члена асимптотики решения ИУ (4) при больших значениях параметра Лапласа p (малые времена t контактного взаимодействия штампа с упругой средой) достаточно построить нулевой член асимптотики решения (4) при малых значениях параметра Λ [9]. После деформации контура интегрирования Γ в комплексной плоскости $\alpha = \sigma + i\tau$ в контур, параллельный действительной оси ($\tau = 0$) и расположенный в полосе $|\text{Im } \alpha| < \beta$, нулевой член асимптотики решения ИУ (4) при малых Λ представляется в виде суперпозиции решений интегральных уравнений

$$\int_{-1}^{\infty} \varphi_+^L(\xi, p) k\left(\frac{\xi-x}{\Lambda}\right) d\xi = 2\pi f_0^L(x, p), \quad -1 \leq x < \infty, \quad (12)$$

$$\int_{-\infty}^1 \varphi_-^L(\xi, p) k\left(\frac{\xi-x}{\Lambda}\right) d\xi = 2\pi f_0^L(x, p), \quad -\infty < x \leq 1, \quad (13)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\infty}^L(\xi, p) k\left(\frac{\xi-x}{\Lambda}\right) d\xi = 2\pi f_0^L(x, p), \quad -\infty < x < \infty, \quad (14)$$

$$k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha) e^{i\alpha t} d\alpha$$

по формуле

$$\varphi^L(x, p) = \varphi_+^L\left(\frac{1+x}{\Lambda}, p\right) + \varphi_-^L\left(\frac{1-x}{\Lambda}, p\right) - \varphi_{\infty}^L\left(\frac{x}{\Lambda}, p\right). \quad (15)$$

Для реализации последней в (12), (13) делаются замены переменных $\xi = \Lambda\xi' - 1, x = \Lambda x' - 1$ и $\xi = 1 - \Lambda\xi', x = 1 - \Lambda x'$, соответственно, а в уравнении (14) $\xi = \Lambda\xi', x = \Lambda x'$, после чего (12)–(14) принимают вид

$$\int_0^{\infty} \varphi_{\pm}^L(\xi, p) k(\xi - x) d\xi = 2\pi f_0^L(\pm \Lambda x \mp 1, p) \Lambda^{-1}, \quad 0 \leq x < \infty, \quad (16)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\infty}^L(\xi, p) k(\xi - x) d\xi = 2\pi f_0^L(\Lambda x, p) \Lambda^{-1}, \quad -\infty < x < \infty. \quad (17)$$

Уравнения (16) являются уравнениями Винера–Хопфа на полуоси, а (17) — уравнением свертки на оси.

Решение ИУ (17) получается применением к нему интегрального преобразования Фурье и дается формулой

$$\varphi_{\infty}^L(\xi, p) = \frac{1}{2\pi\Lambda} \int_{-\infty}^{\infty} f_0^{LF}(\alpha, p) K^{-1}(\alpha) e^{-i\alpha\xi} d\alpha. \quad (18)$$

Решения интегральных уравнений (16) получаются применением к ним стандартной процедуры Винера–Хопфа [4], в результате чего решение первого ИУ из (16) представляется по формуле

$$\varphi_{+}^L(\xi, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_{+}(\alpha) \exp(-i\alpha\xi)}{K_{+}(\alpha)} d\alpha, \quad (19)$$

где $g_{+}(\alpha)$ — регулярная в верхней полуплоскости ($\text{Im } \alpha > \tau_{-}$, $0 \leq |\tau_{-}| \leq \beta$) функция, определяемая из соотношения

$$g_{+}(\alpha) + g_{-}(\alpha) = \frac{F_{+}(\alpha)}{\Lambda K_{-}(\alpha)}, \quad (20)$$

$$F_{+}(\alpha) = \int_0^{\infty} f_0^L(\Lambda\xi - 1, p) \exp(i\alpha\xi) d\xi, \quad (21)$$

а функции $K_{\pm}(\alpha)$, определяемые в результате факторизации функции $K(\alpha) = K_{+}(\alpha)K_{-}(\alpha)$, регулярны в верхней ($\text{Im } \alpha > \tau_{-}$, $\tau_{-} \leq 0$) и в нижней ($\text{Im } \alpha < \tau_{+}$, $\tau_{+} \geq 0$) полуплоскостях $\alpha = \sigma + i\tau$, соответственно.

Решение $\varphi_{\pm}^L(\xi, p)$ второго уравнения (16) дается формулой (19), в которой $F_{+}(\alpha)$ определяется формулой

$$F_{+}(\alpha) = \int_0^{\infty} f_0^L(-\Lambda\xi + 1, p) \exp(i\alpha\xi) d\xi. \quad (22)$$

После вычисления квадратур (18), (19) и перехода к старым переменным нулевой член асимптотического решения ИУ (4) дается формулой (15). Вычисление квадратуры типа (19) в аналитической форме затруднено, так как $K_{+}(\alpha)$ и $K_{-}(\alpha)$ в результате факторизации $K(\alpha)$ в общем случае даются в сингулярных квадратурах.

1.6. Для получения обозримого асимптотического решения интегральных уравнений (16), а вместе с ними и ИУ (4), применяется метод приближенного решения уравнений (16), основанный на специальной аппроксимации символа ядра ИУ (4) функции $K(\alpha)$ в комплексной плоскости $\alpha = \sigma + i\tau$.

В качестве такой функции, удовлетворяющей всем свойствам $K(\alpha)$, перечисленным в п. 1.4, и позволяющей сохранить в решении физический смысл задачи, является функция вида

$$K_0(\alpha) = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\alpha^2 + \eta_0^2} M_n(\alpha), \quad (23)$$

$$M_n(\alpha) = \exp\left\{\frac{1}{2} \sum_{k=0}^N d_k \left[(\sqrt{\beta + i\alpha} - \sqrt{1 + i\alpha})^{2k+2} + (\sqrt{\beta - i\alpha} - \sqrt{1 - i\alpha})^{2k+2} \right]\right\}. \quad (24)$$

Постоянные d_k определяются из условий наилучшей аппроксимации $K(\alpha)$ в комплексной плоскости $\alpha = \sigma + i\tau$. Полюса Релея $\pm i\eta_0$ функции $K(\alpha)$ определяются из уравнения $R(\alpha) = 0$.

Факторизация $K_0(\alpha)$ (23), (24), то есть представление ее в комплексной плоскости в виде $K_0(\alpha) = K_{+}^0(\alpha)K_{-}^0(\alpha)$, осуществляется элементарными средствами, в результате чего имеем

$$K_{\pm}^0(\alpha) = \frac{\sqrt{\beta \mp i\alpha}}{\eta_0 \mp i\alpha} \exp\left[\frac{1}{2} \sum_{k=0}^N d_k (\sqrt{\beta \mp i\alpha} - \sqrt{1 \mp i\alpha})^{2k+2}\right]. \quad (25)$$

Функции $K_{\pm}^0(\alpha)$ обладают свойством

$$K_{+}^0(\alpha) = K_{-}^0(-\alpha)$$

и являются регулярными соответственно в полуплоскостях $\text{Im } \alpha > -\beta$ и $\text{Im } \alpha < \beta$ ($\beta > 0$) с асимптотиками

$$K_{\pm}^0(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{-i\alpha}} + O\left(\frac{1}{|\alpha|}\right), \quad |\alpha| \rightarrow \infty, \quad (26)$$

$$K_{\pm}^0(\alpha) = \sqrt{K(0)} + O(|\alpha|), \quad |\alpha| \rightarrow 0. \quad (27)$$

В заключении пункта следует отметить, что вид аппроксимации (23), (24) не является единственным.

1.7. Для случая плоского штампа, когда $f(x, t) = f(t)$, правая часть ИУ (4) принимает вид $f_0^L(x, p) = 2(1 - \beta^2)\mu a^{-1} f^L(p)$, где $f^L(p)$ — трансформанта Лапласа функции $f(t)$, решение $\varphi_{\infty}^L(x, p)$ (18) ИУ (17) представляется формулой

$$\varphi_{\infty}^L(x, p) = \frac{\theta f^L(p)}{\Lambda K(0)}, \quad \theta = 2(1 - \beta^2)a^{-1}. \quad (28)$$

Решение $\varphi_{\pm}^L(x, p)$ интегральных уравнений (16) в этом случае принимает вид

$$\varphi_{\pm}^L(x, p) = \frac{\theta f^L(p)}{2\pi\Lambda K_{\pm}^0(0)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\alpha x)}{-i\alpha K_{\pm}^0(\alpha)} d\alpha. \quad (29)$$

При вычислении квадратуры в (29) делается замена переменной $-iu = s$. В комплексной плоскости $s = u + iv$ подынтегральная функция $[sK_{\pm}^0(is)]^{-1}$ имеет особые точки: в нуле ($s = 0$) — полюс первого порядка, две точки ветвления алгебраического типа при $s = -\beta$ и $s = -1$. Для однозначного представления подынтегральной функции в (24) в комплексной плоскости s проводятся разрезы от $s = -\beta$ и $s = -1$ до $-\infty$ вдоль отрицательной части вещественной оси ($\text{Re } s < 0$), с последующим выбором ветвей функций $\sqrt{\beta + s}$ и $\sqrt{1 + s}$ при условии $\sqrt{1} = 1$. Вычисление интеграла в (24) приводит к формуле

$$\varphi_{\pm}^L(x, p) = \frac{\theta f^L(p)}{2\pi\Lambda K_{\pm}^0(0)} \left\{ \int_1^{\infty} q(\chi_1(y), y) dy + \int_{\beta}^1 q(P_n(y), y) \cos[\zeta(y)Q_{n-1}(y)] dy + \frac{\pi}{\sqrt{K(0)}} \right\}, \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} q(w, y) &= \vartheta(y) \exp(-w - yx), \\ \zeta(y) &= \sqrt{y - \beta} \sqrt{1 - y}, \\ \chi_1(y) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} d_k (\sqrt{y - \beta} - \sqrt{y - 1})^{2k+2}, \\ \vartheta(y) &= \frac{y - \eta_0}{y \sqrt{y - \beta}}, \quad Q_{n-1}(y) = \frac{1}{\zeta(y)} \operatorname{Im}[-\chi_2(y)], \\ P_n(y) &= \operatorname{Re}[-\chi_2(y)], \\ \chi_2(y) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} d_k (i \sqrt{y - \beta} - \sqrt{1 - y})^{2k+2}. \end{aligned}$$

Возвращаясь к старым переменным в (28), (30), нулевой член асимптотики решения ИУ (4) представим формулой (15).

1.8. Асимптотическое решение поставленной НДКЗ для плоского штампа при малых t получается с помощью перехода в формулах (15), (28), (30) решения ИУ (4) к оригиналам преобразования Лапласа. Оригиналы функций $\varphi_{\pm}^L(x, p)$, $\varphi_{\infty}^L(x, p)$ после возврата к размерной переменной x в (28), (30) даются формулами

$$\begin{aligned} \varphi_{\infty}(x, t) &= \frac{2(1 - \beta^2)\mu}{c_2 K(0)} E(t), \\ \varphi_{\pm}(x, t) &= \frac{2(1 - \beta^2)}{\pi K_0^0(0) \sqrt{c_2(a \pm x)}} \left[\sum_{k=1}^2 \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t f_k(\tau, x) \varepsilon(t - \tau) d\tau + b \sqrt{a \pm x} E(t) \right], \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} E(t) &= f'(t) + f(0), \\ f_1(t, x) &= H(t - t_2^{\pm}) \kappa(t) \exp[-\psi_1(t, x)], \\ f_2(t, x) &= [H(t - t_1^{\pm}) - H(t - t_2^{\pm})] \kappa(t) \exp[-P_n(t/t_2^{\pm})] \cos[\psi_2(t, x)], \\ \kappa(t) &= \frac{t - t_R^{\pm}}{t(t - t_1^{\pm})^{1/2}}, \\ \psi_1(t, x) &= -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} d_k \left(\frac{(t - t_1^{\pm})^{1/2} - (t - t_2^{\pm})^{1/2}}{t_2^{\pm}} \right)^{2k+2}, \\ \psi_2(t, x) &= \frac{(t - t_1^{\pm})^{1/2} - (t_2^{\pm} - t)^{1/2}}{t_2^{\pm}} Q_{n-1} \left(\frac{t}{t_2^{\pm}} \right), \\ t_i^{\pm} &= \frac{a \pm x}{c_i} \quad (i = 1, 2), \quad t_R^{\pm} = \eta_0 t_2^{\pm}, \quad b = \frac{\pi K_0^0(0)}{c_2 K(0)}. \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь $H(t)$ — функция Хевисайда, $P_n(t)$ и $Q_{n-1}(t)$ определены в (30), $f(0)$ — начальное (до момента времени $t = 0$) внедрение штампа. Нулевой член асимптотического решения контактной задачи определяется формулой

$$\varphi(x, t) = \varphi_+(a + x, t) + \varphi_-(a - x, t) - \varphi_{\infty}(x, t). \quad (33)$$

В частном случае, когда штамп мгновенно внедряется в упругую среду в начальный момент времени $t = 0$, при этом $f(t) = f^0 H(t)$, контактные напряжения даются формулой (33), в которой

$$\varphi_{\infty}(x, t) = \frac{2(1 - \beta^2)\mu f^0}{c_2 K(0)} \delta(t), \quad (34)$$

$$\varphi_{\pm}(x, t) = \frac{2(1 - \beta^2)\mu f^0}{\pi K_0^0(0) \sqrt{c_2(a \pm x)}} \left[\sum_{k=1}^2 f_k(t, x) + b \sqrt{a \pm x} \delta(t) \right]. \quad (35)$$

Здесь $f_k(t, x)$ ($k = 1, 2$) и b даются формулами (32), $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака.

В этом же случае при аппроксимации $K_0(u)$ вида (23), (24) при $n = 0$ для рассматриваемого случая функции, входящие в формулы решения контактной задачи (33)–(35), принимают наиболее простой вид, не содержащий квадратур, а $f_k(t, x)$ даются формулами

$$\begin{aligned} f_1(t, x) &= H(t - t_2^{\pm}) \kappa(t) \exp[-\psi_1(t, x)], \\ f_2(t, x) &= [H(t - t_1^{\pm}) - H(t - t_2^{\pm})] \kappa(t) \exp \left[\left(-\frac{1 + \beta}{2} + \frac{t}{t_2^{\pm}} \right) d_0 \right] \cos[\psi_2(t, x)], \\ \psi_1(t, x) &= -\frac{d_0(1 - \beta^2)t_2^{\pm}}{2[(t - t_1^{\pm})^{1/2} + (t - t_2^{\pm})^{1/2}]^2}, \quad \psi_2(t, x) = \frac{d_0(t - t_1^{\pm})^{1/2}(t_2^{\pm} - t)^{1/2}}{t_2^{\pm}}, \end{aligned} \quad (36)$$

в которых функция $\kappa(t)$ имеет вид (32). Если постоянную d_0 аппроксимации $K_0(\alpha)$ найти из условия $K(0) = K_0(0)$, то $d_0 = (1 - \sqrt{\beta})^{-2} \ln[\eta_0^2 K(0) \beta^{-1}]$. Ошибка такой аппроксимации ($n = 0$) для всех $\nu \in [0, 0, 44]$ вдоль вещественной оси ($\tau = 0$) комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$ не превышает 4%, а для всего промежутка изменения $\nu \in [0, 0, 5]$ — 22%. Увеличение ошибки аппроксимации $K_0(\alpha)$ при $\nu \rightarrow 0, 5$ связано с тем, что материал полуплоскости при $\nu = 0, 5$ становится несжимаемым и $K(u)$ при этом принимает качественно другой математический вид: ее аналитическое выражение содержит только один алгебраический корень.

Представленные результаты позволяют провести анализ динамики контактных напряжений $\varphi(x, t)$. Из приведенных здесь формул для $\varphi(x, t)$ видно, что контактные напряжения пропорциональны скорости внедрения штампа $\dot{f}(t)$ до прихода волн от краев штампа для всех $x \in (c_1 t - a, a - c_1 t)$, а затем (при $t > a/c_1$) суммируются с ними; содержат неподвижные особенности, возникающие в краях штампа ($x = \pm a$) вида $(a \pm x)^{-1/2}$, а также подвижные особенности на фронтах продольных волн ($f(0) \neq 0$), распространяющихся от краев штампа со скоростью c_1 вида $[c_1 t - (a \pm x)]^{-1/2}$, тогда как фронт поперечной волны, движущийся со скоростью c_2 ($c_2 < c_1$), особенности не имеет.

1.9. Закон внедрения плоского жесткого штампа $f(t)$ в упругую полуплоскость можно определить из дифференциального уравнения (штамп

представляется материальной точкой массы M)

$$M \ddot{f}(t) = Q(t), \quad (37)$$

где M — масса штампа, $Q(t)$ — сила упругого сопротивления среды, с начальными условиями $f(0) = f^0$, $\dot{f}(0) = v_0$.

Для определения трансформанты Лапласа упругой силы сопротивления среды

$$Q^L(p) = - \int_{-a}^a \varphi^L(x, p) dx \quad (38)$$

пользуются нулевым членом асимптотики $\varphi^L(x, p)$ решения ИУ (4). С этой целью нулевой член асимптотического решения ИУ при больших p берется в новой мультипликативной форме

$$\varphi^L(x, p) = \varphi_+^L(a+x, p) \varphi_-^L(a-x, p) / \varphi_\infty^L(x, p), \quad (39)$$

реализация которой приводит к формуле

$$Q^L(p) = -2(1-\beta^2)\mu a \frac{K(0)}{K_+(0)} \frac{f^L(p)}{2\pi i} \int_{-i\infty+c}^{i\infty+c} \omega^2(i\alpha) \exp(\gamma\alpha) d\alpha, \quad (40)$$

$$\omega(i\alpha) = -[\alpha K_+(i\alpha)]^{-1}, \quad \gamma = 2/\Lambda, \quad \text{Re } c > 0,$$

в которой $K_+(\alpha)$ дается формулой (25). Для $t < 2a/c_1$ формула (40) принимает вид

$$Q^L(p) = - \frac{2(1-\beta^2)\mu K(0)}{K_+^2(0)} \left[\frac{2ap}{c_2 K_+^2(0)} - \frac{2iK_+'(0)}{K_+^3(0)} \right] f^L(p). \quad (41)$$

Из решения (37) с помощью преобразования Лапласа при учете (41) определяется $f^L(p)$:

$$f^L(p) = \frac{f^0 p + v_0}{(p + u_*)^2 + \delta_*}, \quad u_* = \frac{\mu a}{\beta c_2 M}, \quad (42)$$

$$\delta_* = \frac{\mu \zeta_0}{M \beta^2 \eta_0} - u_*^2, \quad \zeta_0 = \sqrt{\beta} \eta_0 \ln[2(1-\beta^2)\eta_0^2] + 2\beta - \eta_0.$$

Расчеты показывают, что $\delta_* > 0$ для всех $\nu \in [0, 0.44]$, т.е. для тех значений ν , при которых аппроксимация $K_0(\alpha)$ (23), (24) при $n=0$ допускает по отношению к $K(\alpha)$ ошибку, меньшую 4%, вдоль действительной оси. Для таких ν величина внедрения штампа принимает вид ($f^0 = 0$)

$$f(t) = \frac{v_0}{\sqrt{\delta_*}} \exp(-u_* t) \sin \sqrt{\delta_*} t. \quad (43)$$

Глубина внедрения штампа в упругую среду при этом дается формулой

$$\max f(t_*) = \frac{v_0 \theta_*}{\sqrt{\delta_*} (1 + \theta_*)} \exp\left(-\frac{\text{arctg } \theta_*}{\theta_*}\right), \quad (44)$$

$$t_* = \frac{1}{\sqrt{\delta_*}} \text{arctg}\left(\frac{\sqrt{\delta_*}}{u_*}\right),$$

$$\theta_* = \frac{u_*}{\sqrt{\delta_*}},$$

ТАБЛИЦА 1

№	Материал	μ_*	ρ_*	ν	$\max f$ [мм]	$t_* \cdot 10^4$ [с]
1	Алюминий	2,50	2,70	0,35	2,159	1,21
2	Гранит	4,00	3,00	0,10	1,148	0,62
3	Медь	3,00	8,93	0,35	1,817	1,06
4	Сталь	8,00	7,70	0,25	1,236	0,71
5	Стекло	2,90	2,50	0,20	2,129	1,17
6	Чугун	4,40	7,00	0,25	1,593	0,90

где t_* — время максимального заглубления, определяется из условия $f(t_*) = 0$. Расчеты, проведенные по формулам (44), $\max f$ и t_* при $M = 200$ кг, $a = 1$ см, $v_0 = 30$ м/с приведены в табл. 1 для различных материалов с указанием их характеристик, $\mu_* = \mu \cdot 10^{10}$ [Н/м²], $\rho_* = \rho \cdot 10^3$ [кг/м³].

1.10. Для получения асимптотического решения поставленной НДКЗ (1)–(3) при больших t строится асимптотическое решение ИУ (4) при малых p или больших Λ . Учитывая, что символ ядра ИУ (4) функция $K(\alpha)$ не имеет особых точек на действительной оси комплексной плоскости $\alpha = \sigma + i\tau$, контур интегрирования Γ в (5) деформируется до совпадения с действительной осью. Тогда ядро ИУ (4) принимает вид

$$k(t) = \int_0^\infty K(\alpha) \cos \alpha t d\alpha. \quad (45)$$

Функция $K(\alpha)$ при $\alpha \rightarrow \infty$ имеет асимптотическое представление

$$K(\alpha) = |\alpha|^{-1} + h_1 |\alpha|^{-3} + h_2 |\alpha|^{-5} + O(|\alpha|^{-7}), \quad |\alpha| \rightarrow \infty, \quad (46)$$

$$h_1 = -\frac{3\beta^4 - 4\beta^2 + 3}{4(1-\beta^2)},$$

$$h_2 = -\frac{\beta^8 + 2\beta^6 - 18\beta^4 + 22\beta^2 - 11}{16(1-\beta^2)^2},$$

уточняющее (10). В этом случае ядро (45) ИУ (4) при больших значениях Λ представляется в виде

$$k(t) = -\ln|t| - F(t), \quad t = (\xi - x)/\Lambda, \quad (47)$$

где функция $F(t)$ определяется формулой

$$F(t) = a_{00} + a_{11} t^2 \ln|t| + a_{10} t^2 + a_{21} t^4 \ln|t| + a_{20} t^4 + a_{20} t^4 - \int_0^\infty \left[K(\alpha) - \frac{1}{\alpha} - \frac{h_1}{\alpha^2} - \frac{h_2}{\alpha^5} \right] \left(\cos \alpha t - 1 + \frac{\alpha^2 t^2}{2!} - \frac{\alpha^4 t^4}{4!} \right) d\alpha, \quad (48)$$

в которой постоянные a_{ij} определяются через $K(\alpha)$:

$$a_{00} = - \int_0^\infty \left[K(\alpha) - \frac{1}{\alpha} + \frac{e^{-\alpha}}{\alpha} \right] d\alpha, \quad (49)$$

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \frac{h_1}{2}, \\
 a_{10} &= -\frac{3}{4}h_2 + \frac{1}{2} \int_0^\infty \left[K(\alpha) - \frac{1}{\alpha} - \frac{h_1}{\alpha} - \frac{h_1}{\alpha^3} e^{-\alpha} \right] \alpha^2 d\alpha, \\
 a_{21} &= \frac{h_2}{24}, \\
 a_{20} &= \frac{1}{24} \left\{ \frac{25}{288} h_2 - \int_0^\infty \left[K(\alpha) - \frac{1}{\alpha} - \frac{h_1}{\alpha} - \frac{h_2}{\alpha^3} e^{-\alpha} + \frac{h_2}{\alpha^5} e^{-\alpha} \right] \alpha^4 d\alpha \right\}.
 \end{aligned}$$

Подставив (47) в ИУ (4), получим эквивалентное ему уравнение вида

$$- \int_{-1}^1 \varphi^L(\xi, p) \ln \left| \frac{\xi - x}{\Lambda} \right| d\xi = \pi f_0^L(x, p) + \int_{-1}^1 \varphi^L(\xi, p) F \left(\frac{\xi - x}{\Lambda} \right) d\xi. \quad (50)$$

Дифференцируя последнее по переменной x , получаем сингулярное ИУ вида

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi^L(\xi, p)}{\xi - x} d\xi = \pi \frac{\partial}{\partial x} f_0^L(x, p) + \int_{-1}^1 \varphi^L(\xi, p) F'_x \left(\frac{\xi - x}{\Lambda} \right) d\xi. \quad (51)$$

Обращение сингулярного оператора в (51) дается [4] формулой

$$\begin{aligned}
 \varphi^L(x, p) &= \frac{P_*(p)}{\pi\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x} \frac{\partial}{\partial t} f^L(t, p) dt - \\
 &\quad - \frac{1}{\pi^2\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x} dt \int_{-1}^1 \varphi^L(\xi, p) F'_t \left(\frac{\xi-t}{\Lambda} \right) d\xi, \quad (52)
 \end{aligned}$$

в которой $P_*(p)$ определяется соотношением

$$P_*(p) = \int_{-1}^1 \varphi^L(\xi, p) d\xi. \quad (53)$$

Отсюда следует, что $P_*(p) = aP^L(p)$, а $P^L(p)$ есть трансформанта Лапласа, действующей на штамп силы $P(t)$.

Из (48) видна структура функции $F(t)$, которая может быть представлена рядами

$$F(t) = \ln |t| \sum_{i=1}^{\infty} a_{i1} t^{2i} + \sum_{i=0}^{\infty} a_{i0} t^{2i}, \quad (54)$$

а само ядро ИУ представляется с помощью этих же рядов

$$k(t) = -\ln |t| - \ln |t| \sum_{i=1}^{\infty} a_{i1} t^{2i} - \sum_{i=0}^{\infty} a_{i0} t^{2i}, \quad t = \frac{\xi - x}{\Lambda}. \quad (55)$$

Из (54) и (48), (49), с учетом свойства (46) $K(\alpha)$, следует, что $F(t)$ является регулярной функцией в некоторой полосе $|\operatorname{Re} t| < c_0$ комплексного t ($c_0 = \text{const}$).

С учетом структуры ядра ИУ (55) нетрудно определить структуру решения ИУ (52), например, с помощью метода последовательных приближений. Решение ИУ (52) эквивалентного ИУ (4) принимается в виде ряда

$$\varphi^L(x, p) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{nk}(x) \Lambda^{-2n} \ln^k \Lambda, \quad (56)$$

в котором $\varphi_{nk}(x) = 0$ при $n < k$, а $\varphi_{nk}(x)$ при $n \geq k$ определяются подстановкой (56) в (52) и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях $\Lambda^{-2k} \ln^n \Lambda$ и Λ^{-2k} ($k, n = 0, 1, 2, \dots$):

$$\varphi_{00}(x) = \frac{P_*(p)}{\pi\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x} [f_0^L(t, p)]'_t dt, \quad (57)$$

$$\varphi_{10}(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x} dt \int_{-1}^1 \varphi_{00}(\xi) \omega_{11}(\xi - t) d\xi,$$

$$\varphi_{11}(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x} dt \int_{-1}^1 \varphi_{00}(\xi) \omega_{10}(\xi - t) d\xi,$$

$$\varphi_{20}(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x} dt \int_{-1}^1 [\varphi_{10}(\xi) \omega_{11}(\xi - t) + \varphi_{00}(\xi) \omega_{21}(\xi - t)] d\xi,$$

$$\begin{aligned}
 \varphi_{21}(x) &= -\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x} dt \times \\
 &\quad \times \int_{-1}^1 [\varphi_{10}(\xi) \omega_{10}(\xi - t) + \varphi_{11}(\xi) \omega_{11}(\xi - t) + \varphi_{00}(\xi) \omega_{20}(\xi - t)] d\xi,
 \end{aligned}$$

$$\varphi_{22}(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x} dt \int_{-1}^1 \varphi_{11}(\xi) \omega_{10}(\xi - t) d\xi, \dots$$

Для определения $P_*(p)$ в (57) достаточно в (50) левую и правую части умножить на $dx/\sqrt{1-x^2}$ и проинтегрировать от -1 до 1 по x :

$$P_*(p) = \frac{1}{w(\Lambda)} \int_{-1}^1 \frac{f_0^L(x, p)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad (58)$$

$$w(\Lambda) = \ln 2\Lambda + \sum_{n=0}^2 \sum_{k=0}^2 d_{nk} \Lambda^{-2n} \ln^k \Lambda + O(\Lambda^{-6} \ln^3 \Lambda),$$

$$d_{nk} = 0 \quad (n < k), \quad d_{00} = -a_{00}, \quad d_{10} = -\frac{1}{4} [4a_{10} + (1 + 2 \ln 2)a_{11}],$$

$$d_{11} = a_{11}, \quad d_{20} = \frac{1}{4} \left[a_{10} + \frac{1}{2} (3 - 2 \ln 2)a_{11} - 9a_{20} - (4 + 5 \ln 2)a_{21} \right],$$

$$d_{21} = -\frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} (3 - 2 \ln 2)a_{11}^2 - 9a_{21} \right], \quad d_{22} = -\frac{1}{4} a_{11}^2.$$

В случае плоского штампа, когда $f^L(x, p) = f^L(p)$, решение (50) ИУ (4) приобретает простой вид

$$\varphi^L(x, p) = \frac{P_*(p)}{\pi\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \sum_{k=0}^2 \sum_{n=0}^2 \varphi_{nk}^0(x) \Lambda^{-2n} \ln^k \Lambda, \quad (59)$$

$$\varphi_{00}^0(x) = 1, \quad \varphi_{10}^0(x) = [(3 - 2 \ln 2)a_{11} + 2a_{10}] \left(\frac{1}{2} - x^2 \right),$$

$$\varphi_{20}^0(x) = \theta_1 \left(\frac{1}{8} + \frac{x^2}{2} - x^4 \right) + \theta_2 \left(\frac{1}{2} - x^2 \right),$$

$$\varphi_{21}^0(x) = -\frac{2}{3}a_{11}^2 \left(\frac{1}{8} + \frac{x^2}{2} - x^4 \right) - 2a_{11}^2 \left(2 \ln 2 + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} - x^2 \right) +$$

$$+ 4a_{21}^2 \left(\frac{7}{8} - x^2 - x^4 \right), \quad \varphi_{22}^0(x) = 0,$$

$$\theta_1 = -\frac{1}{3}[(3 - 2 \ln 2)a_{11} + 2a_{10}]a_{11} + (a_{21} + 4a_{20}) \left[\frac{2}{3}(6 \ln 2 - 11)a_{21} - 1 \right],$$

$$\theta_2 = \left(2 \ln 2 + \frac{1}{2} \right) [(3 - 2 \ln 2)a_{11} + 2a_{10}] - (a_{21} + 4a_{20}) \left[\frac{3}{4} + 2 \left(\ln 2 + \frac{1}{2} \right) a_{21} \right].$$

Формулы для $P_*(p)$ в этом случае получаются из (58) и имеют вид

$$P_*(p) = \frac{2\pi(1-\beta^2)\mu}{aw(\Lambda)} f^L(p). \quad (60)$$

Переходя в (59), (60) к оригиналам Лапласа, для случая плоского штампа получаем асимптотическое решение контактной задачи при больших t ($t > 2a/c_2$, $\Lambda_0 = c_2/a$):

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \left\{ P_*(t) + \ddot{P}_*(t)\varphi_{11}^0(x)\Lambda_0^{-2} \ln \Lambda_0 + \right.$$

$$+ \left[\ddot{P}_*(t)\varphi_{00}^0(x) + \varphi_{11}^0(x) \int_0^t \frac{2!P_*(\tau)}{(t-\tau)^3} d\tau \right] \Lambda_0^{-2} +$$

$$+ P_*^{(4)}(t)\varphi_{21}^0(x)\Lambda_0^{-4} \ln \Lambda_0 +$$

$$+ \left[P_*^{(4)}(t)\varphi_{20}^0(x) + \varphi_{20}^0(x) \int_0^t \frac{4!P_*(\tau)}{(t-\tau)^5} d\tau \right] \Lambda_0^{-4} \left. \right\} +$$

$$+ O(\Lambda_0^{-6} \ln^3 \Lambda_0). \quad (61)$$

Асимптотические формулы для $P_*(t)$ получаются из (60), если $w^{-1}(\Lambda)$ разложить при больших Λ и перейти к оригиналам преобразования Лапласа:

$$P_*(t) = -2\pi(1-\beta^2)\mu a^{-1} \sum_{k=0}^6 l_k \int_0^t g_{k+1}(\tau) f(t-\tau) d\tau, \quad (62)$$

$$g_1(t) = u_{001}(\tau), \quad g_2(t) = u_{112}(\tau), \quad g_3(t) = u_{101}(\tau),$$

$$g_4(t) = 3u_{223}(\tau) - \pi^2 u_{203}(\tau), \quad g_5(t) = 2u_{212}(\tau),$$

$$g_6(t) = u_{201}(\tau), \quad g_7(t) = (a\delta/c_2)^6 \delta(t), \quad \tau = c_2(a\delta)^{-1}t, \quad \delta = (2d_0)^{-1},$$

$$u_{nmq}(\tau) = \int_0^\infty x^{2n} \ln^m x (\ln^2 x + \pi^2)^{-q} e^{-x\tau} dx,$$

$$l_0 = 1, \quad l_1 = b_1, \quad l_2 = b_2, \quad l_3 = b_1^2, \quad l_4 = b_3 + 2b_1b_2, \quad l_5 = b_4 + b_2^2, \quad l_6 = b_5,$$

$$b_1 = (d_{10} + d_{11} \ln \delta)\delta^{-2}, \quad b_2 = -d_{11}\delta^2, \quad b_5 = d_{22}\delta^{-4},$$

$$b_3 = (d_{20} + d_{21} \ln \delta + d_{22} \ln^2 \delta)\delta^{-4}, \quad b_4 = -(d_{21} + d_{22} \ln \delta)\delta^{-4}.$$

Формулы для d_{ik} ($i, k = 0, 1, 2, \dots$) даны в (58).

Предельный переход при $t \rightarrow \infty$ осуществить не удастся, так как соответствующая статическая задача о вдавлении жесткого штампа в упругую полуплоскость дает связь между контактными напряжениями и смещением штампа с точностью до постоянной. Заметим, что сила $P(t) = aP_*(t)$, действующая на штамп, при задании закона движения штампа $f(t) = f^0 H(t)$, означающего мгновенное внедрение штампа в начальный момент времени на глубину f^0 в упругую полуплоскость и удерживание силой $P(t)$ в этом положении, при больших t является функцией убывающей с асимптотикой по времени t следующего вида

$$P_*(t) = -2\pi(1-\beta^2)\mu \ln^{-1} t + O(\ln^{-2} t), \quad t \rightarrow \infty. \quad (63)$$

Казалось бы, формула (63) указывает на нарушение физического смысла решения динамической контактной задачи при $t \rightarrow \infty$, однако можно считать, что (62) справедлива на ограниченном интервале изменения t ($2 < t < \tau_*$, $\tau_* = c_2(a\delta)^{-1}t$), где τ_* определяется опытным путем. Кроме того, асимптотика (63) аналогична асимптотике силы P соответствующей плоской статической контактной задачи для полосы, когда ширина полосы h неограниченно возрастает [9] ($h \rightarrow \infty$).

1.11. Трансформанта закона движения штампа $f^L(p)$ определяется из уравнения (37), аналогично тому как это было сделано в п. 1.9 и имеет вид

$$f^L(p) = \frac{[f(0)p + v_0]w(\Lambda)}{p^2 w(\Lambda) + 2\pi(1-\beta^2)\mu M^{-1}}, \quad \Lambda = \frac{c_2}{ap}, \quad (64)$$

где $w(\Lambda)$ определено формулой (58). Разложив (64) по степеням p^m и $p^n \ln^k p$ при малых p и переходя к оригиналам, получим разложение для $f(t)$ по степеням t^{-m} и $t^{-n} \ln^k t$ вида

$$f(t) = \tau^{-1} - 2m_1 \tau^{-3} + 4m_2 \left(\ln \gamma \tau - \frac{3}{2} \right) \tau^{-3} -$$

$$- 24m_3 \tau^{-5} + 4m_4 (12 \ln \gamma \tau - 25) \tau^{-5} -$$

$$- 12m_5 (6 \ln^2 \gamma \tau - 25 \ln \gamma \tau + 17.5 + \pi^2) \tau^{-5} + O(\tau^{-6} \ln^3 \tau), \quad (65)$$

где $\tau = t/h$, $h = a/c_2$, $\gamma = e^C$, C — постоянная Эйлера–Маскерони, а m_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) вычисляются по формулам

$$m_1 = d_{11} - 2\kappa(\ln 2 - 2\kappa d_{00}), \quad m_2 = -\kappa,$$

$$m_3 = d_{21} - 2\kappa d_{10} + (d_{11} \ln 2 + d_{00} d_{11}) + 3\kappa^2 (\ln 2 d_{00})^2,$$

$$m_4 = d_{22} - 2\kappa d_{11} + 3\kappa^2 (\ln 2 + d_{00}), \quad m_5 = \kappa^2,$$

$$\kappa^{-1} = 2\pi(1-\beta^2)\mu h^2 M^{-1}, \quad h = a/c_2.$$

Часто более удобной является формула для $f(t)$, полученная без переразложения $w(\Lambda)$ по Λ с помощью контурного интеграла Лапласа.

Оставляя в формуле (64) члены второго порядка малости по p , для $f(t)$ получаем

$$(v_0 h)^{-1} f(t) = 2\eta_0 \int_0^\infty \frac{e^{-x\tau} dx}{(-x^2 \ln x^2 + \eta_1 x^2 + \eta_0)^2 + 4\pi^2 x^2} + \\ + 2 \operatorname{Re} \left[\frac{(-\ln p^2 + \eta_1) e^{p\tau}}{2p(\ln p^2 + 1 - \eta_1)} \right]_{p=p_1}, \quad \operatorname{Re} p_1 < 0, \quad (66)$$

$$\eta_0 = 4\pi(1 - \beta^2)\mu h^2 M^{-1}, \quad 1 = 2(\ln 2 + d_0),$$

где p_1 — корень уравнения $-p^2 \ln p^2 + \eta_1 p^2 + \eta_0 = 0$, что справедливо при $2 < \tau < \tau_*$, где τ_* выбирается, как в (62).

2. Пространственные осесимметричные задачи.

2.1. Исследованию пространственных осесимметричных нестационарных динамических контактных задач (НДКЗ) посвящено достаточно много работ. Подавляющая часть работ в этом направлении посвящена разработке численных методов решения этого класса задач, о чем свидетельствует библиография работы [6]. Аналитическому исследованию осесимметричных НДКЗ посвящено весьма ограниченное количество работ. Построению аналитического метода решения посвящена работа Поручикова [17] (более подробно метод решения изложен в его монографии [16]), где, наверное, впервые было получено аналитическое решение этой задачи. Некоторые более поздние работы [13, 14, 23, 24] также посвящены разработке аналитических методов решения этого класса задач.

Асимптотические методы решения осесимметричных НДКЗ не получили пока достаточного развития и встречаются лишь эпизодически в некоторых работах. К ним следует отнести работы [2, 3, 20], а также ряд других работ, использующих при решении осесимметричных НДКЗ несколько различных методов. Библиография такого типа работ собрана в [6].

Ниже представлены асимптотические методы решения осесимметричных НДКЗ, в основу которых положен метод интегрального уравнения.

2.2. Рассматривается осесимметричная НДКЗ о внедрении жесткого цилиндрического штампа радиуса a ($r < a$) в упругое полупространство ($z \geq 0$, $0 \leq r < \infty$). Считается, что силы трения и сцепления между штампом и полупространством отсутствуют. Форма штампа и его осадка в полупространстве дается функцией $f(r, t)$ ($0 \leq r \leq a$, $t \geq 0$). В начальный момент времени ($t=0$) ее смещения $u(r, z, t)$, $w(r, z, t)$ и их скорости $\partial u/\partial t$, $\partial w/\partial t$ равны нулю. Смещения упругой среды u , w при $r, z \rightarrow \infty$ (в зоне покоя) равны нулю, вместе со своими частными производными по r и z .

В общепринятых обозначениях теории упругости смешанные гранич-

ные условия задачи имеют вид ($t \geq 0$)

$$\begin{aligned} \tau_{yz} &= 0 & (0 \leq r < \infty, z = 0), \\ \sigma_{zz} &= 0 & (a \leq r < \infty, z = 0), \\ w &= f(r, t) & (0 \leq r \leq a, z = 0), \end{aligned} \quad (67)$$

где $\tau_{yz}(r, z, t)$, $\sigma_{zz}(r, z, t)$ — касательные и нормальные напряжения на поверхности упругой среды, соответственно.

С помощью интегральных преобразований [15] Лапласа (по времени t) и Ханкеля (по координате r) поставленная смешанная задача (67) приводится к интегральному уравнению (ИУ)

$$\int_0^1 \varphi^L(\xi, p) k\left(\frac{\xi}{\Lambda}, \frac{r}{\Lambda}\right) d\xi = \theta_0 f^L(r, p), \quad 0 \leq r \leq 1, \quad (68)$$

$$k(\xi, r) = \int_0^\infty K(u) J_0(\xi u) J_0(r u) du,$$

$$K(u) = u \sigma_2 R^{-1}(u), \quad R(u) = (2u^2 + 1)^2 - 4u^2 \sigma_1 \sigma_2,$$

$$\sigma_1 = \sqrt{u^2 + 1}, \quad \sigma_2 = \sqrt{u^2 + \beta^2}, \quad \theta_0 = \mu c_2 / a^2 p, \quad \Lambda = c_2 / a p,$$

которое, в свою очередь, приводится [1] к решению эквивалентного ему ИУ с разностным ядром

$$\int_{-1}^1 \omega(\xi, p) k\left(\frac{\xi - x}{\Lambda}\right) d\xi = 2\pi \theta g(x, p), \quad |x| \leq 1, \quad (69)$$

$$k(t) = \int_{-\infty}^\infty K(u) e^{iut} du, \quad (70)$$

$$K(u) = 2(1 - \beta^2) |u| \sqrt{u^2 + \beta^2} R^{-1}(u), \quad (71)$$

$$\omega(\zeta, p) = \int_\zeta^1 \frac{\varphi^L(\xi, p) \xi}{\sqrt{\xi^2 - \zeta^2}} d\xi, \quad \theta = 2(1 - \beta^2) \theta_0. \quad (72)$$

$$g(x, p) = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{r f^L(r, p)}{\sqrt{x^2 - r^2}} dr.$$

Соотношение (72) представляет ИУ типа Абея. Решив уравнение (72), получим связь между функциями $\varphi^L(x, p)$ и $\omega(\zeta, p)$, выраженную формулой

$$\varphi^L(x, p) = -\frac{2}{\pi x} \frac{d}{dx} \int_x^1 \frac{\omega^L(\zeta, p) \zeta}{\sqrt{\zeta^2 - x^2}} d\zeta. \quad (73)$$

2.3. Символ ядра ИУ (69) функция $K(u)$ (71) в комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$ является обобщенной функцией и применение методов решения

ИУ (69), разработанных для решения плоских задач, становится затруднительным. Для того чтобы обойти это затруднение, вводится в рассмотрение новая функция

$$K_\varepsilon(u) = 2(1 - \beta^2)\sqrt{u^2 + \varepsilon^2}\sqrt{u^2 + \beta^2}R^{-1}(u), \quad (74)$$

для которой очевидно выполняется предельный переход

$$K(u) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K_\varepsilon(u). \quad (75)$$

При этом ИУ (69) с новым символом ядра $K_\varepsilon(u)$ записывается в виде

$$\int_{-1}^1 \omega_\varepsilon(\xi, p) k_\varepsilon\left(\frac{\xi-x}{\Lambda}\right) d\xi = 2\pi\theta g(x, p) \quad |x| \leq 1, \quad (76)$$

$$k_\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K_\varepsilon(u) e^{iut} du.$$

Так как интегральный оператор в (76) равномерно по ε на промежутке $|x| \leq 1$ стремится к оператору, стоящему в левой части (69), то

$$\omega(x, p) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega_\varepsilon(x, p). \quad (77)$$

Новая функция $K_\varepsilon(u)$ в комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$ является функцией четной, вещественной на действительной оси ($\tau = 0$), имеет шесть точек ветвления алгебраического типа в этой плоскости $u = \pm i$, $u = \pm\beta$, $u = \pm i\varepsilon$ и два полюса $u = \pm i\eta_0$ (полюсы Релея) и обладает следующими асимптотическими свойствами

$$K_\varepsilon(u) = A\varepsilon + O(u^2), \quad u \rightarrow 0, \quad A = 2\beta(1 - \beta^2), \quad (78)$$

$$K_\varepsilon(u) = 1 + O(u^{-2}), \quad u \rightarrow \infty. \quad (79)$$

Для получения главного члена асимптотического разложения ИУ (69) при больших значениях p (малые Λ) функция $K_\varepsilon(u)$, следуя п. 1.6 предыдущего параграфа, аппроксимируется выражением $K_\varepsilon^0(u)$ следующего специального вида

$$K_\varepsilon^0(u) = \frac{\sqrt{u^2 + \varepsilon^2}\sqrt{u^2 + \beta^2}}{u^2 + \eta_0^2} M(u), \quad (80)$$

$$M(u) = \exp[-d(\sqrt{\beta + iu}\sqrt{1 + iu} + \sqrt{\beta - iu}\sqrt{1 - iu} - 1 - \beta)],$$

в котором параметр аппроксимации d определяется из условия $K_\varepsilon(0) = K_\varepsilon^0(0)$ и дается формулой

$$d = (1 - \sqrt{\beta})^{-2} \ln(A\eta_0^2/\beta). \quad (81)$$

Аппроксимация $K_\varepsilon^0(u)$ обладает всеми вышеуказанными свойствами функции $K_\varepsilon(u)$ и является однозначной и регулярной в этой плоскости с

проведенными в ней разрезами от точек ветвления до $\pm i\infty$ вдоль мнимой оси ($\sigma = 0$) с выколотыми точками $u = \pm i\eta_0$ и выбранными ветвями на разрезах из условия $\sqrt{1} = 1$. Расхождение вдоль действительной оси ($\tau = 0$) между $K_\varepsilon(u)$ и $K_\varepsilon^0(u)$ при всех $\nu \in [0, 0.44]$ не превосходит 4%.

Главный член асимптотики решения ИУ (76) при малых значениях Λ представляется в мультипликативной форме

$$\omega_\varepsilon(x, p) = \mu_0 \omega_\pm^\varepsilon\left(\frac{1+x}{\Lambda}, p\right) \omega_\mp^\varepsilon\left(\frac{1-x}{\Lambda}, p\right) / \omega_\infty^\varepsilon\left(\frac{x}{\Lambda}, p\right), \quad (82)$$

в которой функции $\omega_\pm^\varepsilon(x, p)$ и $\omega_\infty^\varepsilon(x, p)$ являются решениями интегральных уравнений

$$\int_0^\infty \omega_\pm^\varepsilon(\xi, p) d\xi \int_{-\infty}^\infty K_\varepsilon^0(u) e^{iu(\xi-x)} du = \frac{2\pi\theta}{\Lambda} g(\pm\Lambda x \mp 1, p), \quad 0 \leq x < \infty, \quad (83)$$

$$\int_{-\infty}^\infty \omega_\infty^\varepsilon(\xi, p) d\xi \int_{-\infty}^\infty K_\varepsilon^0(u) e^{iu(\xi-x)} du = \frac{2\pi\theta}{\Lambda} g(\Lambda x, p), \quad -\infty < x < \infty, \quad (84)$$

а μ_0 — корректирующий множитель, определяемый в ходе решения ИУ (76). После определения $\omega_\pm^\varepsilon(x, p)$, $\omega_\infty^\varepsilon(x, p)$, в случае плоского штампа $f(x, t) = f(t)$ решение (82) принимает вид

$$\omega_\varepsilon(x, p) = 2\mu_0(1 - \beta^2)\mu a^{-1} f^\pm(p) \Omega_\pm^\varepsilon\left(\frac{1+x}{\Lambda}, p\right) \Omega_\mp^\varepsilon\left(\frac{1-x}{\Lambda}, p\right), \quad (85)$$

$$\Omega_\pm^\varepsilon\left(\frac{1+x}{\Lambda}, p\right) = \frac{1}{\pi} \int_\beta^1 \vartheta(y) e^{-d(1+\beta-2y)/2} \sin d\sqrt{1-y}\sqrt{y-\beta} e^{-yx} dy +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_\varepsilon^\beta \vartheta(y) e^{-d(\sqrt{1-y}-\sqrt{\beta-y})^2/2} e^{-yx} dy + \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon\beta}} e^{-d(1-\sqrt{\beta})^2/2}, \quad (86)$$

$$\vartheta(y) = \frac{y - \eta_0}{y\sqrt{y-\varepsilon}\sqrt{\pm\beta \mp y}}, \quad \mu_0 = \frac{\pi}{4}.$$

Осуществляя теперь переход к оригиналам Лапласа в формуле для $\omega_\varepsilon(x, p)$ (85) и переходу затем в полученных формулах к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем

$$\omega(x, t) = \frac{\pi}{2}(1 - \beta^2) \left[\frac{\mu}{a} \int_0^t f(\tau) G(x, t - \tau) d\tau + f(0)G(x, t) \right], \quad (87)$$

$$G(x, t) = \int_0^t \Omega_\pm^0(a+x, \tau) \Omega_\mp^0(a-x, t-\tau) d\tau,$$

$$\Omega_\pm^0(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Omega_\pm^\varepsilon(x, t),$$

$$\Omega_\pm^0(a \pm x, t) = \frac{\eta(t)e(0, t_1^\pm)}{(t_1^\pm - t)^{1/2}} \exp\left[-\frac{d}{2} \frac{[(t_2^\pm - t)^{1/2} - (t_1^\pm - t)^{1/2}]^2}{t_2^\pm}\right] +$$

$$+ \frac{\eta(t)e(t_1^\pm, t_2^\pm)}{(t - t_1^\pm)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1+\beta}{2} d + \frac{td}{t_2^\pm}\right) \sin d \frac{(t_2^\pm - t)^{1/2}(t - t_1^\pm)^{1/2}}{t_2^\pm},$$

$$\eta(t) = \frac{t - \eta_0 t_2^\pm}{\pi t \sqrt{t}}, \quad e(u, v) = H(t - u) - H(t - v),$$

$$t_i^\pm = \frac{a \pm x}{c_i} \quad (i = 1, 2),$$

где $f(0)$ — начальное внедрение штампа (до момента времени $t = 0$).

Асимптотическое решение поставленной контактной задачи $\varphi(r, t)$ при малых t дается формулой, полученной после применения обратного преобразования Лапласа к (73)

$$\varphi(r, t) = \frac{2a}{\pi} \left[\frac{\omega(a, t)}{\sqrt{a^2 - r^2}} - \int_r^a \frac{\omega'_\xi(\xi, t)}{\sqrt{\xi^2 - r^2}} d\xi \right], \quad 0 \leq r \leq a. \quad (88)$$

2.4. Для вычисления силы $P(t)$, действующей на штамп, воспользуемся общей формулой, которая для рассматриваемой задачи имеет вид

$$P(t) = 2\pi \int_0^a \varphi(r, t) dr. \quad (89)$$

Главный член асимптотического изображения Лапласа силы $P(t)$ функция $P^L(p)$ дается формулой

$$P^L(p) = \pi b \beta^{-1} a^2 \gamma^{-1} f^L(p) \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+c}^{i\infty+c} \frac{e^{\gamma z} dz}{[z K_{0+}^0(iz)]^2}, \quad (90)$$

в которой

$$K_{0+}^0(iz) = \frac{\sqrt{z\sqrt{\beta+z}}}{\eta_0 + z} \exp \left[-d \left(\sqrt{\beta+z} \sqrt{1+z} - z - \frac{1+\beta}{2} \right) \right].$$

Здесь $b = 2(1 - \beta^2)\mu a^{-1}$, $\gamma = 2/\Lambda$, d — определено в (81).

Вычислив квадратуру в (90) при $t < 2a/c_1$, получим асимптотическую формулу для $P(t)$:

$$P(t) = \pi^2 b a^2 \left[\frac{2a \dot{f}(t)}{c_2 K_{1+}^2(0)} - \frac{4i K_{1+}'(0)}{K_{1+}^3(0)} f(t) - \left(\frac{6K_{1+}''(0)}{K_{1+}^4(0)} - \frac{2K_{1+}''(0)}{K_{1+}^3(0)} \right) \frac{c_2}{2a} \int_0^t f(\tau) d\tau + \frac{2a}{c_2} \frac{f(0)}{K_{1+}^2(0)} \delta(t) \right]. \quad (91)$$

Здесь $K_{1+}(iz)$, $K_{1+}(0)$, $K_{1+}'(0)$, $K_{1+}''(0)$ даются формулами

$$K_{1+}(iz) = K_{0+}^0(iz)/z, \quad K_{1+}(0) = \sqrt{A},$$

$$K_{1+}'(0) = \frac{i\sqrt{A}}{2\beta\eta_0} [\eta_0 - 2\beta - \sqrt{\beta}\eta_0 \ln(A\eta_0^2/\beta)],$$

$$K_{1+}''(0) = \sqrt{A} \left[\frac{\eta_0^2 + 4\beta\eta_0 - 8\beta^2}{4\beta^2\eta_0^2} + \frac{\eta_0 - 2\beta}{2\beta\sqrt{\beta}\eta_0} dh^2 - \frac{h^4 d^2}{4\beta} - \frac{(1-\beta)^2 d}{4\beta\sqrt{\beta}} \right], \quad h = 1 - \sqrt{\beta},$$

в которых A определено в (78), а d — в (81).

2.5. Асимптотическое решение ИУ (69) при малых значениях p или больших значениях Λ (большое время t контактного взаимодействия) строится аналогично тому, как было построено решение при больших t для плоской задачи (п. 1.10). Ядро $k(t)$ (70) ИУ (69) представляется на основании асимптотических свойств $K(u)$ (78), (79) в форме

$$2^{-1} k(t) = \pi \delta(t) - \int_0^\infty [1 - K(u)] \cos ut du, \quad (92)$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака. Такое представление ядра позволяет ИУ (69) записать в виде ИУ второго рода

$$\omega(x, p) = \theta \Lambda^{-1} g(x, p) + (\pi \Lambda)^{-1} \int_{-1}^1 \omega(\xi, p) F\left(\frac{\xi - x}{\Lambda}\right) d\xi, \quad (93)$$

$$F(t) = \int_0^\infty (1 - K(u)) \cos ut du,$$

в котором функция $F(t)$ является функцией четной, регулярной в полосе комплексной плоскости ($w = t + i\tau$) $|t| < \infty$, $|\tau| < 1$ и представляется при $|t| < 1$ в виде ряда

$$F(t) = \sum_{n=0}^4 a_n |t|^n + F_1(t), \quad (94)$$

$$a_0 = \int_0^\infty [1 - K(u)] du, \quad a_1 = \frac{\pi}{2} h_1,$$

$$a_2 = -\frac{1}{2} \int_0^\infty [u^2 - u^2 K(u) + h_1] du, \quad a_3 = -\frac{\pi}{12} h_2,$$

$$a_4 = \frac{1}{24} \int_0^\infty [u^4 - u^4 K(u) + h_1 u^2 + h_2] du,$$

$$F_1(t) = \int_0^\infty \left(1 - K(u) + \frac{h_1}{u^2} + \frac{h_2}{u^4} \right) \left(\cos ut - 1 + \frac{u^2 t^2}{2!} - \frac{u^4 t^4}{4!} \right) du = O(t^6),$$

где $F_1(t)$ представляется рядом $F_1(t) = \sum_{n=0}^\infty a_n |t|^n$ (a_n определяются по схеме (30)), так как $K(u)$ при больших u имеет представление

$$K(u) = 1 + \frac{h_1}{u^2} + \frac{h_2}{u^4} + O\left(\frac{1}{u^6}\right) \quad u \rightarrow \infty, \quad (95)$$

где h_1, h_2 совпадают с (46).

Структура $F(t)$ показывает, что решение ИУ (69) следует искать в виде ряда по отрицательным степеням Λ :

$$\omega(x, p) = \sum_{n=0}^\infty \omega_n(x, p) \Lambda^{-n}, \quad (96)$$

где $\omega_n(x, p)$ находятся подстановкой (96) в (93) и даются формулами ($b = 2(1 - \beta^2)\mu a^{-1}$)

$$\begin{aligned}\omega_0(x, p) &= b \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{r f^L(r, p)}{\sqrt{x^2 - r^2}} dr, \\ \omega_1(x, p) &= \frac{2ba_0}{\pi} \int_0^1 \frac{r f^L(r, p)}{\sqrt{1 - r^2}} dr, \\ \omega_2(x, p) &= \frac{2b}{\pi} \left\{ \int_0^x \frac{r f^L(r, p)}{\sqrt{x^2 - r^2}} \left[\frac{2a_0^2}{\pi} + a_1 \left(1 - \sqrt{1 - r^2} \ln \frac{1 - \sqrt{1 - r^2}}{r} \right) \right] dr + \right. \\ &\quad \left. + a_1 \int_0^1 r f^L(r, p) \ln \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - r^2}}{r} \right) dr \right\}, \\ \omega_3(x, p) &= \frac{2b}{\pi} \left\{ \int_0^x \frac{r f^L(r, p)}{\sqrt{x^2 - r^2}} \left[\frac{4a_0^2}{\pi} + \frac{a_0 a_1}{\pi} \left(1 - \sqrt{1 - r^2} \ln \frac{1 - \sqrt{1 - r^2}}{r} \right) \right] dr + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 r f^L(r, p) \left[2a_1 \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - r^2}}{r} - (a_1 + 2a_2)\sqrt{1 - r^2} \right) \right] dr + \right. \\ &\quad \left. + (1 + x^2) \left(\frac{a_0 a_1}{\pi} + a_2 \right) \int_0^1 \frac{r f^L(x, p)}{\sqrt{1 - r^2}} dr \right\}, \dots\end{aligned}$$

Асимптотическое решение поставленной контактной задачи при больших t дается формулой (88). Переходя к оригиналам в (96) и подставляя их в (88), получаем решение контактной задачи

$$\begin{aligned}\varphi(r, t) &= \frac{2a}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{c_2} \right)^n \left[\frac{w_n(t)}{\sqrt{a^2 - r^2}} + \frac{\partial^n}{\partial t^n} \int_r^a \frac{\partial w_n(\zeta, t)}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - r^2}} \right], \quad (97) \\ w_n(t) &= \omega_n^{(n)}(a, t).\end{aligned}$$

В (97) $\omega_n^{(n)}(a, t)$ обозначает в символической форме производную по t от $\omega_n(a, t)$. Полученное решение (97) справедливо при $t > 2a/c_2$, что следует из интервала сходимости рядов (94), (96).

В частном случае, когда штамп плоский, т.е. при $f(r, t) = f(t)$, решение контактной задачи без учета обобщенной составляющей решения и с сохранением в нем первых четырех членов имеет вид

$$\begin{aligned}\varphi(r, t) &= \frac{2ba}{\pi\sqrt{a^2 - r^2}} \left\{ f(t) + \frac{2a_0}{\pi} \frac{a}{c_2} f(t) + \frac{2}{\pi} \left[\frac{2a_0^2}{\pi} + a_1 \left(4 - 3 \frac{r^2}{a^2} \right) \right] \left(\frac{a}{c_2} \right)^2 \ddot{f}(t) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\pi} \left[\frac{4a_0^3}{\pi^2} + \frac{3a_0 a_1}{\pi} \left(3 - 2 \frac{r^2}{a^2} \right) + \frac{2a_1}{3} + \frac{2a_2}{3} \left(11 - 9 \frac{r^2}{a^2} \right) \right] \left(\frac{a}{c_2} \right)^3 f^{(3)}(t) \right\}. \quad (98)\end{aligned}$$

Формула для действующей на штамп силы с учетом формул (89) и (97) имеет вид

$$P(t) = 4a^2 b \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{c_2} \right)^n \int_0^1 \frac{\partial^n \omega_n(\zeta, t)}{\partial t^n} d\zeta. \quad (99)$$

ТАБЛИЦА 2

τ	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
$\omega P(t)$	11,03	9,51	7,99	—	—	—
$\omega P(t)$	—	—	7,80	8,42	9,04	9,65
$\omega P(t)$	12,69	11,25	9,80	8,36	—	—
$\omega P(t)$	—	—	—	8,65	9,56	9,87

В случае плоского штампа $f(r, t) = f(t)$ из (99) получаем

$$P(t) = 4\pi^{-1} a^2 b \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{c_2} \right)^n d_n f^{(n)}(t), \quad (100)$$

где первые из d_n ($n = 0, 1, 2, 3$) даются формулами

$$\begin{aligned}d_0 &= \pi, \quad d_1 = 2a_0, \quad d_2 = 2 \left(\frac{a_0^2}{\pi} + \frac{2a_1}{3} \right), \\ d_3 &= \frac{2}{\pi^2} \left(4a_0^3 + \frac{7\pi}{3} a_0 a_1 + \frac{2\pi^2}{3} a_1 - \frac{2\pi^2}{3} a_2 \right),\end{aligned}$$

а коэффициенты a_i определены в (94), b — в (96).

Пусть $f(t) = f_0 H(t)$, f_0 — величина мгновенного внедрения штампа в упругое полупространство. Заметим, что при $t > 2a/c_2$ формула (100) для силы $P(t)$, удерживающей штамп на глубине f_0 , асимптотически при малых t совпадает с формулой для силы P , соответствующей статической контактной задаче о внедрении плоского штампа в упругое полупространство [1].

2.6. Сравнение контактных напряжений под штампом при малых и больших временах его внедрения в упругую среду затруднено ввиду того, что в контактных напряжениях, полученных для большого времени, не выделена в явном виде дифракционная картина волнового процесса. Она представлена в этом решении в виде ряда по степеням времени t . Поэтому сравнение полученных асимптотических решений при малых и больших временах проведем по более гладкой характеристике контактной задачи — по действующей на штамп силе $P(t)$ при $f(r, t) = v_0 t$ (v_0 — скорость внедрения штампа). В табл. 2 даны значения $\omega P(t)$ ($\omega = c_2(\mu a^2 v_0)^{-1}$) для малых и больших времен соответственно, рассчитанные по формулам (91) и (100) с сохранением первых двух членов, содержащих $f(t)$ и $f'(t)$ для различных значений $\tau = tc_1/a$. Первые две строчки рассчитаны для $\nu = 0,25$, вторые две — для $\nu = 0,3$ (ν — коэффициент Пуассона). Из табл. 2 видно, что стыковка значений силы $P(t)$ происходит для $\nu = 0,25$ при $\tau = 1,2$, а для $\nu = 0,30$ при $\tau = 1,4$.

2.7. Закон движения плоского штампа $f(t)$ можно определить из дифференциального уравнения (37) с помощью преобразования Лапласа. В

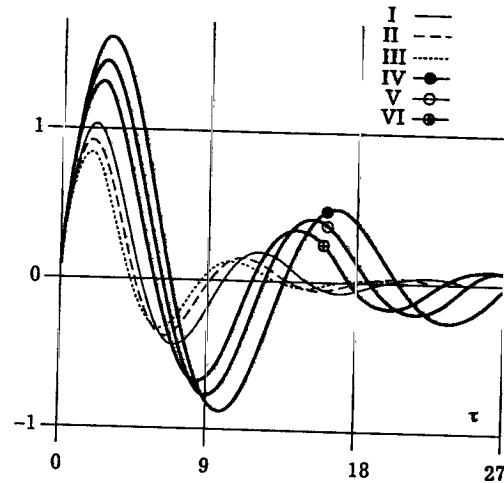


Рис. 1

нашем случае трансформанта $Q^L(p)$ силы сопротивления упругой среды $Q(t) = -P(t)$ (100) дается формулой

$$Q^L(p) = -4\pi^{-1} a^2 b \sum_{n=0}^{\infty} (hp)^n d_n f^L(p), \quad h = \frac{a}{c_2}. \quad (101)$$

Для получения приближенной формулы $f(t)$ сохраним в (101) члены до $(hp)^3$, получим трансформанту $f^L(p)$ в виде

$$f^L(p) = \frac{Mv_0}{8(1-\beta^2)\mu a} \frac{1}{1 + \eta_1 hp + \eta_2 (hp)^2}, \quad (102)$$

$$\eta_1 = \pi d_1, \quad \eta_2 = (\eta h^3)^{-1} + d_2, \quad \eta = 8(1-\beta^2)\mu a M^{-1}.$$

Переходя в последней формуле к оригиналам для $f(t)$ при $t > 2a/c_2$, получаем

$$\Omega f(t) = (\omega\alpha)^{-1} e^{-\gamma\tau} \sin \omega\tau, \quad \tau = t/h, \quad (103)$$

$$\alpha = 1 + \frac{2}{\pi} \left(\frac{2a_0^2}{\pi} + \frac{2}{3} a_1 \right) \eta h^2, \quad \gamma = \frac{\eta_1}{2\eta_2}, \quad \omega^2 = \frac{4\eta_2 - \eta_1^2}{4\eta_2^2}, \quad \Omega = \frac{\mu h}{\rho a^2 v_0},$$

реализация которой в виде графиков представлена на рис. 1 для различных значений параметра $m = \rho/(\pi\rho_0)$ ($\rho_0 = M/(\pi a^3)$) и различных значений коэффициента Пуассона ν . Графики значений функции $\Omega f(t)$ представлены по τ при различных значениях параметров: $m = 1/10$ для графиков I, II, III и $m = 1/20$ для IV, V, VI, при этом для графиков I-VI коэффициент Пуассона $\nu = 0.10, 0.25, 0.35, 0.10, 0.25, 0.35$, соответственно. Параметр m

показывает изменение массы штампа M при фиксированном ρ . Графики иллюстрируют существенное влияние этого параметра на величину амплитуды колебаний штампа и их затухания, а также на величину частоты колебаний штампа на упругом полупространстве.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В.М. Асимптотические методы в задачах механики сплошной среды со смешанными граничными условиями // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 2. С. 102-108.
2. Александров В.М., Коваленко Е.В. Асимптотическое решение неустойчившихся динамических контактных задач при большом времени // Респ. сб. «Теор. и прикл. механика». Вып. 16. Киев-Донецк: Вища школа, 1985. С. 9-14.
3. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.
4. Ворovich И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
5. Ворovich И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные контактные задачи для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
6. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Динамические контактные задачи с подвижными границами. М.: Наука, 1995. 351 с.
7. Дидух Б.И., Лобнев В.Л., Ляхтер В.М. и др. Динамика сплошных сред в расчетах гидротехнических сооружений / Под ред. В.М.Ляхтера и Ю.С. Яковлева. М.: Энергия. 1976, 392 с.
8. Зеленцов В.Б. Динамическая задача об ударе жесткого штампа в упругую преднапряженную полуплоскость // Изв. СКНЦ ВШ. Естеств. науки. 1998. № 3. С. 41-50.
9. Зеленцов В.Б. Об одном асимптотическом методе решения нестационарных динамических контактных задач // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 2. С. 317-326.
10. Коваленко Е.В., Зеленцов В.Б. Асимптотические методы в нестационарных динамических задачах для упругого полупространства // ПМТФ. 1997. Т. 38. № 1. С. 111-119.
11. Костров Б.В. Автомодельные смешанные динамические задачи о вдавлении жесткого штампа в упругое полупространство // Изв. АН СССР. ОТН. Мех. и маш. 1964. № 4. С. 54-62.
12. Кубенко В.Д. Ударное взаимодействие тел со средой. (Обзор) // Прикл. мех. 1997. Т. 33. № 12. С. 3-29.
13. Лобышев В.Л., Яковлев Ю. С. Осесимметричная динамическая задача теории упругости со смешанными граничными условиями // Изв. АН СССР. МГТ. 1971. № 4. С. 103-108.
14. Лобышев В.Л., Сайгина В.И., Яковлев Ю. С. К решению динамической задачи о круглом штампе на границе с упругим полупространством // Физ.-техн. пробл. разр. полезн. ископ. 1971. № 2. С. 25-32.
15. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688с.
16. Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.
17. Поручиков В.Б. Осесимметричная динамическая задача о штампе на упругом полупространстве // Вестн. МГУ. Сер. мат., мех. 1966. № 6. С. 114-120.
18. Сеймов В.М. Динамические контактные задачи. Киев: Наукова думка, 1970. 283 с.

19. Скалиух А.С. О приближенном решении некоторых интегральных уравнений 1-го рода, возникающих в динамических смешанных задачах теории упругости // Изв. СКНЦ ВШ. Естеств. науки. 1983. № 4. С. 34–37.
20. Ткачев Г.В. К решению одной неустановившейся задачи теории упругости // ПМТФ. 1988. № 6. С. 144–148.
21. Флитман Л.М. Динамическая задача о штампе на упругой полуплоскости // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 4. С. 697–705.
22. Яковлев Ю.С., Лобысев В.Л. О решении динамических задач теории упругости со смешанными граничными условиями // Тр. Всес. проект.-изыск. и НИИ Гидропроект. 1971. № 20. С. 65–80.
23. Bedding R.J., Willis J.R. The dynamic indentation of an elastic half-space // J. Elasticity. 1973. V. 3. № 4. P. 289–309.
24. Robinson A.R., Thompson J.C. Transient stresses in an elastic half-space resulting from the frictionless indentation of a rigid axially symmetric conical die // Proc. Camb. Phil. Soc. 1974. V. 76. № 1. P. 369–379.
25. Robinson A.R., Thompson J.C. Transient stresses in an elastic half-space resulting from the frictionless indentation of a rigid wedge-shaped die // Z. Angew. Math. und Mech. 1974. V. 54. № 3. P. 139–144.

§4. ОБ ОДНОМ АСИМПТОТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ В КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

Л. И. Маневич

Среди приближенных методов решения задач математической физики особую роль играет теория возмущений, позволяющая построить асимптотические разложения при малых и больших значениях тех или иных характерных параметров. Применению такого подхода к контактными задачам теории упругости для изотропной полосы и изотропного слоя был посвящен специальный параграф в монографии [7]. При этом в качестве малых и больших параметров принялись, как правило, относительные геометрические размеры штампа (отношение ширины штампа к ширине полосы (слоя) или обратная величина). Между тем, в случае анизотропного и, в частности, ортотропного материала появляется еще одна возможность. Обычно некоторые жесткости композитов, моделируемых анизотропными однородными средами, отличаются по порядку величины, и, следовательно, их отношения могут рассматриваться как малые параметры. В последние десятилетия был развит асимптотический метод, основанный на построении разложения по таким параметрам. Этот метод отражен, помимо статей [1, 3, 5], в монографиях [4] и [6]. Первое его применение к контактными задачам содержится в статье Л. И. Маневича и А. В. Павленко [5], где рассмотрено вдавливание в упругую ортотропную полосу жестких штампов при наличии сил трения. В этой работе было показано, что использование малого параметра, характеризующего отношение жесткостей ортотропной среды, позволяет свести смешанную краевую задачу плоской теории упругости к последовательно решаемым задачам теории потенциала. Статья С. Г. Коблика и Л. И. Маневича [3] посвящена контактной задаче для ортотропной полосы при наличии области контакта зон сцепления и скольжения. В этой сложной задаче предложенный метод оказался особенно эффективным: были получены явные аналитические выражения для нормальных и касательных напряжений в обеих областях, а также для заранее неизвестной границы между этими областями. В работе Н. И. Воробьевой, С. Г. Коблика и Л. И. Маневича [1] решена аналогичная задача для трансверсально изотропного полупространства. Доказано, что и в этом случае смешанная краевая задача теории упругости сводится к последовательно решаемым краевым задачам теории потенциала. В монографиях [4, 6], посвященным детальной разработке обсуждаемого метода и его приложениям, рассмотрен также ряд других задач о вдавливании штампов в анизотропные среды (в том числе при отсутствии у системы штампов угловых точек) и о распределении контактных напряжений на границе раздела между анизотропной средой и подкрепляющими ее упругими элементами. Приведем в качестве примеров, иллюстрирующих возможности метода, решения контактных задач при наличии в области контакта зон сцепления и скольжения.

1. Рассмотрим обобщенное плоское напряженное состояние ортотропной пластинки, главные линии анизотропии которой коллинеарны осям координат. Решение краевых задач для такой пластинки может быть сведено к интегрированию уравнений равновесия плоской ортотропной среды в

перемещениях

$$\begin{aligned} B_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + eG \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} &= 0; \\ B_2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + G \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + eG \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

при заданных граничных условиях. Здесь

$$B_j = \frac{E_j h}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \quad j = 1, 2; \quad G = G_{12} h; \quad e = 1 + \nu_{21} \frac{B_1}{G}, \quad (2)$$

E_1, E_2 и G — модули упругости в направлениях x, y и модуль сдвига; ν_{12} и ν_{21} — коэффициенты Пуассона, причем $\nu_{12} E_2 = \nu_{21} E_1$, h — толщина пластинки.

Нормальные и касательные усилия в плоскости пластинки определяются выражениями

$$\begin{aligned} T_1 &= B_1 \frac{\partial u}{\partial x} + G(e-1) \frac{\partial v}{\partial y}; \\ T_2 &= B_2 \frac{\partial v}{\partial y} + G(e-1) \frac{\partial u}{\partial x}; \\ S &= G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Для постановки краевой задачи уравнения (1) должны быть дополнены граничными условиями, которые в случае третьей основной задачи для ортотропной полосы ($0 \leq x \leq H, -\infty < y < \infty$) формулируются следующим образом: граница L полосы разбивается на участки L' и L'' с различными краевыми условиями, например,

$$\begin{aligned} T_1 &= f(y), \quad S = \phi(y) \quad (y \in L'); \\ u &= u^*(y), \quad v = v^*(y), \quad (y \in L''). \end{aligned} \quad (4)$$

Предположим, что $B_1 \sim B_2 \gg G$, тогда величину $\varepsilon = G^2/(B_1 B_2)$ можно рассматривать как «малый» параметр.

Введем аффинные преобразования координат и искомым функций:

$$x = \varepsilon^{-1/4} q^{-1/4} x_1, \quad y = y_1, \quad u = U^{(1)}, \quad v = \varepsilon^{1/4} q^{-1/4} V^{(1)}, \quad (5)$$

$$x = \varepsilon^{1/4} q^{-1/4} x_2, \quad y = y_2, \quad u = \varepsilon q^{1/4} U^{(2)}, \quad v = \varepsilon^{1/4} V^{(2)}, \quad (6)$$

где

$$q = B_2/B_1 \sim 1.$$

Подставив преобразования (5), а затем (6) в уравнения (1), получим соответственно

$$\begin{aligned} U_{xx}^{(1)} + U_{yy}^{(1)} + e\varepsilon V_{xy}^{(1)} &= 0, \\ V_{yy}^{(1)} + eU_{xy}^{(1)} + \varepsilon V_{xx}^{(1)} &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} U_{xx}^{(2)} + eV_{xy}^{(2)} + \varepsilon U_{yy}^{(2)} &= 0, \\ V_{xx}^{(2)} + V_{yy}^{(2)} + e\varepsilon U_{xy}^{(2)} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь и в дальнейшем для сокращения записи приняты обозначения

$$\frac{\partial \phi^i}{\partial x_i} = \phi_{x_i}^i, \quad \frac{\partial \phi^i}{\partial y_i} = \phi_{y_i}^i.$$

Очевидно, в случае плоской деформации соответствующие уравнения имеют аналогичный вид.

Как видно из преобразований (5) и (6), решение, полученное путем асимптотического интегрирования системы (7), должно медленнее изменяться вдоль оси x ($\partial/\partial x = \varepsilon^{1/4} q^{1/4} \partial/\partial x_1$), чем аналогичное решение системы (8) ($\partial/\partial x = \varepsilon^{-1/4} q^{1/4} \partial/\partial x_2$).

Компоненты вектора перемещений представим суперпозицией решений обоих типов:

$$u = u_1 + u_2, \quad v = v_1 + v_2. \quad (9)$$

Функции $U^{(n)}, V^{(n)}$ будем разыскивать в виде рядов по параметру $\varepsilon^{1/4}$:

$$U^{(n)} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^3 \varepsilon^{m+j/4} U^{n,4m+j}, \quad (10)$$

$$V^{(n)} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^3 \varepsilon^{m+j/4} V^{n,4m+j} \quad (n = 1, 2).$$

При этом целесообразно ввести дополнительное преобразование координат

$$\xi_1 = x_1 \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \alpha_m, \quad \eta_1 = y_1, \quad (11)$$

$$\xi_2 = x_2 \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \beta_m, \quad \eta_2 = y_2. \quad (12)$$

Здесь коэффициенты α_0, β_0 равны единице, так как уравнения нулевого приближения должны соответствовать предельным системам, получаемым из выражений (7), (8), при $\varepsilon \rightarrow 0$. Коэффициенты α_m, β_m ($m = 1, 2, \dots$), вычисляемые в процессе решения, используются для упрощения уравнений высших приближений.

Подставив ряды (10) при $n = 1$ и (11) в систему (7), получим

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^3 \varepsilon^{m+j/4} \left(\sum_{\nu=0}^m U_{\xi\xi}^{1,4\nu+j} c_{m-\nu} + U_{\eta\eta}^{1,4m+j} + e\varepsilon \sum_{\nu=0}^m V_{\xi\eta}^{1,4\nu+j} \alpha_{m-\nu} \right) &= 0, \\ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^3 \varepsilon^{m+j/4} \left(V_{\eta\eta}^{1,4m+j} + \varepsilon \sum_{\nu=0}^m U_{\xi\eta}^{1,4\nu+j} \alpha_{m-\nu} + \varepsilon \sum_{\nu=0}^m V_{\xi\xi}^{1,4\nu+j} c_{m-\nu} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$c_p = \sum_{s=0}^p \alpha_s \alpha_{p-s}.$$

Аналогично после подстановки рядов (10) и (12) (при $n = 2$) в систему (8) будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^3 \varepsilon^{m+j/4} \left(\sum_{\nu=0}^m U_{\xi\xi}^{2,4\nu+j} d_{m-\nu} + e \sum_{\nu=0}^m V_{\xi\eta}^{2,4\nu+j} \beta_{m-\nu} + \varepsilon U_{\eta\eta}^{2,4m+j} \right) &= 0, \\ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^3 \varepsilon^{m+j/4} \left(\sum_{\nu=0}^m V_{\xi\xi}^{2,4\nu+j} d_{m-\nu} + V_{\eta\eta}^{2,4m+j} + e \varepsilon \sum_{\nu=0}^m U_{\xi\eta}^{2,4\nu+j} \beta_{m-\nu} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь

$$d_p = \sum_{s=0}^p \beta_s \beta_{p-s}.$$

Расцепив уравнения (13) и (14) по параметру $\varepsilon^{1/4}$, приходим к двум бесконечным системам уравнений относительно функций $U^{1,4m+j}$, $V^{1,4m+j}$, $U^{2,4m+j}$, $V^{2,4m+j}$ ($m = 0, 1, \dots$; $j = 0, 1, 2, 3$):

$$U_{\xi\xi}^{1,4m+j} c_0 + U_{\eta\eta}^{1,4m+j} = - \sum_{\nu=0}^{m-1} \left(U_{\xi\xi}^{1,4\nu+j} c_{m-\nu} + e U_{\xi\eta}^{1,4\nu+j} \alpha_{m-\nu-1} \right), \quad (15)$$

$$V_{\eta\eta}^{1,4m+j} = -e U_{\xi\eta}^{1,4m+j} \alpha_0 - \sum_{\nu=0}^{m-1} \left(e U_{\xi\eta}^{1,4\nu+j} \alpha_{m\nu} + V_{\xi\xi}^{1,4\nu+j} c_{m-\nu-1} \right) \quad (16)$$

для напряженного состояния первого типа;

$$\begin{aligned} U_{\xi\xi}^{2,4m+j} &= -e V_{\xi\eta}^{2,4m+j} \beta_0 - U_{\eta\eta}^{2,4(m-1)+j} - \\ &- \sum_{\nu=0}^{m-1} \left(U_{\xi\xi}^{2,4\nu+j} d_{m-\nu} + e V_{\xi\eta}^{2,4\nu+j} \beta_{m-\nu} \right), \end{aligned} \quad (17)$$

$$V_{\xi\xi}^{2,4m+j} d_0 + V_{\eta\eta}^{2,4m+j} = - \sum_{\nu=0}^{m-1} \left(V_{\xi\xi}^{2,4\nu+j} d_{m-\nu} + e U_{\xi\eta}^{2,4\nu+j} \beta_{m-\nu} \right) \quad (18)$$

для напряженного состояния второго типа.

Следует отметить, что если в уравнениях (15)–(18) у какой-либо суммы верхний предел суммирования меньше нижнего, то ее необходимо положить равной нулю. Аналогично, если у какой-либо из искомым функций $U^{n,4m+j}$, $V^{n,4m+j}$ ($n = 1, 2$) второй верхний индекс отрицателен, то эту функцию следует положить равной нулю.

Так, при $m = 0$ из уравнений (15)–(18) получим

$$\begin{aligned} U_{\xi\xi}^{1,j} + U_{\eta\eta}^{1,j} &= 0, \\ V_{\eta\eta}^{1,j} &= -e U_{\xi\eta}^{1,j} \end{aligned} \quad (19)$$

для состояния первого типа;

$$\begin{aligned} U_{\xi\xi}^{2,j} &= -e V_{\xi\eta}^{2,j}, \\ V_{\xi\xi}^{2,j} + V_{\eta\eta}^{2,j} &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

для состояния второго типа.

В монографии [5] показано, что коэффициенты α_m , β_m ($m = 1, 2, \dots$) можно определить так, что уравнения (15)–(18) примут вид

$$U_{\xi\xi}^{1,4m+j} + U_{\eta\eta}^{1,4m+j} = 0, \quad (21)$$

$$V_{\eta\eta}^{1,4m+j} = -e U_{\xi\eta}^{1,4m+j} - \sum_{\nu=0}^{m-1} \left(e U_{\xi\eta}^{1,4\nu+j} \alpha_{m-\nu} + V_{\xi\xi}^{1,4\nu+j} c_{m-\nu-1} \right) \quad (22)$$

для состояния первого типа;

$$U_{\xi\xi}^{2,4m+j} = -e V_{\xi\eta}^{2,4m+j} - U_{\eta\eta}^{2,4m+j} - \sum_{\nu=0}^{m-1} \left(U_{\xi\xi}^{2,4\nu+j} d_{m-\nu} + e V_{\xi\eta}^{2,4\nu+j} \beta_{m-\nu} \right); \quad (23)$$

$$V_{\xi\xi}^{2,4m+j} + V_{\eta\eta}^{2,4m+j} = 0 \quad (24)$$

для состояния второго типа. Таким образом, функции $U^{1,4m+j}$, $V^{2,4m+j}$ являются гармоническими.

Подставив суммы (9) и соответствующие преобразования (5), (10)–(12) в выражения для усилий T_1 , T_2 , S и перемещений u , v , получим

$$\begin{aligned} T_1 &= B_1(u_x + \nu_{21}v_y) = \\ &= B_1 q^{1/4} \varepsilon^{1/4} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^3 \varepsilon^{m+j/4} \left[\sum_{\nu=0}^m \left(U_{\xi}^{1,4\nu+j} \alpha_{m-\nu} + \right. \right. \\ &+ \varepsilon^{1/2} q^{1/4} U_{\xi}^{2,4\nu+j} \beta_{m-\nu} \left. \right) + \varepsilon^{1/2} q^{1/4} (e-1) V_{\eta}^{2,4m+j} + \\ &+ \varepsilon(e-1) V_{\eta}^{1,4m+j} \left. \right] = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} T_2 &= B_2(v_y + \nu_{12}u_x) = B_2 \varepsilon^{1/4} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^3 \varepsilon^{m+j/4} \times \\ &\times \left[V_{\eta}^{2,4m+j} + \varepsilon^{1/2} q^{-1/4} \left(V_{\eta}^{1,4m+j} + (e-1) \sum_{\nu=0}^m U_{\xi}^{1,4\nu+j} \alpha_{m-\nu} \right) + \right. \\ &+ \varepsilon(e-1) U_{\xi}^{2,4\nu+j} \beta_{m-\nu} \left. \right] = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

$$S = G(u_y + v_x) = G \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^3 \varepsilon^{m+j/4} \left[U_{\eta}^{1,4m+j} + q^{1/4} \sum_{\nu=0}^m V_{\xi}^{2,4\nu+j} \beta_{m-\nu} + \varepsilon \left(q^{1/4} U_{\eta}^{2,4\nu+j} \beta_{m-\nu} + \sum_{\nu=0}^m V_{\xi}^{1,4\nu+j} \alpha_{m-\nu} \right) \right], \quad (27)$$

$$u = U^{(1)} + \varepsilon q^{1/4} U^{(2)} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^3 \varepsilon^{m+j/4} \left(U^{1,4m+j} + \varepsilon q^{1/4} U^{2,4m+j} \right), \quad (28)$$

$$v = \varepsilon^{3/4} q^{-1/4} V^{(1)} + \varepsilon^{1/4} V^{(2)} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^3 \varepsilon^{m+\frac{j+1}{4}} \left(V^{2,4m+j} + \varepsilon^{1/2} q^{-1/4} V^{1,4m+j} \right). \quad (29)$$

Подставив ряды (25)–(29) для усилий и перемещений в граничные условия (4) и расцепив полученные выражения по параметру $\varepsilon^{1/4}$, найдем граничные условия, соответствующие граничным задачам для гармонических функций $U^{1,4m+j}$, $V^{2,4m+j}$. Функции $V^{1,4m+j}$ и $U^{2,4m+j}$ находятся из соотношений (22), (23) простым интегрированием и также являются гармоническими. Из формул (21)–(29) видно, что напряженные состояния первого и второго типов связаны только граничными условиями.

Решающую роль в напряженно-деформированном состоянии первого типа (основное состояние) играют осевое смещение u , соответствующее осевое усилие T_1 и составляющая касательного усилия S_1 , которые в нулевом приближении определяются из уравнений (в исходных переменных)

$$B_1 u_{xx} + G u_{yy} = 0; \quad T_1 = B_1 u_x, \quad S_1 = G u_y. \quad (30)$$

Основными компонентами напряженно-деформированного состояния второго типа являются (в исходных переменных) смещение v , усилие T_2 и составляющая касательного усилия S_2 , определяемые в нулевом приближении из уравнений

$$B_2 v_{yy} + G v_{xx} = 0; \quad T_2 = B_2 v_y, \quad S_2 = G v_x. \quad (31)$$

Полное касательное усилие

$$S = S_1 + S_2.$$

При решении уравнения (30) удовлетворяются граничные условия по перемещению u и нормальному усилию T_1 , но возникают невязки по перемещению v и касательному усилию S , которые снимаются решением

уравнения (31). При этом получаются невязки по перемещению u и нормальному усилию T_1 . Последние, однако, имеют более высокий порядок малости. Эти невязки, в свою очередь, снимаются решением уравнения первого приближения для основного состояния и т.д.

2. В качестве первого конкретного примера рассматривается задача о сжатии упругой ортотропной полосы ($0 \leq x \leq H$, $-\infty < y < \infty$) двумя симметричными жесткими штампами (имеющими угловые точки) с учетом трения и сцепления. Штампы вдавливаются в полосу прижимающими силами P , действующими вдоль оси симметрии штампов. Предполагается, что в каждой области контакта существуют два участка скольжения, прилегающих к конечным точкам области контакта (на этих участках выполняются условия $|S| = k|T_1|$), и участок сцепления, расположенный между ними, на котором перемещение материала полосы равно перемещению штампа. При этом в зонах скольжения, расположенных в одной области контакта, сдвигающие усилия направлены в противоположные стороны. Вследствие симметрии граничные точки участков сцепления (которые заранее не известны и должны быть определены в ходе решения задачи) расположены симметрично относительно оси x , а зоны сцепления имеют одинаковую длину на обоих участках контакта.

Задача может быть сведена к интегрированию уравнений равновесия (1) при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} T_1 = S = 0 \quad (x = 0, |y| > l); \\ T_1 = S = 0 \quad (x = H, |y| > l) \end{aligned} \quad (32)$$

на свободных участках границы;

$$\begin{aligned} u = f(y) + c_1 \quad (x = 0, |y| < l); \\ u = -f(y) - c_1 \quad (x = H, |y| < l) \end{aligned} \quad (33)$$

на участках контакта;

$$\begin{aligned} S = \text{sign}(y)kT_1 \quad (x = H, b < |y| < l); \\ S = -\text{sign}(y)kT_1 \quad (x = H, b < |y| < l) \end{aligned} \quad (34)$$

на участках скольжения;

$$\begin{aligned} v = 0 \quad (x = 0, |y| < b); \\ v = 0 \quad (x = H, |y| < b) \end{aligned} \quad (35)$$

на участках сцепления (граница $|y| = b$ между зонами сцепления и скольжения подлежит определению в ходе решения задачи).

Кроме того, необходимо удовлетворить условиям равновесия штампа и полосы, а также условиям затухания усилий на бесконечности.

Для решения задачи применим изложенный метод. Будем полагать, что $k = k_0 \varepsilon^{1/4}$, $k_0 \sim 1$. Тогда задача сведется к последовательному интегрированию уравнений первого и второго типа (21)–(24) при соответствующих граничных условиях. Заметим, что справедливы соотношения

$$U^{1,4m+j} = V^{1,4m+j} = U^{2,4m+j} = V^{2,4m+j} = 0 \quad (j = 1, 3).$$

Решение рассматриваемой задачи эквивалентно решению краевых задач для аналитических функций $\Phi^{1,4m+j}(z_1)$ и $\Phi^{2,4m+j}(z_2)$, которые могут быть введены при помощи соотношений

$$\begin{aligned} \Phi^{1,4m+j}(z_1) &= \frac{\pi}{2H} \varepsilon^{-1/4} q^{-1/4} \alpha^{-1} (U_{\eta_1^*}^{1,4m+j} - i U_{\xi_1^*}^{1,4m+j}), \\ \Phi^{2,4m+j}(z_2) &= \frac{\pi}{2H} \varepsilon^{1/4} q^{-1/4} \beta^{-1} (V_{\eta_2^*}^{2,4m+j} - i V_{\xi_2^*}^{2,4m+j}), \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$\begin{aligned} z_1 &= \eta_1^* + i \xi_1^*, \quad z_2 = \eta_2^* + i \xi_2^*, \\ \eta_1^* &= \frac{\pi}{2H} q^{-1/4} \varepsilon^{-1/4} \eta_1, \quad \xi_1^* = \frac{\pi}{2H} q^{-1/4} \varepsilon^{-1/4} \xi_1, \\ \eta_2^* &= \frac{\pi}{2H} q^{-1/4} \varepsilon^{1/4} \eta_2, \\ \xi_2^* &= \frac{\pi}{2H} q^{-1/4} \varepsilon^{1/4} \xi_2 \quad \left(0 \leq \xi_1^*, \xi_2^* \leq \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Эти функции могут быть найдены при помощи формулы Келдыша–Седова [8]. Поскольку последняя записана для полосы, ширина которой равна $\pi/2$, введены дополнительные преобразования координат

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{2H}{\pi} \varepsilon^{1/4} q^{1/4} \alpha \xi_1^*, \quad \eta_1 = \frac{2H}{\pi} \varepsilon^{1/4} q^{1/4} \alpha \eta_1^*, \\ \xi_2 &= \frac{2H}{\pi} \varepsilon^{-1/4} q^{1/4} \beta \xi_2^*, \quad \eta_2 = \frac{2H}{\pi} \varepsilon^{-1/4} q^{1/4} \beta \eta_2^*, \\ \alpha &= \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \varepsilon^m, \quad \beta = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \varepsilon^m. \end{aligned} \quad (37)$$

В новых координатах ξ_2^* , η_2^* ($n=1, 2$) ширина полосы равна $\pi/2$. Уравнения (21)–(24) для функций $U^{n,4m+j}$, $V^{n,4m+j}$ ($n=1, 2$; $m=0, 1, 2, \dots$; $j=0, 2$) инвариантны относительно преобразований (37). Граничные условия в рассматриваемом случае будут следующими:

а) для функций $U^{1,4m+j}$

$$\begin{aligned} U^{1,0} &= \theta (c_1 + f_1(\eta_1^*)), \\ U^{1,4m+j} &= -q^{1/4} U^{2,4(m-1)+j} \quad (4m+j \neq 0) \end{aligned} \quad (38)$$

на участках контакта ($\xi_1^* = 0, \frac{\pi}{2}$; $|\eta_1^*| < l_1^*$);

$$\begin{aligned} U_{\xi_1^*}^{1,4m+j} &= -q^{1/4} \varepsilon^{1/2} \alpha \beta^{-1} \sum_{\nu=0}^m U_{\xi_1^*}^{2,4\nu+j-2} \beta_{m-\nu} - \\ &\quad - \sum_{\nu=0}^{m-1} U_{\xi_1^*}^{1,4\nu+j} \alpha_{m-\nu} - (e-1) V_{\eta_1^*}^{1,4(m-1)+j} - \\ &\quad - q^{1/4} \varepsilon^{1/2} \alpha \beta^{-1} (e-1) V_{\eta_1^*}^{2,4m+j-2} \end{aligned} \quad (39)$$

вне участков контакта ($\xi_1^* = 0, \frac{\pi}{2}$; $|\eta_1^*| > l_1^*$);

б) для функций $V^{2,4m+j}$

$$V^{2,4m+j} = -q^{-1/4} V^{1,4m+j-2} \quad (40)$$

на участках сцепления ($\xi_2^* = 0, \frac{\pi}{2}$; $|\eta_2^*| < b_2^*$);

$$\begin{aligned} V_{\xi_2^*}^{2,4m+j} &= \theta \operatorname{sign}(\eta_2^*) k_0 \left[\sum_{\nu=0}^m \left(q^{-1/2} \varepsilon^{-1/2} \beta \alpha^{-1} U_{\xi_2^*}^{1,4\nu+j} \alpha_{m-\nu} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + q^{-1/4} U_{\xi_2^*}^{2,4\nu+j-2} \beta_{m-\nu} \right) + q^{-1/2} (e-1) \varepsilon^{-1/2} \beta \alpha^{-1} \times \right. \\ &\quad \left. \times V_{\eta_2^*}^{1,4(m-1)+j} + q^{-1/4} (e-1) V_{\eta_2^*}^{2,4m+j-2} \right] - \\ &\quad - \left[q^{-1/4} \varepsilon^{-1/2} \beta \alpha^{-1} U_{\eta_2^*}^{1,4m+j} + U_{\eta_2^*}^{2,4(m-1)+j} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\nu=0}^{m-1} \left(q^{-1/4} \varepsilon^{-1/2} \beta \alpha^{-1} V_{\xi_2^*}^{1,4\nu+j} \alpha_{m-\nu-1} + V_{\xi_2^*}^{2,4\nu+j} \beta_{m-\nu} \right) \right] \end{aligned} \quad (41)$$

вне участков сцепления ($\xi_2^* = 0, \frac{\pi}{2}$; $|\eta_2^*| > b_2^*$). Здесь

$$l_1^* = \frac{\pi}{2H} q^{-1/4} \varepsilon^{-1/4} \alpha^{-1} l; \quad b_2^* = \frac{\pi}{2H} q^{-1/4} \varepsilon^{1/4} \beta^{-1} b; \quad \theta = \begin{cases} 1 & (\xi_n^* = 0), \\ -1 & (\xi_n^* = \frac{\pi}{2}). \end{cases}$$

Из соотношений (38)–(41) и (36) следует, что в области контакта заданы действительные части функций $\Phi^{1,4m+j}(z_1)$, а на остальной части границы — мнимые. Аналогично в зонах сцепления заданы действительные части функций $\Phi^{2,4m+j}(z_2)$, а вне их — мнимые.

Координаты точек, разделяющих зоны скольжения и сцепления, заранее неизвестны и определяются в ходе решения задачи. Все усилия должны быть непрерывны в этих точках и стремиться к нулю при $|y| \rightarrow \infty$.

3. В случае ортотропной полосы, сжатой двумя жесткими штампами с плоскими основаниями ($f(y) = 0$), получаем, ограничиваясь нулевым приближением,

$$\Phi^{1,0}(z_1) = A (\operatorname{sh}^2 2z_1 - \operatorname{sh}^2 2l_1^*)^{-1/2}, \quad (42)$$

$$\Phi^{2,0}(z_2) = \frac{2A}{\pi} \varepsilon^{-1/2} q^{-1/4} (\text{sh}^2 2z_2 - \text{sh}^2 2b_2^*)^{1/2} \times \\ \times \left[\int_{-\infty}^{-l_1^* \sqrt{\varepsilon}} \frac{f(t) dt}{\text{sh} 2(t-z_2)} + \int_{l_1^* \sqrt{\varepsilon}}^{\infty} \frac{f(t) dt}{\text{sh} 2(t-z_2)} - q^{-1/4} k_0 \times \right. \\ \left. \times \left(\int_{-l_1^* \sqrt{\varepsilon}}^{-b_2^*} \frac{f(t) dt}{\text{sh} 2(t-z_2)} + \int_{b_2^*}^{l_1^* \sqrt{\varepsilon}} \frac{f(t) dt}{\text{sh} 2(t-z_2)} \right) \right], \quad (43)$$

где

$$f(t) = [(\text{sh}^2 2t - \text{sh}^2 2b_2^*) | \text{sh}^2 2l_1^* - \text{sh}^2 2\varepsilon^{-1/2} t |]^{-1/2}.$$

Постоянная A определяется из условия равновесия штампа:

$$A = -\frac{Pq^{-1/4}\varepsilon^{-1/4} \text{ch} 2l_1^*}{B_1 K \text{th} 2l_1^*}. \quad (44)$$

Здесь $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

Осевое усилие под штампом

$$T_1 = -\frac{Pq^{-1/4}\varepsilon^{-1/4} \pi \text{ch} 2l_1^*}{2HK \text{th} 2l_1^*} \frac{1}{\sqrt{\text{sh}^2 2l_1^* - \text{sh}^2 2\eta_1^*}}. \quad (45)$$

Контактные усилия T_1 в нулевом приближении получаются такими же, как и в случае, если бы штамп был гладким, потому что в граничные условия для функции $U^{1,0}$ коэффициент трения не входит. Перейдя в уравнении (45) к пределу при $H \rightarrow \infty$, получим решение для гладкого плоского штампа, вдавливаемого в полуплоскость:

$$T_1 = -\frac{P}{\pi} \frac{1}{\sqrt{l^2 - y^2}}. \quad (46)$$

Если в формуле (45) устремить H к нулю, то напряженное состояние под штампом будет стремиться к однородному:

$$T_1 = -\frac{P}{2l}. \quad (47)$$

В случае полосы из условия убывания усилий на бесконечности получаем [5] соотношение

$$\int_{l_1^* \sqrt{\varepsilon}}^{\infty} f(t) \text{ch} 2t dt = k_0 q^{-1/4} \int_{b_2^*}^{l_1^* \sqrt{\varepsilon}} f(t) \text{ch} 2t dt, \quad (48)$$

которое связывает размеры участка сцепления с размерами области контакта, коэффициентом трения и жесткостными характеристиками материала.

Переходя к пределу при $H \rightarrow \infty$, находим аналогичное соотношение для полуплоскости:

$$K(b/l) = k_0 q^{-1/4} K'(b/l). \quad (49)$$

Здесь $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Рассматриваемая задача в предельном случае ортотропной полуплоскости (при $q = 1$) решалась также приближенным методом, предложенным Л.А. Галиным [2]. Полученное соотношение для определения зоны сцепления было разложено в ряд по степеням $\varepsilon^{1/4}$. В главном приближении оно совпадает с уравнением (49).

В случае полосы касательные усилия на участках скольжения определяются по формуле

$$S = \mp \text{sign}(\eta_2^*) k T_1, \quad (50)$$

где T_1 есть функция η_1^* , а на участке сцепления —

$$S = \mp \frac{GA}{H} q^{-1/4} \varepsilon^{-1/2} \sqrt{\text{sh}^2 2b_2^* - \text{sh}^2 2\eta_2^*} \times \\ \times \left[\int_{-\infty}^{-l_1^* \sqrt{\varepsilon}} \frac{f(t) dt}{\text{sh} 2(t-\eta_2^*)} + \int_{l_1^* \sqrt{\varepsilon}}^{\infty} \frac{f(t) dt}{\text{sh} 2(t-\eta_2^*)} - \right. \\ \left. - q^{-1/4} k_0 \left(\int_{-l_1^* \sqrt{\varepsilon}}^{-b_2^*} \frac{f(t) dt}{\text{sh} 2(t-\eta_2^*)} + \int_{b_2^*}^{l_1^* \sqrt{\varepsilon}} \frac{f(t) dt}{\text{sh} 2(t-\eta_2^*)} \right) \right]. \quad (51)$$

В формулах (50) и (51) верхний знак выбирается при $\xi_2^* = 0$, нижний — при $\xi_2^* = \frac{\pi}{2}$.

Были также определены предельные (при $H \rightarrow \infty$) значения касательных напряжений на участках скольжения и сцепления.

На рис. 1 показана зависимость отношения длины участка сцепления к длине области контакта b/l от коэффициента трения k для изотропной среды (при $\varepsilon^{1/2} = 0,5$). Кривая 2 получена в работе [8], кривая 1 построена при помощи асимптотического метода для случая, когда упругая среда занимает полуплоскость, кривые 3–5 получены для полосы при отношении длины области контакта к ширине полосы $2l/H = 1, 2, 5$, соответственно. Из рисунка видно, что область сцепления уменьшается с уменьшением коэффициента трения k (исчезает при $k = 0$) и увеличивается с уменьшением толщины полосы.

На рис. 2 показано распределение безразмерного касательного усилия $S^* = 2lS/P$ под штампом для полуплоскости при $\varepsilon^{1/2} = 0,5$; $k = 0, 3$; $q = 0, 9$.

4. Рассмотрим теперь трансверсально-изотропную среду в цилиндрической системе координат (r, θ, z) , совместив плоскость (r, θ) с плоскостью, параллельной плоскостям изотропии и направив ось z перпендикулярно к последним.

Механические свойства среды опишем следующими характеристиками: E и G — модули упругости соответственно на растяжение-сжатие и сдвиг в плоскости изотропии (r, θ) , E' и G' — то же в плоскостях (r, z) , нормальных к плоскости изотропии. Предполагается, что величина

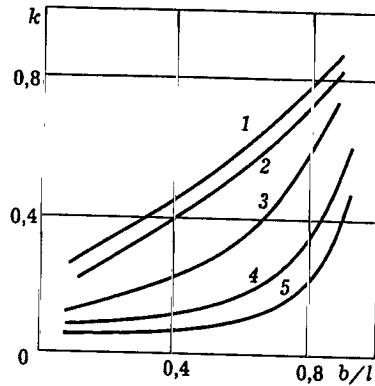


Рис. 1

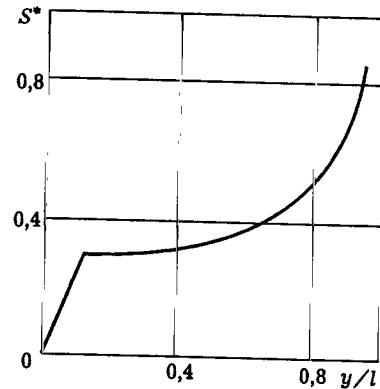


Рис. 2

$\varepsilon = \frac{E'}{E} \ll 1$ и может рассматриваться как малый параметр при асимптотическом интегрировании уравнений равновесия.

Поскольку в дальнейшем рассматривается осесимметричная задача, окружная, радиальная и осевая (перпендикулярная граница полупространства) компоненты вектора перемещений записываются следующим образом:

$$u_\theta = 0, \quad u_r = u(r, z), \quad w = w(r, z).$$

Уравнения равновесия в перемещениях для этого случая принимают вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{k} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) = 0, \quad (52)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + k\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k\varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} = 0. \quad (53)$$

При этом модули сдвига в горизонтальной плоскости (плоскости изотропии) и в вертикальной плоскости определяются соотношениями

$$G = \frac{1}{2} E, \quad G' = kE'.$$

Для упрощения выкладок коэффициенты Пуассона положены равными нулю.

Введем преобразования

$$r = r_1, \quad z = k^{-1/2} z_1, \quad w = W^{(1)}, \quad u = \varepsilon U^{(1)}, \quad (54)$$

$$r = r_2, \quad z = \varepsilon^{1/2} k^{1/2} z_2, \quad w = \varepsilon W^{(2)}, \quad u = \varepsilon^{1/2} U^{(2)}. \quad (55)$$

Выполняя поочередно преобразования (54)–(55) в уравнениях равновесия (52)–(53), получаем следующие системы уравнений

$$W_{rs}^{(1)} + W_{zz}^{(1)} + \varepsilon k^{1/2} U_{sz}^{(1)} = 0, \quad (56)$$

$$U_{sr}^{(1)} + \varepsilon k^2 U_{zz}^{(1)} + k^{3/2} W_{rz}^{(1)} = 0, \quad (57)$$

$$\varepsilon k^2 W_{rs}^{(2)} + W_{zz}^{(2)} + k^{3/2} U_{sz}^{(2)} = 0, \quad (58)$$

$$U_{sr}^{(2)} + U_{zz}^{(2)} + \varepsilon k^{1/2} W_{rz}^{(2)} = 0. \quad (59)$$

Для сокращения записи в уравнениях (56)–(59) введены обозначения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r_1} \phi^{(l)} &= \phi_r^{(l)}, & \frac{\partial}{\partial z_1} \phi^{(l)} &= \phi_z^{(l)}, & \frac{\partial^2}{\partial r_1 \partial z_1} \phi^{(l)} &= \phi_{rz}^{(l)}, \\ \frac{\partial \phi^{(l)}}{\partial r_1} + \frac{1}{r_1} \phi^{(l)} &= \phi_s^{(l)}, & \frac{\partial^2 \phi^{(l)}}{\partial r_1^2} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial \phi^{(l)}}{\partial r_1} &= \frac{\partial \phi_s^{(l)}}{\partial r_1} = \phi_{rs}^{(l)}, \\ \frac{\partial}{\partial r_1} \phi_s^{(l)} &= \frac{\partial^2 \phi^{(l)}}{\partial r_1^2} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial \phi^{(l)}}{\partial r_1} - \frac{\phi^{(l)}}{r_1^2} = \phi_{sr}^{(l)}, & \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \phi^{(l)} &= \phi_{zz}^{(l)}. \end{aligned}$$

Из соотношений (53)–(55) следует, что решения, полученные путем асимптотического интегрирования уравнений (56)–(57), будут соответствовать медленно изменяющемуся вдоль оси z напряженно-деформированному состоянию по сравнению с аналогичными решениями системы уравнений (58)–(59).

Компоненты вектора перемещений представим в виде суперпозиции решений двух типов:

$$u = u_1 + u_2, \quad w = w_1 + w_2.$$

При этом функции $W^{(l)}$ и $U^{(l)}$ ($l = 1, 2$) будем разыскивать в виде асимптотических рядов по параметру $\varepsilon^{1/2}$:

$$W^{(l)} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n/2} W^{l,n} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^l \varepsilon^{m+j/2} W^{l,2m+j}, \quad (60)$$

$$U^{(l)} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n/2} U^{l,n} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^l \varepsilon^{m+j/2} U^{l,2m+j}. \quad (61)$$

При этом целесообразно ввести дополнительное преобразование координат

$$\xi_1 = (\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2 + \dots) z_1, \quad (62)$$

$$\xi_2 = (\beta_0 + \beta_1 \varepsilon + \beta_2 \varepsilon^2 + \dots) z_2. \quad (63)$$

Сгруппировав члены при одинаковых степенях ε , приходим к рекуррентным уравнениям

$$\begin{aligned} W_{rs}^{1,2m+j} + W_{\xi\xi}^{1,2m+j} b_0 &= \\ &= - \sum_{\nu=0}^{m-1} (W_{\xi\xi}^{1,2\nu+j} b_{m-\nu} + k^{1/2} U_{\xi\xi}^{1,2\nu+j} \alpha_{m-1-\nu}), \end{aligned} \quad (64)$$

$$U_{sr}^{1,2m+j} = -k^2 \sum_{\nu=0}^{m-1} U_{\xi\xi}^{1,2\nu+j} b_{m-1-\nu} - k^{3/2} \sum_{\nu=0}^m W_{r\xi}^{1,2\nu+j} \alpha_{m-\nu} \quad (65)$$

для напряженно-деформированного состояния первого типа;

$$W_{\xi\xi}^{2,2m+j} c_0 = - \sum_{\nu=0}^{m-1} W_{\xi\xi}^{2,2\nu+j} c_{m-\nu} - k^{3/2} \sum_{\nu=0}^m U_{s\xi}^{2,2\nu+j} \beta_{m-\nu} - k^2 W_{rs}^{2,2(m-1)+j}, \quad (66)$$

$$U_{sr}^{2,2m+j} + U_{\xi\xi}^{2,2m+j} c_0 = - \sum_{\nu=0}^{m-1} U_{\xi\xi}^{2,2\nu+j} c_{m-\nu} + k^{1/2} W_{r\xi}^{2,2\nu+j} \beta_{m-1-\nu} \quad (67)$$

для напряженно-деформированного состояния второго типа. Здесь

$$c_p = \sum_{m=0}^p \beta_m \beta_{p-m}, \quad b_p = \sum_{m=0}^p \alpha_m \alpha_{p-m} \quad (m = 0, 1, \dots).$$

Тогда формулы для напряжений примут вид

$$\sigma_r = E\sqrt{\varepsilon} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=p}^1 \varepsilon^{m+j/2} (U_r^{1,2m+j-1} + U_r^{2,2m+j}), \quad (68)$$

$$\sigma_\theta = E\sqrt{\varepsilon} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^1 \varepsilon^{m+j/2} \left(\frac{U_r^{1,2m+j-1}}{r_1} + \frac{U_r^{2,2m+j}}{r_2} \right), \quad (69)$$

$$\sigma_z = E' \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^1 \varepsilon^{m+j/2} \times \\ \times \sum_{\nu=0}^m \left(k^{1/2} W_{\xi}^{1,2m+j} \alpha_{m-\nu} + k^{-1/2} \varepsilon^{1/2} W_{\xi}^{2,2m+j} \beta_{m-\nu} \right), \quad (70)$$

$$\tau_{rz} = G' \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^1 \varepsilon^{m+j/2} \left[\sum_{\nu=0}^m \left(k^{1/2} \varepsilon U_{\xi}^{1,2m+j} \alpha_{m-\nu} + \right. \right. \\ \left. \left. + k^{-1/2} U_{\xi}^{2,2m+j} \beta_{m-\nu} \right) + W_r^{1,2m+j} + \varepsilon W_r^{2,2m+j} \right]. \quad (71)$$

Граничные условия для уравнений (64)–(67) получаются при асимптотическом анализе граничных условий для исходной системы.

Следует учесть, что если в выражениях (64)–(71) какой-либо верхний предел суммирования отрицателен, эта сумма равна нулю. Аналогично, если у какой-нибудь функции $U^{n,m}$, $W^{n,m}$ второй верхний индекс, обозначающий номер приближения, отрицателен, эта функция равна нулю. Например, при $m = 0$ из уравнений (64)–(67) получаем

$$W_{rs}^{1,j} + W_{\xi\xi}^{1,j} b_0 = 0, \quad U_{sr}^{1,j} = -k^{3/2} W_{r\xi}^{1,j} \alpha_0, \quad (72)$$

$$W_{\xi\xi}^{2,j} c_0 = -k^{3/2} U_{s\xi}^{2,j} \beta_0, \quad U_{sr}^{2,j} + U_{\xi\xi}^{2,j} c_0 = 0. \quad (73)$$

Первые уравнения (для функций $W^{1,2m+j}$) в системе (64)–(65) и вторые (для функций $U^{2,2m+j}$) в системе (66)–(67) будем называть основными.

Можно показать [5], что если коэффициенты α_j и β_j определить по формулам

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_{p+1} = \frac{1}{2} k^2 \gamma_p + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \alpha_j (k^2 \gamma_{p-j} - \alpha_{p-j+1}), \quad (74)$$

$$\beta_0 = 1, \quad \beta_{p+1} = -\frac{1}{2} k^2 \delta_p - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \beta_j (k^2 \delta_{p-j} + \beta_{p-j+1}), \quad (75)$$

где

$$\gamma_0 = 1, \quad \gamma_p = \alpha_p + \sum_{m=0}^{p-1} c_m \gamma_{p-m-1},$$

$$\delta_0 = 1, \quad \delta_p = \beta_p + \delta_{p-1} - \sum_{m=0}^{p-1} \delta_m d_{p-m},$$

получим уравнения для напряженного состояния первого типа

$$W_{rs}^{1,2p+j} + W_{\xi\xi}^{1,2p+j} = 0, \\ U_{sr}^{1,2p+j} = -k^2 \sum_{\nu=0}^{p-1} U_{\xi\xi}^{1,2\nu+j} \beta_{p-1-\nu} - k^{3/2} \sum_{\nu=0}^p W_{r\xi}^{1,2\nu+j} \alpha_{p-\nu}, \quad (76)$$

и второго типа

$$W_{\xi\xi}^{2,2p+j} = - \sum_{\nu=0}^{p-1} W_{\xi\xi}^{2,2\nu+j} c_{p-\nu} - k^{3/2} \sum_{\nu=0}^p U_{s\xi}^{2,2\nu+j} \beta_{p-\nu} - k^2 W_{rs}^{2,2(p-1)+j}, \\ U_{sr}^{2,2p+j} + U_{\xi\xi}^{2,2p+j} = 0. \quad (77)$$

5. Пусть штамп, имеющий форму тела вращения, вдавливается поступательно нормальной нагрузкой в трансверсально-изотропное полупространство ($0 \leq r < \infty$, $z \leq 0$) осевой силой P . Плоское основание штампа — круг радиуса a . Предполагается, что на контактной поверхности образуются зона трения (примыкающая к границе области контакта) и зона сцепления. Вследствие симметрии область контакта и участок сцепления будут концентрическими кругами с центром, лежащим на оси штампа. Радиус b окружности, разделяющей участки трения и сцепления, заранее неизвестен и должен быть определен наряду с нормальными касательными напряжениями в области контакта. Решение заключается в интегрировании уравнений равновесия трансверсально-изотропной среды при граничных условиях

$$\begin{aligned} \sigma_z = \tau_{rz} = 0 & \quad \text{вне области контакта } (r > a), \\ w = -c_0 & \quad \text{во всей области контакта } (r < a), \\ u = 0 & \quad \text{на участке сцепления } (0 < r < b), \\ \tau_{rz} = -\rho\sigma_z & \quad \text{на участке скольжения } (b < r < a), \end{aligned} \quad (78)$$

и равенстве нулю перемещений U, W на бесконечности. Здесь c_0 — осадка штампа; ρ — коэффициент трения.

Для получения приближенного решения рассматриваемой задачи (с учетом главного члена разложения) вместо точных уравнений достаточно проинтегрировать уравнения

$$W_{rs}^{1,0} + W_{\xi\xi}^{1,0} = 0, \quad (79)$$

$$U_{sr}^{2,0} + U_{\xi\xi}^{2,0} = 0 \quad (80)$$

при следующих граничных условиях для функций $W^{1,0}$ и $U^{2,0}$:

$$W^{1,0}|_{\xi_1=0} = -c_0 \quad (r < a);$$

$$W_{\xi}^{1,0}|_{\xi_1=0} = 0 \quad (r > a); \quad (81)$$

$$U^{2,0}|_{\xi_2=0} = 0 \quad (r < b);$$

$$U_{\xi}^{2,0}|_{\xi_2=0} = \begin{cases} -k^{-1/2} \rho W_{\xi}^{1,0}|_{\xi_1=0} & (b < r < a); \\ -k^{1/2} W_r^{1,0}|_{\xi_1=0} & (a < r). \end{cases} \quad (82)$$

Первый этап (отыскание решения функции $W^{1,0}$) аналогичен решению задачи о вдавливании гладкого штампа в трансверсально-изотропное полупространство:

$$W^{1,0} = \frac{2c_0}{\pi} \arcsin \frac{2a}{\sqrt{\xi_1^2 + (a+r)^2} + \sqrt{\xi_1^2 + (a-r)^2}}, \quad (83)$$

где

$$c_0 = \frac{1}{4} \frac{P}{\sqrt{ka}E^2}.$$

Нормальные контактные напряжения можно определить по формуле

$$\sigma_z = -\frac{P}{2\pi a \sqrt{a^2 - r^2}} \quad (r < a).$$

Специфика рассматриваемой контактной задачи проявляется при интегрировании уравнения второго типа. Граничные условия (82) для функции $U^{2,0}$ с учетом формулы (83) записываются следующим образом:

$$U^{2,0}|_{\xi_2=0} = 0 \quad (r < b),$$

$$U_{\xi}^{2,0}|_{\xi_2=0} = \begin{cases} \frac{2\rho c_0}{\pi \sqrt{a^2 - r^2}} & (b < r < a); \\ -\frac{2c_0 a \sqrt{k}}{\pi r \sqrt{r^2 - a^2}} & (a < r). \end{cases} \quad (84)$$

Решение уравнения (80) разыскивается в виде

$$U^{2,0} = \int_0^{\infty} A(p) J_1(pr) dp.$$

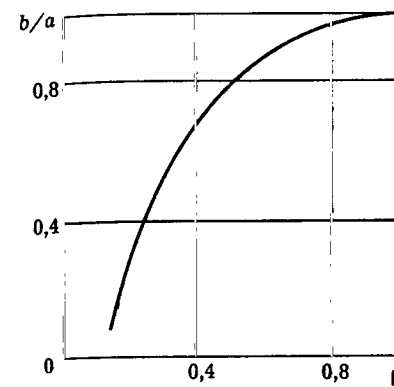


Рис. 3

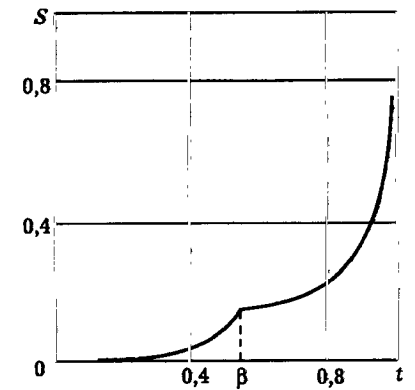


Рис. 4

Далее после подстановки $U^{2,0}$ в граничные условия (84) задача сводится к системе парных интегральных уравнений, решение которых находится в явном виде [5]. Как и в случае плоской задачи, найдено уравнение, определяющее заранее не известную границу между областями сцепления и скольжения, то есть величину b :

$$\sqrt{k} \ln \frac{1 + \frac{b}{a}}{1 - \frac{b}{a}} = 2\rho \frac{b}{a} K' \left(\frac{b}{a} \right). \quad (85)$$

Касательные напряжения на участке сцепления определяются по формуле

$$\tau_{rz} = \frac{P\sqrt{k}}{2\pi^2 a^2 t \sqrt{1-t^2}} \left\{ \frac{\pi \rho t}{\sqrt{k}} + \frac{\sqrt{\beta^2 - t^2}}{\sqrt{1-t^2}} \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{1}{\beta} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} - \frac{2\rho t^2}{\sqrt{k}(1-t^2)} \Pi_1(t^2-1, \beta) \right] - \ln \frac{\sqrt{1-t^2} + \sqrt{\beta^2 - t^2}}{\sqrt{1-t^2} - \sqrt{\beta^2 - t^2}} \right\} \quad (0 \leq t < \beta),$$

а на участке скольжения — из соотношения

$$\tau_{rz} = \frac{P\rho}{2\pi a^2} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \quad (\beta \leq t < 1),$$

где $t = r/a$; $\beta = b/a$.

На рис. 3 показана зависимость величины b/a (отношение радиуса участка сцепления к радиусу штампа) от коэффициента трения ρ (при $k = 1/3$), а на рис. 4 — распределение безразмерных касательных напряжений $S = \pi a^2 \tau_{rz} / P$ в области контакта (при $k = 1/3$, $\rho = 0,3$). Точка β разделяет участки сцепления и трения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воробьева Н. И., Коблик С. Г., Маневич Л. И. Осесимметричная контактная задача с учетом сцепления и скольжения // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 3. С. 550–558.
2. Галин Л. А. Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления // ПММ. 1945. Т. 9. Вып. 5. С. 413–424.
3. Коблик С. Г., Маневич Л. И. Контактная задача для ортотропной полосы при наличии в области контакта участков сцепления и скольжения // Гидромеханика и теория упругости. Днепропетровск: Изд-во ДГУ, 1976. Вып. 20. С. 106–110.
4. Маневич Л. И., Павленко А. В. К решению контактных задач теории упругости для ортотропной полосы с учетом сил трения // Изв. АН СССР. МТТ. 1974. № 6. С. 72–80.
5. Маневич Л. И., Павленко А. В. Асимптотический метод в микромеханике композиционных материалов. Киев: Вища школа, 1991. 132 с.
6. Маневич Л. И., Павленко А. В., Коблик С. Г. Асимптотические методы в теории упругости ортотропного тела. Киев–Донецк: Вища школа, 1982. 153 с.
7. Развитие теории контактных задач в СССР / Под ред. Л. А. Галина. М.: Наука, 1979. 493 с.
8. Седов Л. И. Плоские задачи гидромеханики и аэродинамики. М.: Наука, 1966. 448 с.

§ 5. МЕТОД СРАЩИВАЕМЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ
ДЛЯ ЗАДАЧ С МАЛЫМИ ЗОНАМИ КОНТАКТА

И. И. Аргатов, С. А. Назаров

Метод сращиваемых разложений изложен в монографиях [7, 10, 11, 17, 26] и др. и для решения контактных задач применялся в работах [3, 4, 25, 27] и др. Здесь поясняются основные идеи метода на примере решения контактной задачи для упругого тела конечных размеров. Затем обсуждаются усложнения, привносимые наличием нескольких малых зон контакта. В заключение приводятся результаты асимптотического анализа задачи с вытянутой узкой областью контакта.

1. Пусть в плоский участок Σ границы упругого тела Ω без трения вдавливается штамп с плоским основанием, занимающий в плане область $\omega(\varepsilon)$. Параметр $\varepsilon > 0$ считается малым и через $\omega(\varepsilon)$ обозначается фигура, полученная сжатием в ε^{-1} раз фигуры ω (т. е. $(x_1, x_2) \in \omega(\varepsilon)$, если только $\varepsilon^{-1}(x_1, x_2) \in \omega$). Предполагается, что тело закреплено на участке Γ_u , а на Γ_σ и Σ вне области контакта свободно от напряжений (рис. 1). Вектор $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ смещений точек тела Ω удовлетворяет задаче

$$\mu \nabla_x \cdot \nabla_x \mathbf{u}(\varepsilon; \mathbf{x}) + (\lambda + \mu) \nabla_x \nabla_x \cdot \mathbf{u}(\varepsilon; \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega; \quad (1)$$

$$\sigma_{31}(\mathbf{u}; \mathbf{x}) = \sigma_{32}(\mathbf{u}; \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Sigma; \quad (2)$$

$$\sigma_{33}(\mathbf{u}; \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Sigma, \quad \mathbf{x}' = (x_1, x_2) \notin \omega(\varepsilon); \quad (3)$$

$$u_3(\varepsilon; \mathbf{x}', 0) = \delta_0 + \beta_1 x_2 - \beta_2 x_1, \quad \mathbf{x}' \in \omega(\varepsilon); \quad (4)$$

$$\sigma^{(n)}(\mathbf{u}; \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma; \quad (5)$$

$$\mathbf{u}(\varepsilon; \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u. \quad (6)$$

Здесь λ, μ — параметры Ламе, $\sigma_{3k}(\mathbf{u})$ — напряжения, $\sigma^{(n)}$ — вектор напряжений на площадке с нормалью \mathbf{n} , δ_0 — вертикальное перемещение центра подошвы штампа, β_1 и β_2 — углы поворота штампа относительно координатных осей Ox_1 и Ox_2 .

Решение $\mathbf{u}(\varepsilon; \mathbf{x})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ представляется разложениями двух типов: внешним, справедливым на удалении от $\omega(\varepsilon)$, и внутренним, пригодным в малой окрестности $\omega(\varepsilon)$, причем существует область перекрытия, в которой работают оба разложения и производится их сращивание. Для исследования напряженного состояния тела Ω вблизи площадки контакта вводятся «растянутые» координаты

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3); \quad \xi_i = \varepsilon^{-1} x_i. \quad (7)$$

При этом из уравнения границы области контакта исчезает параметр ε , а краевое условие (4) преобразуется в $u_3(\varepsilon; \varepsilon \xi) = \delta_0 + \varepsilon(\beta_1 \xi_2 - \beta_2 \xi_1)$ при $\xi_3 = 0$ и $(\xi_1, \xi_2) \in \omega$. Значит, решение задачи в области «местных возмущений» (см. [14], § 133) следует искать в виде ряда

$$\mathbf{u}(\varepsilon; \mathbf{x}) = \mathbf{w}^0(\xi) + \varepsilon \mathbf{w}^1(\xi) + \dots \quad (8)$$

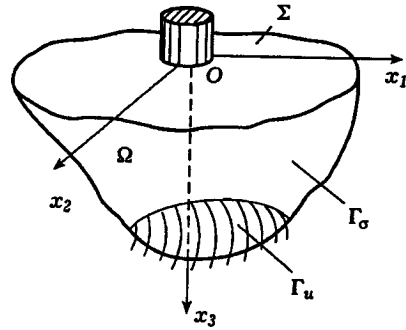


Рис. 1

С переходом к новому масштабу участки границы Γ_u и Γ_σ удаляются от штампа на расстояния порядка ε^{-1} . Поэтому задача для w^r формулируется в полупространстве

$$\mu \nabla_\xi \cdot \nabla_\xi w^r(\xi) + (\lambda + \mu) \nabla_\xi \nabla_\xi \cdot w^r(\xi) = 0, \quad \xi_3 > 0; \quad (9)$$

$$\sigma_{31}(w^r; \xi) = \sigma_{32}(w^r; \xi) = 0, \quad \xi_3 = 0; \quad (10)$$

$$\sigma_{33}(w^r; \xi) = 0, \quad \xi_3 = 0, \quad \xi' = (\xi_1, \xi_2) \in \omega; \quad (11)$$

$$w_3^0(\xi', 0) = \delta_0, \quad \xi' \in \omega; \quad (12)$$

$$w_3^1(\xi', 0) = \beta_1 \xi_2 - \beta_2 \xi_1, \quad \xi' \in \omega; \quad (13)$$

$$w_3^r(\xi', 0) = 0, \quad \xi' \in \omega \quad (r = 2, 3, \dots). \quad (14)$$

Выписанные соотношения замыкаются асимптотическим условием для $w^r(\xi)$ при $|\xi| \rightarrow \infty$, возникающим в результате срачивания (8) с внешним разложением. Для главного члена внутреннего разложения на основании (6) получаем

$$w^0(\xi) = o(1), \quad |\xi| \rightarrow \infty. \quad (15)$$

Задачу (9)–(12), (15) можно свести к интегральному уравнению

$$(Bp^0)(\xi_1, \xi_2) \equiv \frac{1-\nu^2}{\pi E} \iint_\omega \frac{p(w^0; \eta_1, \eta_2) d\eta_1 d\eta_2}{\sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2}} = \delta_0 \quad (16)$$

(см., например, [8]); здесь E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона. В свою очередь вектор-функция w^0 представима в виде обобщенного потенциала простого слоя

$$w^0(\xi) = \iint_\omega p(w^0; \eta_1, \eta_2) T(\xi_1 - \eta_1, \xi_2 - \eta_2, \xi_3) d\eta_1 d\eta_2, \quad (17)$$

где T — решение задачи Буссинеска о нагружении упругого полупространства $\xi_3 \geq 0$ единичной сосредоточенной силой, направленной вдоль оси

$O\xi_3$ (см., например, [23]). Из (17) вытекает разложение (см., например, [13])

$$w^0(\xi) = F_3^0 T(\xi) + \sum_{i=1}^2 M_i^0 S^{(i)}(\xi) + \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=0}^m M_{m,n}^0 S^{(m,n)}(\xi); \quad (18)$$

$$S^{(1)}(\xi) = -\frac{\partial T(\xi)}{\partial \xi_2}, \quad S^{(2)}(\xi) = \frac{\partial T(\xi)}{\partial \xi_1}, \quad S^{(m,n)}(\xi) = \frac{\partial^m T(\xi)}{\partial \xi_1^{m-n} \partial \xi_2^n}.$$

Для характеристик давления в (18) использованы обозначения ($r = 0$)

$$F_3^r = \iint_\omega p(w^r; \eta) d\eta; \quad (19)$$

$$M_1^r = \iint_\omega \eta_2 p(w^r; \eta) d\eta, \quad M_2^r = -\iint_\omega \eta_1 p(w^r; \eta) d\eta; \quad (20)$$

$$M_{m,n}^r = \frac{(-1)^m}{m!} C_m^n \iint_\omega \eta_1^{m-n} \eta_2^n p(w^r; \eta) d\eta \quad (m = 2, 3, \dots). \quad (21)$$

Осуществив в (18) замену координат (7), находим

$$w^0(\varepsilon^{-1}x) \sim \varepsilon F_3^0 T(x) + \varepsilon^2 \sum_{i=1}^2 M_i^0 S^{(i)}(x) + \sum_{m=2}^{\infty} \varepsilon^{m+1} \sum_{n=0}^m M_{m,n}^0 S^{(m,n)}(x). \quad (22)$$

Из (22) следует, что в области, удаленной от зоны контакта, решение исходной задачи представляется в виде

$$u(\varepsilon; x) = \varepsilon v^1(x) + \varepsilon^2 v^2(x) + \dots \quad (23)$$

При уменьшении ε зона контакта стягивается в точку и краевое условие (4) в пределе исчезает. Поэтому вектор-функции v^q удовлетворяют уравнению (1), краевым условиям (5), (6) и следующему условию (ср. с (2), (3)):

$$\sigma_{3k}(v^q; x) = 0 \quad (k = 1, 2, 3), \quad x \in \Sigma \setminus O. \quad (24)$$

Члены внешнего разложения имеют в начале координат особенности, вид которых определяется в результате срачивания (23) с внутренним разложением (8).

Обозначим через G вектор-функцию Грина с полюсом в точке O , т. е. решение задачи (1), (24), (5), (6), подчиненное условию

$$G(x) = T(x) + O(1), \quad |x| \rightarrow 0. \quad (25)$$

Справедливо представление $G(x) = T(x) + g(x)$, где g — регулярная составляющая, аннулирующая невязку T в краевых условиях (5), (6). Поскольку вектор-функция g в окрестности начала координат удовлетворяет однородному уравнению (1) и краевому условию (24), она раскладывается в ряд Маклорена

$$g(x) = g(0) + \sum_{k=1}^6 g_{1,k} V^{1,k}(x) + \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{3(m+1)} g_{m,k} V^{m,k}(x). \quad (26)$$

При этом $V^{m,k}(x)$ — векторный однородный полином степени m (см. [6], разд. 5.3),

$$\frac{2\pi\mu}{1-\nu}g_3(x_1, x_2, 0) = A_0 + B_1x_1 + B_2x_2 + C_{11}x_1^2 + 2C_{12}x_1x_2 + C_{22}x_2^2 + \dots \quad (27)$$

Если L — размерность длины, то размерности величин A_0 , B_i и C_{ij} соответственно равны L^{-1} , L^{-2} и L^{-3} . Вектор-функция Грина G дает решение задачи о нагружении тела Ω сосредоточенной силой. Введем еще решения $G^{(i)}$ и $G^{(m,n)}$ задачи о действии на границу Ω сосредоточенных моментов и полимоментов, для которых

$$G^{(i)}(x) = S^{(i)}(x) + O(1), \quad |x| \rightarrow 0; \quad G^{(m,n)}(x) = S^{(m,n)}(x) + O(1), \quad |x| \rightarrow 0.$$

Особенность для главного члена внешнего асимптотического разложения доставляет первое слагаемое в (22). Ввиду (23) и (25) положим

$$v^1(x) = F_3^0 G(x). \quad (28)$$

Подставляя (26) в (28) и делая замену (7), находим

$$\varepsilon v^1(\varepsilon\xi) \sim F_3^0 T(\xi) + \varepsilon F_3^0 g(0) + \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^{m+1} \sum_{k=1}^{3(m+1)} F_3^0 g_{m,k} V^{m,k}(\xi). \quad (29)$$

Сопоставляя двучленные асимптотические представления (8) и (23) (при учете (22) и (29)), выводим

$$w^1(\xi) = F_3^0 g(0) + o(1), \quad |\xi| \rightarrow \infty; \quad (30)$$

$$v^2(x) = \sum_{i=1}^2 M_i^0 S^{(i)}(x) + O(|x|^{-1}), \quad |x| \rightarrow 0. \quad (31)$$

Решение задачи (9)–(11), (13), (30) представим в виде

$$w^1(\xi) = F_3^0 g(0) + W^1(\xi), \quad (32)$$

где исчезающая на бесконечности вектор-функция W^1 удовлетворяет граничному условию $W^1(\xi', 0) = -F_3^0 g_3(0) + \beta_1 \xi_2 - \beta_2 \xi_1$ для $\xi' \in \omega$. Соответственно, к уравнению (16) присоединяется следующее:

$$(Bp^1)(\xi_1, \xi_2) = -\tilde{F}_3^0 A_0 + \beta_1 \xi_2 - \beta_2 \xi_1; \quad \tilde{F}_3^0 = (\pi E)^{-1} (1 - \nu^2) F_3^0. \quad (33)$$

Для вектор-функции W^1 справедливо аналогичное (18) разложение, которое позволяет уточнить соотношение (31),

$$v^2(x) = \sum_{i=1}^2 M_i^0 S^{(i)}(x) + F_3^1 T(x) + O(1), \quad |x| \rightarrow 0. \quad (34)$$

Теперь асимптотическое условие (34) однозначно фиксирует вектор-функцию v^2 , а именно,

$$v^2(x) = \sum_{i=1}^2 M_i^0 G^{(i)}(x) + F_3^1 G(x). \quad (35)$$

Таким образом, в области сращивания $\sqrt{\varepsilon}c \leq |x| \leq \sqrt{\varepsilon}C$ (или, что то же, $\varepsilon^{-1/2}c \leq |\xi| \leq \varepsilon^{-1/2}C$), где пригодны оба асимптотических представления, имеем $w^0(\xi) + \varepsilon w^1(\xi) - [\varepsilon v^1(\varepsilon\xi) + \varepsilon^2 v^2(\varepsilon\xi)] = O(\varepsilon^{3/2})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Наконец, выпишем еще несколько членов асимптотических разложений

$$w^2(\xi) = F_3^0 \sum_{k=1}^6 g_{1,k} V^{1,k}(\xi) + \sum_{i=1}^2 M_i^0 g^{(i)}(0) + F_3^1 g(0) + W^2(\xi); \quad (36)$$

$$v^3(x) = \sum_{n=0}^2 M_{2,n}^0 G^{(2,n)}(x) + \sum_{i=1}^2 M_i^1 G^{(i)}(x) + F_3^2 G(x);$$

$$w^3(\xi) = F_3^0 \sum_{k=1}^9 g_{2,k} V^{2,k}(\xi) + \sum_{i=1}^2 M_i^0 \sum_{k=1}^6 g_{1,k}^{(i)} V^{1,k}(\xi) + F_3^1 \sum_{k=1}^6 g_{1,k} V^{1,k}(\xi) + \sum_{n=0}^2 M_{2,n}^0 g^{(2,n)}(0) + \sum_{i=1}^2 M_i^1 g^{(i)}(0) + F_3^2 g(0) + W^3(\xi). \quad (37)$$

Для распределенного внутри $\omega(\varepsilon)$ контактного давления (благодаря тождеству $\partial/\partial x_i = \varepsilon^{-1} \partial/\partial \xi_i$) получается разложение

$$p(u; x_1, x_2) = \varepsilon^{-1} p(w^0; \xi_1, \xi_2) + p(w^1; \xi_1, \xi_2) + \dots,$$

где первые члены служат решениями уравнений (16) и (33), а очередные два, отвечающие (36) и (37), следующим:

$$(Bp^2)(\xi_1, \xi_2) = -\tilde{F}_3^0 (B_1 \xi_1 + B_2 \xi_2) - \sum_{i=1}^2 \tilde{M}_i^0 A_0^{(i)} - \tilde{F}_3^1 A_0; \quad (38)$$

$$(Bp^3)(\xi_1, \xi_2) = -\tilde{F}_3^0 (C_{11} \xi_1^2 + 2C_{12} \xi_1 \xi_2 + C_{22} \xi_2^2) - \sum_{i=1}^2 \tilde{M}_i^0 (B_1^{(i)} \xi_1 + B_2^{(i)} \xi_2) - \tilde{F}_3^1 (B_1 \xi_1 + B_2 \xi_2) - \sum_{n=0}^2 \tilde{M}_{2,n}^0 A_0^{(2,n)} - \sum_{i=1}^2 \tilde{M}_i^1 A_0^{(i)} - \tilde{F}_3^2 A_0. \quad (39)$$

Здесь коэффициенты \tilde{F}_3^r , \tilde{M}_i^r и $\tilde{M}_{2,n}^r$ равны величинам F_3^r , M_i^r и $M_{2,n}^r$ (см. (19)–(21)), умноженным на $(\pi E)^{-1} (1 - \nu^2)$. Постоянные $A_0^{(i)}$, $B_k^{(i)}$ ($i, k = 1, 2$)

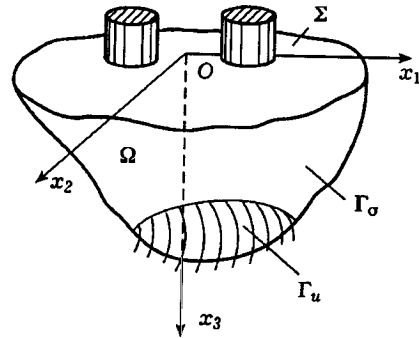


Рис. 2

и $A_0^{(2,n)}$ ($n = 0, 1, 2$) суть коэффициенты в асимптотическом разложении (аналогичном (27)) ортогональной к границе компоненты регулярной составляющей векторов $\mathbf{G}^{(i)}$ и $\mathbf{G}^{(2,n)}$, соответственно. Величины $A_0^{(i)}$ и $B_k^{(i)}$, $A_0^{(2,n)}$ имеют размерности L^{-2} и L^{-3} . Они определяются формой и размерами тела Ω , условиями его закрепления и зависят, вообще говоря, от постоянной Пуассона. Заметим, что решение уравнений (16), (33), (38), (39) для эллиптического штампа выписываются в явном виде (см. [1, 9, 12] и др.). Вычисление первых членов асимптотики упрощается, если начало координат совпадает с, так называемым [3], центром давления основания штампа, когда $M_1^0 = M_2^0 = 0$.

Итак, построение асимптотики контактного давления сводится к решению последовательности контактных задач для штампа с полиномиальным основанием. При этом возникает задача нахождения методов эффективного вычисления коэффициентов A_0, B_1, B_2, \dots и описания их свойств.

2. При наличии нескольких малых зон контакта алгоритм построения асимптотики не претерпевает существенных изменений. Пусть на Σ выделены точки P^1, \dots, P^J с координатами $(x_1^j, x_2^j, 0)$, область $\omega_j(\varepsilon)$ образована сжатием ω_j с коэффициентом ε^{-1} и при уменьшении ε стягивается к точке P^j . В задаче для системы штампов (рис. 2) краевое условие (4) заменяется таким:

$$u_3(\varepsilon; \mathbf{x}', 0) = \delta_0^j + \beta_1^j(x_2 - x_2^j) - \beta_2^j(x_1 - x_1^j), \quad \mathbf{x}' \in \omega_j(\varepsilon) \quad (j = 1, \dots, J);$$

здесь δ_0^j, β_1^j и β_2^j — заданные поступательное смещение и углы поворота штампа с основанием $\omega_j(\varepsilon)$. В рассматриваемом случае строится одно внешнее асимптотическое разложение (23) и J внутренних (8), для каждого из которых выписываются соотношения (9)–(14). По аналогии с (28)

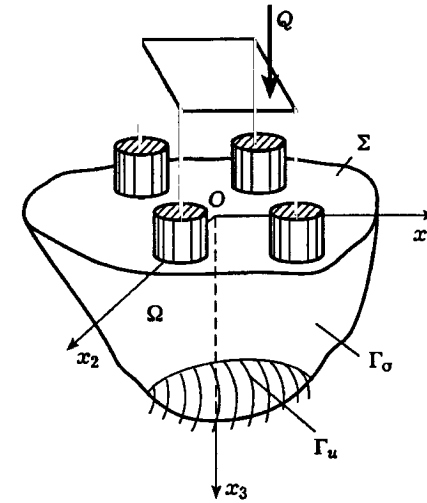


Рис. 3

главный член внешнего разложения следует взять в виде

$$\mathbf{v}^1(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^J F_3^{0j} \mathbf{G}(\mathbf{x}; P^j). \quad (40)$$

Здесь $\mathbf{G}(\cdot; P^j)$ — вектор-функция Грина с полюсом в точке P^j . Формулы (30), (31), определяющие вторые члены разложений, замещаются следующими:

$$\mathbf{w}^{1j}(\xi^j) = F_3^{0j} \mathbf{g}(P^j) + \sum_{k \neq j} F_3^{0k} \mathbf{G}(P^j; P^k) + o(1), \quad |\xi^j| \rightarrow \infty; \quad (41)$$

$$\mathbf{v}^2(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^2 M_i^{0j} \mathbf{S}^{(i)}(\mathbf{x} - P^j) + O(|\mathbf{x} - P^j|^{-1}), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow P^j.$$

Новый момент — появление в (41) суммы, учитывающей взаимодействие штампов. При построении асимптотики контактных давлений дополнительно требуется вычислять коэффициенты в ряде Тейлора для $\mathbf{G}(\mathbf{x}; P^k)$ в точке P^j ($k \neq j$).

Метод сращиваемых разложений позволяет изучить нелинейную задачу одностороннего контакта для системы жестко соединенных штампов (рис. 3), когда краевое условие (4) заменяется условием Синьорини

$$u_3(\varepsilon; \mathbf{x}', 0) \geq \delta_0 + \beta_1 x_2 - \beta_2 x_1, \quad \sigma_{33}(\mathbf{u}; \mathbf{x}', 0) \leq 0, \\ [u_3(\varepsilon; \mathbf{x}', 0) - \delta_0 - \beta_1 x_2 + \beta_2 x_1] \sigma_{33}(\mathbf{u}; \mathbf{x}', 0) = 0, \quad \mathbf{x}' \in \omega_1(\varepsilon) \cup \dots \cup \omega_J(\varepsilon).$$

Ограничиваясь только главными членами асимптотических разложений (17) и (40), находим, что пятна контакта «в главном» не взаимодействуют. При этом для определения коэффициентов $F_3^{01}, \dots, F_3^{0J}$ возникают условия

$$\begin{aligned} \delta_0 + \beta_1 x_2^j - \beta_2 x_1^j \leq 0 &\implies F_3^{0j} = 0, \\ \delta_0 + \beta_1 x_2^j - \beta_2 x_1^j > 0 &\implies F_3^{0j} = \kappa_j (\delta_0 + \beta_1 x_2^j - \beta_2 x_1^j), \end{aligned} \quad (42)$$

где $\kappa_j = \pi E(1-\nu)^{-1} C_j$; C_j — поступательная емкость штампа с основанием ω_j .

Задача одностороннего контакта усложняется введением в ее формулировку уравнений равновесия штампа. При этом величина Q и ось $x_1 = x_1^*$, $x_2 = x_2^*$ действия силы, прижимающей штамп к поверхности упругого тела, считаются заданными, параметры δ_0 , β_1 и β_2 осадки штампа подлежат определению. Результирующую задачу составят соотношения (42) и уравнения равновесия

$$\sum_{j=1}^J F_3^{0j} = Q, \quad \sum_{j=1}^J x_i^j F_3^{0j} = x_i^* Q \quad (i = 1, 2). \quad (43)$$

Решение задачи (42), (43) получено в [3] (см. также [2]).

3. Метод сращиваемых разложений применим к решению контактной задачи для узкого штампа (см. [4, 25, 27] и др.). Для случая, когда (в соответствии с классификацией [26]) сингулярное возмущение границы «размазано» вдоль кривой, строгое обоснование метода было впервые дано в работах [15, 24].

Пусть Γ — окружность с центром в начале координат и радиусом R . Обозначим через $\omega(\varepsilon)$ кольцо со срединной линией Γ и толщиной $h = 2\varepsilon R$. Главный член внешнего асимптотического разложения решения задачи (1)–(6) назовем в форме

$$v(x) = \int_{-\pi}^{\pi} G(x; R \cos \tau, R \sin \tau, 0) P(\tau) R d\tau,$$

где P — интенсивность контактных давлений, рассчитанных на единицу длины дуги контура Γ . В окрестности подошвы штампа возникает явление «плоского» пограничного слоя, который описывается при помощи растянутых координат, вводимых в плоскостях, нормальных к Γ . Решение задачи для пограничного слоя конструируется при помощи известных решений [16]. Результатом сращивания будет уравнение для определения плотности P

$$P(\theta)\Lambda + (JP)(\theta) + (kP)(\theta) = \frac{\pi E}{2(1-\nu^2)} (\delta_0 + \beta_1 R \sin \theta - \beta_2 R \cos \theta). \quad (44)$$

Здесь $\Lambda = \ln(16R/h)$; J и k — интегральные операторы, определенные формулами

$$(JP)(\theta) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{P(\tau) - P(\theta)}{2|\sin[(\tau - \theta)/2]|} d\tau;$$

$$(kP)(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} K(\theta, \tau) P(\tau) d\tau,$$

$$K(\theta, \tau) = \frac{\pi ER}{2(1-\nu^2)} g_3(R \cos \theta, R \sin \theta, 0; R \cos \tau, R \sin \tau, 0).$$

Если тело Ω имеет ось симметрии и осесимметричны участки Γ_σ , Γ_u его границы, то $K(\theta, \tau) = K(|\theta - \tau|)$ и решение уравнения (44) имеет вид

$$P(\theta) = \frac{\pi E}{2(1-\nu^2)} \left[\frac{\delta_0}{\Lambda + \alpha_0} + \frac{R}{\Lambda - 2 + \alpha_1} (\beta_1 \sin \theta - \beta_2 \cos \theta) \right],$$

$$\alpha_0 = 2 \int_0^{\pi} K(t) dt, \quad \alpha_1 = 2 \int_0^{\pi} K(t) \cos t dt.$$

О построении решения уравнения (44) в общей ситуации см. [4, 15, 18, 22, 24].

С допущением отрыва штампа от поверхности упругого тела получается задача, в которой наряду с асимптотикой контактных давлений требуется определить вытянутую узкую зону контакта. При этом результирующая задача сводится к одномерному вариационному неравенству (см. [5]). Наконец, упомянем работы [19–21], в которых при помощи метода сращиваемых асимптотических разложений изучались задачи теории упругости с условиями одностороннего контакта с трением.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В. М., Пожарский Д. А. Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. М.: Факториал, 1998. 288 с.
2. Аргатов И. И., Назаров С. А. Асимптотическое решение задачи Синьорини с малыми участками свободной границы. // Сиб. матем. журнал. 1994. Т. 35. № 2. С. 258–277.
3. Аргатов И. И., Назаров С. А. Асимптотическое решение задачи об упругом теле, лежащем на нескольких малых опорах // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 2. С. 110–118.
4. Аргатов И. И., Назаров С. А. Давление на упругое полупространство узкого кольцевого штампа // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 5. С. 810–825.
5. Аргатов И. И., Назаров С. А. Асимптотическое решение задачи Синьорини с препятствием на тонком продолговатом множестве // Матем. сборник. 1996. Т. 187. № 10. С. 3–32.
6. Арутюнян Н. Х., Мовчан А. Б., Назаров С. А. Поведение решений задач теории упругости в неограниченных областях с параболидальными и цилиндрическими включениями или полостями // Успехи механики. Т. 10. № 4. С. 3–91.

7. Ван-Дайк М. Д. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
8. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1953. 264 с.
9. Довнорович В. И. Пространственные контактные задачи теории упругости. Минск: Изд-во БГУ, 1959. 161 с.
10. Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
11. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 274 с.
12. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехтеориздат, 1955. 491 с.
13. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
14. Ляв А. Математическая теория упругости. М.-Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.
15. Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Асимптотика решений задачи Дирихле в трехмерной области с вырезанной тонкой трубкой // Матем. сборник. 1981. Т. 116. № 2. С. 187–217.
16. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
17. Найфе А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
18. Назаров С. А. Осреднение краевых задач в области, содержащей тонкую полость с периодически изменяющимся сечением // Труды Московск. матем. общества. 1990. Т. 53. С. 98–129.
19. Назаров С. А. Эллиптические неравенства для тонких упругих тел при малом коэффициенте трения // Дифф. уравнения. 1990. Т. 26. № 4. С. 677–687.
20. Назаров С. А. Асимптотика решений задачи Синьорини без трения или с малым трением // Проблемы матем. анализа. Вып. 12. СПб: Изд-во СПбГУ, 1992. С. 82–109.
21. Назаров С. А. Задача Синьорини с трением для тонких упругих тел. // Труды Московского матем. общества. 1995. Т. 56. С. 262–302.
22. Назаров С. А., Полякова О. Р. Разрушение узкой перемычки между трещинами, лежащими в одной плоскости // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 1. С. 157–165.
23. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
24. Федорюк М. В. Задача Дирихле для оператора Лапласа во внешности тонкого тела вращения // Теория кубатурн. формул и приложения функц. анализа к задачам матем. физики. Тр. семинара С. Л. Соболева. Новосибирск: Изд-во Института математики СО АН СССР, 1980. Т. 1. С. 113–131.
25. Kalker J. J. On elastic line contact // J. Appl. Mech. Trans. ASME. Ser. E. 1972. V. 39. № 4. P. 1125–1132.
26. Mazja W. G., Nazarov S. A., Plamenewski B. A. Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestör ten Gebieten. Bd. 1. Berlin: Akademie-Verlag. 1991. 432 s.
27. Tuck E. O., Mei C. C. Contact of one more slender bodies with on elastic half-space // Int. J. Solids and Struct. 1983. V. 19. № 1. P. 1–23.

§ 6. МЕТОД ФИКТИВНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ В ДИНАМИЧЕСКИХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ

В. А. Бабешко, О. Д. Пряхина

Настоящий параграф посвящен изложению эффективного метода решения интегральных уравнений и систем интегральных уравнений первого рода с разностными ядрами, обладающими весьма общими свойствами, заданных в ограниченной области или в системе таких областей. Указанный подход позволяет с высокой точностью строить решения динамических смешанных, в том числе контактных, задач. Его точность ограничивается лишь возможностями вычислительной техники.

Метод позволяет получить решение одновременно во всех точках области задания интегральных уравнений, включая границу и угловые точки, а также дает возможность использовать при решении динамических задач методы и решения соответствующих задач статики или задач для сред с поглощением.

Суть метода фиктивного поглощения состоит в приведении интегральных уравнений с сильно осциллирующими ядрами к уравнениям с ядрами, экспоненциально убывающими с ростом аргумента. После этого для получения решения исходного уравнения динамической задачи решение задачи с убывающим ядром служит базовым. Поэтому описываемый метод был назван методом фиктивного поглощения, сокращенно МФП. Основы этого метода заложены в [1]. В [1–4, 9] получены решения интегральных уравнений динамических смешанных задач для полуограниченных сред в случае полосовой, круговой и прямоугольной областей. В [5, 7, 11–14] МФП развит применительно к различным типам систем интегральных уравнений, возникающих при изучении динамических смешанных задач с учетом связанности полей и при различных условиях в области контакта. Особенностью устройств акустоэлектроники является наличие большого числа электродов на поверхности пьезокристаллической среды, что приводит к необходимости решения уравнений свертки, заданных на системе отрезков. К этим же уравнениям приводят динамические контактные задачи о возбуждении среды системой полосовых штампов. В [6, 10] МФП развивается для решения такой системы. Следует отметить работу [8], где МФП реализуется для составных областей.

1. Схема МФП такова: система интегральных уравнений $Kq = f$ с помощью новой неизвестной вектор-функции q_0 , которая вводится соотношением $q = q_0 + \varphi$, преобразуется к виду $Kq_0 = f - K\varphi$, где K — интегральный оператор с сильно осциллирующим и медленно убывающим разностным ядром. Вектор-функция φ при своем построении содержит некоторый произвол, устраняющийся после решения всей задачи. Вектор-функция q_0 строится таким образом, что допускается представление $q_0 = Lt$ (L — некоторый линейный оператор). В результате приходим к системе

$$St = f - K\varphi, \quad S = KL, \quad (1)$$

с неосциллирующим, экспоненциально убывающим с ростом аргумента матричным ядром.

Свойства этого ядра, обладающего сильным затуханием, таковы, что обратный оператор S^{-1} сравнительно легко строится приближенными ме-

тодами решения задач статики или для сред с поглощением (метод факторизации, метод ортогональных полиномов, асимптотические методы и др.). Решение (1) $t = S^{-1}(f - K\varphi)$ содержит произвол, вносимый вектор-функцией φ . Для его устранения из условия эквивалентности всех уравнений получается необходимая дополнительная система уравнений на некотором множестве $VS^{-1}(f - K\varphi) = 0$. (V — оператор преобразования Фурье). Из этой системы отыскиваются неизвестные составляющие вектор-функции φ , которые вносятся в представление для t , а затем в $q_0 = Lt$. После этого $q = q_0 + \varphi$ дает решение всей задачи.

2. Изложим МФП на примере одномерного интегрального уравнения, являющегося типичным для многих динамических смешанных задач в плоской постановке. Рассмотрим интегральное уравнение вида

$$Kq = \int_{-a}^a k(x-\xi)q(\xi) d\xi = f(x), \quad |x| \leq a, \quad (2)$$

где

$$k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} K(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha.$$

Предположим, что это уравнение однозначно разрешимо при любой дважды непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$, а контур σ расположен в соответствии с правилами, обеспечивающими выполнение условий излучения на бесконечности [1].

Будем считать, что функция $K(\alpha)$ обладает следующими свойствами, присущими широкому классу функций динамических смешанных задач:

1) $K(\alpha)$ — четная функция параметра α , мероморфная в комплексной плоскости;

2) на вещественной оси может иметь конечное число вещественных нулей, полюсов z_k, p_k ($k = 1, 2, \dots, N$) и счетное множество комплексных z_k, p_k ($k = N + 1, \dots, \infty$) с точкой сгущения в секторах малых углов, содержащих мнимую ось;

3) на бесконечности $K(\alpha)$ обладает асимптотикой

$$K(\alpha) = c|\alpha|^{-1}[1 + O(\alpha^{-1})], \quad |\alpha| \rightarrow \infty.$$

Введем функцию

$$\Pi(\alpha) = \prod_{k=1}^n \frac{\alpha^2 - z_k^2}{\alpha^2 - p_k^2}, \quad n \geq N, \quad \Pi(\alpha) = 1 + O(\alpha^{-1}), \quad |\alpha| \rightarrow \infty, \quad (3)$$

регулярную на вещественной оси всюду, кроме конечного числа особых точек (нулей и полюсов), совпадающих с особыми точками $K(\alpha)$ на вещественной оси. Тогда функция $S(\alpha) = K(\alpha)\Pi^{-1}(\alpha)$ будет регулярной на вещественной оси, а ее асимптотическое поведение будет совпадать с поведением $K(\alpha)$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$.

Не нарушая общности, построим решение $q(x) \equiv q(x, \eta)$ уравнения (2) с правой частью $f(x) = e^{-i\eta x}$ ($\eta = \text{const}$), считая при этом, что константа c , характеризующая поведение K на бесконечности, равна единице.

Представим $K(\alpha)$ в виде произведения $K(\alpha) = S(\alpha)\Pi(\alpha)$.

Выберем в качестве $S(\alpha)$ функцию $S(\alpha) = 1/\sqrt{\alpha^2 + B^2}$, $B > 0$.

Функция $\Pi(\alpha) = S^{-1}(\alpha)K(\alpha)$ приближается рациональной функцией вида (3), где $s = n - N$ — степень аппроксимирующего полинома. Использование этой аппроксимации обосновано в [1]. Число нулей, полюсов функции $\Pi(\alpha)$ зависит от желаемой точности построения приближенного решения.

ЛЕММА 1. *Справедливы разложения*

$$\Pi(\alpha) = 1 + \sum_{j=1}^n \alpha_j (\alpha^2 - p_j^2)^{-1}, \quad \Pi^{-1}(\alpha) = 1 + \sum_{i=1}^n \beta_i (\alpha^2 - z_i^2)^{-1},$$

где

$$\alpha_j = \prod_{k=1}^n (p_j^2 - z_k^2) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (p_j^2 - p_k^2)^{-1}, \quad \beta_i = \prod_{k=1}^n (z_i^2 - p_k^2) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (z_i^2 - z_k^2)^{-1}.$$

Доказательство леммы вытекает из представления (3) и поведения $\Pi(\alpha)$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$.

Решение ищем в виде $q(x) = q_0(x) + \varphi(x)$.

Строим функцию $\varphi(x)$ такую, чтобы совпадали функционалы

$$\int_{-a}^a q(x) e^{\pm i p_m x} dx = \int_{-a}^a \varphi(x) e^{\pm i p_m x} dx, \quad m = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

где p_m — полюса $\Pi(\alpha)$, расположенные выше контура σ .

Применение МФП предполагает разложение функции $\varphi(x)$ по любой полной линейно-независимой системе функций. В качестве такой системы возьмем δ -функции Дирака с непересекающимися носителями в точках $x_k = \pm y_k$; y_k — точки, делящие интервал $(0, a)$ на равные отрезки. При этом для построения приближенного решения следует взять конечное число членов ряда, т.е. решение ищем в виде

$$q(x) = q_0(x) + \sum_{k=1}^{2n} c_k \delta(x - x_k), \quad |x_k| < a, \quad (5)$$

где c_k — подлежащие определению неизвестные коэффициенты.

ЛЕММА 2 [1]. Пусть функция $q_0(x) \in L_p(-a, a)$, $p > 1$ и имеет носитель на $[-a, a]$. Для того чтобы таким же свойством обладала и функция $t(x) = \int_{\sigma} \Pi(\alpha) Q_0(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha$, необходимо и достаточно, чтобы функция $Q_0(\alpha) = \int_{-a}^a q_0(x) e^{i\alpha x} dx$ обладала свойством $Q_0(\pm p_k) = 0$, $k = 1, \dots, n$ на полярном множестве $\Pi(\alpha)$.

В силу (4) функция $q_0(x)$ удовлетворяет условию леммы 2, на основании которой вводим новую неизвестную $t(x)$ соотношением

$$t(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} T(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad T(\alpha) = \Pi(\alpha) Q_0(\alpha). \quad (6)$$

Подставляя (5) в (2), учитывая (6) и свойства δ -функций, получаем новое уравнение относительно $t(x)$ с регулярным ядром

$$\int_{-a}^a s(x-\xi) t(\xi) d\xi = f(x) - \sum_{k=1}^{2n} c_k k(x-x_k), \quad |x| \leq a, \quad (7)$$

$$s(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha.$$

Предположим, что решение $t_\eta(x)$ уравнения (7) с правой частью $e^{-i\eta x}$ построено. В силу линейности задачи решение уравнения (7) будет связано с $t_\eta(x)$ следующим соотношением:

$$T(\alpha) = T_\eta(\alpha) - \sum_{k=1}^{2n} c_k [L(\alpha, x_k) + e^{i\alpha x_k}], \quad (8)$$

$$L(\alpha, x_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} S(\eta) [\Pi(\eta) - 1] T_\eta(\alpha) e^{i\eta x_k} d\eta. \quad (9)$$

С помощью (5), (6), (8) находим

$$Q(\alpha, \eta) = T_\eta(\alpha) \Pi^{-1}(\alpha) - \sum_{k=1}^{2n} c_k [L(\alpha, x_k) + e^{i\alpha x_k}] \Pi^{-1}(\alpha) + \sum_{k=1}^{2n} c_k e^{i\alpha x_k}. \quad (10)$$

Применяя обратное преобразование Фурье к функции $Q(\alpha, \eta)$, получаем искомое решение интегрального уравнения (2)

$$q(x, \eta) = t_\eta(x) + \int_{\sigma} [\Pi^{-1}(\alpha) - 1] T_\eta(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{2n} c_k \left\{ \int_{\sigma} \Pi^{-1}(\alpha) L(\alpha, x_k) e^{-i\alpha x} d\alpha + \int_{\sigma} [\Pi^{-1}(\alpha) - 1] e^{-i\alpha(x-x_k)} d\alpha \right\}. \quad (11)$$

Для определения c_k к функции $t(x)$ применим лемму 2. Поскольку функция $q_0(x) \in L_p$, $p > 1$ и имеет носитель в $[-a, a]$, то $T(\pm z_l) = 0$, что равносильно

$$\sum_{k=1}^{2n} c_k [e^{\pm iz_l x_k} + L(\pm z_l, x_k)] = T_\eta(\pm z_l), \quad l = 1, 2, \dots, n,$$

где z_l — нули функции $\Pi(\alpha)$, лежащие в верхней полуплоскости (выше контура σ).

Решение уравнения $St_\eta = e^{-i\eta x}$ можно получить, используя различные методы решения статических задач, поскольку трансформанта Фурье $S(\alpha)$ ядра интегрального уравнения (7) не имеет особенностей на вещественной оси и убывает степенным образом на бесконечности так же, как в задачах статики. Следующая теорема дает общее представление решения уравнения $St_\eta = e^{-i\eta x}$.

ТЕОРЕМА [1]. Решение интегрального уравнения $St_\eta = e^{-i\eta x}$ дается соотношением

$$t_\eta(x) = S^{-1}(\eta) e^{-i\eta x} + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \{ [X^+(\alpha) - X^-(\alpha)] e^{-i\alpha(a+x)} + [X^+(\alpha) + X^-(\alpha)] e^{-i\alpha(a-x)} \} S_+^{-1}(\alpha) d\alpha, \quad |x| \leq a. \quad (12)$$

Функции $X^\pm(\alpha)$ регулярны в нижней полуплоскости, убывают там с весом и находятся из однозначно разрешимого уравнения

$$X^\pm = \mp M X^\pm + N^\pm, \quad M X = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{S_-(\alpha) e^{-2i\alpha a} X(\alpha)}{S_+(\alpha)(\alpha + \xi)} d\alpha,$$

$$N^\pm(\xi) = i \{ S_+^{-1}(\eta)(\xi + \eta)^{-1} e^{-i\alpha \eta} \pm S_-^{-1}(\eta)(\xi - \eta)^{-1} e^{i\alpha \eta} \}.$$

Предполагается, что функция $S(\alpha)$ убывает на бесконечности и допускает относительно контура σ факторизацию следующего вида $S(\alpha) = S_+(\alpha) S_-(\alpha)$, $S_+(\alpha) = S_-(-\alpha)$, где $S_+(\alpha)$ — регулярная и без нулей в области выше контура σ функция со степенным законом убывания.

В справедливости теоремы можно убедиться, если внести решение в $St_\eta = e^{-i\eta x}$ и произвести интегрирование. В нашем случае $S_+(\alpha) = S_-(-\alpha) = (B - i\alpha)^{-1/2}$.

Для однозначности функции $S(\alpha)$ проводится разрез от iB до $i\infty$ и от $-iB$ до $-i\infty$ и фиксируется ветвь условием $\sqrt{B^2} = B > 0$.

При достаточно больших значениях параметра B интегральным членом $M X$ можно пренебречь [1] и приближенное значение $X^\pm(\alpha)$ получается в аналитическом виде. Внося $X^\pm = N^\pm(\alpha)$ в (12) и вычисляя интегралы, получаем

$$t_\eta(x) = \sqrt{\frac{B - i\eta}{\pi(a-x)}} e^{-B(a-x) - i\alpha \eta} + \sqrt{\frac{B + i\eta}{\pi(a+x)}} e^{-B(a+x) + i\alpha \eta} + e^{-i\eta x} S^{-1}(\eta) [\operatorname{erf} \sqrt{(B + i\eta)(a-x)} + \operatorname{erf} \sqrt{(B - i\eta)(a+x)} - 1],$$

где erf — интеграл вероятности.

Функцию $T_\eta(\alpha)$ получаем непосредственным интегрированием функции $t_\eta(x)$ по формуле

$$T_\eta(\alpha) = \int_{-a}^a t_\eta(x) e^{i\alpha x} d\alpha = f_2(\alpha, \eta) + f_2(-\alpha, -\eta),$$

где

$$f_2(\alpha, \eta) = \frac{e^{i(\alpha-\eta)a}}{i(\alpha-\eta)} \left[\sqrt{(B+i\alpha)(B-i\eta)} \operatorname{erf} \sqrt{2a(B+i\alpha)} + S^{-1}(\eta) (\operatorname{erf} \sqrt{2a(B-i\eta)} - 1) \right].$$

Вернемся к общему представлению решения (11). Вычислим функцию $L(\alpha, x_k)$, введенную формулой (9), воспользовавшись решением $T_\eta(\alpha)$. Подынтегральные функции в (9) убывают в нижней полуплоскости и не имеют там точек ветвления. Замыкая контур интегрирования в нижнюю полуплоскость, беря получившиеся интегралы по вычetaм, получаем

$$L(\alpha, x_k) = [\Pi(\alpha) - 1] e^{i\alpha x_k} + f_1(\alpha, x_k),$$

где

$$f_1(\alpha, x) = \sqrt{B+i\alpha} e^{i\alpha x} F(\alpha, x) + \sqrt{B-i\alpha} e^{-i\alpha x} F(-\alpha, -x),$$

$$F(\alpha, x) = \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{2p_j} \frac{F_j^0(x)}{p_j + \alpha}, \quad F_j^0(x) = \frac{e^{ip_j(a-x)}}{\sqrt{B-ip_j}}.$$

Внося $T_\eta(\alpha)$, $t_\eta(x)$, $L(\alpha, x_k)$ в (10), (11) и вычисляя получившиеся интегралы по формулам операционного исчисления, находим окончательное решение задачи в виде

$$q(x, \eta) = K^{-1}(\eta) e^{-i\eta x} \Phi_0(\eta, x) + \frac{e^{-B(a-x)}}{\sqrt{\pi(a-x)}} \sqrt{B-i\eta} e^{-i\alpha\eta} + \frac{e^{-B(a+x)}}{\sqrt{\pi(a+x)}} \sqrt{B+i\eta} e^{i\alpha\eta} + \sum_{l=1}^n \frac{\beta_l}{2z_l} \left[\sqrt{B-i\eta} e^{-i\alpha\eta} \Phi(z_l, \eta, x) + \sqrt{B+i\eta} e^{i\alpha\eta} \Phi(z_l, -\eta, -x) \right] - i \sum_{k=1}^{2n} c_k(\eta) \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{2p_j} \left\{ F_j^0(x_k) \left[\frac{e^{-B(a-x)}}{\sqrt{\pi(a-x)}} + \sum_{l=1}^n \frac{\beta_l}{2z_l} \Phi(z_l, -p_j, x) \right] + F_j^0(-x_k) \left[\frac{e^{-B(a+x)}}{\sqrt{\pi(a+x)}} + \sum_{l=1}^n \frac{\beta_l}{2z_l} \Phi(z_l, -p_j, -x) \right] \right\}.$$

Неизвестные c_k определяются из следующей линейной алгебраической системы уравнений

$$\sum_{k=1}^{2n} c_k(\eta) f_1(\alpha, x_k) = f_2(\alpha, \eta) + f_2(-\alpha, -\eta), \quad \alpha = \pm z_l, \quad l = 1, \dots, n.$$

Принятые обозначения

$$\Phi_0(\eta, x) = \operatorname{erf} \sqrt{(B+i\eta)(a-x)} + \operatorname{erf} \sqrt{(B-i\eta)(a+x)} - 1,$$

$$\Phi(z, \eta, x) = \frac{\sqrt{B+iz}}{z-\eta} e^{iz(a-x)} \operatorname{erf} \sqrt{(B+iz)(a-x)} + \frac{\sqrt{B-iz}}{-z-\eta} e^{-iz(a-x)} [1 - \operatorname{erf} \sqrt{(B-iz)(a-x)}].$$

Функции $F_j^0(x)$, $f_1(\alpha, x)$, $f_2(\alpha, x)$ определены выше. Значения коэффициентов α_j , β_j приведены в лемме 1.

Трансформанта Фурье решения $q(x, \eta)$ имеет вид

$$Q(\alpha, \eta) = \frac{K^{-1}(\alpha)}{\sqrt{\alpha^2 + B^2}} \left[f_2(\alpha, \eta) + f_2(-\alpha, -\eta) - \sum_{k=1}^{2n} c_k f_1(\alpha, x_k) \right].$$

Используемый в этом параграфе метод решения задач для среды с поглощением, основанный на факторизации, имеет оценку границы применимости, связанную со значением параметра B , и определяется степенью деформации контуров в интегральных операторах. При этом отбрасываемые члены имеют тем меньший порядок, чем больше значение параметра B . При численных расчетах обычно полагали $B = 10$.

3. Рассмотрим теперь систему N двумерных интегральных уравнений с разностным ядром, заданных в ограниченной области Ω :

$$\mathbf{K}q = \iint_{\Omega} \mathbf{k}(x - \xi, y - \eta) q(\xi, \eta) d\xi d\eta = \mathbf{f}(x, y), \quad (x, y) \in \Omega. \quad (13)$$

Относительно этой системы будем считать, что она однозначно разрешима при любой дважды непрерывно дифференцируемой вектор-функции $\mathbf{f}(x, y)$. Область Ω будем считать выпуклой, граница может иметь угловые точки.

Матрица-ядро системы интегральных уравнений имеет вид

$$\mathbf{k}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\sigma_1 \sigma_2} \mathbf{K}(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta.$$

Контур σ_1 , σ_2 расположены в соответствии с правилами, обеспечивающими выполнение условий излучения [1].

Предположим, что элементы матрицы $\mathbf{K}(\alpha, \beta) = \|K_{ij}\|_{i,j=1,\dots,N}$ являются аналитическими функциями и имеют конечное число вещественных нулей, полюсов, причем полюса одни и те же $\pm p_m$ ($m = 1, \dots, n$) для всех элементов матрицы \mathbf{K} .

Решение ищем в виде $q = q_0 + \varphi$ с выполнением условий

$$Q(\pm\alpha_m, \pm\beta_l) = \Phi(\pm\alpha_m, \pm\beta_l), \quad p_m^2 = \alpha_m^2 + \beta_l^2, \quad m, l = 1, \dots, n,$$

где Q , Φ — трансформанты Фурье вектор-функций q и φ , соответственно.

Пусть для определенности область Ω представляет собой прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$ ($|x| \leq a$, $|y| \leq b$). Тогда в качестве $\varphi(x, y)$ можно взять дельта-функции Дирака с носителями в точках x_i , y_i , т.е. решение ищем в виде

$$q(x, y) = q_0(x, y) + \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} C_{ij} \delta(x - x_i, y - y_j), \quad (14)$$

где $C_{ij} = \{c_{ij}^k\}$ ($k = 1, \dots, N$) — подлежащие определению неизвестные постоянные; $x_i = \pm x_i^0$, $y_i = \pm y_i^0$, x_i^0 , y_i^0 — точки, делящие область Ω ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$) на равные прямоугольники.

Представим матрицу K в виде

$$K(\alpha, \beta) = S(\alpha, \beta)\Pi(\alpha, \beta), \quad \Pi(\alpha, \beta) = I + \Pi_0(\alpha, \beta). \quad (15)$$

Матрицу-функцию $S(\alpha, \beta)$ можно построить, приняв во внимание асимптотическую аппроксимацию $K(\alpha, \beta)$ [1]. Кроме того, в качестве $S(\alpha, \beta)$ может быть выбрана соответствующая матрица-функция ядра интегрального уравнения статической задачи.

Введем новую неизвестную вектор-функцию $t(x, y)$ соотношением $T(\alpha, \beta) = \Pi(\alpha, \beta)Q_0(\alpha, \beta)$.

В результате система интегральных уравнений (13) после подстановки (14), (15) преобразуется к виду

$$St = \iint_{\Omega} s(x-\xi, y-\zeta) t(\xi, \zeta) d\xi d\zeta = g(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (16)$$

где

$$s(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta,$$

$$g(x, y) = f(x, y) - \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\Omega} k(x-\xi, y-\zeta) \varphi(\xi, \zeta) d\xi d\zeta.$$

Для прямоугольной области контакта

$$g(x, y) = f(x, y) - \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} k(x-x_i, y-y_j) C_{ij}.$$

Наиболее важной частью МФП является построение оператора S , описывающего поведение волн в средах с сильным поглощением или возникающего при решении задач статики, так как $S(\alpha, \beta)$ не содержит особенностей на вещественной оси и убывает степенным образом на бесконечности. Обратный к S оператор строится сравнительно просто разными методами. Его приближенное представление можно получить, используя метод факторизации.

Не нарушая общности, положим $f(x, y) = Ae^{-i\eta_1 x - i\eta_2 y}$, $A = \{A_i\}$, $i = 1, \dots, N$ и пусть $t_{\eta}(x, y) = \chi_{\eta}(x, y)A$ решение $St = f$ и, соответственно, трансформанта Фурье этого решения $T_{\eta}(\alpha, \beta) = X_{\eta}(\alpha, \beta)A$. $\chi_{\eta}(x, y)$, $X_{\eta}(\alpha, \beta)$ — некоторые матрицы-функции порядка N . Тогда нетрудно убедиться в том, что решением (16) является вектор-функция

$$T(\alpha, \beta) = T_{\eta}(\alpha, \beta) - \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} [L_{ij}(\alpha, \beta) + Ie^{i(\alpha x_i + \beta y_j)}] C_{ij},$$

где

$$L_{ij}(\alpha, \beta) = \frac{S^{-1}(\alpha, \beta)}{4\pi^2} \times \\ \times \int_{\sigma_1} \int_{\sigma_2} [K(\eta_1, \eta_2) - S(\eta_1, \eta_2)] S(\alpha, \beta) X_{\eta}(\alpha, \beta) e^{i(\eta_1 x_i + \eta_2 y_j)} d\eta_1 d\eta_2,$$

а I — единичная матрица.

Проведя преобразования, аналогичные изложенным выше, решение исходной системы (13) получим в форме

$$q(x, y) = \left\{ X_{\eta}(x, y) + \right. \\ \left. + \frac{1}{4\pi^2} \int_{\sigma_1} \int_{\sigma_2} [\Pi^{-1}(\alpha, \beta) - I] X_{\eta}(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta \right\} A - \\ - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} \left\{ \int_{\sigma_1} \int_{\sigma_2} [\Pi^{-1}(\alpha, \beta) L_{ij}(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} + \right. \\ \left. + (\Pi^{-1}(\alpha, \beta) - I) e^{-i(\alpha(x-x_i) + \beta(y-y_j))} d\alpha d\beta \right\} C_{ij}. \quad (17)$$

Трансформанта Фурье этого решения имеет вид

$$Q(\alpha, \beta) = \Pi^{-1}(\alpha, \beta) \left[X_{\eta}(\alpha, \beta) A - \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} L_{ij}^*(\alpha, \beta) C_{ij} \right], \quad (18)$$

где

$$L_{ij}^*(\alpha, \beta) = L_{ij}(\alpha, \beta) - (\Pi(\alpha, \beta) - I) e^{i(\alpha x_i + \beta y_j)}, \quad \eta_1^2 + \eta_2^2 = \eta^2.$$

Вычисление (17), (18) проводится с помощью приемов, описанных выше.

Для того чтобы вектор-функция q_0 в (14) была из L_p и имела носитель лишь в области Ω , следует выполнить соотношения

$$T(\pm\alpha_k, \pm\beta_m) = 0, \quad \alpha_k^2 + \beta_m^2 = z_k^2, \quad m, k = 1, \dots, n,$$

где $\pm z_k$ — полюса обратной матрицы $\Pi^{-1}(\alpha, \beta)$, одни и те же для всех элементов матрицы.

В результате имеем систему алгебраических уравнений для определения вектора C_{ij}

$$\sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} L_{ij}^*(\alpha_k, \beta_m) C_{ij} = T_{\eta}(\alpha_k, \beta_m), \quad \alpha_k = \pm \sqrt{z_k^2 - \beta_m^2}.$$

Для построения приближенного решения требуется выполнение соотношений лишь при дискретных значениях $\beta_m = \pm m$.

В заключение отметим, что функция $\varphi(x)$, введенная представлением $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \varphi$, в окончательном решении присутствует лишь под знаками операторов, поэтому в качестве φ можно брать дельта-функции Дирака, что и было продемонстрировано выше. После вычисления правой части в (16) получаем $\mathbf{g} \in L_p(\Omega)$, $p > 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабешко В. А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.
2. *Бабешко В. А.* Метод фиктивного поглощения в форме преобразования Фурье // Докл. РАН. 1995. Т. 345. № 4. С. 475–478.
3. *Бабешко В. А., Пряхина О. Д.* Метод фиктивного поглощения в плоских динамических задачах // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 3. С. 477–484.
4. *Бабешко В. А., Пряхина О. Д.* Об одном методе в теории динамических контактных задач для круглых штампов // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 2. С. 22–28.
5. *Бабешко В. А., Пряхина О. Д.* Метод фиктивного поглощения в плоских контактных задачах теории упругости при наличии сцепления // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 4. С. 725–733.
6. *Ворович Е. И., Пряхина О. Д., Тукодова О. М.* Динамические свойства упругой полуограниченной среды при наличии двух массивных штампов // ПММ. 1987. Т. 50. Вып. 1. С. 109–116.
7. *Ворович Е. И., Пряхина О. Д., Тукодова О. М.* Об электроупругих колебаниях слоя // Прикл. мех. 1990. Т. 26. № 1. С. 82–90.
8. *Павлова А. В.* Некоторые соотношения для решения двумерных уравнений типа свертки смешанных задач // Вопросы волнодвижений жидкости: Сб. научн. тр. КубГУ. Краснодар. 1987. С. 15–20.
9. *Пряхина О. Д.* Нестационарные колебания упругой балки на вязкоупругом основании // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 1. С. 164–169.
10. *Пряхина О. Д., Смирнова А. В., Тукодова О. М.* Метод фиктивного поглощения в динамических задачах электроупругости // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 5. С. 834–839.
11. *Пряхина О. Д., Тукодова О. М.* Об одной плоской смешанной динамической задаче электроупругости // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 1. С. 80–85.
12. *Пряхина О. Д., Тукодова О. М., Фрейгейт М. Р.* Решение нестационарных связанных электромеханических задач для слоистых сред // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 5. С. 874–875.
13. *Пряхина О. Д., Фрейгейт М. Р.* Решение нестационарных контактных задач при наличии сил сцепления // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 2. С. 152–161.
14. *Пряхина О. Д., Фрейгейт М. Р.* Связанная нестационарная задача о возбуждении электроупругого слоя массивным электродом // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 2. С. 111–118.

§ 7. МЕТОД ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ В КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ

А. С. Кравчук

Впервые задачу о контакте деформируемых тел как вариационную задачу с ограничениями в форме неравенств рассмотрел А. Синьорини [39] в 1933 г. Вторично и с большей полнотой А. Синьорини изложил свои результаты в 1959 г. в работе [40].

Результаты А. Синьорини были обобщены в различных направлениях в ряде работ Ж.-Л. Лионса, Ж. Дюво [10], Г. Фикера, Г. Леви; обзор этих работ и результатов дан в книге Г. Фикера [32].

Наиболее весомый вклад в разработку проблемы как некоторой новой проблемы теории уравнений с частными производными был внесен Г. Стампаккья — мемориальный обзор [36] работ Г. Стампаккья насчитывает более 80 наименований.

Впоследствии развитием теории и методов решения конкретных задач были посвящены усилия многих исследователей, обзор результатов которых можно найти в статье [16] и монографии [17].

Отметим, что контактные задачи, являющиеся предметом рассмотрения в настоящей работе, условно можно разделить на два класса (типа), различающиеся математическим аппаратом их исследования. К первому типу относятся стационарные консервативные задачи, допускающие переход к проблеме разыскания стационарной точки некоторого функционала; сюда, в частности, входят задачи о контакте линейно упругих тел без трения. Второй тип — это неконсервативные и (или) нестационарные задачи, приводимые к вариационным или квазивариационным неравенствам; здесь, как правило, приходится исследовать процесс изменения внутренних характеристик напряженно-деформированного состояния контактирующих тел в зависимости от времени или некоторого другого параметра, определяющего процесс смены состояний внешних воздействий и внутренних параметров.

Отличие вариационных постановок задач первого типа от классических (не контактных) заключается в необходимости удовлетворения дополнительным ограничениям на допустимые функции, имеющим форму неравенств. Известное условие положительной определенности потенциальной энергии деформации обеспечивает и здесь единственность решения и его существование. В частности, если вариационная задача есть задача минимизации полной энергии системы контактирующих линейно упругих тел, то ограничение — неравенство, отражающее физическое требование непроникания, выделяет из множества допустимых к сравнению функций выпуклое подмножество; как хорошо известно, задача минимизации положительно определенного (выпуклого) функционала при некоторых дополнительных ограничениях на гладкость границы области имеет решение и это решение только одно.

Обоснование постановок задач в форме задач разыскания седловых точек функционалов реализуется двумя способами — либо применением преобразований вариационных постановок с доказательством эквивалентности задач, получающихся на каждом шаге преобразования [34], либо путем непосредственного исследования функционалов, содержащих искомые функции одновременно кинематического и динамического типов. В такой форме задача впервые была полностью решена применительно к задачам экономики [35]; соответствующая методика была перенесена на контактные задачи в работах автора [17].

Собственно метод вариационных неравенств относится к задачам второго типа; здесь, помимо задачи построения вариационного неравенства, доказываются

особые теоремы существования и единственности — именно для решения вариационного неравенства, без перехода к задачам разыскания точек стационарности функционалов. Примером такого рода теорем являются теоремы п. 8.2 книги [24], гл. 2 или теоремы работ [31, 37, 38, 41], которые были применены автором при изучении геометрически нелинейных контактных задач и задач с учетом трения.

План дальнейшего изложения таков. Сначала будут изучены контактные задачи первого типа — для линейно упругих тел, после чего будут рассмотрены геометрически нелинейные контактные задачи, относящиеся, строго говоря, ко второму типу.

Часть задач второго типа — наиболее интересные для практики квазистатические контактные задачи с учетом трения — будут рассмотрены в §5 главы 5.

1. Простейшие примеры: задачи о контакте балки и мембраны с абсолютно жестким штампом без трения.

а) Рассмотрим балку длины l с модулем упругости материала E и моментом инерции поперечного сечения I , жестко заделанную по краям. Балка может быть неоднородной, так что $E = E(x)$, $I = I(x)$; для краткости используем запись $(EI)(x)$, где x отсчитывается от левого края балки вдоль оси Ox , совпадающей с нейтральной линией балки. По предположению, изгиб происходит в плоскости Oxy под действием штампа, перемещающегося вдоль оси Oy .

Уравнение границы штампа примем в форме

$$\Psi(x, y) = 0. \quad (1)$$

Предположим, что в исходном ненапряженном и недеформированном состоянии штамп касается балки хотя бы в одной точке. Выберем функцию Ψ в уравнении (1) таким образом, что для точек с координатами (x, y) вне штампа величина $\Psi(x, y)$ положительна, для внутренних точек штампа — отрицательна.

Сдвинем штамп на величину U_0 вдоль оси Oy ; в смещенном таким образом положении уравнение поверхности примет вид

$$\Psi(x, y - U_0) = 0. \quad (2)$$

Полная система уравнений и условий, описывающих состояние рассматриваемой конструкции, содержит

уравнение равновесия

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[(EI)(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right] = q(x); \quad (3)$$

краевые условия

$$w(0) = w(l) = 0, \quad \frac{dw}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{dw}{dx} \Big|_{x=l} = 0; \quad (4)$$

условие непроникания точек балки в штамп

$$\Psi(x, w(x) - U_0) \geq 0; \quad (5)$$

условие неотрицательности реакции штампа

$$q(x) \geq 0; \quad (6)$$

уравнение

$$\Psi(x, w(x) - U_0) q(x) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (7)$$

означающее, что хотя бы одно из неравенств (5), (6) в любой точке x превращается в строгое равенство.

Неизвестными являются прогиб балки $w(x)$ и усилие воздействия штампа на балку $q(x)$, а также зона, в которой $\Psi(x, w(x) - U_0) = 0$ — искомая зона контакта.

Неравенство (5) представляет собой одностороннее ограничение — освобождающую (неудерживающую) связь; точнее говоря, имеется континуум связей, каждая из которых соответствует точке $x \in (0, l)$.

Для перехода к вариационной постановке выберем функциональное пространство V возможных решений — состояний v исследуемой системы в виде

$$V = \{ v \mid v = v(x), x \in [0, l]; v \in W^{2,2}(0, l) \equiv H^2(0, l); v(0) = v(l) = 0; v'(0) = v'(l) = 0 \}, \quad (8)$$

где, в соответствии с принятыми в функциональном анализе обозначениями, $W^{m,p}(\Omega)$ обозначает множество функций, имеющих обобщенные производные до порядка m , суммируемых со степенью p в области Ω , с нормой

$$\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|k|=0}^m \int_{\Omega} \left| \frac{\partial^{|k|} v(x)}{\partial^{k_1} x_1 \dots \partial^{k_n} x_n} \right|^p d\Omega \right)^{1/p}, \quad (9)$$

где $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$, n — размерность пространства независимых переменных (в рассматриваемой задаче $n = 1$).

Пусть $w(x)$ — точное решение задачи, $v \in V$ — возможное (в смысле вариационного исчисления) состояние системы. Умножая уравнение (3) на вариацию решения $\delta w = v - w$, интегрируя результат по отрезку $[0, l]$ и, применяя дважды формулу интегрирования по частям, приходим к уравнению

$$\int_0^l (EI)(x) w'' \delta w'' dx = \int_0^l q(x) \delta w(x) dx \quad \forall \delta w. \quad (10)$$

Элементарный анализ произведения $q(x) \delta w(x)$ позволяет сделать вывод о том, что это произведение неотрицательно и, стало быть, решение $w(x)$ удовлетворяет вариационному неравенству

$$\int_0^l (EI)(x) w'' \delta w'' dx \geq 0 \quad \forall \delta w = v - w, \quad v \in K, \quad w \in K \subset V, \quad (11)$$

где K — множество кинематически допустимых полей прогибов,

$$K = \{ v \mid v \in V; \Psi(x, v(x) - U_0) \geq 0 \quad \forall x \in (0, l) \}. \quad (12)$$

Доказательство того, что любое решение неравенства (11), обладающее производными до четвертого порядка включительно, удовлетворяет всем соотношениям локальной постановки задачи (3)–(7), также элементарно — его можно найти в [17].

Отметим в заключение, что задача о контакте линейно упругой балки с жестким штампом может быть решена точно [6], и из точного решения видно, что в действительности плотного прилегания штампа к балке, как правило, нет — зона контакта представляет собой набор точек, а реакция $q(x)$ является набором сосредоточенных сил в этих точках. Отмеченное обстоятельство не что иное, как следствие основных гипотез теории изгиба балок.

б) Рассмотрим теперь задачу об изгибе мембраны в случае, когда ее прогиб w ограничивается жестким неподвижным препятствием, уравнение поверхности которого примем в виде

$$z = \psi(x, y); \quad (13)$$

плоскость Oxy декартовой системы $Oxyz$ совпадает с плоскостью натянутой недеформированной мембраны, ось Oz направлена в сторону препятствия.

Пусть мембрана занимает область Λ на плоскости Oxy , граница Γ которой жестко закреплена. Мембрана нагружается внешним давлением p , перпендикулярным к срединной плоскости, так что прогиб происходит в направлении оси Oz .

Локальная постановка задачи об определении прогиба $w(x, y)$ и реакции $q(x, y)$ препятствия содержит уравнение равновесия

$$-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \equiv -\Delta w = p - q; \quad (14)$$

краевое условие

$$w|_{\Gamma} = 0; \quad (15)$$

условие непроникания

$$w(x, y) \leq \psi(x, y); \quad (16)$$

условие неотрицательности реакции

$$q(x, y) \geq 0; \quad (17)$$

аналог уравнения (7)

$$q(x, y)[w(x, y) - \psi(x, y)] = 0. \quad (18)$$

Проводя те же преобразования, что и в предыдущей задаче для балки, устанавливаем, что совокупность соотношений (14)–(18) эквивалентна вариационному неравенству

$$\int_{\Lambda} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial y} - p \delta w \right) dx dy \geq 0 \quad \forall \delta w = v - w, \quad v \in K, \quad w \in K, \quad (19)$$

где

$$K = \{ v \mid v = v(x, y), (x, y) \in \Lambda; v \in H^1(\Lambda); v|_{\Gamma} = 0; v(x, y) \leq \psi(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Gamma \}. \quad (20)$$

Преобразование полученных вариационных неравенств (11), (20) к задачам минимизации функционалов может быть дано стандартными методами теории упругости. Однако для того, чтобы иметь возможность сформулировать условия существования и единственности решения и — в некоторых случаях — установить теоремы о гладкости, а также изучить более сложные и важные для приложений многомерные контактные задачи, приведем ряд определений и теорем из функционального анализа (ФА) и теории оптимизации (ТО).

2. Необходимые сведения из ФА и ТО. Пусть имеется локальная постановка контактной задачи, примерами которой являются совокупности уравнений и неравенств (3)–(7) или (14)–(18). Заметим, что в задачах механики деформируемого твердого тела наивысший порядок производных является четным; обозначим его $2m$.

Граничные условия, которые содержат производные решения порядка $0, 1, \dots, m-1$, называются вынужденными, а порядка $m, m+1, \dots, 2m-1$ — естественными. Считая правые части вынужденных граничных условий (если они фигурируют в постановке задачи) нулями, определим пространство решений V как банахово пространство с нормой (9), подчинив функции из V вынужденным граничным условиям. Как правило, в геометрически линейных задачах $p = 2$, так что V является гильбертовым со скалярным произведением, порожденным нормой (9).

Оператор $A(v)$, соответствующий краевой задаче, строится при помощи умножения левой части дифференциального уравнения на произвольный элемент $v \in V$ (умножение является скалярным, если дифференциальное уравнение векторное) с последующим интегрированием по области Ω изменения независимых переменных. После m -кратного применения формулы интегрирования по частям (формулы Грина) возникает билинейный функционал, обозначаемый $\langle A(u), v \rangle$, величина $A(u)$ в котором и определяет оператор над решением при вариационной (слабой) постановке краевой задачи. Во многих случаях элемент $A(u) \in V$, хотя это не обязательно.

Приравнивая преобразованную левую часть известной правой части дифференциального уравнения (после ее умножения на $v \in V$ и интегрирования по Ω), получаем вариационное уравнение вида

$$\langle A(u), \delta u \rangle = \langle f, \delta u \rangle \quad \forall \delta u = v - u, \quad v \in V, \quad u \in V, \quad (21)$$

угловые скобки в котором означают линейный функционал на паре элементов $A(u) \in V^*$, $\delta u \in V$; пространство V^* является сопряженным к V относительно функционала $\langle \cdot, \cdot \rangle$; величина f определяется правой частью дифференциального уравнения и естественными краевыми условиями.

Пусть $J(v)$ — некоторый функционал на V , т.е. оператор, область значений которого множество действительных чисел.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Производной по Гато (или просто производной) функционала $J(v)$ в точке u по направлению ϕ называется следующий предел:

$$J'(u, \phi) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [J(u + t\phi) - J(u)]. \quad (22)$$

Аналогичным образом определяется производная по направлению не только функционала, но и любого оператора $A(v)$; некоторые усложнения в данном случае (не принципиальные для наших целей) связаны только с заданием области значений и определением сходимости в этой области.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Если существует оператор $A(u)$, такой что

$$J'(u, \phi) = \langle A(u), \phi \rangle \quad \forall \phi \in V, \quad (23)$$

то оператор $A(u)$ называется потенциалным с потенциалом $J(v)$; оператор $A(u)$ называется градиентом функционала $J(v)$ и обозначается $\nabla J(u) \equiv \text{grad } J(u)$.

Как уже отмечалось, возможны два вида вариационных постановок краевых задач, первый из которых — вариационные уравнения или (в контактных задачах) неравенства типа (21), (11), (20), представляющие собой, по существу, принцип возможных перемещений Лагранжа. Второй вид — задача разыскания стационарной точки некоторого функционала. Оба вида используются на практике для построения алгоритмов решения конкретных задач.

Переход к задаче разыскания точки стационарности функционала возможен не всегда; условия такого перехода даются следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 1. Пусть оператор $A(u)$ дифференцируем по Гато и пусть производная

$$A'(u, \phi) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [A(u + t\phi) - A(u)] \quad (24)$$

является линейным и непрерывным оператором по ϕ и непрерывным оператором по u . Тогда для того, чтобы оператор $A(u)$ был потенциалным, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие

$$\langle A'(u, \phi), \psi \rangle = \langle A'(u, \psi), \phi \rangle \quad \forall \phi, \psi \in V. \quad (25)$$

Потенциал $J(v)$ определяется по формуле

$$J(v) = \int_0^1 \langle A(tv), v \rangle dt. \quad (26)$$

Доказательство данной теоремы можно найти в книгах [3, 17].

Вычисления по формуле (26) применительно к контактной задаче для балки приводят к функционалу

$$J(w) = \frac{1}{2} \int_0^1 (EI)(x) \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx, \quad (27)$$

а в задаче о мембране — к функционалу

$$J(w) = \frac{1}{2} \iint_{\Lambda} \left[\left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 w}{dy^2} \right)^2 \right] dx dy. \quad (28)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Множество $K \in V$ называется выпуклым, если для любых двух элементов $u_1 \in K$, $u_2 \in K$ их линейная комбинация вида $(1-t)u_1 + tu_2$ принадлежит $K \quad \forall t \in (0, 1)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Функционал $J(v)$ называется выпуклым на V , если для любых двух элементов $u_1 \in V$, $u_2 \in V$ и любого числа $t \in (0, 1)$ выполняется неравенство

$$J((1-t)u_1 + tu_2) \leq (1-t)J(u_1) + tJ(u_2). \quad (29)$$

Если при $u_1 \neq u_2 \quad \forall t \in (0, 1)$ неравенство (29) является строгим, то функционал $J(v)$ называется строго выпуклым.

Аналогичным образом определяется выпуклость функционала $J(v)$ на множестве K .

Используя известное в теории функций неравенство Фридрихса, в соответствии с которым величина (28) ограничена снизу нормой $\|w\|_{H_0^1}^2$, можно установить, что функционал (28) является строго выпуклым. Для строгой выпуклости функционала (27) достаточно потребовать выполнения очевидного из физических соображений неравенства

$$(EI)(x) \geq c_0 = \text{const} > 0. \quad (30)$$

ТЕОРЕМА 2 (О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ). Пусть $J(v)$ — слабо полунепрерывный снизу функционал, множество $K \subset V$ замкнуто и ограничено в V ; тогда существует хотя бы одна точка абсолютного минимума функционала $J(v)$ на множестве K .

На практике условие ограниченности множества K обычно не выполняется. Вместо него требуется, чтобы функционал был положительно определен, т.е.

$$\lim_{\|v\| \rightarrow +\infty} J(v) = +\infty. \quad (31)$$

ТЕОРЕМА 3 (О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ И О СВЯЗИ ДВУХ ТИПОВ ВАРИАЦИОННЫХ ПОСТАНОВОК). Пусть выполнены все условия теоремы 2 и пусть, кроме того, функционал $J(v)$ является выпуклым на K , множество $K \subseteq V$ является выпуклым. Тогда

1) всякий локальный минимум \bar{u} функционала $J(v)$ является глобальным;

2) в точке минимума \bar{u} выполнено неравенство

$$J'(\bar{u}, v - \bar{u}) \geq 0 \quad \forall v \in K; \quad (32)$$

3) если в некоторой точке \bar{u} выполнено неравенство (32), то \bar{u} — точка минимума функционала $J(v)$;

4) если \bar{u} — внутренняя точка множества K , то в этой точке имеет место вариационное уравнение

$$J'(\bar{u}, \phi) = 0 \quad \forall \phi \in K; \quad (33)$$

5) если в условиях теоремы требование выпуклости заменить требованием строгой выпуклости, то точка абсолютного минимума будет единственной.

Все определения и доказательства теорем 1–3, а также примеры проверки выполнения условий этих теорем собраны в книге [17].

3. Задача о контакте линейно упругих тел в трехмерной постановке. Рассмотрим задачу о контакте одного линейно упругого тела с абсолютно жестким гладким штампом.

Пусть деформируемое тело занимает область Ω с границей $\Sigma = \Sigma_u \cup \Sigma_\sigma \cup \Sigma_c$. Внутри области Ω имеем уравнения равновесия

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ijkl} \epsilon_{kl}(\mathbf{u})) \equiv (\hat{A} \cdot \mathbf{u})_i = \rho F_i, \quad (34)$$

где $\epsilon_{kl}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\partial u_k / \partial u_l + \partial u_l / \partial u_k)$ — тензор деформаций Коши, $\sigma_{ij} = a_{ijkl} \epsilon_{kl}$ — тензор напряжений, a_{ijkl} — тензор модулей упругости, ρF_i — заданные объемные силы; повторяющиеся индексы здесь и ниже означают суммирование от 1 до n , где n — размерность пространства независимых переменных.

На части границы Σ_u заданы граничные условия в перемещениях:

$$\mathbf{u}|_{\Sigma_u} = \mathbf{0} \quad (35)$$

(являющиеся вынужденными при переходе к вариационной постановке — см. выше). На части границы Σ_σ заданы граничные условия в усилиях

$$\sigma_{ij} \nu_j |_{\Sigma_\sigma} = P_i \quad (36)$$

(естественные); ν_j обозначают компоненты единичной внешней нормали к граничной поверхности. Точки части границы Σ_c могут входить в соприкосновение со штампом, уравнение границы которого

$$\Psi(\mathbf{x}) = 0. \quad (37)$$

Как и в первом примере, функция $\Psi(\mathbf{x})$ выбирается таким образом, чтобы для точек \mathbf{x} внутри штампа было $\Psi(\mathbf{x}) < 0$, вне — $\Psi(\mathbf{x}) > 0$. Тогда граничные условия на Σ_c формулируются следующим образом:

условие непроникания

$$\Psi(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})) \geq 0; \quad (38)$$

условие неположительности нормального давления σ_N

$$\sigma_N = \sigma_{ij} \nu_j \nu_i \leq 0; \quad (39)$$

условие отсутствия трения

$$(\sigma_T)_i = \sigma_{ij} \nu_j - \sigma_N \nu_i = 0; \quad (40)$$

аналог уравнений (7), (18)

$$\Psi(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})) \sigma_N(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Sigma_c. \quad (41)$$

Если предположить, что функция $\Psi(\mathbf{x})$ достаточно гладкая, то можно доказать [17], что условие непроникания с одной и той же точностью записывается в разных формах, из которых для приложений наиболее удобны следующие:

$$\Psi(\mathbf{x}) + \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \Psi(\mathbf{x}) \geq 0 \quad (42)$$

или

$$\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu} = u_N \leq \delta_N = \frac{\Psi(\mathbf{x})}{|\nabla \Psi(\mathbf{x})|}. \quad (43)$$

Для перехода к вариационной постановке в пространстве V , определенном по формулам (8), (9) при $p = 2, m = 1$, с граничным условием (35), выделим следующее замкнутое выпуклое подмножество K :

$$K = \{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in V; v_N(\mathbf{x}) \leq \delta_N(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Sigma_c \}. \quad (44)$$

Считая формально реакцию штампа $\sigma_{ij} \nu_j$ заданной и повторяя выкладки и рассуждения, примененные при выводе вариационного уравнения принципа возможных перемещений Лагранжа для уравнений трехмерной задачи теории упругости, получаем уравнение

$$a(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = L(\delta \mathbf{u}) + \int_{\Sigma_c} \sigma_{ij} \nu_j \delta u_i d\Sigma, \quad (45)$$

в котором

$$a(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \epsilon_{ij}(\mathbf{u}) d\Omega, \quad (46)$$

$$L(\delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \rho F_i \delta u_i d\Omega + \int_{\Sigma_{\sigma}} P_i \delta u_i d\Sigma. \quad (47)$$

Заметим, что при выводе уравнения (45) конкретная форма зависимости напряжений от деформаций не использована, так что это уравнение годится как для линейно упругих материалов, так и для материалов с нелинейными определяющими соотношениями в геометрически линейной постановке (а также для геометрически нелинейной теории при использовании переменных Лагранжа и соответствующего тензора напряжений).

Переход к вариационным постановкам оформим для краткости в виде двух теорем, полное доказательство которых можно найти в монографии [17].

ТЕОРЕМА 3. *Задача (34)–(36), (38)–(41) эквивалентна вариационному неравенству*

$$a(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) \geq L(\delta \mathbf{u}) \quad \forall \delta \mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \in K, \quad \mathbf{v} \in K. \quad (48)$$

ТЕОРЕМА 4. *Неравенство (48) эквивалентно задаче минимизации функционала*

$$J(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v}) \quad (49)$$

на множестве K ; решение данной задачи существует и единственно.

4. Задача о контакте системы деформируемых тел. Пусть имеется несколько деформируемых тел конечных размеров, занимающих области $\Omega^1, \dots, \Omega^M$ с границами $\Sigma^1 \equiv \partial\Omega^1, \dots, \Sigma^M \equiv \partial\Omega^M$. В недеформированном состоянии тела соприкасаются в точках или по кускам поверхностей, форма и размеры которых определяются из геометрических соображений. Для упрощения обозначений всюду ниже, где это возможно, условимся, говоря о произвольном теле и относящихся к нему параметрах, индекс — номер тела — опускать; если речь будет идти о паре соприкасающихся тел, то индекс, определяющий номер одного из тел, будет опускать, номер второго тела будем заменять штрихом.

Итак, пусть граница одного из тел состоит из трех участков: $\Sigma = \Sigma_u \cup \Sigma_{\sigma} \cup \Sigma_c$; будем предполагать, что на Σ_u и Σ_{σ} заданы граничные условия соответственно в перемещениях и в напряжениях.

Для постановки контактной задачи необходимо сформулировать условия непроникания. Как показал проведенный в работе [13] анализ, эти условия можно выбирать в различных формах, в рамках геометрически линейной теории имеющих одну и ту же точность.

Приведем три типа условий непроникания, наиболее часто используемых в приложениях. Первое условие

$$u_N(\mathbf{x}) - u'_N(\mathbf{x}') \leq \delta_N, \quad (50)$$

где u_N — проекция вектора перемещения точки $\mathbf{x} \in \Sigma_c$ на нормаль ν к поверхности Σ_c в этой же точке; $u'_N(\mathbf{x}')$ — проекция перемещения точки \mathbf{x}' на нормаль к Σ_c в той же точке \mathbf{x} , причем \mathbf{x}' — точка пересечения прямой, исходящей из точки \mathbf{x} по направлению вектора ν , с поверхностью Σ'_c ; δ_N — отрезок упомянутой прямой между точками \mathbf{x} , \mathbf{x}' .

Меняя ролями тела Ω и Ω' , получаем вторую форму условия непроникания

$$u_{N'}(\mathbf{x}') - u_N(\mathbf{x}) \leq \delta_{N'} \quad (51)$$

(смысл обозначений тот же, что и в предыдущем неравенстве).

Третья форма условия непроникания может быть использована в тех случаях, когда до начала нагружения тела касаются в точке; здесь для вычисления проекций и зазора используется нормаль к общей касательной плоскости.

Приведем аналоги теорем 3–4 (полное доказательство впервые опубликовано в работе [13]).

ТЕОРЕМА 5. *Задача об определении напряженно-деформированного состояния системы M контактирующих тел при приложении к каждому из тел системы внешних объемных сил с плотностью $\rho^I F^I$ и распределенных по части границы Σ_{σ} поверхностных сил с плотностью P^I (I — номер тела) эквивалентна вариационному неравенству*

$$a(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) \geq L(\delta \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \in K, \quad \mathbf{v} \in K \subset V, \quad (52)$$

где

$$a(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \sum_{I=1}^M a^I(\mathbf{u}^I, \delta \mathbf{u}^I), \quad L(\delta \mathbf{u}) = \sum_{I=1}^M L^I(\delta \mathbf{u}^I); \quad (53)$$

функционалы $a^I(\mathbf{u}^I, \delta \mathbf{u}^I)$, $L^I(\delta \mathbf{u}^I)$ определены по формулам (46), (47) соответственно для каждого из тел Ω^I системы; пространство V здесь определяется как прямое произведение пространств, введенных при исследовании предыдущей задачи, элементом \mathbf{v} которого является набор векторных полей перемещений $\mathbf{v} = \{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \dots, \mathbf{v}^M\}$; K — множество функций, удовлетворяющих условиям непроникания

$$K = \{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in V; v_N(\mathbf{x}) - v_{N'}(\mathbf{x}'(\mathbf{x})) \leq \delta_N(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Sigma_c \} \quad (54)$$

(для определенности использовано условие непроникания в форме (50)); неравенства, фигурирующие в определении множества K , должны выполняться во всех точках границ типа Σ_c .

ТЕОРЕМА 6. Неравенство (52) эквивалентно задаче минимизации функционала

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v), \quad v \in K. \quad (55)$$

Если каждое из контактирующих тел имеет закрепленную часть границы Σ_u , то проблема существования и единственности решается на основании сформулированных выше теорем 2 и 3. Если же хотя бы одно из тел не имеет закрепленной части границы, то основные условия теорем 2 и 3 не выполняются и проблема решается с использованием несколько более сложного аппарата, который был построен в работах М. И. Вишика, Ж.-Л. Лионса, Г. Стампаккья и других математиков. Приведем одну из теорем такого типа, которую можно найти в монографии [24].

ТЕОРЕМА 7. Пусть в неравенстве (52)

- а) форма $a(u, v)$ непрерывна на V ;
- б) норма на V эквивалентна норме вида $p_0(v) + p_1(v)$, где $p_0(v)$ — норма на V , по отношению к которой пространство V — предгильбертово, $p_1(v)$ — полунорма на V ;
- в) пространство

$$Y = \{v \mid v \in K; p_1(v) = 0\} \quad (56)$$

конечномерно;

- г) существует постоянная c_1 , такая что

$$\inf_y p_0(v - y) \leq c_1 p_1(v); \quad (57)$$

- д) форма $a(u, v)$ положительно полуопределена, т.е.

$$a(v, v) \geq c_2 p_1^2(v) \quad \forall v \in K \subset V, \quad c_2 = \text{const} > 0; \quad (58)$$

- е) множество K замкнуто и выпукло в V и содержит нулевой элемент пространства V ;
- ж) форма $L(v)$ линейна и непрерывна на V и, кроме того,

$$L(y) < 0 \quad \forall y \in Y \cap K. \quad (59)$$

Тогда вариационное неравенство (52) имеет, по крайней мере, одно решение.

Проверка выполнения условий данной теоремы проведена впервые в работе [13].

Отметим, что условие (59) обеспечивает устойчивость системы контактирующих тел до начала нагружения. Для устойчивости деформированного состояния достаточно потребовать чтобы выполнялось дополнительное неравенство

$$L(y) < 0 \quad \forall y \in Z \setminus G, \quad (60)$$

где G — множество перемещений, определяемых смещениями системы тел $\Omega^1, \dots, \Omega^M$ как единого жесткого целого;

$$Z = \{y \mid y \in K; u + y \in K \quad \forall u \in U\}, \quad (61)$$

где U — множество решений рассматриваемой контактной задачи.

В заключение сделаем несколько замечаний.

1) Теоремы 5–7 остаются справедливыми и для случая деформационной теории пластичности без разгрузок, если только выполняются известные условия А. А. Ильюшина, обеспечивающие сходимость метода упругих решений [11]).

2) Если одно из тел системы является абсолютно жестким, то множество кинематически допустимых полей перемещений для этого тела будет множество жестких смещений и поворотов.

3) Для выделения единственного поля перемещений при отсутствии закрепленных частей границ используются те же приемы, что и при решении неконтактных задач теории упругости в перемещениях при заданных на границе усилиях.

5. Геометрически нелинейные контактные задачи. Рассмотрим задачу о контакте одного деформируемого тела с абсолютно жестким штампом. В отличие от геометрически линейных задач теперь необходимо различать начальное состояние тела, обозначаемое Ω_0 , и текущее деформированное состояние Ω . Используем в качестве независимых переменных декартовы координаты a^i точек тела в состоянии Ω_0 . Деформации будем описывать тензором Грина

$$\epsilon_{ij}^G = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^i}{\partial a^j} + \frac{\partial u^j}{\partial a^i} + \frac{\partial u^i}{\partial a^j} \frac{\partial u^j}{\partial a^i} \right); \quad (62)$$

используется декартова система отсчета в начальном состоянии, векторы перемещений обозначены $u = (u^1, u^2, u^3)$.

Напряженное состояние будем описывать тензором напряжений s_0^{ij} , который вводится (см. [7, 17]) по формуле

$$t_0^{(\nu)} = s_0^{ij} \nu_{0i} G_i, \quad (63)$$

где $t_0^{(0)}$ — вектор поверхностных усилий на площадке с нормалью ν , рассчитанный на единицу площади поверхности в недеформированном состоянии, причем вектору ν в деформированном состоянии в точке $x(a)$ соответствует вектор ν_0 в точке a . Через G_i обозначены векторы, определяемые по формуле

$$G_i = \frac{\partial x}{\partial a^i}, \quad (64)$$

составляющие локальный базис в криволинейной координатной системе (a^1, a^2, a^3) в области Ω .

Уравнения равновесия, записанные в переменных $\{a^i\}_{i=1}^n$ с использованием тензора напряжений s_0^{ij} , имеют [7, 17] вид

$$\frac{\partial}{\partial a^i} [s_0^{ir} (\delta_r^j + u_{,r}^j)] + \rho_0 F_0^j = 0, \quad (65)$$

где запятая означает дифференцирование по переменной a с индексом, следующим после запятой; нижний индекс 0 означает, что соответствующие величины — плотность массы ρ и плотность массовых сил \mathbf{F} — рассчитаны на единицу недеформированного объема.

К уравнениям равновесия добавляются определяющие соотношения, которые при наличии потенциала деформаций $W = W(\epsilon_{ij}^G)$ записываются [7, 17] в следующей форме:

$$s_0^{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}^G} + \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ji}^G} \right). \quad (66)$$

Полная постановка задачи содержит, помимо уравнений (65)–(66), граничное условие в перемещениях

$$\mathbf{u}|_{\Sigma_{0u}} = \mathbf{0}; \quad (67)$$

граничное условие в усилиях

$$s_0^{ir} (\delta_r^j + u_{,r}^j)|_{\Sigma_{0\sigma}} = P^j(\mathbf{x}(\mathbf{a})) \sqrt{GG^{rs}} \nu_{0r} \nu_{0s} \equiv kP^j; \quad (68)$$

граничные условия в зоне возможного контакта Σ_{0c}

$$\Psi(\mathbf{x}(\mathbf{a})) > 0 \implies \mathbf{t}^{(\nu)} = \mathbf{0}; \quad (69)$$

$$\Psi(\mathbf{x}(\mathbf{a})) = 0 \implies t_N \leq 0, \quad t_T = \mathbf{0}; \quad (70)$$

$$\Psi(\mathbf{x}(\mathbf{a})) \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{x}(\mathbf{a})) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{a} \in \Sigma_{0c}, \quad (71)$$

где

$$\mathbf{t}^{(\nu)} = t_N \boldsymbol{\nu} + \mathbf{t}_T, \quad t_N = \mathbf{t}^{(\nu)} \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad (72)$$

а $\boldsymbol{\nu}$ — вектор единичной внешней нормали к границе Σ тела Ω в деформированном состоянии, так что условие (70) — это условие отсутствия растягивающих напряжений и сил трения в зоне контакта. Кроме того,

$$G_{ij} = \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j, \quad G = \det \|G_{ij}\|, \quad \|G^{ij}\| = \|G_{ij}\|^{-1}, \quad (73)$$

где $\|G_{ij}\|$ — квадратная матрица, элементы которой — скалярные произведения векторов $\mathbf{G}_i, \mathbf{G}_j$ локального косоугольного базиса (64).

Функция $\Psi(\mathbf{x})$ определяет поверхность неподвижного штампа уравнением

$$\Psi(\mathbf{x}) = 0. \quad (74)$$

Относительно этой функции вводятся те же предположения, что и в предыдущих задачах: $\Psi(\mathbf{x}) < 0$ для точек \mathbf{x} внутри штампа, $\Psi(\mathbf{x}) > 0$ для точек \mathbf{x} вне штампа.

Имеет место следующая теорема

ТЕОРЕМА 8. Задача (65)–(71) эквивалентна вариационному неравенству

$$\int_{\Omega_0} s_0^{ir} (\delta_r^j + u_{,r}^j) \delta u_{,i}^j d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{F}_0 \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega_0 - \int_{\Sigma_0} k \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{u} d\Sigma_0 \equiv \langle A(\mathbf{u}), \delta \mathbf{u} \rangle \geq 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{u}, \quad \mathbf{v} \in K, \quad \mathbf{u} \in K, \quad \delta \mathbf{u} \in K_u, \quad (75)$$

где

$$K = \{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{a} \in \Sigma_{0u}; \quad \Psi(\mathbf{a} + \mathbf{u}(\mathbf{a})) \geq 0 \quad \forall \mathbf{a} \in \Sigma_{0c} \}, \quad (76)$$

$$K_u = \{ \delta \mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{u} \mid \Psi(\mathbf{a} + \mathbf{u}(\mathbf{a})) + \delta \mathbf{u} \cdot \nabla \Psi(\mathbf{a} + \mathbf{u}(\mathbf{a})) \geq 0, \quad \forall \mathbf{a} \in \Sigma_{0c}; \quad \delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ на } \Sigma_{0u} \}. \quad (77)$$

Заметим, что в определении множеств допустимых полей перемещений K и вариаций перемещений K_u не включено описание функционального пространства V , которому должны принадлежать эти поля. Дело в том, что конкретизировать пространство V можно только после задания структуры упругого потенциала W ; например, для полиномиальных аппроксимаций функции W пространство V будет пространством С. Л. Соболева типа $W^{m,p}$ — см. выше формулу (9). Очевидно также, что множества K и K_u , вообще говоря, не совпадают.

Доказательство теоремы 8 дано в книге [17].

Вопрос о существовании и единственности решения вариационного неравенства (75) может быть решен, например, на основании теоремы 8.2 на с.26 монографии [24]

Если в неравенстве (75) оператор A обладает следующими свойствами:

1) $A(\mathbf{u})$ переводит элемент пространства V в элемент пространства V^* , где V^* — пространство линейных функционалов на V ;

2)

$$\lim_{\|\mathbf{v}\| \rightarrow +\infty} \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \langle A(\mathbf{v}), \mathbf{v} - \mathbf{v}_0 \rangle = +\infty \quad (78)$$

для некоторого элемента $\mathbf{v}_0 \in K, \mathbf{v} \in K$;

3) для любых трех элементов $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ множества K функция числовой переменной

$$\lambda \rightarrow \langle A(\mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle \quad (79)$$

является непрерывной;

4) для любой пары элементов \mathbf{u}, \mathbf{v} пространства V имеет место неравенство

$$\langle A(\mathbf{u}) - A(\mathbf{v}), \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle \geq 0; \quad (80)$$

5) множество K является замкнутым и выпуклым в V ; тогда существует по крайней мере одно решение \mathbf{u} неравенства (75).

Оператор A , удовлетворяющий условию (78), называется коэрцитивным; свойство (80) оператора A называется монотонностью. Если при $v \neq u$ неравенство (80) является строгим, то оператор A называется строго монотонным; в этом случае решение вариационного неравенства (75) является единственным.

Попытка перейти от вариационного неравенства (75) к задаче минимизации функционала наталкивается на проблему обеспечения не только потенциальности части оператора A , связанной с упругим потенциалом, но и на проблему ограничения внешних воздействий классом, при котором второе и третье слагаемые в левой части неравенства (75) в целом будут потенциальными операторами над полем перемещений u . В общем случае нетривиальной является также задача проверки условий теоремы о существовании и единственности (или неединственности) решения. По указанным причинам методы решения геометрически нелинейных контактных задач развивались применительно к вариационному неравенству (75); решения конкретных задач даны в работах [8, 21, 22] и некоторых других [9].

Наиболее интересной, но одновременно и наиболее трудной для решения является задача о контакте двух деформируемых тел в геометрически нелинейной постановке, имеющая важные приложения в теории высокоэластичных материалов, биомеханике и т.д. Очевидно, что здесь условия на поверхности контакта должны формулироваться для текущего состояния, которое, вообще говоря, зависит от всей истории изменения внешних воздействий. Метод решения такой задачи предложен и реализован в работе [30].

6. Вариационные преобразования и решение конкретных задач.

6.1. Описание методики. Вариационные преобразования контактных задач, приведенных к задачам минимизации функционала $J(v)$ на замкнутом подмножестве K в гильбертовом пространстве V (в действительности достаточно, чтобы V было рефлексивным банаховым пространством), осуществляются на базе теории, развитой в работах Юнга, Фенхеля и Моро; компактное изложение этой теории и соответствующие ссылки на оригинальные работы можно найти в книге [34].

Итак, пусть дан функционал $J : V \rightarrow R$; данная запись означает, что область определения функционала — пространство V с элементами v , область значений — множество действительных чисел R . Исходным моментом при проведении вариационных преобразований является построение, так называемого, возмущения $\Phi(v, p)$ функционала $J(v)$. По определению функционал $\Phi : V \otimes Y \rightarrow R$ называется возмущением функционала $J(v)$, если:

а) функционал $\Phi(v, p)$ является выпуклым на прямом произведении $V \otimes Y$;

б) имеет место равенство

$$\Phi(v, 0) = J(v). \quad (81)$$

Смысл введения функционала $\Phi(v, p)$ заключается в том, чтобы при решении задач поиска точки экстремума снять ограничение $v \in K$; функционал Φ можно выбирать различными способами — см. ниже.

Обозначим через V^* пространство, сопряженное (или двойственное) к пространству V относительно билинейной формы (функционала) $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$; двойственное к пространству Y пространство Y^* строится при помощи билинейной формы $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y$.

Преобразованием Юнга–Фенхеля–Моро (сокращенно — преобразованием ЮФМ) функционала $\Phi(v, p)$ называется функционал

$$\Phi^*(v^*, p^*) = \sup_{v \in V} \sup_{p \in Y} [\langle v^*, v \rangle_V + \langle p^*, p \rangle_Y - \Phi(v, p)]. \quad (82)$$

Оказывается, что при определенных ограничениях (которые можно найти в [13, 34]) задача минимизации функционала $\Phi(v, 0)$ на V эквивалентна задаче максимизации функционала $-\Phi^*(0, p^*)$ на Y^* :

$$-\Phi^*(0, p^*) \rightarrow \sup_{p^* \in Y^*} \quad (83)$$

в том смысле, что, если найдено решение \bar{p}^* задачи (83), то решение \bar{u} задачи минимизации функционала $\Phi(v, 0) = J(v)$ можно найти из соотношения

$$\Phi(\bar{u}, 0) + \Phi^*(0, \bar{p}^*) = 0. \quad (84)$$

Для построения эффективных алгоритмов решения практических задач полезным оказывается введение функционалов, точки экстремума которых являются седловыми; это делается следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функционал $L : V \otimes Y^* \rightarrow R$, определяемый по формуле

$$L(v, p^*) = \sup_{p \in Y} [\langle p^*, p \rangle_Y - \Phi(v, p)], \quad (85)$$

называется лагранжианом исходной задачи минимизации функционала $J(v)$ на K относительно заданного возмущения $\Phi(v, p)$.

При некоторых условиях, как правило, выполняющихся в контактных задачах теории упругости, справедливо утверждение о том, что функционал $L(v, p^*)$ является вогнутым по переменной $p^* \in Y^*$ и выпуклым по переменной $v \in V$.

Основой для новых формулировок вариационных задач является следующая цепочка равенств (вытекающих непосредственно из введенных

выше определений):

$$\begin{aligned}\Phi^*(v^*, p^*) &= \sup_{v \in V} \{ \sup_{p \in Y} [\langle v^*, v \rangle_V + \langle p^*, p \rangle_Y - \Phi(v, p)] \} \\ &= \sup_{v \in V} \{ \langle v^*, v \rangle_V + \sup_{p \in Y} [\langle p^*, p \rangle_Y - \Phi(v, p)] \} \\ &= \sup_{v \in V} [\langle v^*, v \rangle_V - L(v, p^*)].\end{aligned}\quad (86)$$

Из (86) следует, что

$$-\Phi^*(0, p^*) = \inf_{v \in V} L(v, p^*), \quad (87)$$

и, следовательно, задачу максимизации (83) можно преобразовать к задаче разыскания седловой точки лагранжиана $L(v, p^*)$:

$$-L(v, p^*) \rightarrow \sup_{p^* \in Y^*} \inf_{v \in V}. \quad (88)$$

Можно доказать (см. [17, 34]), что, если пара (\bar{u}, \bar{p}^*) является седловой точкой лагранжиана $L(v, p^*)$, то элемент \bar{u} — решение исходной вариационной задачи, элемент \bar{p}^* — решение задачи (83), которую называют сопряженной (или двойственной) к исходной задаче минимизации функционала $J(v)$ на множестве K ; кроме того, операции нахождения нижней и верхней грани в задаче (88) можно поменять местами.

Таким образом, каждое возмущение $\Phi(v, p)$ функционала $J(v)$ порождает пару новых задач — двойственную задачу максимизации (83) и задачу разыскания седловой точки лагранжиана (88).

6.2. *Применение преобразования ЮФМ к контактнм задачам.* Применим данный аппарат к контактнм задачам; соответствующие преобразования впервые были проведены в работах [14, 15] и собраны в монографии [17].

Рассмотрим подробно задачу о контакте одного деформируемого твердого тела с абсолютно жестким штампом. Предварительно преобразуем данную задачу к проблеме минимизации функционала (49) на множестве K , которое выберем следующим образом (см. выше пункт, посвященный условиям непроникания):

$$K = \{v \mid v \in V; v_N \leq \delta_N \quad \forall x \in \Sigma_c\}. \quad (89)$$

1) Для функционала (49) введем возмущение типа Эрроу–Гурвица:

$$\Phi = \Phi_1(v, p) = J(v) + \chi_\epsilon(v, p), \quad (90)$$

в котором функционал $J(v)$ определен по формуле (49), $\chi_\epsilon(v, p)$ — индикаторная функция множества ϵ :

$$\epsilon = \{(v, p) \in V \otimes Y \mid v_N - \delta_N \leq p; p = p(x), x \in \Sigma_c, p \in L^2(\Sigma_c)\}. \quad (91)$$

Можно показать [17], что преобразование ЮФМ возмущения (90) приводит к задаче разыскания седловой точки

$$J(v) + \int_{\Sigma_c} p^*(\delta_N - v_N) d\Sigma \rightarrow \sup_{p^* \leq 0} \inf_{v \in V} \quad (92)$$

и что сопряженная переменная p^* представляет собой контактнм давление σ_N на поверхности Σ_c , т.е.

$$p^* = \sigma_N. \quad (93)$$

2) Применяя в рассматриваемой задаче возмущение типа Кастильяно

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi_2(v, p) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} a_{ijkl} [\epsilon_{kl}(v) - p_{kl}] [\epsilon_{ij}(v) - p_{ij}] d\Omega - L(v) \quad (v \in K), \\ \Phi &= \Phi_2 = +\infty \quad (v \notin K),\end{aligned}\quad (94)$$

где p_{ij} — тензор второго ранга, заданный в области Ω , определяя пространство Y^* , сопряженное пространству Y симметричных тензоров второго ранга $p_{ij} = p_{ji}$, при помощи билинейной формы

$$\langle p, p^* \rangle = \int_{\Omega} p_{ij} p_{ij}^* d\Omega, \quad (95)$$

приходим к следующей двойственной задаче — задаче максимизации функционала на множестве M :

$$-\frac{1}{2} \int_{\Omega} A_{ijkl} \sigma_{kl} \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Sigma_c} \sigma_N \delta_N d\Sigma \rightarrow \sup_{\sigma_{ij} \in M}, \quad (96)$$

где

$$M = \left\{ \sigma_{ij} \mid \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i = 0; \sigma_{ij} \nu_j \Big|_{\Sigma_\sigma} = P_i; \sigma_N \Big|_{\Sigma_c} \leq 0; \sigma_T \Big|_{\Sigma_c} = 0 \right\}. \quad (97)$$

3) Введем комбинированное возмущение

$$\Phi = \Phi_3(v, p) = \Phi_2(v, p_1) + \chi_\epsilon(v, p_2), \quad (98)$$

в котором функционал Φ_2 определяется по формуле (94) всюду на V , а не только на множестве K ; ограничение $v \in K$ учитывается при помощи индикаторной функции χ_ϵ . Положим

$$p = \{\hat{p}_1, p_2\} \in Y_1 \otimes Y_2, \quad \langle p^*, p \rangle = \langle \hat{p}_1^*, \hat{p}_1 \rangle + \langle p_2^*, p_2 \rangle, \quad (99)$$

где, в соответствии со смыслом обозначений п.п. 1)–2), переменная \hat{p}_1 — тензор напряжений с компонентами $p_{1,ij} \equiv \sigma_{ij}$, переменная p — контактнм давление σ_N на части границы Σ_c . Применив преобразование ЮФМ

к функционалу (98), приходим к следующей вариационной постановке рассматриваемой контактной задачи:

$$-\frac{1}{2} \int_{\Omega} A_{ijkl} \sigma_{kl} \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Sigma_c} \sigma_N (\delta_N - v_N) d\Sigma \rightarrow \sup_{\sigma_{ij} \in M} \inf_{v \in V} \quad (100)$$

Задачи (96), (100) трудны в том плане, что при их приближенном решении каким-либо численным методом возникает необходимость удовлетворить дифференциальным уравнениям равновесия внутри области и статическим граничным условиям, поэтому имеет смысл перейти к формулировкам с применением лагранжианов. Используя определение (85), находим, что возмущению (94) соответствует лагранжиан

$$L_2(v, \hat{p}^*) = - \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} A_{ijkl} \sigma_{kl} \sigma_{ij} - \sigma_{ij} \epsilon_{ij}(v) - \rho F_i v_i \right] d\Omega - \int_{\Sigma_c} P_i v_i d\Sigma, \quad (101)$$

возмущению (98) — лагранжиан

$$L_3(v, \hat{p}^*) = \tilde{L}_2(v, \hat{p}^*) + \int_{\Sigma_c} \sigma_N (-\delta_N + v_N) d\Sigma, \quad (102)$$

причем $L_2(v, \hat{p}^*) = +\infty$ при $v \notin K$; функционал $\tilde{L}_2(v, \hat{p}^*)$ определяется по формуле (101) всюду, а не только на множестве K . Отметим также, что применение лагранжиана, отвечающего возмущению (90), новых результатов не дает.

Таким образом, задача о контакте одного линейно упругого тела с абсолютно жестким штампом эквивалентна следующим задачам разыскания седловых точек:

$$L_2(v, \hat{p}^*) \rightarrow \sup_{\hat{p}^* \in \hat{Y}^*} \inf_{v \in V}, \quad L_3(v, \hat{p}^*) \rightarrow \sup_{\hat{p}^* \in \hat{Y}^*} \inf_{v \in V}, \quad (103)$$

где \hat{Y}^* обозначает пространство тензоров напряжений, Y^* — пространство скаляров на Σ_c — возможных контактных давлений.

Проведенные рассуждения без труда обобщаются на задачу о контакте нескольких деформируемых тел. Изложенный аппарат переносится также на задачи деформационной теории пластичности и теории пластического течения; соответствующие результаты можно найти в монографии [17].

6.3. Методы решения и решение конкретных задач.

Методы решения конкретных контактных задач были построены на базе методов, развитых ранее во многих исследованиях по нелинейному программированию в таких задачах как оптимальное распределение ресурсов, проектирование конструкций минимального веса и т.п.; дискретизация при этом производилась по методу конечных элементов, методу граничных элементов или методу конечных разностей.

Численные решения контактных задач построены во многих работах. Первой из таких работ была, по-видимому, работа [1], посвященная решению контактных задач для упругих пластин методом локальных вариаций с использованием функционала Лагранжа (49).

Применение функционала (92), а также лагранжианов, привело к естественной и известной из нелинейного программирования идее Удзавы (Эрроу–Гурвица) разыскания седловой точки, когда движение к точному решению производится последовательными шагами по направлению наиболее быстрого убывания на этапе минимизации и наиболее быстрого роста на этапе максимизации с возвратом — в случае необходимости — в множество допустимых функций по кратчайшему пути (методом ортогонального проектирования на множество K).

Данный метод в сочетании с дискретизацией по методу конечных элементов был реализован в работе [19] применительно к решению плоских контактных задач; осесимметричные задачи были решены в работе [20] (влияние вязкости было учтено введением фиктивных массовых сил).

Дискретизация по методу граничных элементов была реализована применительно к решению осесимметричных контактных задач в работе [18]; задача о контакте жесткого штампа на полупространство по методу граничных элементов была решена в работе [14].

В последующем развитии вариационной теории задач о контакте деформируемых тел можно выделить три главных направления:

а) учет упруго-пластических свойств материала контактирующих тел в рамках математического аппарата вариационных неравенств [23] (см. также Приложение I в книге [17]), [27–29]; к этому же направлению следует отнести работы, в которых сложные условия на поверхности контакта моделируются тонкой деформируемой прослойкой [26];

б) обобщение методики на тонкостенные элементы конструкций [25, 33];

в) математическое обоснование новых вариационных постановок и новых приближенных методов построения решений [12, 29] и др.

Отдельную большую и очень важную для приложений группу составляют работы по вариационной теории равновесия и распространения трещин; отметим здесь лишь работы [2, 4, 5], в которых, наряду с проблемой анализа напряжений и деформаций в окрестности вершины трещины, изучается также проблема частичного налегания берегов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баничук Н. В. Численное решение задачи о прогибе упругой пластины, стесненной ограничениями // Инж. журнал. МТТ. 1967. № 1. С. 138–142.
2. Бобылев А. А. Об одном варианте численного решения контактных задач теории упругости // Решение прикладных задач математической физики и дискретной математики. Днепропетровск: Изд-во ДГУ, 1987. С. 23–29.

3. Вайнберг М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. М.: Наука, 1972. 415 с.
4. Гольдштейн Р. В., Житников Ю. В. Равновесие полостей и трещин-разрезов с областями налегания и раскрытия в упругой среде // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 5. С. 826–834.
5. Гольдштейн Р. В., Житников Ю. В. Анализ равновесия плоской трещины с учетом образования в областях налегания зон скольжения и сцепления при сложном нагружении // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 2. С. 141–148.
6. Григолоук Э. И., Толкачев В. М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение, 1980. 416 с.
7. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1965. 455 с.
8. Дунаев И. М., Фролов Н. Н. Решение контактных задач для тел из высокоэластичных материалов при конечных деформациях // Механика эластомеров. Краснодар: Изд-во КПИ, 1985. С. 21–36.
9. Дымников С. И., Лавенделл Э. Э., Павловскис М. А., Сниегс М. И. Прикладные методы расчета изделий из высокоэластичных материалов // Рига: Зинатне, 1980. 238 с.
10. Дюво Ж., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 383 с.
11. Ильюшин А. А. Пластичность. М.–Л.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
12. Киндерлерер Д., Стампакья Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения. М.: Мир, 1983. 256 с.
13. Кравчук А. С. Постановка задачи о контакте нескольких деформируемых тел как задачи нелинейного программирования // ПММ. 1978, Т. 42, Вып. 3, С. 466–474.
14. Кравчук А. С. Решение контактных задач с известной функцией Грина // ПММ. 1982. Т. 43. Вып. 2. С. 283–288.
15. Кравчук А. С. О двойственности в контактных задачах // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 6. С. 887–892.
16. Кравчук А. С. Решение нелинейных контактных задач с учетом трения вариационными методами // Механика и научно-технический прогресс. Т. 3 - Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. С. 154–169.
17. Кравчук А. С. Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. М.: Изд-во Московской государственной академии приборостроения и информатики, 1997. 339 с.
18. Кравчук А. С., Ахунджанов Е. Р. Численная реализация вариационного подхода к решению контактных задач теории упругости методом потенциалов // Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1983, Вып. 25. С. 12–18.
19. Кравчук А. С., Васильев В. А. Численные методы решения контактной задачи для линейно и нелинейно упругих тел конечных размеров // Прикл. мех. 1980. Т. 16. № 6. С. 9–15.
20. Кравчук А. С., Зайцев Е. А. Решение на ЭВМ контактных задач вязкоупругости // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 4. С. 93–98.
21. Кравчук А. С., Суряков В. А. Численное решение геометрически нелинейных контактных задач // Докл. АН СССР. 1981. Т. 42. № 3. С. 1327–1329.
22. Кравчук А. С., Фролов Н. Н. Исследование напряженно-деформированного состояния резиноподобных уплотнителей с помощью метода конечных элементов // Механика эластомеров. Краснодар: Изд-во КПИ. 1985. С. 13–20.
23. Кузьменко В. И., Балакин В. Ф. Решение на ЭВМ задач пластического деформирования. Киев: Тэхника, 1990. 134 с.

24. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 587 с.
25. Львов Г. И. Вариационная постановка контактной задачи для линейно упругих и физически нелинейных пологих оболочек // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 5. С. 841–846.
26. Няшин Ю. И., Трусов П. В., Чернопазов С. А. К решению контактных задач упруго-пластичности для неоднородных деформируемых тел // Тез. докл. II Всес. конф.: Механика неоднородных структур. Львов, 1987. С. 227.
27. Роговой А. А. Вариационная постановка упруго-пластической задачи при больших деформациях в эйлерово-лагранжевых координатах // Напряжения и деформации в конструкциях и материалах. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. С. 77–83.
28. Садовский В. М. Гиперболические вариационные неравенства в задачах динамики упруго-пластических тел // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 6. С. 1041–1048.
29. Садовский В. М. Разрывные решения в задачах динамики упругопластических сред. М.: Наука–Физматлит, 1997. 208 с.
30. Сниегс М. И. Расчет резинометаллического амортизатора конусного типа методом конечных элементов // Вопросы динамики и прочности. Рига: РПИ, 1982. Вып. 40. С. 54–57.
31. Тартар Л. Некоторые замечания о полулинейных системах // Вычислительные методы в математической физике, геофизике и оптимальном управлении // Новосибирск: Наука, СО АН СССР, 1978. С. 84–96.
32. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974. 159 с.
33. Хлуднев А. М. К проблеме контакта линейно упругого тела с упругими и жесткими телами // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 6. С. 999–1005.
34. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979. 400 с.
35. Эрроу К. Дж., Гурвиц Л., Удзава Х. Исследования по линейному и нелинейному программированию. М.: ИЛ, 1962. 333 с.
36. Lions J.-L. The work of Stampacchia in variational inequalities // Boll. Unione mat. Ital. 1978. A 15. No 3. P. 736–756.
37. Lions J.-L. Surface problems: Methods of variational and quasivariational inequalities // Lect. Notes in Math. Syst. 1975. № 461. P. 129–148.
38. Lions J.-L. Various topics in the theory of optimal control of distributed systems // Lect. Notes in Econ. and Math. Syst. 1984. № 105. P. 166–308.
39. Signorini A. Sopra alcune questioni di elastostatica // Atti Soc. Ital. Progr. Sci.. 1933. P. 513–533.
40. Signorini A. Questioni di elasticitanon linearizzata o semilinearizzata e semilinearizzata // Rend. di Matem. e delle sue appl. 1959. T. 18. № 1–2. P. 95–139.
41. Tartar L. IQV abstraites // Comptes Rendus de l'Acad. de Sci. de Paris. 1974. Ser. A. V. 278. P. 1193–1196.

§ 8. МЕТОД ПАРНЫХ УРАВНЕНИЙ В КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ

А. Н. Златин, И. Н. Златина

Одним из эффективных методов аналитического решения смешанных (контактных) задач теории упругости является метод парных уравнений.

Типичная схема использования этого метода заключается в следующем: в результате разделения переменных при удовлетворении прочих граничных условий выполнение смешанных граничных условий, заданных на одной из ограничивающих упругое тело координатных поверхностей, сводит исходную краевую задачу к паре связанных функциональных уравнений; это может быть пара интегральных уравнений в случае сплошного спектра или пара сумматорных уравнений, если спектр задачи на собственные значения оказывается дискретным. Далее с помощью различных приемов эти парные уравнения сводятся к удобным для исследования и проведения вычислений функциональным уравнениям: интегральным (первого или второго рода, сингулярным или регулярным), к системам алгебраических уравнений и т.д.

Наметившаяся в последние десятилетия тенденция позволяет называть методом парных уравнений такие схемы решения смешанных задач, при использовании которых парные уравнения сводятся в итоге к регулярным интегральным уравнениям Фредгольма второго рода относительно некоторой вспомогательной функции.

К несомненным достоинствам метода следует отнести, во-первых, простую дискретизацию получаемых уравнений при численном, асимптотическом и т.д. (приближенном) решении, а во-вторых, возможность представления интересных с точки зрения приложений физических величин через искомое решение интегрального уравнения. Действительно, практика решения прикладных задач показывает, что при использовании метода всегда оказывается так, что как глобальные, скажем жесткость упругой системы, так и локальные величины, например, коэффициент интенсивности напряжений, непосредственно выражаются через искомое решение уравнения Фредгольма.

Данный обзор не может претендовать на полноту. Он включает в себя работы последних двух с половиной десятилетий, попавшие в поле зрения авторов.

1. Обратимся сначала к имеющим теоретическое значение работам, послужившим развитию метода парных уравнений. Отметим здесь, во-первых, посвященную методу парных уравнений монографию Я. С. Уфлянда [37], в которой рассматриваются дуальные уравнения, возникающие в смешанных задачах, разрешимых в цилиндрических, параболических, вырожденных бисферических координатах, а также уравнения, содержащие разложения по сферическим функциям: парные сумматорные уравнения по функциям Лежандра (в частности, присоединенным) с нецелым нижним индексом (см. также работы Я. С. Уфлянда и А. Н. Златина [38, 14]). Парные ряды, связанные с конечным преобразованием типа Мелера–Фока, решены Я. С. Уфляндом в [39], а парные интегральные уравнения, связанные с преобразованием Мелера–Фока, рассматривались Н. А. Вирченко и С. П. Пономаренко [6].

С помощью специально выведенного им интегрального представления М. А. Мартыненко [25] в рамках метода парных уравнений получил несколько более удобное, чем известное ранее [37], не требующее введения вспомогательных констант решение парных сумматорных уравнений по присоединенным функциям Лежандра первого рода и целого порядка.

В статьях А. Н. Златина и Я. С. Уфлянда [15, 52] впервые дано корректное решение парных рядов, связанных с разложениями типа Дини. Приведены результаты решения некоторых задач теории упругости для цилиндра в случае задания смешанных граничных условий на торце.

В работе А. Н. Златина [12], посвященной периодической задаче о дискообразных трещинах в цилиндре, рассмотрены сумматорные уравнения по однородным решениям, оставляющим цилиндрическую поверхность свободной от напряжений. Особенность проблемы заключается в том, что к парным уравнениям, отвечающим за смешанные граничные условия на торце, добавляется еще дополнительное сумматорное уравнение, выражающее условие отсутствия на торце цилиндра касательных напряжений; кроме того, сами однородные решения не являются ортогональными. С помощью схемы доопределения и при использовании соотношения обобщенной ортогональности однородных решений сумматорные уравнения удалось свести к одному регулярному интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Формальные выкладки, характерные для метода парных уравнений, обосновываются, опираясь на соответствующие теоремы разложения по однородным решениям для цилиндра (см. работу автора [13]).

Впоследствии эта схема решения была обобщена в статье А. Н. Златина и Я. С. Уфлянда [16] на осесимметричную контактную задачу о сжатии упругого цилиндра, боковая поверхность которого свободна от напряжений, жесткими гладкими плоскими кольцевыми штампами, внешние радиусы которых превосходят радиус упругого цилиндра. Полученная пара интегральных уравнений Фредгольма, наряду с эффективным численным решением, допускает получение простых асимптотических результатов в случае достаточно длинных цилиндров.

Рамки метода парных уравнений были расширены на задачи со сложной «неканонической» геометрией в трудах А. Ф. Улитко и Д. Н. Парфененко, где задаваемые на поверхности упругого полупространства смешанные граничные условия разделяются двумя лучами [28] или границей кругового сегмента [29, 30]. В работе Д. А. Пожарского [31] метод парных уравнений использован для решения задачи о действии полосового штампа на упругий пространственный клин.

Парные интегральные уравнения, связанные с (обобщенным) интегральным преобразованием Вебера, исследовались П. Я. Малицем и А. Р. Синцером [22–24] в приложении к статическим и динамическим осесимметричным задачам теории упругости для полупространства или слоя,

содержащих цилиндрическую полость.

Развитию теории классических парных уравнений послужили работы Б. Л. Абрамяна [1], где исследовались интегральные уравнения, содержащие функции Бесселя, и А. А. Баблюяна и В. С. Макаряна [2], где рассмотрены уравнения, содержащие комбинации тригонометрических и показательных функций.

2. Плоская контактная задача для слоя, сцепленного с жестким штампом конечной ширины, в работе Ю. И. Травкина [36] была сведена к паре связанных интегральных уравнений Фредгольма второго рода, ядра которых содержат гипергеометрическую функцию.

Антиплоская задача о движении системы двух штампов по поверхности слоя с постоянной дозвуковой скоростью была рассмотрена в работе [49].

Задача о вдавливании гладкого жесткого клина в полуплоскость с клиновидным вырезом в случае плотного прилегания краев штампа и упругого сектора рассмотрена в работе А. Ф. Улитко и соавторов [18]. Приведены численные результаты, дан анализ асимптотики решений в окрестности особых точек.

В. С. Тоноян и С. А. Мелкумян [35] свели к эффективно решаемому интегральному уравнению задачу о вдавливании жесткого плоского штампа в ортотропную полуплоскость, ослабленную конечным надрезом, выходящим под прямым углом на границу области контакта.

Степень влияния анизотропии на распределение напряжений в области контакта трансверсально изотропной полосы, сжимаемой двумя одинаковыми жесткими цилиндрическими штампами, исследовалась японскими авторами в работе [44].

Проблема сжатия трансверсально изотропного слоя жестким штампом и жестким основанием с цилиндрическим отверстием в осесимметричной постановке решена в работе Б. С. Окрепкого [27], где получены связанные уравнение Фредгольма второго рода и бесконечная алгебраическая система.

Осесимметричная задача о вдавливании без трения жесткого кругового штампа в упругий слой с цилиндрической вставкой из другого упругого материала в работе А. И. Соловьева [34] сведена к регулярному интегральному уравнению Фредгольма на полубесконечном промежутке.

Иной тип неоднородности, когда упругие свойства изменяются по глубине (слоистые и непрерывно неоднородные среды) применительно к классическим осесимметричным контактными задачам о вдавливании гладкого жесткого штампа в упругий слой (полупространство) рассматривались в монографии В. С. Никишина [26]. Приведены численные результаты для плоского кругового, сферического и конического штампов.

Метод парных уравнений использован А. Н. Бородачевым и В. И. Ду-

динским [4] в осесимметричной задаче о вдавливании штампа в неоднородное полупространство с изменяющимся по глубине коэффициентом Пуассона. В качестве примера рассмотрен случай конического штампа.

Рассмотрению неосесимметричных задач о вдавливании жесткого штампа в упругое тело посвящены работы [3, 40]. В первой из них А. Н. Бородачев рассмотрел круговой в плане штамп и полупространство, коэффициент Пуассона которого — произвольная кусочно-непрерывная функция глубины. В качестве примера рассмотрено нецентрическое вдавливание штампа с плоским основанием. В работе [40] гладкий несимметричный штамп контактирует с упругим слоем. В частном случае, когда поверхность штампа описывается полиномом, проблема сводится к конечной системе связанных интегральных уравнений второго рода.

Осесимметричная задача о контакте сцепленных штампа и нелинейно упругого полупространства с начальными напряжениями рассмотрена В. Б. Рудницким [33]. Система из двух допускающих итеративное решение интегральных уравнений Фредгольма получена в результате линеаризации уравнений нелинейной теории упругости. В работе П. П. Григоренко и В. Б. Рудницкого [7] методика обобщена на случай действия двух жестких штампов на слой с начальными напряжениями.

Задача о сдавливании двумя полупространствами с различными упругими свойствами жесткого гладкого цилиндрического штампа с помощью метода парных уравнений решена в [48].

Жесткое дискообразное включение, расположенное в полупространстве параллельно свободной от напряжений границе этого упругого тела и перемещающееся в боковом направлении под действием горизонтальной силы, рассматривалось в [46]. Полученное интегральное уравнение Фредгольма второго рода использовалось для определения жесткости упругой системы на сдвиг.

Осесимметричная задача о вдавливании жесткого гладкого штампа в упругую сферу при использовании функций Г. Н. Положего с помощью парных сумматорных уравнений решена С. П. Кругловой и Л. Н. Ломоносовым [19].

3. Классическая для метода парных уравнений проблема — задача Рейсснера–Сагоци о кручении упругого полупространства жестким дискообразным штампом — за последние пять десятилетий была обобщена в различных направлениях. Подробный обзор публикаций, связанных со статическими аналогами этой проблемы может быть найден в работе Гладвелла и Лемчика [43], посвященной, в первую очередь, задаче о кручении упругого цилиндра конечной высоты спаянным с ним круговым штампом. Эффективное решение этой задачи, найденное с использованием метода парных уравнений, приведено в работе А. Н. Златина и Я. С. Уфлянда [53].

Решению задачи Рейсснера–Сагоци для многослойного основания по-

священа работа Роговски [47], а задача о кручении полупространства, содержащего жесткое дискообразное включение методом парных уравнений решена Даваном в статье [42].

4. Естественным обобщением метода парных уравнений является расширение методики на случай большей, чем вторая, кратности интегральных или сумматорных уравнений.

Теоретическому рассмотрению тройных интегральных уравнений посвящена работа С. П. Пономаренко [32].

Ф. Н. Бородачев [5] и В. С. Губенко в соавторстве с М. Я. Киселевым и В. Д. Ламзюком [8] использовали тройные интегральные уравнения при решении классической задачи о вдавливании без трения кольцевого штампа в упругое полупространство. Аналогичные смешанные задачи о кручении исследовались в [41, 45].

5. Дальнейшее развитие метода парных интегральных уравнений позволило построить эффективные решения классических динамических задач теории упругости.

Известно, что проблемы, связанные с колебаниями штампов на упругих телах, сложнее соответствующих статических задач, а также родственных задач теории колебаний электромагнитных волн. Причины этого, в частности, кроются в наличии двух независимых скоростей распространения упругих волн и в более сложной форме записи граничных условий. Однако, несмотря на эти трудности, с помощью метода парных уравнений оказывается возможным построить эффективное решение задач о вертикальных колебаниях гладкого жесткого штампа, лежащего на полуплоскости и полупространстве.

В работе А. С. Зильберглейта и И. Н. Златиной [10] парные интегральные уравнения, связанные с преобразованиями Фурье и Ханкеля, при использовании разрывных интегралов типа Сонина–Ахизера, найденных Н. Н. Лебедевым и И. П. Скальской [20, 21] для родственных задач дифракции электромагнитных волн, были сведены к интегральному уравнению Фредгольма второго рода; за счет удачного выбора разрывных интегралов ядро уравнения Фредгольма оказывается возможным представить в виде, удобном для построения асимптотических разложений как при высоких, так и при низких частотах колебаний упругой системы.

В работах А. С. Зильберглейта и соавторов [10, 11] показано, что наиболее интересные для приложения физические величины, такие как контактные напряжения, их интенсивность, амплитуда колебаний штампа и т.д., могут быть выражены в замкнутом виде непосредственно через решение интегрального уравнения Фредгольма.

Единственность решения парных интегральных уравнений, связанных с преобразованием Ханкеля, для родственной задачи теории дифракции была показана в работе Е. А. Иванова [17].

В задаче о сдвиговых колебаниях жесткого ленточного штампа, сцепленного с полупространством, рассмотренной А. С. Зильберглейтом и соавторами [11] были использованы разрывные интегралы, найденные ранее А. С. Зильберглейтом для одного класса задач дифракции [9]. В результате решения было получено интегральное уравнение Фредгольма второго рода, удобное для построения коротковолновой асимптотики. Математическое обоснование используемых в подобных парных уравнениях постановок, в частности, вопросы существования и единственности решения парных интегральных уравнений, связанных с преобразованием Фурье, было дано А. С. Зильберглейтом в упомянутой выше работе.

К сожалению, при более сложных постановках задач (угловых колебаниях штампа, частичного сцепления с основанием и т.д.) существенно более громоздкой становится структура ядер интегральных уравнений, что затрудняет получение высоко- и низкочастотных асимптотик. В этих случаях могут быть применены некоторые известные методы, речь о которых идет в других параграфах этой книги.

6. В заключение, укажем на обзорные работы, посвященные методу парных уравнений. Они принадлежат авторам, внесшим большой вклад в развитие и популяризацию метода. Это обзор А. Ф. Улитко [51], а также работа [50] И. Н. Снеддона, одного из основоположников метода парных уравнений, автора многочисленных монографий, посвященных применению интегральных преобразований к решению смешанных задач математической физики и теории упругости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамян Б. Л.* О некоторых парных интегральных уравнениях с функциями Бесселя, встречающихся в задачах теории упругости // Докл. АН АрмССР. 1989. Т. 88. № 8. С. 121–124.
2. *Баблоян А. А., Макарян В. С.* Парные интегральные уравнения, содержащие комбинации тригонометрических функций // Изв. НАН Армении. Механика. 1996. Т. 49. № 2. С. 8–18.
3. *Бородачев А. Н.* Об одном классе точных решений неосесимметричной контактной задачи для неоднородного упругого полупространства // ПИММ. 1990. Т. 54. Вып. 2. С. 294–301.
4. *Бородачев А. Н., Дудинский В. И.* Жесткий штамп на упругом полупространстве с изменяющимся по глубине коэффициентом Пуассона // Прикл. мех. 1985. Т. 21. № 8. С. 34–39.
5. *Бородачев Ф. Н.* Приближенный метод определения контактных напряжений под кольцевым штампом // Прикл. мех. 1979. Т. 15. № 4. С. 89–92.
6. *Вирченко Н. А., Пономаренко С. П.* Свойства обобщенного интегрального преобразования Мелера–Фока и его применение к решению парных интегральных уравнений // Докл. АН УССР. Сер. А. 1979. № 2. С. 83–86.
7. *Григоренко П. П., Рудницкий В. Б.* Слой с начальными напряжениями под действием двух жестких штампов // Докл. АН УССР. 1990. № 9. С. 36–39.

8. Губенко В. С., Киселев М. Я., Ламзюк В. Д. Действие кольцевого в плане штампа с плоским основанием на слой, лежащий на упругом основании // Прикл. мех. 1975. Т. 11. № 7. С. 11–16.
9. Зильбергейт А. С. Решение одного класса парных интегральных уравнений, возникающих в задачах теории дифракции // Вопросы математической физики. Л.: Наука, 1975. С. 111–126.
10. Зильбергейт А. С., Златина И. Н. Динамическая контактная задача для полуплоскости и полупространства // Изв. АН АрмССР. Механика. 1978. Т. 31. № 3. С. 18–30.
11. Зильбергейт А. С., Златина И. Н., Симкина Т. Ю. Высокочастотные сдвиговые колебания ленточного штампа на упругом полупространстве // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 5. С. 844–848.
12. Златин А. Н. Растяжение цилиндра, содержащего периодически расположенные дискообразные трещины // Докл. АН СССР. 1978. Т. 241. № 6. С. 1300–1302.
13. Златин А. Н. Некоторые теоремы разложения по однородным решениям для цилиндра // Изв. АН АрмССР. Механика. 1979. Т. 32. № 5. С. 16–24.
14. Златин А. Н., Уфлянд Я. С. Применение метода парных рядов к некоторым смешанным задачам кручения конических тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 4. С. 43–51.
15. Златин А. Н., Уфлянд Я. С. Смешанная задача о сжатии торцевыми штампами упругого цилиндра конечной высоты // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 6. С. 87–93.
16. Златин А. Н., Уфлянд Я. С. К смешанным задачам о деформации упругого цилиндра // Прикл. мех. 1985. Т. 21. № 3. С. 7–14.
17. Иванов Е. А. Решение одной смешанной краевой задачи математической теории дифракции методом парных интегральных уравнений // Дифф. уравнения. 1979. Т. 15. № 9. С. 1646–1652.
18. Ивченко Е. И., Качаловская Н. Е., Улитко А. Ф. Гладкий контакт жесткого клина с берегами клиновидного выреза в упругой плоскости // Докл. АН Украины. 1991. № 12. С. 23–29.
19. Круглова С. П., Ломонос Л. Н. Осесимметричная задача о вдавливании жесткого штампа в упругую сферу // Вычисл. и прикл. матем. (Киев). 1981. № 43. С. 46–53.
20. Лебедев Н. Н., Скальская И. П. Применение парных интегральных уравнений к задачам дифракции электромагнитных волн на тонкой проводящей ленте // ЖТФ. 1972. Т. 42. № 4. С. 681–690.
21. Лебедев Н. Н., Скальская И. П. Применение парных интегральных уравнений к электростатическим задачам для полого проводящего цилиндра конечной длины // ЖТФ. 1973. Т. 43. № 1. С. 44–51.
22. Малиц П. Я. Осесимметричная контактная задача для полупространства с упругоупроченной цилиндрической полостью // Динамические системы (Киев). 1987. № 6. С. 80–85.
23. Малиц П. Я. К решению смешанных задач для слоя с вертикально круговой цилиндрической полостью // Динамические системы (Киев). 1988. № 7. С. 95–102.
24. Малиц П. Я., Синцер А. Р. Вертикальные колебания кругового штампа на упругом полупространстве с цилиндрической полостью // Динамические системы (Киев). 1989. № 8. С. 30–36.
25. Мартыненко М. А. Решение парных уравнений по полиномам Лежандра первого порядка // Матем. физика. 1979. № 25. С. 106–109.

26. Никитин В. С. Осесимметричные контактные задачи теории упругости для неоднородных сред // М.: АН СССР. Выч. центр. Сообщения по математике. Вып. 3. 1976. 102 с.
27. Окрепкий Б. С. Осесимметричная задача о давлении штампа на трансверсально-изотропный слой, лежащий на жестком основании с вырезом // Прикл. мех. 1982. Т. 18. № 4. С. 29–35.
28. Парфененко Д. Н. Об особенностях поля напряжений в упругом массиве, содержащем плоский клиновидный в плане разрез // Матем. моделир. динам. процессов в системах тел с жидкостью. Киев: ИМ, 1988. С. 72–78.
29. Парфененко Д. Н., Улитко А. Ф. Об одном новом интегральном преобразовании и использовании его в контактных задачах теории упругости // Докл. АН УССР. Сер. А. 1988. № 11. С. 53–58.
30. Парфененко Д. Н., Улитко А. Ф. Вдавливание в упругое полупространство штампа, имеющего в плане форму кругового сегмента // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 6. С. 32–41.
31. Пожарский Д. А. К задаче о действии полосового штампа на упругий пространственный клин с одной свободной от напряжений гранью // Прикл. мех. 1994. Т. 30. № 5. С. 42–48.
32. Пономаренко С. П. О решении одного класса тройных интегральных уравнений, связанных с интегральным преобразованием Ханкеля // Укр. матем. журнал. 1978. Т. 30. № 6. С. 833–840.
33. Рудницкий В. Б. Осесимметричная контактная задача для упругого полупространства с начальными напряжениями при учете сцепления // Прикл. мех. 1987. Т. 23. № 4. С. 112–115.
34. Соловьев А. И. Давление кругового штампа на составной слой // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 6. С. 1111–1119.
35. Тоноян В. С., Мелкумян С. А. Симметричная контактная задача для ортотропной полуплоскости с вертикальным конечным разрезом // Докл. АН Армении. 1991. Т. 92. № 3. С. 133–137.
36. Травкин Ю. И. Об одном способе решения смешанной задачи теории упругости для полосы // Прикл. мех. 1980. Т. 16. № 7. С. 73–81.
37. Уфлянд Я. С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л.: Наука, 1977. 220 с.
38. Уфлянд Я. С. О решении одного класса задач электростатики методом парных рядов // Письма в ЖТФ. 1976. Т. 2. Вып. 17. С. 794–798.
39. Уфлянд Я. С. Решение некоторых смешанных задач кручения упругих тел с помощью конечного преобразования типа Мелера–Фока // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 2. С. 53–61.
40. Chatterjee M., Roy A. On an elliptic punch indenting an elastic layer // Indian J. Pure & Appl. Math. 1990. V. 21. № 10. P. 935–950.
41. Dhaliwal R. S., Singh B. M., Rokne J., Vrbik J. Torsion by an annular disc of an hemisphere embedded in an elastic half-space // Int. J. Eng. Sci. 1986. V. 24. № 1. P. 79–85.
42. Dhawan G. K. On the torsion of elastic half-space with a penny-shaped inclusion // Indian J. Pure & Appl. Math. 1975. V. 6. № 3. P. 253–263.
43. Gladwell G. V. L., Lemczyk T. F. The static Reissner–Sagoci problem for a finite cylinder: another variation on a theme of I. N. Sneddon // Elasticity. Mathematical methods and applications. The Ian N. Sneddon 70th birthday volume. Chichester: Ellis Horwood Lim. Publishers. 1989. P. 113–123.

44. *Kasano Hideaki, Yamashita Osamu, Matsumoto Hiroyuki, Nakahara Ichiro.* A transversely isotropic elastic plate pressed between two rigid cylindrical surfaces // Bull. JSME. 1986. V. 29. № 254. P. 2386–2391.
45. *Olesiak Z. S., Kokot J.* A note on stress singularities in torsion by a rigid annulus // Int. J. Eng. Sci. 1980. V. 18. № 1. P. 205–209.
46. *Pak Y. S., Saphores J.-D. M.* Lateral translation of a rigid disc in a semi-infinite solid // Quart. J. Mech. & Appl. Math. 1992. V. 45. № 3. P. 435–449.
47. *Rogovski B.* The Reissner–Sagoci problem for layered elastic media // Eng. Trans. 1992. V. 40. № 1. P. 63–79.
48. *Selvadurai A. P. S.* A unilateral contact problem for a rigid disc inclusion embedded between two dissimilar elastic half-spaces // Quart. J. Mech. & Appl. Math. 1994. V. 47. № 3. P. 493–510.
49. *Singh B. M., Dhaliwal R. S.* Closed form solution to dynamic punch problems by integral transform method // ZAMM. 1984. V. 64. № 1. P. 31–54.
50. *Sneddon I. N.* Recent applications of integral transforms in the linear theory of elasticity // «Trends Appl. Pure Math. Mech. Vol. 2. Collect. Pap. Symp. Kozubnik. 1977». London, e.a., 1979. P. 307–325.
51. *Ulitko A. F.* Dual integral equations occurring in spatial problems of elasticity for cracked bodies // Fract. Mech.: Successes & Problems. 8th Int. Conf. Kiev. 1993: Collect. Abstr. an infinite cylinder // Journal of Elasticity. 1983. V. 13. № 2. P. 207–214. № 2. P. 207–214. Pt. 1. Lviv, 1993. P. 104.
52. *Zlatin A. N., Uflyand Ya. S.* Torsion of an elastic cylinder slackened by an external circular notch. I. The case of an infinite cylinder // Journal of Elasticity. 1983. V. 13. № 2. P. 207–214.
53. *Zlatin A. N., Uflyand Ya. S.* Torsion of an elastic cylinder slackened by an external circular notch. II. The case of a finite cylinder // Journal of Elasticity. 1983. V. 13. № 2. P. 215–223.

§ 9. РАЗВИТИЕ МЕТОДА ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Е. В. Коваленко

Дается обзор работ, посвященных развитию метода ортогональных функций (ортогональных многочленов) для решения интегральных и интегро-дифференциальных уравнений смешанных задач. Эти исследования шли, в основном, по трем направлениям: 1) получение новых спектральных соотношений для интегральных операторов, соответствующих главным частям интегральных уравнений рассматриваемых задач, с использованием в дальнейшем классической схемы алгоритма ортогональных функций; 2) модификация проекционного метода Галеркина, приближенное построение систем собственных функций и собственных чисел интегральных операторов смешанных задач; 3) использование метода ортогональных функций для решения интегральных уравнений эволюционного типа, содержащих оператор Фредгольма по координатам и оператор Вольтерра по времени.

1. Классический метод ортогональных функций, берущий свое начало с известной статьи П. И. Клубина [26], получивший свое развитие и математическое обоснование в работах Г. Я. Попова, В. М. Александрова и их учеников [44], является одним из эффективных алгоритмов решения плоских и пространственных задач математической физики со смешанными граничными условиями. Суть его состоит в следующем. Смешанная задача сводится к решению интегрального уравнения первого рода, ядро которого содержит безразмерный геометрический или физический параметр. Выделяется главная (сингулярная) часть ядра, соответствующая выбранной области изменения параметра. При этом второе слагаемое в представлении ядра является, чаще всего, достаточно гладкой функцией и играет роль малой добавки. Строится спектральное соотношение, точно обращающее интегральный оператор, соответствующий сингулярной части ядра. Собственными функциями таких операторов оказывается, как правило, какая-либо система ортогональных функций, в частности, система классических ортогональных полиномов. Регулярная часть ядра, решение и известная функция, входящая в правую часть интегрального уравнения, раскладываются в ряды по этим функциям, после чего оно сводится к бесконечной алгебраической системе. При соответствующем редуцировании (урезании) бесконечной системы получается конечная система с почти треугольной матрицей, что позволяет довести исследуемую задачу до числа.

Таким образом, ключевым моментом метода ортогональных функций является нахождение спектральных соотношений для главных частей интегральных операторов смешанных задач. Ряд таких соотношений установлен довольно давно и приведен в монографиях Г. Я. Попова [42, 43]. Автор, во-первых, связал получение спектральных соотношений с существованием специального класса полиномиальных ядер (П-ядер), а, во-вторых, использовал для их вывода алгоритмы контурного интегрирования.

Среди исследований последних лет здесь следует отметить работы [14, 18, 36–41], в которых единым методом теории обычного и обобщенных потенциалов унифицировано получение широкого класса спектральных и родственных им соотношений для интегральных операторов, часто встречающихся в смешанных задачах механики сплошных сред.

Продemonстрируем основную идею этого подхода на примере интегрального уравнения

$$\iint_{\Omega} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} = 2\pi f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \quad (1)$$

при условии

$$\iint_{\Omega} p(x, y) dx dy = P < \infty, \quad (2)$$

где Ω — область плоскости $z = 0$ обычного трехмерного пространства, отнесенного к правой прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$. Система (1), (2) соответствует контактной задаче о вдавливании без трения силой P в упругое полупространство жесткого штампа, основание которого описывается функцией $z = f(x, y)$ и имеет в плане форму области Ω .

Введем потенциал простого слоя плотности $p(x, y)$, распределенный по плоской области Ω ,

$$\omega(x, y, z) = \iint_{\Omega} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}}. \quad (3)$$

Известно, что $\omega(x, y, z)$ — гармоническая функция всюду в пространстве, кроме плоского разреза по области Ω , которая обращается в нуль на бесконечности как PR^{-1} ($R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$). Кроме того, функция $\omega(x, y, z)$ непрерывна во всем пространстве, включая и область Ω , а ее нормальная производная претерпевает разрыв при переходе с одной стороны разреза на другую, а именно

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)_{z \rightarrow \pm 0} = \begin{cases} \mp 2\pi p(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ 0, & (x, y) \notin \Omega. \end{cases} \quad (4)$$

Если на разрезе поставить граничное условие

$$\omega(x, y, 0) = 2\pi f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (5)$$

то решение интегрального уравнения (1) эквивалентно задаче определения гармонической функции $\omega(x, y, z)$ (2)–(5).

Изложенным методом можно эффективно построить решения интегральных уравнений, когда возможно в пространстве ввести систему ортогональных криволинейных координат, в которой одна из координатных поверхностей или координатных линий (в случае одномерного аналога уравнения (1)) представляет собой плоскую дважды покрываемую

область Ω или дважды покрываемый отрезок Γ . Тогда решения краевых задач, эквивалентных интегральным уравнениям, находятся методом разделения переменных. При этом одна из гармоник их решений позволяет вывести соответствующее спектральное соотношение, переводящее полную систему ортогональных функций в ту же самую систему.

Приведем некоторые спектральные и родственные им соотношения, дающие выражения квадратур по области Ω или по отрезку Γ вне Ω или Γ , нашедшие применения в контактных и смешанных задачах механики деформируемого твердого тела, а также в смежных областях математической физики:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{T_{2m}(\beta) \operatorname{cn}(\xi \lambda^{-1})}{\sqrt{\operatorname{sn}^2(\lambda^{-1}) - \operatorname{sn}^2(\xi \lambda^{-1})}} \operatorname{cs} \left(\frac{\xi - x}{\lambda} \right) d\xi &= \frac{\pi \lambda \operatorname{cn}(x \lambda^{-1})}{\operatorname{sn}(\lambda^{-1})} U_{2m-1}(\alpha), \\ \int_{-1}^1 \frac{T_{2m}(\beta) \operatorname{dn}(\xi \lambda^{-1})}{\sqrt{\operatorname{sn}^2(\lambda^{-1}) - \operatorname{sn}^2(\xi \lambda^{-1})}} \operatorname{ds} \left(\frac{\xi - x}{\lambda} \right) d\xi &= \frac{\pi \lambda \operatorname{dn}(x \lambda^{-1})}{\operatorname{sn}(\lambda^{-1})} U_{2m-1}(\alpha), \quad m = 1, 2, 3, \dots, \\ \int_{-1}^1 \frac{T_{2m+1}(\beta) \operatorname{dn}(\xi \lambda^{-1})}{\sqrt{\operatorname{sn}^2(\lambda^{-1}) - \operatorname{sn}^2(\xi \lambda^{-1})}} \operatorname{cs} \left(\frac{\xi - x}{\lambda} \right) d\xi &= \frac{\pi \lambda \operatorname{dn}(x \lambda^{-1})}{\operatorname{sn}(\lambda^{-1})} U_{2m}(\alpha), \quad (6) \\ \int_{-1}^1 \frac{T_{2m+1}(\beta) \operatorname{cn}(\xi \lambda^{-1})}{\sqrt{\operatorname{sn}^2(\lambda^{-1}) - \operatorname{sn}^2(\xi \lambda^{-1})}} \operatorname{ds} \left(\frac{\xi - x}{\lambda} \right) d\xi &= \frac{\pi \lambda \operatorname{cn}(x \lambda^{-1})}{\operatorname{sn}(\lambda^{-1})} U_{2m}(\alpha), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \\ \beta &= \frac{\operatorname{sn}(\xi \lambda^{-1})}{\operatorname{sn}(\lambda^{-1})}, \quad \alpha = \frac{\operatorname{sn}(x \lambda^{-1})}{\operatorname{sn}(\lambda^{-1})}; \end{aligned}$$

$$-\int_a^b \frac{T_n(Y)}{\sqrt{(b^2 - \tau^2)(\tau^2 - a^2)}} \ln \left| \frac{\tau - t}{\tau + t} \right| d\tau = \mu_n T_n(X),$$

$$Y = \cos \alpha(\tau), \quad X = \cos \alpha(t) \quad (a \leq t \leq b),$$

$$\alpha(t) = \frac{\pi}{\mathbf{K}'(c)} \mathbf{F} \left(\arcsin \sqrt{\frac{b^2 - t^2}{b^2 - a^2}}, \sqrt{1 - c^2} \right), \quad c = \frac{a}{b},$$

$$\mu_n = \frac{\mathbf{K}'(c)}{bn} \operatorname{th} \left[\frac{\pi n \mathbf{K}(c)}{\mathbf{K}'(c)} \right] \quad (n \geq 1), \quad \mu_0 = \frac{\pi}{b} \mathbf{K}(c); \quad (7)$$

$$\begin{aligned} -\int_a^b \frac{T_n(Y)}{\sqrt{(b^2 - \tau^2)(\tau^2 - a^2)}} \ln \left| \frac{\tau - t}{\tau + t} \right| d\tau &= [H(a-t) + (-1)^n H(t-b)] = \\ &= \frac{\mathbf{K}'(c)}{bn} \operatorname{sh} \left[\frac{\pi n u(t)}{\mathbf{K}'(c)} \right] \operatorname{ch}^{-1} \left[\frac{\pi n \mathbf{K}(c)}{\mathbf{K}'(c)} \right] \quad (0 < t < a, \quad t > b), \end{aligned}$$

$$u(t) = \int_0^{l(t)} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2 y^2)}}, \quad l(t) = \begin{cases} ta^{-1} & (0 < t < a), \\ bt^{-1} & (t > b), \end{cases}$$

$$-\int_{-1}^1 \frac{T_n(Y)}{\sqrt{\operatorname{ch} 2\tau - \operatorname{ch} 2r\xi}} \ln \left| \operatorname{th} \frac{\pi(\xi - x)}{4\lambda} \right| d\xi = \lambda_n T_n(X),$$

$$|x| \leq 1, \quad \lambda_n = \sqrt{2} r^{-1} \mu_n, \quad r = \pi \sqrt{q}, \quad q = (4\lambda^2)^{-1}, \quad (8)$$

$$b = e^r, \quad a = e^{-r}, \quad t = e^{rx}, \quad \tau = e^{r\xi};$$

$$-\int_{-1}^1 \frac{T_{2n}(Y)}{\sqrt{\cos 2r - \cos 2r\xi}} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\pi(\xi-x)}{4\lambda} \right| d\xi = \lambda_{2n} T_{2n}(X), \quad (9)$$

$$|x| \leq 1, \quad b = 1, \quad a = \cos r, \quad \tau = \cos r\xi, \quad t = \cos rx;$$

$$\int_{-1}^1 \frac{(1-\xi^2)^{\kappa/2}}{|\xi-x|^\mu} K_\mu \left(\frac{|\xi-x|}{\lambda} \right) \operatorname{Ps}_{n-\kappa}^\kappa(\xi, -q) d\xi = \begin{cases} \lambda_n^\kappa (1-x^2)^{\kappa/2} \operatorname{Ps}_{n-\kappa}^\kappa(x, -q) & (|x| \leq 1), \\ \mu_n^\kappa (x^2-1)^{\kappa/2} \operatorname{sign} x S_{n-\kappa}^{(3)}(|x|, -q) & (|x| > 1), \end{cases} \quad (10)$$

$$\kappa = \frac{1}{2} - \mu, \quad |\mu| < \frac{1}{2};$$

$$\int_{-1}^1 \frac{ce_n(\arccos \xi, -q)}{\sqrt{1-\xi^2}} K_0 \left(\frac{|\xi-x|}{\lambda} \right) d\xi = \begin{cases} -\frac{\pi \operatorname{Fek}_n(0, -q)}{\operatorname{Fek}'_n(0, -q)} ce_n(\arccos x, -q) & (|x| \leq 1), \\ \frac{\pi \operatorname{Fek}_n(\ln(|x| + \sqrt{x^2-1}), -q)}{\operatorname{Fek}'_n(0, -q)} ce_n(0, -q) \gamma_n(x) & (|x| > 1), \end{cases} \quad (11)$$

$$\gamma_n(x) = \begin{cases} 1 & (n = 2m), \\ \operatorname{sign} x & (n = 2m+1), \end{cases} \quad m = 0, 1, \dots;$$

$$\int_1^\infty \left\{ \frac{K_\mu(|\xi-x|\lambda^{-1})}{|\xi-x|^\mu} \pm \frac{K_\mu((\xi+x)\lambda^{-1})}{(\xi+x)^\mu} \right\} \frac{S_\nu^{(3)}(\xi, -q)}{(\xi^2-1)^{\nu/2}} d\xi = \begin{cases} \lambda_{\nu, \kappa}^\pm (x^2-1)^{\kappa/2} S_{\nu, \kappa}^\pm(x, -q) & (x > 1), \\ \mu_{\nu, \kappa}^\pm (1-x^2)^{\kappa/2} H_{\nu, \kappa}^\pm(\arccos x) & (0 < x < 1). \end{cases} \quad (12)$$

Здесь $T_n(x)$, $U_n(x)$ — многочлены Чебышева первого и второго рода, $K_\mu(x)$ — функция Макдональда, $ce_n(x, -q)$ и $\operatorname{Fek}_n(x, -q)$ — периодические первого рода и модифицированные третьего рода функции Маттье, $\mathbf{K}(k)$, $\mathbf{K}'(k) = \mathbf{K}(\sqrt{1-k^2})$ и $\mathbf{F}(x, k)$ — эллиптические интегралы первого рода, $H(x)$ — функция Хевисайда, $\operatorname{sn}(x) = \operatorname{sn}(x, k)$, $\operatorname{cn}(x) = \operatorname{cn}(x, k)$, $\operatorname{dn}(x) = \operatorname{dn}(x, k)$, $\operatorname{cs} x = \operatorname{cn} x / \operatorname{sn} x$, $\operatorname{ds} x = \operatorname{ds} x / \operatorname{sn} x$ — эллиптические функции Якоби, $\operatorname{Ps}_\nu^\kappa(x, \vartheta)$ и $S_\nu^{(3)}(x, \vartheta)$ — сфероидальные волновые функции, $H_{\nu, \kappa}^\pm(x)$ — связанные с ними функции, а выражения для чисел $\lambda_{\nu, \kappa}^\pm$, $\mu_{\nu, \kappa}^\pm$ и λ_n^κ , μ_n^κ можно найти в цитированных работах С. М. Мхитаряна [40, 41]. Вывод спектральных соотношений (6) изложен в диссертации Е. В. Коваленко¹, а спектральное соотношение (11) в неявном виде установлено в [45].

Классическая схема метода ортогональных функций, описанная выше, позволила построить эффективные решения интегральных уравнений

¹ Коваленко Е. В. Контактные задачи для тел с покрытиями и методы их решения: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.02.04. М., 1989. 413 с.

многих практически важных смешанных задач механики сплошных сред [14, 19, 42, 43, 46], в том числе и при любых значениях безразмерного параметра $\lambda \in (0, \infty)$, входящего в их ядра [1, 4–6, 33], а также ряда сингулярных интегральных уравнений с неподвижными особенностями [42, 43].

2. Известно [44], что метод ортогональных функций представляет собой некоторый специфический вариант процедуры Галеркина для интегральных уравнений первого рода. В то же время, построение спектральных соотношений, точно обращающих главную часть их интегральных операторов, порой бывает затруднено. Поэтому иногда используют следующую модификацию метода ортогональных функций [21, 34, 42, 43]. Продемонстрируем ее на примере решения интегрального уравнения (n — фиксированное число)

$$\int_a^b k_n(\rho, r) \rho p_n(\rho) d\rho = f_n(r) \quad (a \leq r \leq b, \quad n = 0, 1, \dots), \quad (13)$$

$$k_n(\rho, r) = \int_0^\infty L(\lambda\alpha) J_n(\alpha\rho) J_n(\alpha r) d\alpha, \quad L(\alpha) = \alpha K(\alpha),$$

где символ ядра $K(u)$ является вещественной, положительной, четной и непрерывной (кроме, быть может, точки $u = 0$) при $|u| < \infty$ функцией, имеющей на бесконечности асимптотику

$$K(u) = |u|^{-1} [1 + O(|u|^{-\varepsilon} e^{-\delta|u|})], \quad (14)$$

$$\delta = 0, \quad \varepsilon > 0; \quad \delta > 0, \quad \varepsilon \leq 0.$$

Уравнение (13), (14) соответствует произвольной гармонике в задаче о взаимодействии кольцевого в плане штампа с линейно-деформируемым основанием общего типа. Решение его построено Е. В. Коваленко [34] в форме:

$$p_n^N(r) = \frac{1}{\sqrt{(b^2-r^2)(r^2-a^2)}} T_n \left[\frac{ab+r^2}{r(a+b)} \right] \sum_{j=0}^N a_j^n T_j(Q), \quad Q = \frac{a^2+b^2-2r^2}{b^2-a^2}. \quad (15)$$

Выбирая в качестве координатных элементов вспомогательного базиса функции $(C_m^n(x))$ — полиномы Гегенбауэра

$$\psi_m^n(r) = \begin{cases} r[(b^2-r^2)(r^2-a^2)]^{-1/2} T_m(Q) & (n = 0), \\ r^{1-n} [(b^2-r^2)(r^2-a^2)]^{n-1/2} C_m^n(Q) & (n \geq 1) \end{cases}$$

и используя стандартную схему алгоритма Галеркина, автор сводит уравнение (13) к решению линейной алгебраической системы относительно неизвестных коэффициентов a_j^n , входящих в (15), вида

$$\sum_{j=0}^N c_{mj}^n a_j^n = f_m^n \quad (m = 0, 1, \dots, N), \quad (16)$$

причем использование теорем сложения для бесселевых функций позволило представить коэффициенты c_{mj}^n в (16) в форме однократных интегралов

$$c_{mj}^n = \int_0^\infty L(\lambda\alpha) I_j^n(\alpha) K_m^n(\alpha) d\alpha,$$

$$I_j^n(\alpha) = \frac{\pi}{4} J_j(\alpha a_-) [J_{j+n}(\alpha a_+) + (-1)^n J_{j-n}(\alpha a_+)],$$

$$K_m^n(\alpha) = \frac{\pi}{2^n} \frac{\Gamma(m+2n)}{m! \Gamma(n)} J_{m+n}(\alpha a_+) J_{m+n}(\alpha a_-), \quad a_\pm = \frac{1}{2}(b \pm a).$$

Доказано, что матрица системы (16) является невырожденной и $\|p_n - p_n^N\|_{L_q} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, $1 < q < 2$, что говорит о применимости предлагаемого подхода для решения интегрального уравнения (13), (14) при всех значениях параметра $\lambda \in (0, \infty)$.

Существует еще одна модификация метода ортогональных функций [31, 32]. Исследуется интегральное уравнение первого рода

$$Ap = f, \quad (17)$$

где, для определенности, интегральный оператор Ap имеет вид

$$Ap = \int_0^1 k(\rho, r) p(\rho) d\rho,$$

$$k(\rho, r) = \int_0^\infty L(\lambda\alpha) J_0(\alpha\rho) J_0(\alpha r) d\alpha, \quad (18)$$

а асимптотические свойства функции $L(u) = uK(u)$ даются формулами (14). Интегральным уравнением (17), (18) описываются смешанные задачи математической физики с круговой линией смены граничных условий.

Вводится в рассмотрение гильбертово пространство $L_2^{1/2}(\Omega)$ функций, суммируемых с квадратом в круге $\Omega: 0 \leq r \leq 1$ с весом $(1-r^2)^{-1/2}$ и приближенно, методом Бубнова-Галеркина, строится система собственных функций $\{\varphi_n(r)\}$ и соответствующих им собственных чисел $\{\mu_n\}$ оператора Ap . При этом в качестве последовательности координатных элементов берется система видоизмененных многочленов Лежандра $\{P_{2m}^*(r)\}$, где

$$P_{2m}^*(r) = \frac{r\sqrt{4m+1}}{\sqrt{1-r^2}} P_{2m}(\sqrt{1-r^2}).$$

Решение исходного интегрального уравнения (17), (18) находится в форме ряда

$$p(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(r), \quad a_n = \frac{f_n}{\mu_n}, \quad f_n = \int_0^1 f(r) \varphi_n(r) dr \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

сходящегося по норме пространства $L_2^{1/2}(\Omega)$ ($\{a_n\} \in l_2$) при всех $\lambda \in (0, \infty)$.

При помощи двух изложенных модификаций метода ортогональных функций получены решения интегральных уравнений как первого, так и второго рода [14, 16, 19, 27, 42, 43], а также решение интегродифференциального уравнения Прандтля [14, 17, 19], как на конечном, так и на полубесконечном интервалах.

3. Плоские контактные задачи теории упругости при учете износа шероховатых поверхностей взаимодействующих тел, а также ряд смешанных задач для многослойных вязкоупругих оснований, когда относительная толщина и относительная жесткость верхнего слоя достаточно малы, сводятся к исследованию интегрального уравнения второго рода, содержащего оператор Фредгольма по координате и оператор Вольтерра по времени [3, 8, 9, 13-15, 19, 20, 22-25, 28, 35], вида

$$c(\mathbf{I} - \mathbf{B}_1)p + (\mathbf{I} - \mathbf{B}_2)Ap = \delta(t) + \beta(t)x - f(x) \quad (19)$$

$$(|x| \leq 1, \quad \theta \leq t \leq T < \infty, \quad c > 0),$$

$$A\varphi = \int_{-1}^1 \varphi(\xi) k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi,$$

$$k(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty K(\alpha) \cos(\alpha y) d\alpha, \quad (20)$$

$$\mathbf{B}_j \varphi = \int_\theta^t \varphi(\tau) K_j(t, \tau) d\tau \quad (j = 1, 2)$$

при интегральных условиях

$$P(t) = \int_{-1}^1 p(x, t) dx, \quad M(t) = \int_{-1}^1 xp(x, t) dx. \quad (21)$$

Здесь \mathbf{I} — единичный оператор, свойства символа ядра $K(u)$ изложены в разд. 2, а вид ядер $K_j(t, \tau)$ ($j = 1, 2$) приведен в цитируемых работах. Кроме того, переход от уравнения (19), (20) к его пространственному аналогу [7, 20, 25, 29, 30] осуществляется известной заменой оператора $A\varphi$.

На практике встречаются два основных варианта задач (19)–(21): 1) задаются функции $\delta(t)$ и $\beta(t)$ — находятся $p(x, t)$, $P(t)$ и $M(t)$; 2) задаются функции $P(t)$ и $M(t)$ — находятся $p(x, t)$, $\delta(t)$ и $\beta(t)$.

Предполагая в первом случае, что $\delta(t)$ и $\beta(t)$ суть непрерывные функции переменной $t \in [\theta, T]$, решение исходной задачи ищется [13-15, 28] в форме

$$p(x, t) = p_0(x, t) + p_1(x, t), \quad (22)$$

где $p_i(x, t)$ ($i = 0, 1$) удовлетворяют, соответственно, некоторым однородному и неоднородному интегральным уравнениям. Решения последних строятся методом разделения переменных в форме рядов Фурье по собственным функциям оператора $A\varphi$ вида (20), образующих полную ортонормированную систему в пространстве $L_2(-1, 1)$ и определяемых по

схеме разд. 2. Возникающий при этом счетный набор произвольных постоянных подбирается из условия удовлетворения структуры (22) первоначальному интегральному уравнению (19) при $t = \theta$, т.е. интегральному уравнению Фредгольма второго рода. После определения функции $p(x, t)$ находятся величины $P(t)$ и $M(t)$ согласно (21).

Пусть теперь $P(t)$ и $M(t)$ — заданные функции переменной $t \in [\theta, T]$. В приложениях, как правило, представляет интерес случай

$$\begin{aligned} P(t) &= P_\infty + P_*(t), & M(t) &= M_\infty + M_*(t), \\ P_\infty, M_\infty &= \text{const}, & P_*(t), M_*(t) &\rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (23)$$

Тогда доказывается, что решение исходной задачи (19)–(21) имеет вид [13–15, 29]

$$\begin{aligned} p(x, t) &= p_\infty(x) + p_0^0(t) + p_1^0(t)x + p_1(x, t), \\ \delta(t) &= \delta_0 + \delta_\infty \Delta(t) + \delta_*(t), \\ \beta(t) &= \beta_0 + \beta_\infty \Delta(t) + \beta_*(t). \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь функция $p_\infty(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма второго рода, решение которого строится в форме ряда по собственным функциям оператора $A\varphi$; структура функции $\Delta(t)$ определяется видом ядер $K_j(t, \tau)$ ($j = 1, 2$); связь между постоянными P_∞ , M_∞ и δ_∞ , β_∞ , а также между функциями $P_*(t)$, $M_*(t)$ и $p_0^0(t)$, $p_1^0(t)$ дается условиями (21). Добавка $p_1(x, t)$ представляется в форме

$$p_1(x, t) = p_1^0(x, t) + p_1^1(x, t), \quad (25)$$

где составляющие функции $p_1^0(x, t)$ и $p_1^1(x, t)$ находятся из неоднородных интегральных уравнений Фредгольма второго рода с симметричными ядрами $k^0(\xi, x, \lambda)$ и $k^1(\xi, x, \lambda)$, обладающими следующими свойствами

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 p_1^i(\xi, t) \xi^i x^i k^i(\xi, x, \lambda) d\xi dx \quad (i = 0, 1).$$

Дальнейшие исследования опираются на построение методом разд. 2 систем собственных функций и соответствующих им собственных чисел операторов

$$A^i \varphi = \int_{-1}^1 \varphi(\xi) k^i(\xi, x, \lambda) d\xi \quad (i = 0, 1) \quad (26)$$

в пространствах $L_2^0(-1, 1)$, $L_2^1(-1, 1)$ функций, интегрируемых с квадратом на отрезке $[-1, 1]$ и удовлетворяющих соответственно условиям

$$\int_{-1}^1 \varphi(x) x^i dx = 0 \quad (i = 0, 1).$$

После нахождения $p_1^i(x, t)$ ($i = 0, 1$) в форме рядов Фурье по собственным функциям операторов (26), определяется структура $p_1(x, t)$ согласно

формуле (25) и добавки $\delta_*(t)$, $\beta_*(t)$ в формулах (24) с точностью до счетного набора постоянных. Последний находится путем удовлетворения решения (24) первоначальному интегральному уравнению (19), (20) и условиям (21) при $t = \theta$, что достигается пополнением систем собственных функций операторов $A^i \varphi$ ($i = 0, 1$) вида (26).

При изучении плоских контактных задач теории упругости с нелинейным износом и процессов квазистатического взаимодействия твердых тел с тонким покрытием, реологические свойства которого описываются уравнениями установившейся нелинейной ползучести со степенной связью между интенсивностями тензоров напряжений и скоростей деформаций, приходят к необходимости решения интегрального уравнения

$$c p + \mu B_3 p^m + A p = \delta(t) + \beta(t)x - f(x) \quad (|x| \leq 1, 0 \leq t \leq T < \infty), \quad (27)$$

где

$$B_3 \varphi = \int_0^t \varphi(\tau) d\tau \quad (c, \mu > 0),$$

в котором оператор $A\varphi$ дается формулой (20), а искомая функция $p(x, t)$ подчинена условиям (21).

Для решения системы (21), (27) развиты регулярные асимптотические методы «большого» и «малого» времени [2, 11, 12], сводящие ее к рекуррентной последовательности линейных задач, рассмотренных выше. Однако, эти алгоритмы не всегда стыкуются между собой, что не дает возможности исследовать исходную задачу во всем диапазоне изменения времени. Данная проблема решается построением, на основе метода Ньютона для нелинейных операторных уравнений, равномерно пригодного решения системы (21), (27), структура которого, например, в частном случае задания осадки основания в форме

$$\delta(t) = \delta_0 + \mu \delta_\infty t, \quad \beta(t) \equiv 0,$$

имеет вид

$$\begin{aligned} p(x, t) &= p_\infty [1 + p_*(x, t)], \\ p_*(x, t) &= \sum_{n=1}^N p_n(x, t) + O(p_{N+1}(x, t)), \\ p_*(x, t), \frac{p_{i+1}(x, t)}{p_i(x, t)} &\rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty, i \geq 1), \end{aligned} \quad (28)$$

а нахождение неизвестных функций $p_n(x, t)$ ($n = 1, 2, \dots, N$) в формулах (28) опирается на изучение линейных уравнений типа (19):

$$\begin{aligned} (cI + A)p(x, 0) &= \delta_0 - f(x), \\ p_\infty^m &= \delta_\infty, \\ (cI + A)p_1 + \mu m p_\infty^{m-1} p_1 &= 0, \end{aligned}$$

$$(cI + A)\dot{p}_2 + \mu t p_\infty^{m-1} p_2 + \frac{1}{2} \mu t m(m-1) p_\infty^{m-1} p_1^2 = 0$$

$$(|x| \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T < \infty)$$

и т.д.

Идея такого подхода изложена в работах [10, 12, 19], а вопросы его корректности обсуждаются в цитированной диссертации Е. В. Коваленко. Там же изучен осесимметричный вариант системы (21), (27).

В заключение отметим, что по ходу изложения материала практически не были затронуты аспекты математического обоснования предлагаемых модификаций метода ортогональных функций. Такие исследования существуют и содержатся в литературе, приведенной в этом параграфе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авишкин В. И., Александров В. М., Коваленко Е. В. О выводе уточненных уравнений тонких покрытий и приложении их к контактным задачам теории упругости // Динамика и прочность тяжелых машин. Днепропетровск: Изд-во ДГУ, 1983. Вып. 7. С. 81–93.
2. Александров В. М., Арутюнян Н. Х. О воздействии нагрузки и штампов на ледяной покров // Механика и физика льда. М.: Наука, 1983. С. 14–21.
3. Александров В. М., Галин Л. А., Пириев Н. П. Плоская контактная задача при наличии износа для упругого слоя большой толщины // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 4. С. 60–67.
4. Александров В. М., Коваленко Е. В. О двух эффективных методах решения линейных смешанных задач механики сплошных сред // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 4. С. 688–698.
5. Александров В. М., Коваленко Е. В. Периодические контактные задачи для упругой полосы // Изв. АН АрмССР. Механика. 1977. Т. 30. № 4. С. 18–33.
6. Александров В. М., Коваленко Е. В. Метод ортогональных функций в смешанных задачах механики сплошных сред // Прикл. мех. 1977. Т. 13. № 12. С. 9–17.
7. Александров В. М., Коваленко Е. В. Осесимметричная контактная задача для линейно-деформируемого основания общего типа при наличии износа // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 5. С. 58–66.
8. Александров В. М., Коваленко Е. В. Об одном классе интегральных уравнений смешанных задач механики сплошных сред // Докл. АН СССР. 1980. Т. 252. № 2. С. 324–327.
9. Александров В. М., Коваленко Е. В. Плоские контактные задачи теории упругости для неклассических областей при наличии износа // ПМТФ. 1980. № 3. С. 163–171.
10. Александров В. М., Коваленко Е. В. К теории контактных задач при наличии нелинейного износа // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 4. С. 98–108.
11. Александров В. М., Коваленко Е. В. К вопросу об изнашивании сопряжения вал-втулка // Трение и износ. 1982. Т. 3. № 6. С. 1016–1025.
12. Александров В. М., Коваленко Е. В. Некоторые контактные задачи установившейся нелинейной ползучести при наличии тонких покрытий // ПМТФ. 1983. № 2. С. 121–130.
13. Александров В. М., Коваленко Е. В. Математические методы в контактных задачах с износом // Нелинейные модели и задачи механики деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1984. С. 77–89.

14. Александров В. М., Коваленко Е. В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 336 с.
15. Александров В. М., Коваленко Е. В., Манжиров А. В. Некоторые смешанные задачи теории ползучести неоднородно-стареющих сред // Изв. АН АрмССР. Механика. 1984. Т. 37. № 2. С. 12–25.
16. Александров В. М., Коваленко Е. В., Марченко С. М. О двух контактных задачах теории упругости для слоя с покрытием винклеровского типа // Прикл. мех. 1983. Т. 19. № 10. С. 47–54.
17. Александров В. М., Коваленко Е. В., Мхитарян С. М. Исследование ограниченных решений в задаче о взаимодействии полуплоскости с упругими накладками // Изв. АН АрмССР. Механика. 1978. Т. 31. № 1. С. 3–15.
18. Александров В. М., Коваленко Е. В., Мхитарян С. М. Об одном методе получения спектральных соотношений для интегральных операторов смешанных задач механики сплошных сред // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 6. С. 1028–1036.
19. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.
20. Арутюнян Н. Х., Манжиров А. В., Наумов В. Э. Контактные задачи механики растущих тел. М.: Наука, 1991. 176 с.
21. Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф. Механика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
22. Гавриков М. В. Решение плоской контактной задачи для тел с тонкими и мягкими покрытиями с использованием наследственно-стареющей модели изнашивания // Трение и износ. 1990. Т. 11. № 5. С. 818–823.
23. Гавриков М. В., Мазинг Р. И. Применение наследственно-стареющей модели изнашивания к осесимметричной контактной задаче // Трение и износ. 1989. Т. 10. № 6. С. 981–986.
24. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 304 с.
25. Горячева И. Г., Добычин М. Н. Контактные задачи в трибологии. М.: Машиностроение, 1988. 256 с.
26. Клубин П. И. Расчет балочных и круглых плит на упругом основании // Инж. сб. 1952. Т. 12. С. 95–135.
27. Коваленко Е. В. Об эффективном методе решения контактных задач для линейно-деформируемого основания с тонким усиливающим покрытием // Изв. АН АрмССР. Механика. 1979. Т. 32. № 2. С. 76–82.
28. Коваленко Е. В. О приближенном решении одного типа интегральных уравнений теории упругости и математической физики // Изв. АН АрмССР. Механика. 1981. Т. 34. № 5. С. 14–26.
29. Коваленко Е. В. К вопросу решения контактных задач теории ползучести для комбинированных стареющих оснований // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 6. С. 1006–1014.
30. Коваленко Е. В. Исследование осесимметричной контактной задачи об изнашивании пары кольцевой штамп-упругое шероховатое полупространство // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 5. С. 836–843.
31. Коваленко Е. В. О некоторых приближенных методах решения интегральных уравнений смешанных задач // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 1. С. 107–114.
32. Коваленко Е. В. Моделирование контактного взаимодействия шероховатых тел при наличии смазки // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 1. С. 116–123.
33. Коваленко Е. В. Математическое моделирование контактного взаимодействия упругих тел, ограниченных цилиндрическими поверхностями // Трение и износ. 1995. Т. 16. № 4. С. 667–678.

34. Коваленко Е. В. Об интегральном уравнении смешанных задач математической физики со сменой граничных условий на кольце // Докл. РАН. 1998. Т. 362. № 1. С. 26–28.
35. Коваленко Е. В., Манжиров А. В. Контактная задача для двухслойного стареющего вязкоупругого основания // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 674–682.
36. Мхитарян С. М. О собственных функциях интегрального оператора, порожденного логарифмическим ядром на двух интервалах, и их приложении к контактными задачам // Изв. АН АрмССР. Механика. 1982. Т. 35. № 6. С. 3–18.
37. Мхитарян С. М. О двух спектральных соотношениях для интегральных операторов на полубесконечном интервале и их приложении к смешанным задачам // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 1. С. 63–72.
38. Мхитарян С. М. О некоторых спектральных соотношениях, связанных с интегральным уравнением Карлемана, и их приложениях к контактными задачам // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 2. С. 219–227.
39. Мхитарян С. М. О некоторых спектральных соотношениях для интегральных операторов, порожденных ядром в виде интеграла Вебера–Сонины, и их приложениях к контактными задачам // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 1. С. 105–113.
40. Мхитарян С. М. Об одном спектральном соотношении в сфероидальных волновых функциях и его приложении к контактными задачам // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 5. С. 845–853.
41. Мхитарян С. М. О вдавливании полосового штампа в деформирующееся по степенному закону полупространство // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 1. С. 124–134.
42. Попов Г. Я. Контактные задачи для линейно-деформируемого основания. Киев–Одесса: Вища школа, 1982. 168 с.
43. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 344 с.
44. Развитие теории контактных задач в СССР / Под ред. Галина Л. А. М.: Наука, 1976. 493 с.
45. Рвачев В. Л., Проценко В. С. Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. Киев: Наукова думка, 1977. 235 с.
46. Статические и динамические смешанные задачи теории упругости / Под ред. Воровича И. И. Ростов-на-Дону: РГУ, 1983. 264 с.

Глава 2

Статические контактные задачи

§ 1. КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА, СЛОЖНЫЕ В ПЛАНЕ ОБЛАСТИ КОНТАКТА

А. А. Шматкова

Контактные задачи для полупространства изложены во многих монографиях. Не претендуя на полноту, отметим работы [4, 17, 22, 23, 29, 31, 37]. Остановимся несколько подробнее на некоторых результатах, которые относятся к случаям области контакта сложной формы и опубликованы после 1974 г.

1. Кольцевой в плане штамп. В монографии В. Л. Рвачева, В. С. Проценко [31] (гл. 9, §3) приведено решение задачи о штампе, который имеет в плане форму эллиптического кольца. Считается, что эллипсы соосны. Штамп нагружен вертикальной силой. В рассматриваемом случае область контакта очевидно является двусвязной, но это обстоятельство, как отмечается в [31], не является препятствием для применения структурного метода, так как функция, «отвечающая» за геометрию области контакта, может быть построена с помощью R -функций практически для любых областей конечной или даже бесконечной связности.

В монографии [31] с помощью подробно изложенного там метода эквипотенциальных семейств рассмотрена задача о штампе кольцеобразной формы в плане.

В статье В. И. Моссаковского, А. Б. Ковуры [24] дан подробный обзор работ, посвященных контактными задачам для упругого полупространства с круговыми и близкими к круговым линиями раздела граничных условий. В частности, отражены работы, в которых построены приближенные формулы для решения задачи о вдавливании жесткого кольцевого штампа с плоским основанием.

Решение задачи о кольцевом штампе с использованием рекуррентных соотношений построено в работе [32].

В работе Ю. А. Антипова [10] получено точное решение осесимметричной задачи о вдавливании плоского кольцевого штампа в упругое однородное полупространство. Метод решения основан на сведении интегрального уравнения с ядром Вебера–Сонина, которому эквивалентна задача [27], к уравнению типа свертки на отрезке, а затем к векторной задаче Римана с треугольным матричным коэффициентом специального вида, точное решение которой построено последовательным применением метода факторизации и асимптотического метода. Решение задачи выписано в виде двойного ряда, для коэффициентов которого получены явные формулы.

Точное решение этой же задачи в терминах последовательности степеней бесконечной матрицы выписано в [20]. Найдены расчетные формулы для контактного напряжения и осадки штампа. Приведен численный пример.

В работе В. М. Александрова [2] с помощью асимптотических методов построены решения задачи о действии на упругое полупространство плоского наклонного кольцевого штампа при допущениях, что силы трения в области контакта штампа с полупространством отсутствуют, а вне области контакта поверхность полупространства не нагружена. Решения получены для больших и малых значений безразмерного параметра $\lambda = 2[\ln(b/a)]^{-1}$, где a и b — внутренний и внешний радиусы кольцевой области контакта. При достаточно больших значениях параметра λ , т.е. для относительно узкого кольца, асимптотическое решение интегрального уравнения было построено по схеме, изложенной в [1, 6]. Для случая относительно широкого кольца главный член асимптотики решения интегрального уравнения при малых λ необходимо было сконструировать из решений типа погранслоя, описывающих быструю изменчивость контактного давления в окрестности контуров $r = a$ и $r = b$, и проникающего (вырожденного) решения, справедливого вдали от контуров $r = a$ и $r = b$. На некотором промежуточном диапазоне изменения λ построенные решения перекрывают друг друга с высокой степенью точности.

В работе И. И. Аргатова, С. А. Назарова [12] методом сращиваемых асимптотических разложений изучалась контактная задача для штампа, представляющего собой в плане узкое кольцо переменной толщины, срединная линия которого — замкнутый гладкий контур. Рассмотрены конкретные примеры: осесимметричные задачи для кольцевого штампа с плоским и неплоским основаниями, для достаточно узкого эллипсоидного кольца. Исследовано влияние нагрузки, действующей вне кольцевого штампа.

В работе Е. В. Коваленко [21] предложен алгоритм построения приближенного решения одного класса интегральных уравнений первого рода, к которым сводятся задачи о действии кольцевого в плане штампа на линейно-деформируемое основание и, в частности, на упругое полупространство. В основе метода лежит использование процедуры Галеркина в сочетании с теоремами сложения для бесселевых функций, позволившими представить коэффициенты линейных алгебраических систем в форме однократных интегралов, удобных для численной реализации. В частном случае осесимметричной задачи полученные результаты полностью согласуются с исследованиями аналогичной задачи, проведенными Г. Я. Поповым в монографии [28].

2. Прямоугольный в плане штамп. В монографии В. Л. Рвачева, В. С. Проценко [31] (гл. 9, §3) структурным методом решены пространственные задачи для штампов, контакт которых с полупространством представляет односвязную или многосвязную область, ограниченную кусочно-гладкой кривой. Неопределенные компоненты структуры находятся с помощью методов Бубнова–Галеркина и Ритца. В частности,

рассмотрена задача о распределении давления под квадратным штампом со стороны равной единице, оси симметрии которого совпадают с осями координат.

При исследовании задачи о вдавливании узкого, прямоугольного в плане штампа в упругое полупространство В. М. Александров и М. А. Сумбатян [7] развили асимптотический подход, основанный на методе «малых λ », который позволил построить эффективное приближенное решение исходного уравнения. Показано, что для данной задачи трансформанта ядра соответствующего интегрального уравнения Фредгольма первого рода имеет в нуле логарифмическую особенность. Посредством приближенной факторизации трансформанты ядра решение таких уравнений получены в простой аналитической форме. При исследовании аналогичной задачи некоторыми другими авторами [40, 41] оказалось, что уравнение, анализируемое в этих работах, соответствует «вырожденному» решению задачи, описывающему распределение давления в удалении от границ штампа и не улавливающему характер его поведения вблизи острых кромок.

В работе М. А. Сумбатяна [33] к основному двумерному интегральному уравнению контактной задачи о вдавливании без трения жесткого штампа в упругое полупространство применяется специальная аппроксимация ядра, в результате чего для широкого класса областей контакта его удается свести к виду, содержащему только одномерные сингулярные интегралы типа Коши. Идея метода заимствована из теории крыла конечного размаха. В случае прямоугольной области контакта получающееся уравнение распадается на два одномерных интегродифференциальных уравнения. В качестве примеров рассматриваются случаи квадратного в плане штампа и прямоугольного штампа с отношением сторон $1/2$. Числовые результаты сравниваются с результатами работ, в которых применялись численные методы решения рассматриваемой задачи.

В работе М. А. Сумбатяна [34] рассмотрена контактная задача о вдавливании без трения жесткого прямоугольного в плане штампа в полупространство, материал которого находится в условиях установившейся ползучести со степенным законом состояния. В рамках принципа суперпозиции «обобщенных» перемещений [13] задача сводится к решению двумерного интегрального уравнения со степенным ядром. Для его решения предложен некоторый метод последовательных приближений, эффективный для узкого штампа. В каждом приближении двумерное уравнение распадается на независимые одномерные уравнения. В качестве примера рассмотрена задача для квадратного в плане штампа.

При решении задачи о давлении вытянутого штампа на упругое полупространство в работе А. Н. Бурмистрова [15] предложен асимптотический метод решения, позволивший свести задачу к системе двух одномерных интегральных уравнений, допускающих в ряде случаев аналитическое

исследование. Приведены точные и приближенные решения указанных уравнений.

3. Клиновидный в плане штамп. Впервые задача о клиновидном в плане штампе была поставлена Л. А. Галиным в 1953 г. и более обстоятельно рассмотрена В. Л. Рвачевым [30]. Следующий шаг сделан в работе В. М. Александрова, В. А. Бабешко [3], где был предложен эффективный метод решения интегрального уравнения для трансформанты Меллина контактного давления, основанный на разложении ядра в специальный ряд и построении асимптотического решения при малых углах раствора клина.

В монографии В. Л. Рвачева, В. С. Проценко [31] (гл. 4, §2) также рассмотрена задача о клинообразном штампе. Использованный подход к решению этой задачи позволил выявить особенность, которую имеет давление в окрестности вершины клина, а затем приближенно определить гладкую часть решения. В монографии [31] указывается, что аналогичные и несколько более общие задачи с использованием той же идеи были исследованы в работе [42], в которой для нахождения показателей особенности применен вариационный метод в сочетании с методом сеток.

В монографии В. А. Бабешко, Е. В. Глушкова, Ж. Ф. Зинченко [14] глава IV посвящена анализу особенностей напряженно-деформированного состояния в окрестности угловых точек покоящихся пространственных штампов при произвольных условиях контакта и во всем диапазоне изменения угла раствора θ . Излагается единая методика решения, основанная на сведении рассматриваемых задач к задаче отыскания полюсов преобразования Меллина некоторой функции, связанной с контактным давлением. Исследованы конкретные задачи. В частности, случай, когда жесткий клиновидный в плане штамп взаимодействует с поверхностью упругого однородного полупространства. Предположено, что в зоне контакта возникают силы кулоновского трения с коэффициентом $0 \leq \delta \leq 1$. Штамп находится в состоянии предельного равновесия под действием горизонтальной сдвигающей силы.

Приведены результаты численного анализа. В частности, изображены зависимости показателя особенности $\gamma(\theta)$ у контактного давления в вершине клина при различных углах направления сдвигового усилия и $\varepsilon = \delta \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$.

Исследована также задача о клиновидном штампе при наличии сцепления.

В работе В. Б. Васильева [16] исследуется интегральное уравнение, к которому сводится задача о действии клиновидного в плане штампа на упругое полупространство при отсутствии трения. Исходное уравнение рассматривается в контексте теории псевдодифференциальных уравнений. При помощи многомерного аналога метода факторизации Винера-

Хопфа получена явная формула для решения близкого к рассматриваемому («возмущенного») уравнения.

В монографии В. М. Александрова, Д. А. Пожарского [4] § 3 в главе III также посвящен анализу задачи о клиновидном штампе на упругом полупространстве. Полученное авторами решение содержит сильную осциллирующую особенность у контактных давлений в вершине остроугольного штампа. Такая особенность впервые была обнаружена в работе [3]. Асимптотический анализ задачи о клиновидном разрезе малого угла раствора в бесконечном пространстве показывает, что для штампа, угол которого близок к 360° , осцилляции контактного давления, обнаруженной для штампа малого угла раствора, не существует.

4. Другие сложные в плане штампы. В монографии В. Л. Рвачева и В. С. Проценко [31] гл. 9 посвящена развитию структурного метода применительно к контактным задачам теории упругости для полупространства. Предложены два алгоритма построения структуры решения для штампов произвольной формы в плане при отсутствии трения в области контакта, указана процедура учета и привнесения в структуру особенностей, имеющих место в окрестности угловых точек штампа, доказана полнота построенных структурных формул. Метод проиллюстрирован рядом задач для штампов сложной формы в плане. Например, это может быть штамп с плоским основанием в виде равнобедренного треугольника; штамп, имеющий в плане форму прямоугольника с эллиптическим вырезом и нагруженный центральной силой; штамп с плоским основанием, имеющим в плане форму, изображенную на рис. 1. Предположено, что он нагружен центральной силой P (отсутствует наклон).

С помощью структурного метода исследована задача о существенно наклонном круговом штампе. Получено решение этой задачи при несимметричном нагружении, когда областью контакта является лишь часть круга. Решена и обратная задача, когда область контакта штампа с полупространством определяется в зависимости от точки приложения силы.

В монографии [31] (гл. 4, §1) подробно изложен метод эквипотенциальных семейств, с помощью которого решены следующие задачи: штамп с плоским основанием, область контакта которого очерчена в плане ветвями гиперболы ($x_1^2/a^2 - x_2^2/b^2 - 1 = 0$); а также штамп, область контакта которого ограничена параболой ($x_2^2 = 2px_1$).

В работе В. М. Александрова, В. С. Порошина [5] отмечается, что с точки зрения формы целиков горных выработок помимо рассмотрения задачи для эллиптической в плане области контакта представляет интерес изучение случая «чечевицеобразной» в плане области Ω (рис. 2). Указано, что можно «сшить» решение в основной (незаштрихованной) части области Ω (например, можно взять решение для эллиптического в плане штампа) с решениями в заштрихованных частях (рис. 2), которые нахо-

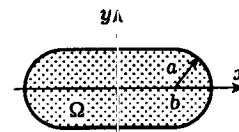


Рис. 1

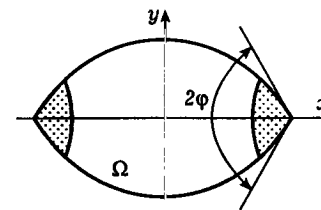


Рис. 2

дятся как решения задач о вдавливании в упругое полупространство клиновидного в плане штампа с углом при вершине 2φ .

В монографии В. И. Моссаковского, Н. Е. Качаловской, С. С. Голиковой [23] (гл. 4, §6) представлены приближенные решения задач при вдавливании гладких штампов в полупространство. Рассмотрены штампы с основаниями в плане: прямоугольный и квадратный, параллелограмм, равнобедренный треугольник, шестиугольник и т.д.

Перечисленные задачи решены на основании метода интегральных преобразований, сущность которого заключается в сведении пространственных задач теории упругости к задачам теории потенциала для полуплоскости. Показано, что для различных видов контакта штампа с полупространством проблема сводится к смешанной задаче теории потенциала для одной или двух гармонических в полупространстве функций.

Для оценки достоверности решений авторы воспользовались картиной линий равных давлений под штампами. Во всех рассмотренных случаях картина этих линий правильная: вблизи центра области контакта линии равных давлений мало отличаются от окружностей. Затем, по мере удаления от центра, линии равных давлений принимают вид подобных границе области контакта кривых.

В монографии М. В. Хая [36] изложены общие результаты по решению двумерных интегральных уравнений, позволяющие приближенно решать контактные задачи для упругого полупространства при любой заданной в плане области контакта. В частности, им рассмотрена задача, когда область контакта в плане имеет вид улитки Паскаля.

В работе Д. Н. Парфененко, А. Ф. Улитко [26] предложен аналитический метод решения задачи о гладком контакте с упругим полупространством жесткого штампа с плоским основанием в форме кругового сегмента в плане. Построение гармонической функции, входящей в общее решение уравнений равновесия, проводится в пространственных биполярных координатах с использованием интегрального преобразования типа Мелера–Фока, установленного в [25]. Последующие преобразования, связанные с удовлетворением смешанных граничных условий, приводят к системе двух функциональных уравнений Винера–Хопфа. Рассмотрены

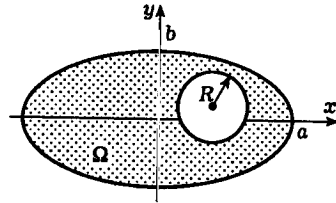


Рис. 3

два метода решения полученной функциональной системы, основанные на ее приведении к квази-вполне регулярным бесконечным системам линейных алгебраических уравнений или же к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода. Исследовано распределение контактных напряжений. Показано, что вблизи неугловых точек границ штампа поле напряжения имеет классическую корневую особенность, а в окрестности вершин штампа — слабую степенную особенность с вещественным показателем. Подробно изучена зависимость показателя особенности от угла раствора границ штампа. Получены интегральные представления для коэффициентов интенсивности напряжений на ребрах штампа.

Ранее в [25] получено решение рассматриваемой задачи для штампа в форме полукруга.

В монографии В. М. Александрова, Д. А. Пожарского [4] (гл. I, § 5) рассмотрена задача о вдавливании в полупространство плоского штампа, область контакта которого в плане есть эллипс с полуосями $a, b < a$ и круговым отверстием радиуса $R < b$, не касающимся границы эллипса (рис. 3). Предполагается, что штамп перемещается лишь поступательно (без перекосов).

Асимптотическое решение задачи строится в мультипликативном виде [1]

$$q(x, y) = \frac{q_1(x, y)q_2(x, y)}{v(x, y)}, \quad (1)$$

где $q_1(x, y)$ называется основным полем контактных давлений и определяется как решение задачи о действии на полупространство плоского эллиптического в плане штампа без отверстия; $q_2(x, y)$ называется возмущающим полем и определяется как решение задачи о действии на полупространство плоского штампа, представляющего собой в плане плоскость с круговым отверстием радиуса R ; а $v(x, y)$ называется вырожденным или корректирующим полем и определяется как первый член асимптотики функции $q_2(x, y)$ при $r/R \rightarrow \infty$ ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$). Полученное решение имеет достаточную для практики точность.

5. Система штампов. В работе А. Е. Андрейкива [9] построено приближенное решение задачи о действии на упругое полупространство

системы штампов, области контакта которых близки к круговым.

В случае известных областей контакта в качестве примера рассмотрена задача о вдавливании в упругое полупространство $z \geq 0$ двух одинаковых эллиптических штампов с плоскими основаниями. Считалось, что большие оси оснований штампов размещены на оси Ox , координаты их центров равны $(0, 0)$ и $(h, 0)$, а глубина вдавливания каждого штампа равна δ .

В этом случае радиус-вектор контура штампа с координатами центра $(0, 0)$ предложено приближенно записать

$$R(\beta) = a + \frac{1}{2}ae^2 \cos^2 \beta + \alpha(e^4), \quad (2)$$

где a — малая полуось эллипса, e — его эксцентриситет. На основании методики, изложенной в [9], получена приближенная формула для определения давления под основанием этого штампа

$$p(r, \beta) = \frac{E\delta}{\pi(1-\nu^2)\sqrt{R^2(\beta)-r^2}} \left[1 + \frac{e^2}{4}(2\cos^2 \beta - 1) - \frac{2e}{\pi} \left(1 + \frac{2r \cos \beta}{h} + \frac{3r^2 \cos^2 \beta}{h^2} - \frac{r^2 \sin^2 \beta}{h^2} \right) + \frac{4e^2}{\pi^2} \left(1 + \frac{2r \cos \beta}{h} \right) + \frac{8e^3}{\pi^3} \left(\frac{\pi^2}{12} - 1 \right) + \alpha(e^4, e^4, e^2e) \right], \quad (3)$$

где $e = a/h$.

При определении давления под основаниями системы круговых штампов при неизвестных областях контакта в качестве примера рассмотрена задача о вдавливании в упругое полупространство $z \geq 0$ двух шарообразных штампов радиуса ρ , центры которых удалены один от другого на расстоянии h . При этом предполагалось, что радиус ρ большой по сравнению с величиной внедрения штампов δ и поэтому перемещение точек полупространства под основаниями штампов можно представить приближенно как

$$u_z = \delta - \frac{r^2}{2\rho}. \quad (4)$$

Система интегральных уравнений решалась методом последовательных приближений. В результате получена приближенная формула для определения давления под основанием штампа с координатами центра $(0, 0)$

$$p(r, \beta) = \frac{E}{\pi(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{R(\beta)-r}{R(\beta)+r}} \left\{ \sqrt{\frac{\delta}{\rho}} [4 - 0,8492e + 0,1800e^2 + 3,0328e^3 - (0,7423 + 0,0394e)\epsilon^2 \cos \beta] + [-2 + 0,8492e^3 + (0,0265 - 0,0084e)\epsilon^2 \cos \beta + 0,4246e^3 + \cos 2\beta] \rho^{-1} [R(\beta) - r] + \alpha(e^4) \right\}, \quad (5)$$

где $e = \sqrt{\delta\rho}/h$, $0 \leq e < 0,5$.

Причем радиус-вектор контура штампа предлагается искать по формуле

$$R(\beta) = \sqrt{\delta\rho} [1 - 0,2123\epsilon + 0,0450\epsilon^2 + 0,3336\epsilon^3 - \epsilon^2 \cos \beta(0,4244 - 0,1394\epsilon) - 0,2123\epsilon^3 \cos 2\beta + o(\epsilon^4)]. \quad (6)$$

Радиус круга a определяется из соотношения

$$a = \sqrt{\delta\rho} [1 - 0,2123\epsilon - 0,3794\epsilon^2 + 0,2607\epsilon^3 + o(\epsilon^4)]. \quad (7)$$

В монографии В. Л. Рвачева, В. С. Проценко [31] рассмотрена задача о вдавлении в упругое полупространство системы n штампов, каждый из которых имеет в плане форму бесконечной полосы. Пусть $x_3 = f_i(x_1, x_2)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) — уравнение поверхности i -го штампа. Тогда при отсутствии нагрузки вне области контакта и трения между контактирующими телами приходят [17] к задаче отыскания гармонической в полупространстве $x_3 > 0$ функции $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ с краевыми условиями

$$\varphi(x_1, x_2, 0) = f_i(x_1, x_2), \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right|_{x_3=0} = 0, \quad (8)$$

где $\varphi \rightarrow 0$ при $x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \infty$.

Если гармоническая функция, удовлетворяющая условиям (8), найдена, то давление в области контакта определяется по формуле

$$p_i(x_1, x_2) = -\frac{2\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right)_{x_3=0}, \quad (9)$$

где λ, μ — постоянные Ламе.

Сформулированную краевую задачу сводят к двумерной. Для этого предполагают, что функции $f_i(x_1, x_2)$ и $\varphi(x)$ представимы интегралами Фурье

$$f_i(x_1, x_2) = \mathcal{F}^{-1} [\varphi_i^*(x_1, \lambda)], \quad \varphi(x) = \mathcal{F}^{-1} [\Phi(x_1, x_3, \lambda)], \quad (10)$$

где $\varphi_i^*(x_1, \lambda) = \mathcal{F}[f_i(x_1, x_2)]$.

Тогда функция $\varphi(x)$ будет удовлетворять уравнению Лапласа, если функция $\Phi(x_1, x_3, \lambda)$ будет решением уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} - \lambda^2 \Phi = 0, \quad (11)$$

причем

$$\Phi(x_1, 0, \lambda) = \varphi_i^*(x_1, \lambda), \quad \left. \frac{\partial \Phi(x_1, 0, \lambda)}{\partial x_3} \right|_{x_3=0} = 0. \quad (12)$$

На бесконечности $\Phi(x_1, x_3, \lambda) \rightarrow 0$.

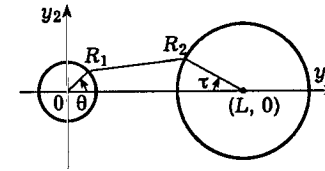


Рис. 4

Вспомогательную задачу для функции $\Phi(x_1, x_3, \lambda)$ авторы предлагают решать в криволинейных ортогональных координатах эллиптического цилиндра с помощью функций Матье.

В монографии А. Ф. Улитко [35] с помощью предложенного им общего метода собственных векторных функций была исследована задача о гладком контакте двух круговых штампов на упругом полупространстве.

Для решения задачи применялось интегральное преобразование с ядром в виде комбинации функций Лежандра второго рода с чисто мнимым верхним индексом. Необходимые выкладки проводились в тороидальных координатах.

В работе И. И. Аргатова, С. А. Назарова [12] методом сращиваемых асимптотических разложений исследована задача взаимодействия системы узких кольцевых штампов с упругим полупространством. В качестве примера рассмотрен случай двух кольцевых штампов с плоскими основаниями. Приближенное решение задачи для такой системы удаленных друг от друга штампов строилось на основе описанного в [12] метода, а также идеи, предложенной ранее в [17], §7. Выделяя какой-либо штамп, контактное давление под ним определяется в предположении, что воздействие оставшегося штампа на полупространство может быть заменено действием сосредоточенной силы, приложенной в центре его срединной окружности. В работе [12] приведены приближенные выражения для сил Q_1 и Q_2 , действующих на штампы, которые определяются из системы уравнений круговой заменой индексов 1 и 2:

$$Q_1 + \frac{2k_1 K(k_1)}{\ln(16R_1/h_1)} Q_2 = \frac{\pi^2 E}{1-\nu^2} \frac{R_1 \delta_0^{(1)}}{\ln(16R_1/h_1)}, \quad (1 \leftrightarrow 2). \quad (13)$$

Обозначения видны из рис. 4. Причем $k_1 = R_1/L$, $k_2 = R_2/L$, $2h_1$ и $2h_2$ — толщины кольцевых штампов, $\delta_0^{(1)}$ и $\delta_0^{(2)}$ — величины осадки штампов; $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. В работе приведена также система уравнений для интенсивностей контактных давлений $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$.

В частном случае, когда геометрические характеристики оснований штампов совпадают и при этом $\delta_0^{(1)} = \delta_0^{(2)}$, $\beta_1^{(1)} = \beta_1^{(2)}$, $\beta_2^{(1)} = -\beta_2^{(2)}$ (повороты

штампов), то $P^{(1)} = P^{(2)}$ и система уравнений сводится к одному

$$P(\theta) \ln\left(16 \frac{R}{h}\right) + (JP)(\theta) + \frac{k}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ 1 - 2 \left[2k \cos \frac{\theta + \tau}{2} \right] \cos \frac{\theta - \tau}{2} + \left[2k \cos \frac{\theta + \tau}{2} \right]^2 \right\}^{-1/2} P(\tau) d\tau = \frac{\pi E}{2(1-\nu^2)} (\delta_0 + \beta_2 R \cos \theta - \beta_1 R \sin \theta), \quad (14)$$

где J — некоторый интегральный оператор, который подробно описан в §5 гл. 1 настоящей книги.

В этом частном случае, когда известны прижимающие штампы силы $Q_1 = Q_2$, линии действия которых проходят через центры штампов, возможно записать приближенное выражение для величины угла, на который штампы наклонятся друг к другу:

$$\beta_2 = \frac{4(1-\nu^2)Q}{\pi^2 E R^2} [K(k) - E(k)], \quad (15)$$

где $E(k)$ — полный эллиптический интеграл второго рода.

Осесимметричная задача для узких кольцевых штампов в главном сводится к системе линейных алгебраических уравнений, связывающих силы, действующие на штампы, с перемещениями штампов.

В работе В. М. Александрова, А. А. Шматковой [8] дано соотношение, позволяющее конструктивно строить ограниченные решения задачи о действии на упругое полупространство эллиптического в плане штампа с полиномиальным основанием. На базе этого соотношения получены асимптотические решения задачи о вдавлении параболического штампа в упругий слой достаточно большой относительной толщины и задачи о вдавлении двух параболических штампов в упругое полупространство при достаточно большом относительном удалении их друг от друга. На последней задаче остановимся более подробно¹.

С большой точностью можно считать, что области контакта штампов с полупространством Ω_0 и Ω_1 имеют две взаимно перпендикулярные оси симметрии. Пусть штампы расположены так, как показано на рис. 5 (вид сверху на области контакта).

Силы трения между штампами и поверхностью полупространства предполагались отсутствующими. На штампы действуют одинаковые центрально приложенные вдавливающие силы P .

Распределение контактных давлений под штампами будет одинаковым, и если для штампа с областью контакта Ω_0 оно описывается функцией $q(x, y)$, то для штампа с областью контакта Ω_1 указанное давление будет описываться функцией $q(x_1, y_1) = q(-x + 2h, -y + 2g)$.

¹ При наборе этой части статьи [8] произошла путаница в знаках.

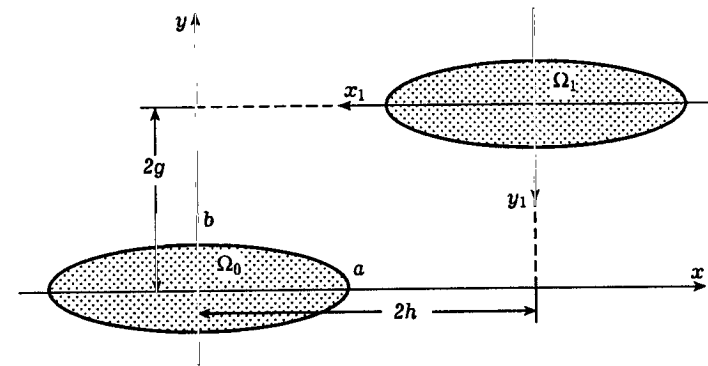


Рис. 5

Интегральное уравнение для рассматриваемой задачи представимо в виде

$$\int_{\Omega_0} \frac{q(\xi, \eta) d\Omega}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} + \int_{\Omega_1} \frac{q(-\xi + 2h, -\eta + 2g) d\Omega}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} = -2\pi \Theta w(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_0 \cup \Omega_1. \quad (16)$$

Если $(x, y) \in \Omega_0$, то

$$w(x, y) = - \left(\delta + \alpha x + \beta y - \frac{x^2}{2R_1} - \frac{y^2}{2R_2} \right).$$

Если $(x, y) \in \Omega_1$, то

$$w(x, y) = - \left[\delta - \alpha(x - 2h) - \beta(y - 2g) - \frac{(x - 2h)^2}{2R_1} - \frac{(y - 2g)^2}{2R_2} \right].$$

Здесь α и β — углы поворота штампов вокруг осей y и x (y_1 и x_1) соответственно, δ — осадка штампа, R_1 и R_2 — радиусы кривизны поверхности основания штампа, $\Theta = E/(2(1-\nu^2))$.

Производя во втором интеграле уравнения (16) замену переменных $\xi_1 = -\xi + 2h$ и $\eta_1 = -\eta + 2g$, приходим к необходимости решения следующего интегрального уравнения при $(x, y) \in \Omega_0$:

$$\int_{\Omega_0} q(\xi, \eta) M(x, y, \xi, \eta) d\Omega = 2\pi \theta \left(\delta + \alpha x + \beta y - \frac{x^2}{2R_1} - \frac{y^2}{2R_2} \right), \quad (17)$$

$$M(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(\xi + x - 2h)^2 + (\eta + y - 2g)^2}}.$$

Решение уравнения (17) должно быть четным по ξ и η , чтобы главный вектор контактного давления $q(\xi, \eta)$ приводился к вдавливающей силе P ,

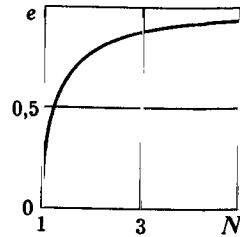


Рис. 6

а главные моменты $M_x = \int_{\Omega_0} q(\xi, \eta) \eta d\Omega$, $M_y = \int_{\Omega_0} q(\xi, \eta) \xi d\Omega$ равнялись бы нулю.

Вводим два безразмерных параметра $\lambda = h/a$ и $\mu = g/a$, где $2a$ — максимальное расстояние между точками границы области контакта Ω_0 . Предполагая, что $\lambda > \mu$ и λ велико, раскладываем регулярную часть ядра $M(x, y, \xi, \eta)$ в ряд по степеням λ^{-1} . С точностью до членов порядка λ^{-4} представим интегральное уравнение (17) в виде

$$\int_{\Omega_0} \frac{q(\xi, \eta) d\Omega}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} = 2\pi\theta \left(\delta + \alpha x + \beta y - \frac{x^2}{2R_1} - \frac{y^2}{2R_2} \right) - \left(\frac{1}{2h} - \frac{g^2}{4h^3} + \frac{x}{4h^2} + \frac{yg}{4h^3} + \frac{x^2}{8h^3} - \frac{y^2}{16h^3} \right) \int_{\Omega_0} q(\xi, \eta) d\Omega + \frac{1}{16h^3} \int_{\Omega_0} (-2\xi^2 + \eta^2) q(\xi, \eta) d\Omega. \quad (18)$$

Производя исследование уравнения (18) как это было сделано в цитированной выше работе [8], имеем схему определения характерных величин задачи с использованием графика зависимости эксцентриситета e от параметра N (рис. 6). Этот график получен в результате решения относительно e трансцендентного уравнения

$$\begin{aligned} S_{01}(S_{10})^{-1} &= N, \\ S_{01} &= [\mathbf{E}(e) - (1-e^2)\mathbf{K}(e)] e^{-2}(1-e^2)^{-1}, \\ S_{10} &= [\mathbf{K}(e) - \mathbf{E}(e)] e^{-2}, \end{aligned} \quad (19)$$

где $\mathbf{K}(e)$, $\mathbf{E}(e)$ — полные эллиптические интегралы.

$$N = \frac{R_1}{2R_2} \frac{16\pi\Theta h^3 - PR_2}{8\pi\Theta h^3 + PR_1}. \quad (20)$$

Итак, зная исходные параметры задачи E , ν , h , g , R_1 , R_2 и P , по формуле (20) находим N . По графику (рис. 6) определяем соответствующее

значение эксцентриситета e . Полуоси a и b эллиптической области контакта находим по формулам

$$a^3 = \frac{12Ph^3R_1S_{10}}{8\pi\Theta h^3 + PR_1}, \quad b^2 = a^2(1-e^2). \quad (21)$$

Осадка штампа δ определяется из соотношения

$$\delta = \frac{3PA}{4\pi\Theta a}, \quad (22)$$

где

$$A = \mathbf{K}(e) + \frac{1}{3\lambda} \left(1 - \frac{g^2}{2h^2} \right) + \frac{1}{120\lambda^3} (1+e^2), \quad \lambda = \frac{h}{a}.$$

Для углов поворота имеем выражения

$$\alpha = \frac{P}{8\pi\Theta h^2}, \quad \beta = \frac{Pg}{8\pi\Theta h^3}. \quad (23)$$

Нормальное давление между штампом и полупространством имеет известный вид

$$q(x, y) = a_{00} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^{1/2}, \quad a_{00} = \frac{3P}{2\pi ab}. \quad (24)$$

Обратимся к случаю, когда $\mu > \lambda$ и μ — велико. Раскладывая регулярную часть ядра $M(x, y, \xi, \eta)$ вида (17) в ряд по степеням μ^{-1} , с точностью до членов порядка μ^{-4} , представим интегральное уравнение (17) в виде

$$\int_{\Omega_0} \frac{q(\xi, \eta) d\Omega}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} = 2\pi\theta \left(\delta + \alpha x + \beta y - \frac{x^2}{2R_1} - \frac{y^2}{2R_2} \right) - \left(\frac{1}{2g} - \frac{h^2}{4g^3} + \frac{y}{4g^2} + \frac{xh}{4g^3} + \frac{y^2}{8g^3} - \frac{x^2}{16g^3} \right) \int_{\Omega_0} q(\xi, \eta) d\Omega + \frac{1}{16g^3} \int_{\Omega_0} (-2\eta^2 + \xi^2) q(\xi, \eta) d\Omega. \quad (25)$$

Далее исследование уравнения (25) практически не отличается от исследования уравнения (18). Приведем окончательные результаты. Вместо формулы (20) получаем

$$N = \frac{2R_1}{R_2} \frac{8\pi\Theta g^3 + PR_2}{16\pi\Theta g^3 - PR_1}. \quad (26)$$

Для полуоси a эллиптической области контакта имеем выражение

$$a^3 = \frac{24Pg^3R_1S_{10}}{16\pi\Theta g^3 - PR_1}. \quad (27)$$

Осадка штампа δ определяется из соотношения (22), но в ней

$$A = \mathbf{K}(e) + \frac{1}{3\mu} \left(1 - \frac{h^2}{2g^2} \right) + \frac{1}{120\mu^3} (1-2e^2).$$

Вместо формул (23) имеем

$$\alpha = \frac{Ph}{8\pi\Theta g^3}, \quad \beta = \frac{P}{8\pi\Theta g^2}. \quad (28)$$

Уравнения (18) и (25) дают для основных характеристик задачи результаты с ошибкой, не превосходящей 5% при $\lambda \geq 2$ и $\mu \geq 2$, соответственно.

В работах И. Г. Горячевой [18, 38] дано решение периодической контактной задачи для системы одинаковых осесимметричных упругих инденторов и упругого полупространства. Составлено интегральное уравнение для определения контактного давления и указано условие, позволяющее найти радиус пятна контакта при известной нагрузке, действующей на индентор.

В работах [19, 38, 39] предложен метод определения распределения нагрузок между штампами и радиусами пятен контакта при взаимодействии ограниченной системы штампов (число штампов конечно) с упругим полупространством.

Подробно анализ результатов и оба подхода для определения контактных характеристик в случаях внедрения ограниченной и неограниченной системы штампов изложены в §1 гл. 5 данной монографии.

В работе [11] методом сращиваемых асимптотических разложений контактная задача о вдавлении нескольких гладких штампов в упругое полупространство свелась к решению последовательности контактных задач для изолированных штампов с «полиномиальными» основаниями. Взаимодействие между штампами описывается в терминах емкостных характеристик штампов. В явном виде найдена асимптотика контактного давления в системе, состоящей из круговых и эллиптических штампов. В качестве примера рассмотрена задача о поступательном вдавлении в упругое полупространство на глубину δ_0 системы гладких штампов $\Gamma(\varepsilon)$, состоящей из двух круговых штампов различных радиусов a_1 и a_2 (рис. 7).

Тогда для контактного давления под штампом, центр основания которого помещен в начале координат, имеет место с точностью до членов $O(\varepsilon^4)$ асимптотическое представление ($\varepsilon = 2d^{-1} \max\{a_1, a_2\}$)

$$P(x_1, x_2) \simeq \frac{E\delta_0}{\pi(1-\nu^2)\sqrt{a_1^2 - x_1^2 - x_2^2}} \left\{ 1 - \frac{2a_2}{\pi d} + \frac{4a_1 a_2}{\pi^2 d^2} - \frac{4a_2 x_1}{\pi d^2} - \frac{8a_1 a_2^2}{\pi^3 d^3} - \frac{a_2^3}{3\pi d^3} + \frac{8a_1 a_2 x_1}{\pi^2 d^3} + \frac{a_2 a_1^2}{\pi d^3} - \frac{6a_2 x_1^2}{\pi d^3} + \frac{2a_2 x_2^2}{\pi d^3} \right\}. \quad (29)$$

В задаче, изображенной на рис. 8, для контактного давления под поперечной штампа, центр которого расположен в начале координат, с точностью до членов $O(\varepsilon^4)$, где $\varepsilon = 2d^{-1} \max\{a_1, a_2\}$, имеет место следующее

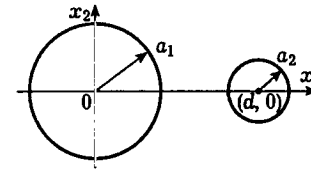


Рис. 7

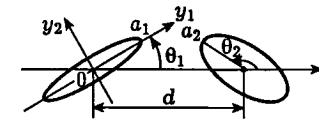


Рис. 8

асимптотическое представление:

$$P(y_1, y_2) \simeq \frac{E\delta_0}{2(1-\nu^2)a_1\sqrt{1-e_1^2}} \left(1 - \frac{y_1^2}{a_1^2} - \frac{y_2^2}{a_1^2(1-e_1^2)} \right)^{-1/2} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{K(e_1)} - \frac{c_2}{K(e_1)d} + \frac{c_1 c_2}{K(e_1)d^2} - \frac{c_2 y_1 \cos \theta_1}{D(e_1)d^2} + \frac{c_2 y_2 \sin \theta_1}{B(e_1)d^2} - \left(\frac{c_1 c_2^2}{d^3} + \frac{a_2^3}{6K(e_2)d^3} [1 + e_2^2(1 - 3 \sin^2 \theta_2)] \right) \frac{1}{K(e_1)} - \frac{c_2 a_1^2}{6d^3} [1 + e_1^2(1 - 3 \sin^2 \theta_1)] \frac{1}{K(e_1)} + \frac{c_1 c_2}{d^3} \left(\frac{y_1 \cos \theta_1}{D(e_1)} - \frac{y_2 \sin \theta_1}{B(e_1)} \right) + \frac{3c_2 y_1 y_2 \sin 2\theta_1}{2(D(e_1) - C(e_1))d^3} - \frac{3c_2}{2d^3} \left[\cos 2\theta_1 + \sigma_1^{(1)}(3 \sin^2 \theta_1 - 1) \right] C_1(e_1) \left(y_1^2 + \frac{y_2^2}{1 - 3\sigma_2^{(1)}} - \sigma_1^{(1)} a_1^2 \right) - \frac{3c_2}{2d^3} \left[\cos 2\theta_1 + \sigma_2^{(1)}(3 \sin^2 \theta_1 - 1) \right] C_2(e_1) \left(y_1^2 + \frac{y_2^2}{1 - 3\sigma_1^{(1)}} - \sigma_2^{(1)} a_1^2 \right) \right\}. \quad (30)$$

Здесь использованы обозначения

$$C_1(e_1) = \frac{2(\sigma_1^{(1)} - e_1^2)^2}{(3(\sigma_1^{(1)})^2 - e_1^2)(1 - \sigma_1^{(1)})[K(e_1) - 3\sigma_2^{(1)}D(e_1)]},$$

$$C_2(e_1) = \frac{2(\sigma_1^{(1)})^2(3\sigma_1^{(1)} - 1)^2[\sigma_1^{(1)}C(e_1) + (2\sigma_1^{(1)} - 1)D(e_1)]^{-1}}{(3\sigma_1^{(1)} - e_1^2)(3(\sigma_1^{(1)})^2 - e_1^2)},$$

$$3\sigma_{1,2}^{(1)} = 1 + e_1^2 \pm \sqrt{1 - e_1^2 + e_1^4}, \quad c_j = \frac{a_j}{K(e_j)} \quad (j = 1, 2),$$

$$D(e) = \frac{1}{e^2} [K(e) - E(e)], \quad C(e) = \frac{1}{e^2} [2D(e) - K(e)],$$

$$B(e) = K(e) - D(e),$$

где e_j — эксцентриситет, $K(e)$ и $E(e)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

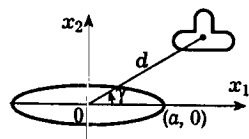


Рис. 9

Для контактного давления под эллиптическим штампом в ситуации, представленной на рис. 9, имеет место асимптотическое представление

$$P(x_1, x_2) \simeq \frac{E\delta_0}{2(1-\nu^2)a\sqrt{1-e^2}} \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{a^2(1-e^2)}\right)^{-1/2} \times \left\{ \frac{1}{K(e)} - \frac{c}{K(e)d} + \frac{ac}{K(e)d^2} - \frac{cx_1 \cos \gamma}{D(e)d^2} - \frac{cx_2 \sin \gamma}{B(e)d^2} \right\}. \quad (31)$$

Эта формула при помощи двусторонних оценок для поступательной емкости c произвольного штампа позволяет с точностью до членов $O(\varepsilon^3)$, где $\varepsilon = d^{-1} \max\{2a, \pi c\}$, оценить влияние штампов друг на друга.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В. М. Осесимметричная задача о действии кольцевого штампа на упругое полупространство // Изв. АН СССР. МТТ. 1967. № 4. С. 108–116.
2. Александров В. М. Взаимодействие плоского наклонного кольцевого штампа с упругим полупространством // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 1. С. 132–139.
3. Александров В. М., Бабешко В. А. О давлении на упругое полупространство штампа клиновидной формы в плане // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 1. С. 88–93.
4. Александров В. М., Пожарский Д. А. Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. М.: Факториал, 1998. 288 с.
5. Александров В. М., Порошин В. С. Контактная задача для предварительно напряженного физически нелинейного упругого слоя // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 6. С. 79–85.
6. Александров В. М., Сметанин Б. И., Соболев Б. В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Наука, 1993. 224 с.
7. Александров В. М., Сумбатьян М. А. Асимптотическое решение интегральных уравнений типа свертки с логарифмической особенностью трансформанты ядра и приложение в задачах механики // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 2. С. 80–88.
8. Александров В. М., Шматкова А. А. Вдавливание параболического штампа в упругий слой и двух параболических штампов в упругое полупространство // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 4. С. 149–155.
9. Андрейкив А. Е. Вдавливание в упругое полупространство системы штампов // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 2. С. 125–131.
10. Антипов Ю. А. Точное решение задачи о вдавливании кольцевого штампа в полупространство // Докл. АН УССР. Сер. А. 1987. № 7. С. 29–33.
11. Аргатов И. И. Взаимодействие штампов на упругом полупространстве // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 4. С. 56–63.

12. Аргатов И. И., Назаров С. А. Давление на упругое полупространство узкого кольцевого штампа // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 5. С. 810–825.
13. Арутюнян Н. Х. Плоская контактная задача теории ползучести // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 5. С. 901–924.
14. Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.
15. Бурмистров А. Н. О давлении вытянутого штампа на упругое полупространство // Трение и износ. 1988. Т. 9. № 3. С. 454–462.
16. Васильев В. Б. Интегральное уравнение одной задачи о вдавливании клиновидного штампа // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 2. С. 272–279.
17. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 304 с.
18. Горячева И. Г. Периодическая контактная задача для упругого полупространства // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 6. С. 1036–1044.
19. Горячева И. Г., Добычин М. Н. Контактные задачи в трибологии. М.: Машиностроение. 1988. 254 с.
20. Губенко В. С., Накашидзе Г. М., Пятоволенко В. Г. Точное решение задачи о кольцевом штампе // Докл. АН УССР. Сер. А. 1986. № 8. С. 40–44.
21. Коваленко Е. В. Об интегральном уравнении смешанных задач математической физики со сменой граничных условий на кольце // Докл. РАН. 1998. Т. 362. № 1. С. 26–28.
22. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 492 с.
23. Моссаковский В. И., Качаловская Н. Е., Голикова С. С. Контактные задачи математической теории упругости. Киев: Наукова думка, 1985. 176 с.
24. Моссаковский В. И., Ковура А. Б. Контактные задачи для упругого полупространства с круговыми и близкими к круговым линиям раздела граничных условий / Динамика и прочность тяжелых машин. 1980. Вып. 5. С. 74–89.
25. Парфененко Д. Н., Улитко А. Ф. Об одном новом интегральном преобразовании и использовании его в контактных задачах теории упругости // Докл. АН УССР. Сер. А. 1988. № 11. С. 53–58.
26. Парфененко Д. Н., Улитко А. Ф. Вдавливание в упругое полупространство штампа, имеющего в плане форму кругового сегмента // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 6. С. 32–42.
27. Попов Г. Я. Об одном приближенном способе решения контактной задачи о кольцевом штампе // Изв. АН АрмССР. Механика. 1967. Т. 20. № 2. С. 19–36.
28. Попов Г. Я. Контактные задачи для линейно-деформируемого основания. Киев-Одесса: Вища школа, 1982. 168 с.
29. Развитие теории контактных задач в СССР / Под ред. Л. А. Галина. М.: Наука, 1976. 493 с.
30. Рвачев В. Л. О давлении на упругое полупространство штампа, имеющего в плане форму клина // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 1. С. 169–171.
31. Рвачев В. Л., Проценко В. С. Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. Киев: Наукова думка, 1977. 236 с.
32. Ройтман А. Б., Шишканова С. Ф. Решение задачи о кольцевом штампе с использованием рекуррентных соотношений // Прикл. мех. 1973. Т. 9. Вып. 7. С. 37–42.
33. Сумбатьян М. А. Об одном аналитическом подходе к пространственным контактным задачам теории упругости // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 3. С. 448–494.

34. Сумбатян М. А. Контактная задача нелинейной установившейся ползучести для прямоугольной области контакта // Изв. АН АрмССР. 1987. Т. 40. № 4. С. 52–60.
35. Улитко А. Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. Киев: Наукова думка, 1979. 264 с.
36. Хай М. В. Двумерные интегральные уравнения типа ньютоновского потенциала и их приложения. Киев: Наукова думка, 1993. 253 с.
37. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М.-Л.: Гостехиздат, 1949. 272 с.
38. Goryacheva I. G. Contact Mechanics in Tribology. Kluwer Academic Publishers. 1998. 344 p.
39. Goryacheva I. G., Dobychin M. N. Multiple contact model in the problems of tribomechanics // Tribology International. 1991. V. 24. No. 1. P. 29–35.
40. Panek C., Kalker J. J. A solution for the narrow rectangular punch // J. Elasticity. 1977. V. 7. No. 2. P. 213–218.
41. Sivashinsky G. J. The problem of a slender die // J. Elasticity. 1975. V. 5. No. 2. P. 161–166.
42. Zdenek P. Bazant. Three-dimensional harmonic functions near termination or intersection of gradient singularity lines: a general numerical method // Int. J. of Engineering Science. 1974. V. 12. No. 3. P. 221–243.

§ 2. КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЕЛ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

М. И. Чебаков

В этом параграфе речь пойдет о контактных задачах теории упругости для тел конечных размеров. Будем различать тела конечных размеров канонической и неканонической формы. Под телами конечных размеров канонической формы будем понимать тела, граничные поверхности которых являются частями координатных поверхностей какой-либо одной ортогональной системы координат, а если хотя бы часть граничной поверхности не является координатной, то такие тела конечных размеров будем называть неканоническими. Заметим также, что речь будет идти о собственно смешанных задачах, т.е. таких, когда граничные условия являются смешанными хотя бы на одной координатной поверхности. Основное внимание будет уделено задачам, решения которых были получены аналитическими или полуаналитическими (численно-аналитическими) методами.

Естественно, что основная часть опубликованных работ, в которых рассматривались контактные задачи для тел конечных размеров, посвящена проблемам для канонических тел в наиболее распространенных ортогональных системах координат: прямоугольных декартовых, цилиндрических, полярных, сферических, биполярных, бисферических и др.

Рассматривались плоские и антиплоские контактные задачи для прямоугольника [7, 8, 18, 27, 39, 46], усеченного клина [14], сектора кольцевого слоя [14, 34, 35, 39, 65], усеченной луночки* [33], осесимметричные контактные задачи для конечного кругового цилиндра [10, 13, 30, 47, 48, 56–59, 61], усеченного конуса [29, 40, 62], шарового слоя [6, 68], сектора сферического слоя [32, 65, 66], усеченного шара [9, 44, 54, 63] и др.

Рассматривались некоторые плоские задачи в прямоугольной декартовой системе координат и осесимметричные задачи в цилиндрической системе координат для тел неканонической формы [49–52].

К настоящему времени имеется довольно большой спектр аналитических и полуаналитических методов решения рассматриваемых в этом параграфе задач [3, 4, 11, 12]. Среди них наибольшее распространение получили такие методы, как: метод однородных решений [1, 5, 14, 57, 59, 60], метод сведения парных рядов-уравнений к интегральным уравнениям [44, 45], метод сведения парных рядов-уравнений и интегральных уравнений с сумматорными ядрами к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) первого рода с сингулярной матрицей [2, 13, 25, 60], метод кусочно-однородных решений [41], метод сечений [26], вариационные методы [19–22, 24] и др.

Следует отметить, что каждый из перечисленных выше методов имеет различные вариации.

1. Основные моменты, связанные с постановкой задач для тел конечных размеров, методы их исследования и полученные результаты продемонстрируем на задачах для цилиндрических тел конечных размеров

* Разработать методы и создать пакет прикладных программ расчета контактной прочности деталей сложной формы, используемых в машиностроении, с учетом взаимного влияния области контакта и общей деформации. Ростов-на-Дону. 1986. Отчет о НИР. Инвент. № 0287.0037786. Части 1–2. 169 с.

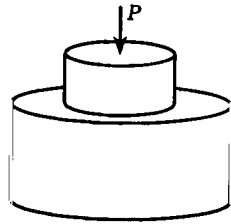


Рис. 1

[13, 48–50, 56–61, 64, 69]. Другие задачи будут приведены в более кратком изложении.

1.1. Рассмотрим в цилиндрической системе координат r, φ, z упругий цилиндр, занимающий область $0 \leq z \leq h, r \leq R$. Пусть в торец $z = h$ вдавлируется без трения осесимметрично расположенный жесткий штамп радиуса a , а торец $z = 0$ либо зашпелен, либо без трения лежит на жестком основании. При этом пусть на боковой поверхности $r = R$ заданы условия либо отсутствия нормальных перемещений и касательных напряжений, либо отсутствия нормальных напряжений и касательных перемещений [13, 59] (задача 1, рис. 1).

1.2. Для решения этой и аналогичных задач было использовано несколько методов, которые в совокупности позволяют полностью провести исследование на всем диапазоне изменения параметров. Был разработан метод, заключающийся в сведении парных рядов-уравнений к БСЛАУ первого рода с сингулярной матрицей коэффициентов [13, 61]. Поставленная выше задача может быть сведена к исследованию следующего парного ряда-уравнения, который выпишем здесь в более общем виде:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k K(u_k) J_\nu(u_k r) = f(r) \quad (0 \leq r \leq a),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k J_\nu(u_k r) = 0 \quad (a < r \leq R), \quad (1)$$

где a_k — неизвестные коэффициенты, $J_\nu(x)$ — функции Бесселя ($\nu \geq -1/2$), $K(u)$ — известная четная мероморфная функция, представимая в виде

$$K(u) = A \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{u^2}{\delta_n^2}\right) \left(1 + \frac{u^2}{\gamma_n^2}\right), \quad A = \text{const}. \quad (2)$$

Здесь $\pm i\delta_n, \pm i\gamma_n$ — счетное множество простых нулей и полюсов функции $K(u)$, возрастающих по модулю с ростом номера и обеспечивающих сходимость бесконечного произведения (2). На любой правильной системе контуров C_n в плоскости комплексного переменного u имеет

место оценка $K(u) = O(|u|^p)$, ($n \rightarrow \infty, p \leq 0$), u_k — нули уравнения

$$\left[\frac{d}{dr} J_\nu(u_k r) + \alpha J_\nu(u_k r) \right]_{r=R} = 0,$$

где $f(r)$ — функция, описывающая форму подошвы штампа, а контактные напряжения под штампом a_k находятся из соотношения

$$q(r) = \sigma_{r,z}(r, h) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_\nu(u_k r) \quad (r \leq a). \quad (3)$$

Пусть в (1) $f(r) = J(i\epsilon r)$. При этом будем иметь ввиду, что в общем случае функция $f(r)$ может быть разложена в ряд по функциям $J_\nu(i\epsilon_k r)$. Тогда парное интегральное уравнение будет равносильно [13] следующей БСЛАУ:

$$(B_1 + B_2)X(\epsilon) = D_1(\epsilon) + D_2(\epsilon). \quad (4)$$

Здесь $B_i = \{b_{mn}^{(i)}\}$ — матрицы, $D_i(\epsilon) = \{d_m^{(i)}(\epsilon)\}$, $X(\epsilon) = \{x_n(\epsilon)\}$ — вектор-столбцы бесконечного порядка, ($i = 1, 2$). Контактные напряжения выразятся через решение системы (4) соотношением

$$q(r) = K^{-1}(i\epsilon) J_\nu(i\epsilon r) + \sum_{n=1}^{\infty} x_n(\epsilon) J_\nu(i\delta_n r) I_\nu^{-1}(\delta_n a) \quad (r \leq a). \quad (5)$$

Учитывая, что $|\gamma_m|, |\delta_m| \approx m$ ($\delta_m \neq \gamma_m$) при $m \rightarrow \infty$ и принимая во внимание асимптотическое представление $K_\nu(x), I_\nu(x)$ при $x \rightarrow \infty$, систему (4) можно регуляризовать путем выделения и обращения бесконечной матрицы A с элементами

$$a_{mn} = (\delta_m - \gamma_n)^{-1}, \quad A = \{a_{mn}\}. \quad (6)$$

Используя матрицу A^{-1} , обратную к A [15, 25], система (4) сводится к бесконечной системе 2-го рода

$$X(\epsilon) = A^{-1}(D_1(\epsilon) + D_2(\epsilon)) - A^{-1}(B_1 + B_2 - A)X(\epsilon), \quad (7)$$

решение которой при определенных значениях входящих в нее параметров может быть получено методом последовательных приближений [15, 25]. Также может быть получено его асимптотическое решение при малых значениях параметра $\lambda = h/a$.

Практически при любых значениях параметров решение системы (4) может быть получено методом, предложенным в работе [53]. Метод основан на знании характера поведения решения системы при больших номерах, что, в свою очередь, может быть определено из анализа поведения решения исходной контактной задачи в особых точках. Метод позволяет свести бесконечную систему (4) к эффективно решаемой конечной системе. Метод не требует факторизации функций, позволяет найти главный член решения бесконечной системы и вместе с этим найти контактные напряжения с явно выделенной особенностью.

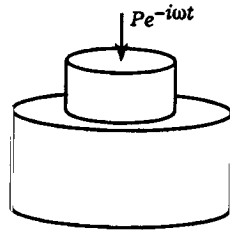


Рис. 2

1.3. Для решения задачи 1 в работе [59] был разработан другой эффективный метод, основанный на использовании однородных решений для слоя и условий их обобщенной ортогональности. Он пригоден и для более общего случая, когда штамп совершает стационарные колебания (задача 2, рис. 2) под действием периодически изменяющейся силы $P^* = P \exp(-i\omega t)$. Там же получены соответствующие условия обобщенной ортогональности осесимметричных однородных решений для слоя.

В соответствии со схемой этого метода (назовем его методом однородных решений) на первом этапе находим решение следующей задачи для слоя, когда

$$\begin{aligned} \sigma_z(r, z) = q(r) \quad (z = h, r \leq a); \quad \sigma_z(r, z) = 0 \quad (r = h, r > a); \\ \tau_{rz}(r, z) = 0 \quad (z = h); \quad \tau_{rz}(r, z) = w(r, z) = 0 \quad (z = 0). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь множитель $\exp(-i\omega t)$ опущен. Используя принцип предельного поглощения [43], нагрузим правые части динамических уравнений Ламе соответственно членами

$$\varepsilon \rho \omega \partial(u \exp(-i\omega t)) / \partial t, \quad \varepsilon \rho \omega \partial(w \exp(-i\omega t)) / \partial t,$$

где ε — коэффициент фиктивного поглощения, $u \exp(-i\omega t)$, $w \exp(-i\omega t)$, соответственно перемещения вдоль осей r и z . Используя преобразование Ханкеля, найдем

$$\begin{aligned} w^{(1)}(r, z) &= \frac{1}{\mu} \int_0^a q(\rho) \rho d\rho \int_0^\infty L_\varepsilon(z, u) J_0(ur) J_0(u\rho) u du, \\ u^{(1)}(r, z) &= \frac{1}{\mu} \int_0^a q(\rho) \rho d\rho \int_0^\infty L_{1\varepsilon}(z, u) J_1(ur) J_0(u\rho) u du, \\ \tau_{rz}^{(1)}(r, z) &= \int_0^a q(\rho) \rho d\rho \int_0^\infty L_{2\varepsilon}(z, u) J_0(ur) J_0(u\rho) u du, \end{aligned} \quad (9)$$

где $L_\varepsilon, L_{1\varepsilon}, L_{2\varepsilon}$ — известные функции [59].

На втором этапе построим систему однородных решений видоизмененных указанным выше образом уравнений Ламе для слоя, когда

$$\sigma_z(r, z) = \tau_{rz}(r, z) = 0 \quad (z = h), \quad w(r, z) = \tau_{rz}(r, z) = 0 \quad (z = 0). \quad (10)$$

Проекция вектора перемещений и тензора напряжений примут вид

$$\begin{aligned} u_k(r, z) &= A_k(z) J_1(p_k r), \quad w_k(r, z) = B_k(z) J_0(p_k r), \\ \sigma(r, z) &= \mu \sigma_{zk}^*(z) J_0(p_k r), \quad \tau_{rz}(r, z) = \mu \tau_k^*(z) J_1(p_k r), \\ \sigma_{rk}(r, z) &= \mu [\sigma_{rk}^*(z) J_0(p_k r) - 2A_k(z) r^{-1} J_1(p_k r)], \end{aligned} \quad (11)$$

где $A_k(z), B_k(z), \sigma_{zk}^*(z), \tau_k^*(z), \sigma_{rk}^*(z)$ — известные функции, p_k — корни уравнения [59]; α, β — известные постоянные

$$\beta p_k A_k(h) + \alpha B_k'(h) = 0.$$

Введем в рассмотрение интеграл

$$W_{jn} = \int_{-h}^h [\sigma_{rj}^*(z) A_n(z) - B_j(z) \tau_n^*(z)] dz. \quad (12)$$

В работе [59] показано, что

$$\begin{aligned} W_{jn} &= 2(p_n^2 - p_j^2)^{-1} [p_n \sigma_{zn}^*(z) B_j(z) - p_n B_k(z) \sigma_{zj}^*(z) - \\ &\quad - p_j \tau_j^*(z) A_n(z) + p_j A_j(z) \tau_n^*(z)] \Big|_{-h}^h. \end{aligned} \quad (13)$$

Если иметь в виду, что задача с граничными условиями (10) может быть симметрично продолжена в область $-h \leq z < 0$, то

$$W_{jn} = 0 \quad (p_j^2 \neq p_n^2). \quad (14)$$

Таким образом, однородные решения (11) обладают условием обобщенной ортогональности. Из (13) следует также, что однородные решения и при любых других однородных граничных условиях обладают условием обобщенной ортогональности.

На третьем этапе введем в рассмотрение линейную комбинацию однородных решений (11)

$$\begin{aligned} u^{(2)}(r, z) &= \sum_{k=1}^{\infty} D_k A_k(z) J_1(p_k r), \quad w^{(2)}(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k B_k(z) J_0(p_k r), \\ \tau_{rz}^{(2)}(r, z) &= \sum_{k=1}^{\infty} D_k \tau_k^*(z) J_1(p_k r). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь суммирование ведется по всем p_k , для которых $\text{Im}(p_k) > 0$, D_k — неизвестные коэффициенты.

Тогда решение задачи запишем в виде

$$u(r, z) = u^{(1)}(r, z) - u^{(2)}(r, z), \quad w(r, z) = w^{(1)}(r, z) - w^{(2)}(r, z). \quad (16)$$

При этом коэффициенты D_k разложения (15) с помощью условия обобщенной ортогональности (14) найдем из условия на боковой поверхности цилиндра

$$u(r, z) = 0, \quad \tau_{rz}(r, z) = \tau_{rz}^{(1)}(r, z) - \tau_{rz}^{(2)}(r, z) \quad (r = R). \quad (17)$$

Получим

$$D_k = \frac{-2ip_k B_k(h) K_1(-iRp_k)}{\mu W_{kk} J_1(p_k R)} \int_0^a q(\rho) I_0(-ip_k \rho) \rho d\rho. \quad (18)$$

Здесь $q(\rho)$ — неизвестные контактные напряжения, $I_0(x)$, $K_0(x)$ — модифицированные функции Бесселя, μ — модуль сдвига.

Теперь все граничные условия задачи выполнены, кроме условия контакта

$$w(r, z) = w^{(1)}(r, z) - w^{(2)}(r, z) = \delta(r) \quad (r = h, r \leq a). \quad (19)$$

Удовлетворяя последнему условию, для контактного напряжения под штампом получаем интегральное уравнение

$$\mu^{-1} K_{rh}^\varepsilon q = \delta(r) + \sum_{k=1}^{\infty} D_k B_k(h) J_0(p_k r) \quad (r \leq a), \quad (20)$$

$$K_{rh}^\varepsilon q \equiv \mu w^{(1)}(r, h),$$

где $w^{(1)}(r, h)$ описывается первой формулой из (9).

Если теперь $q(\rho)$ представить в виде

$$q(\rho) = \frac{\mu}{1-\nu} \left[q_0(\rho) + \sum_{k=1}^{\infty} x_k I_1^{-1}(\gamma_k R/h) q_k(\rho) \right], \quad (21)$$

$$x_k = D_k B_k(h) I_1(\gamma_k R/h), \quad \gamma_k = -ip_k h,$$

где $q_k(\rho)$ — есть решение интегральных уравнений

$$K_{rh}^\varepsilon q_0 = (1-\nu)\delta(r) \quad (r \leq a),$$

$$K_{rh}^\varepsilon q_k = (1-\nu)J_0(p_k r) \quad (k \geq 1, r \leq a), \quad (22)$$

и подставить в (18), получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения постоянных D_k (и x_k)

$$x_k = g_k + \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} x_n, \quad (23)$$

$$a_{kn} = -2i\gamma_k W_{kk}^{-1} B_k^2(h) K_1(R\gamma_k/h) I_1^{-1}(R\gamma_k/h) T_{n,k},$$

$$g_k = -2i\gamma_k W_{kk}^{-1} B_k^2(h) K_1(R\gamma_k/h) T_{0,k}, \quad T_{n,k} = \int_0^\infty q_n(\rho) I_0(\rho\gamma_k/h) \rho d\rho.$$

До сих пор считалось, что коэффициент фиктивного поглощения $\varepsilon > 0$. Устремляя ε к нулю, получим решение исходной задачи 2. При этом следует учесть, что некоторые нули и полюса функции $L_\varepsilon(h, u)$ из (9) при $\varepsilon = 0$ перейдут на действительную ось, что вызовет деформацию контура интегрирования в выражении ядра интегральных уравнений (22). О том, как будет выглядеть этот контур Γ , подробно сказано в работе [16].

Таким образом, окончательно контактное давление определяется формулой (21), где x_k — решение системы (23) при $\varepsilon = 0$, $q_k(\rho)$ — решение хорошо изученных интегральных уравнений (22), которые в безразмерных переменных примут вид $(q_k(a\rho) = \vartheta_k(\rho))$

$$\int_0^1 \vartheta_k(\rho) \rho d\rho \int_\Gamma L(uh/a) J_0(ur) J_0(u\rho) du = f_k(r) \quad (r \leq 1), \quad (24)$$

$$L(\tau) = \frac{\theta_2^2(1-\nu)^{-1} \tau \kappa \operatorname{sh} \kappa \operatorname{ch} \eta}{4\tau^2 \kappa \eta \operatorname{ch} \eta \operatorname{sh} \kappa - (\eta^2 + \tau^2) \operatorname{sh} \eta \operatorname{ch} \kappa}, \quad (25)$$

$$\kappa^2 = \tau^2 - \theta_1^2, \quad \eta^2 = \tau^2 - \theta_2^2, \quad \theta_1^2 = \frac{\rho\omega^2 h}{\lambda + 2\mu}, \quad \theta_2^2 = \frac{\rho\omega^2 h}{\mu},$$

$$f_k(r) = \{\delta(ra) \quad (k=0); \quad I_0(a\gamma_k r/h) \quad (k \geq 1)\}. \quad (26)$$

Здесь λ, μ — упругие константы, γ_k — полюса функции $L(\tau)$, контур Γ совпадает с положительной частью вещественной оси всюду за исключением отрезков, содержащих вещественные полюсы $L(\tau)$ [16]. В случае чередования нулей и полюсов этой функции указанные отрезки обходятся контуром снизу [16].

Исследуем бесконечную систему (23). Известно [16], что функция $L(\tau)$ имеет конечное число действительных нулей и полюсов и число их возрастает с ростом приведенной частоты θ_1 . Комплексные полюса функции $L(\tau)$ при больших номерах имеют следующее асимптотическое представление:

$$z_n = ih\gamma_n \sim ina_1 + a_2 \ln(a_3 n + a_4),$$

где a_i — известные действительные постоянные.

Учитывая это, можно показать [57], что с ростом номеров коэффициенты бесконечной системы (23) имеют следующее асимптотическое поведение:

$$|g_k| \sim k^{-1} \exp[-a_1 k(R-a)/h],$$

$$|a_{kn}| \sim k^{-1} \exp[-a_1(k+n)(R-a)/h] \quad (k, n \rightarrow \infty). \quad (27)$$

Следовательно, система (23) принадлежит к типу нормальных систем Пуанкаре–Коха и ее решение может быть получено методом редукции при любых значениях параметра $(R-a)/h$.

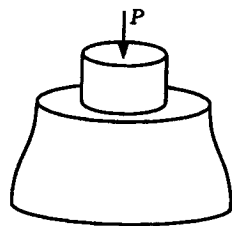


Рис. 3

Аналогично и для задачи 1 контактные напряжения под штампом выразятся формулой (21), в которой x_k — решение системы (23) с коэффициентами

$$g_k = th^2 \gamma_k K_1(R\gamma_k/h) T_{0,k},$$

$$a_{kn} = h^{-1} th^2 \gamma_k K_1(R\gamma_k/h) I_1^{-1}(R\gamma_k/h) T_{nk}. \quad (28)$$

Причем $q_k(a\rho)$ — решение интегральных уравнений (24), где

$$L(u) = (\operatorname{ch} 2u - 1)/(2u + \operatorname{sh} 2u), \quad (29)$$

$i\gamma_k$ — комплексные полюса функции $L(u)$, лежащие в верхней полуплоскости. Так как функция $L(u)$ не имеет действительных полюсов, то контур Γ в уравнении (24) будет полностью совпадать с положительной частью вещественной оси. Бесконечная система (23) здесь также будет принадлежать к типу нормальных систем Пуанкаре–Коха. Таким образом, задачи 1 и 2 сводятся к совместному решению хорошо изученных интегральных уравнений соответствующих контактных задач для слоя и бесконечных систем типа Пуанкаре–Коха. Для решения интегральных уравнений могут быть использованы известные методы.

1.4. К задаче 1 близко примыкают задачи о взаимодействии штампа с цилиндром, когда его боковая поверхность свободна от напряжений или закреплена, а также задачи о взаимодействии штампа с конечным телом вращения с боковой поверхностью достаточно произвольной формы и свободной от напряжений (задача 3, рис. 3). Здесь используются однородные решения для слоя, с помощью которых граничные условия на боковой поверхности удовлетворяются приближенно методом граничной коллокации или методом наименьших квадратов. В итоге задачи сводятся к исследованию конечных систем линейных алгебраических уравнений и хорошо изученных интегральных уравнений вида (24) контактных задач для слоя.

Отметим здесь, что в схожей по постановке плоской задаче о взаимодействии штампа с плоской гранью криволинейной трапеции был использован другой подход удовлетворения граничных условий на криволинейной боковой поверхности. А именно, граничные условия удовлетворялись

из условия наилучшего приближения в смысле Чебышева с использованием несколько модифицированного метода Ремеза [42] (см. п. 4).

В цилиндрической системе координат (r, ω, z) рассматривается тело вращения (рис. 3), ограниченное поверхностями $z = 0$, $z = h$, $r = R(z)$; $R(z)$ — гладкая функция. В области контакта $z = h$, $r \leq a$ задано вертикальное смещение штампа, вне штампа отсутствуют напряжения. Упругое тело вращения опирается на гладкое жесткое основание, боковая поверхность свободна от напряжений [50].

Поставленная задача сводится к решению краевой задачи для осесимметричных уравнений Ламе в цилиндрических координатах при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \tau_{rz} = 0, \quad w = \delta - f(r) \quad (z = h, \quad r \leq a), \\ 2) \quad & \tau_{rz} = 0, \quad \sigma_z = 0 \quad (z = h, \quad a < r < R(h)), \\ 3) \quad & \tau_{rz} = 0, \quad w = 0 \quad (z = 0), \\ 4) \quad & \sigma_r - R'(z)\tau_{rz} = 0 \quad (0 < r < h, \quad r = R(z)), \\ 5) \quad & \sigma_z - R'(z)\tau_{rz} = 0 \quad (0 < r < h, \quad r = R(z)), \end{aligned} \quad (30)$$

где $f(r)$ — функция, описывающая форму подошвы штампа. Решение поставленной задачи будем искать в виде (16), где $u^{(1)}, w^{(1)}$ — решение уравнений Ламе при граничных условиях (8), а $u^{(2)}, w^{(2)}$ — суперпозиция однородных решений для слоя, когда граничные условия имеют вид (10). Выражения соответствующих компонент вектора перемещения и тензора напряжений выписаны в работе [50]. Также, как и в случае использования условий обобщенной ортогональности для удовлетворения условий на боковой поверхности, здесь контактные напряжения можно представить в виде (21), где $q_k(\rho a) = \varphi_k(\rho)$ — решения известных интегральных уравнений (24), (26) для слоя, где $L(u)$ есть (29).

При этом будут удовлетворены граничные условия 1)–3) из (30). Оставшиеся условия 4)–5) из (30) позволяют отыскать неизвестные постоянные x_k и D_k . В работе [50] для удовлетворения условий 4)–5) из (30) были применены метод граничной коллокации и метод наименьших квадратов. При использовании метода коллокаций точки коллокации на боковой поверхности выбирались равномерно по высоте цилиндра. Удовлетворяя условиям 4)–5) из (30) в N точках и оставляя в выражениях (15) и в других им соответствующих соотношениях для компонент тензора напряжений $2N$ слагаемых, которые являются однородными решениями для слоя, получаем для определения неизвестных систему линейных алгебраических уравнений (см. (3.10) [50]). Формулы для вычисления матрицы и правой части этой системы содержат только однократные несобственные интегралы и поэтому численная реализация этой схемы решения не требует большого труда. Для контроля результатов, получаемых с помощью метода граничной коллокации, был использован также метод наимень-

ших квадратов для удовлетворения условий на боковой поверхности. В этом случае неизвестные постоянные D_k находятся из условия минимума функционала

$$J = \int_{\gamma} [(\sigma_r - R' \tau_{rz})^2 + (R' \sigma_z - \tau_{rz})^2] ds, \quad (31)$$

где γ — образующая боковой поверхности. Компоненты тензора напряжений, стоящие под знаком интеграла, определяются соотношениями типа (9), (15), (16) и соответствующими соотношениями закона Гука.

Из условия минимума функционала (31) для определения D_k получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\partial J / \partial D_m = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, n). \quad (32)$$

В отличие от системы, полученной методом коллокации, элементы матрицы и правой части системы (32) вычисляются по формулам, содержащим двукратные интегралы.

В работе [50] проведен сравнительный анализ эффективности методов коллокации и наименьших квадратов для случая, когда осевое сечение тела вращения является равнобедренной трапецией. Анализ показывает, что с увеличением числа уравнений систем результаты уточняются, отмечается также близость результатов, получаемых методом коллокации и методом наименьших квадратов. Числовые эксперименты также показывают, что сходимость методов улучшается с удалением боковой грани от края штампа.

Здесь отметим, что при расчетах для решения интегральных уравнений (24), (26) использовался «метод больших λ » [37, 55].

1.5. Для всех изложенных выше задач на основе разработанных методов были реализованы на ЭВМ алгоритмы и получены числовые результаты, которые можно найти в опубликованных статьях [13, 57, 59, 61] в виде таблиц и графиков, которые свидетельствуют об эффективности предложенных методов и могут иметь практическое значение. Здесь приведем интересный практически значимый результат, полученный в работе [59] для задачи 1. В этой работе наряду с другими величинами исследовалась безразмерная величина $P^* = P(1 - \nu)(\mu \delta a)^{-1}$ при разных значениях параметров $\lambda = h/a$ и $R^* = R/a$. Анализ значений величины P^* при фиксированном значении параметра λ позволяет сделать следующий вывод: при увеличении параметра R^* от единицы до некоторого значения, которое зависит от λ , сопротивление цилиндра внедрению штампа растет, а при дальнейшем увеличении параметра R^* это сопротивление уменьшается и стремится к некоторой постоянной величине. Отметим, что полученные решения при $R \rightarrow a$ стремятся к известному точному решению, а при $R \rightarrow \infty$ — к решению аналогичной задачи для слоя. На рис. 4 изображена

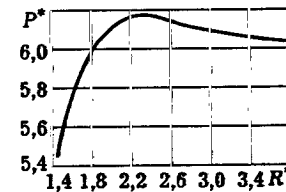


Рис. 4

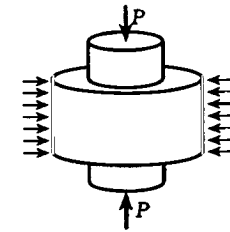


Рис. 5

зависимость P^* от R^* при $\lambda = 2$, которая наглядно иллюстрирует отмеченный выше факт немонотонной зависимости. Этот факт может быть использован при выборе оптимальной жесткости резиноподобных амортизаторов, заключенных в цилиндрический стакан с жесткими гладкими стенками.

1.6. Отметим, что в работах [13, 57] и др. также рассматривалась осесимметричная задача о кручении штампом кругового цилиндра конечных размеров (задача 4). Штамп жестко сцеплен с одной плоской гранью цилиндра, другая его плоская грань неподвижна, а на цилиндрической поверхности заданы условия отсутствия перемещений или напряжений. Для исследования были использованы изложенные выше методы: метод сведения парного ряда к БСЛАУ первого рода с сингулярной матрицей коэффициентов и метод однородных решений. Эти задачи имеют самостоятельный интерес и в то же время их можно рассматривать как модельные для проверки эффективности предложенных методов. Расчеты показали высокую эффективность предложенных методов и в совокупности позволили полностью их исследовать при всех значениях параметров.

В работе [59] методом однородных решений построено решение осесимметричной задачи о стационарных крутильных нерезонансных колебаниях штампа, жестко сцепленного с одной плоской гранью, под действием момента $M \exp(-i\omega t)$, когда другая плоская грань и цилиндрическая поверхность неподвижны (задача 5).

1.7. По используемым методам решения и геометрии упругих тел к изложенным выше задачам близко примыкает задача, рассмотренная в работе [48] о внедрении симметрично расположенных штампов в торцы кругового цилиндра при наличии в цилиндре однородного поля начальных напряжений (задача 6, рис. 5).

Рассматривается круговой цилиндр радиуса a высоты $2h$ из нелинейно-упругого изотропного несжимаемого материала сжатый или растянутый равномерно распределенными и приложенными к боковой поверхности силами, при этом торцы цилиндра свободны от нагрузки. На описанную конечную деформацию накладывается малая деформация, обусло-

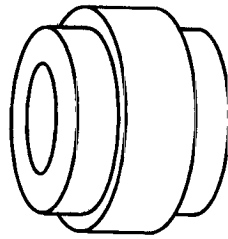


Рис. 6

вленная внедрением в торцы цилиндра двух симметрично расположенных круговых штампов, трение между штампами и упругим телом отсутствует, а на боковой поверхности цилиндра заданы условия отсутствия касательных напряжений и нормальных перемещений. В силу предположений о малости добавочных напряжений контактная задача рассматривается в линеаризованной постановке. Линеаризованные уравнения равновесия для осесимметричной добавочной деформации несжимаемого тела и граничные условия выписаны в работе [48] для упругого материала, свойства которого задаются трехпараметрическим материалом [70]. Рассмотрены частные случаи: материал Муни и Бартенева-Хазановича [38]. Эта задача, как и задача 1, в работе [48] сведена к парному ряду-уравнению типа (1), которое, в свою очередь, сведено к БСЛАУ первого рода (4) с сингулярной матрицей коэффициентов и далее к бесконечной системе второго рода вида (7). Решение последней получено методом редукции. По изложенной выше схеме произведен числовой расчет контактных напряжений и зависимости между приложенной к штампу силой P и перемещением штампа δ , характеризуемой величиной $Q = P/(2G\delta a)$, где G — модуль сдвига, a — радиус штампа. Результаты расчетов отражены в таблицах и графиках.

Как показали многочисленные расчеты жесткость Q в зависимости от параметра предварительного напряжения λ [48] ведет себя не монотонно для материала Муни и монотонно убывает с ростом λ для материала Бартенева-Хазановича. Для материала Муни с увеличением высоты цилиндра при неизменном его радиусе значение λ , при котором Q принимает минимальное значение, смещается в сторону меньших значений.

2. В работе (см. сноску на с. 157) рассмотрен вариант взаимодействия штампа с упругим конечным полым цилиндром, когда штамп в виде бандажа расположен на цилиндрической поверхности. Пусть на цилиндр длины $2b$ с внутренним и внешним радиусами R_1 и R_2 , соответственно, симметрично насажен гладкий жесткий бандаж длины $2a$ и радиуса $R_2 - \delta$, а торцы цилиндра взаимодействуют с жесткой плоской гладкой опорой (задача 7, рис. 6). Внутренняя поверхность $r = R$ свободна от напряжений.

Такая задача сводится в цилиндрической системе координат (r, φ, z) к

краевой задаче для осесимметричных уравнений Ламе при соответствующих граничных условиях (см. сноску на с. 157). Разыскивая решение полученной краевой задачи в форме Папковича-Нейбера и удовлетворяя граничным условиям, поставленную задачу можно свести к парным рядам-уравнениям вида (1) по тригонометрическим функциям

$$\sum_{k=0}^{\infty} Q_k K(\beta_k) \cos \beta_k x = \frac{n_0 P}{2b} + \frac{\mu}{R_2(1-\nu)} \delta(x R_2) \quad \left(|x| \leq \frac{a}{R_2} \right),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} Q_k \cos \beta_k x = 0 \quad \left(\frac{a}{R_2} < |x| < \frac{b}{R_2} \right), \quad (33)$$

где $\beta_k = \pi k R/b$, функция $K(u)$ и постоянная n_0 известны (см. сноску на с. 157), $\delta(z)$ — форма подошвы штампа, $P = 2 \int_0^a q(z) dz$, $q(z)$ — неизвестные контактные напряжения под штампом.

В (33) функция $K(u)$ обладает всеми необходимыми свойствами, позволяющими парный ряд-уравнение свести, как это было сделано для парного ряда-уравнения (1), к БСЛАУ первого рода с сингулярной матрицей коэффициентов. Эта система обладает теми же свойствами, что и система (4), и поэтому ее решение может быть получено аналогично. Здесь также бесконечная система сведена к бесконечной системе 2-го рода, а решение последней получено методом редукции.

Были проведены расчеты контактных напряжений и величины $P^* = P(1-\nu)(\mu\delta)^{-1}$ при различных значениях параметров. Результаты расчетов сведены в таблицы и иллюстрированы графиками. Один из графиков характеризует жесткость P_* системы цилиндр-бандаж в зависимости от его относительной длины $\beta = b/a$ при $R_2/a = 0.5$, $\nu = 0,3$, $\kappa = R_1/R_2 = 0$. При определенных значениях параметра $\beta = \beta^*$ система обладает максимальной жесткостью, при этом жесткость с увеличением β вначале растет, а при $\beta > \beta^*$ убывает. Вид графика аналогичен изображенному на рис. 4. Отметим также, что, как показали расчеты, у функции $K(u)$ при значениях параметра $\kappa = R_1/R_2$, больших определенного значения κ^* , зависящего от других параметров задачи, появляются действительные нули, что свидетельствует о возможности появления под бандажем знакопеременных контактных напряжений.

В работе [47] изучено влияние предварительного осевого растяжения или сжатия упругого цилиндра конечной длины на его контактную жесткость и распределение контактных напряжений при взаимодействии с жестким бандажом меньшего радиуса (задача 8, рис. 7).

Здесь, как и в задаче 7, предполагается, что бандаж расположен на боковой поверхности цилиндра без трения симметрично относительно его торцов. Торцы цилиндра взаимодействуют с жесткой гладкой поверхностью. Здесь так же, как и в задаче 6, используется модель нелинейного упругого изотропного несжимаемого материала общего вида.

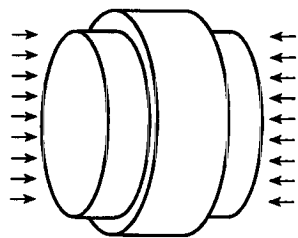


Рис. 7

Пусть в цилиндрической системе координат (r, φ, z) задан цилиндр $r \leq R, |z| \leq b$ из нелинейного упругого изотропного материала. Цилиндр предварительно подвергнут однородному осевому растяжению или сжатию и закреплен торцами между гладкими жесткими поверхностями таким образом, что отсутствуют нормальные перемещения и касательные напряжения. На описанную деформацию, которая считается конечной, накладывается малая осесимметричная деформация, вызванная внедрением в поверхность цилиндра при $|z| \leq a$ жесткого бандажа. Трение между цилиндром и бандажом отсутствует, а бандаж имеет радиус $R - \delta, \delta > 0$. В работе [47] для добавочной деформации получены линеаризованные уравнения и выписаны соответствующие граничные условия. Известным приемом полученная краевая задача была сведена к парному ряду-уравнению вида (33), в котором $n_0 = 0, R_2 = R$, а $K(u)$ — известная функция [47]. Решение парного ряда, как и в предыдущей задаче, было получено путем сведения его к БСЛАУ первого рода с сингулярной матрицей. Был проведен расчет контактных напряжений и жесткости системы штамп — цилиндр P^* для материала Муни. Анализ расчетов показывает, что с увеличением параметра предварительного напряжения в сторону растяжения жесткость P^* увеличивается. Существует также такое сочетание геометрических параметров, при которых жесткость P^* возрастает и с увеличением предварительного сжатия (с уменьшением λ при $\lambda < 1$).

3. В работах [37, 46, 51, 52, 67], а также см. сноску на с. 157, рассмотрен ряд плоских и антиплоских контактных задач для тел конечных размеров в декартовой системе координат. Сюда относятся задачи для прямоугольника, в том числе для предварительно напряженного, и криволинейной трапеции. Для их решения были использованы изложенные выше метод сведения парных рядов к бесконечным системам, метод однородных решений и метод «больших λ ».

В работах [37, 67], а также см. сноску на с. 157 рассмотрена плоская задача для прямоугольника о вдавливании штампа в одну из его граней. Пусть в декартовой системе координат (x, y) упругий прямоугольник занимает область $0 \leq y \leq h, -b \leq x \leq c$, а грань $y = h$ при $|x| \leq a$ взаимодей-

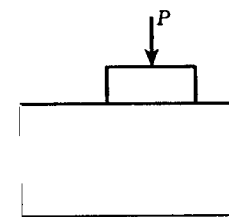


Рис. 8

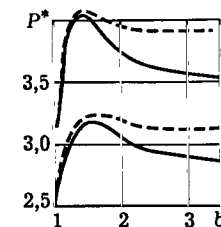


Рис. 9

ствует без трения со штампом, к которому центрально приложена сила P (задача 9, рис. 8).

Для решения этой задачи использовался метод однородных решений (см. сноску на с. 157), схема которого изложена в п. 1.3. В случае симметрии, когда $b = c$, использовался метод сведения парных рядов-уравнений к БСЛАУ первого рода с сингулярной матрицей (см. п. 1.2), а в работе [37] для решения задач в случае $b = c$ использовался метод «больших λ ».

Была обнаружена немонотонная зависимость жесткости прямоугольника ($P^* = P(1 - \nu)(G\delta)^{-1}$, δ — смещение штампа) от относительного расстояния штампа до боковой поверхности. На рис. 9 приведена зависимость P^* от $b^* = b/a$ при $c = b$ и $\lambda = h/a = 1,5$ (верхние кривые); $\lambda = h/a = 2$ (нижние кривые) [37]. На рис. 9 сплошная линия соответствует случаю, когда нижняя грань прямоугольника лежит без трения на жестком основании, а штриховая — когда нижняя грань закреплена. Видно, что при определенных значениях $b^* \neq 1$ прямоугольник имеет максимальную жесткость, а в случае дальнейшего увеличения b^* жесткость уменьшается и стремится к значению, соответствующему задачам для слоя.

Проведенные расчеты (см. сноску на с. 157) также показывают, что при определенных значениях b и c ($b \neq c$) при центрально приложенной силе P наблюдается поступательное перемещение штампа (без поворота). Этот факт, очевидно, тесно связан с отмеченной выше немонотонной зависимостью P^* от b^* .

В работах [51, 52] исследовались антиплоская и плоская контактные задачи для криволинейной трапеции. Использовался метод однородных решений, изложенный в п. 1.4 применительно к контактной задаче для конечного тела вращения. Здесь этот метод был модифицирован в части удовлетворения граничным условиям на боковой поверхности. Подробнее остановимся на плоской задаче [52] (задача 10, рис. 10).

Пусть в прямоугольной системе координат (x, y) упругое тело занимает область $|x| \leq f(y), 0 \leq y \leq h$. Предположим, что на грани $y = 0$ заданы условия отсутствия нормальных перемещений и касательных напряжений, на боковой грани отсутствуют напряжения, а штамп с плоской

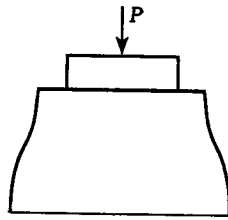


Рис. 10

подошвой внедряется симметрично относительно оси $x = 0$ в грань $y = h$ на величину δ . Как и в задаче 3 (см. п. 1.4) решение разыскивается [52] в виде суперпозиции соответствующих однородных решений для слоя и неоднородного решения для слоя, когда при $y = h$ в области $|x| \leq a$ заданы напряжения, подлежащие определению из интегрального уравнения с известными свойствами. Основная проблема здесь возникает при удовлетворении граничным условиям на боковой поверхности $|x| = f(y)$, $0 \leq y \leq h$. Здесь предлагается вариант удовлетворения граничным условиям на боковой поверхности из условия наилучшего приближения в смысле Чебышева, используя несколько модифицированные методы Ремеза [42]. В результате получена нелинейная задача о наилучшем приближении. При этом существенно то, что достигается равномерная погрешность по всей боковой границе и требуется привлечение значительно меньшего числа однородных решений для получения результата той же точности, что и при использовании метода коллокаций или метода наименьших квадратов. Кроме того, предложенный алгоритм позволяет ввести эффективный контроль точности результатов в процессе счета и не требует вычисления сложных контурных интегралов, что дает значительную экономию машинного времени.

Что касается возникающих в этой задаче интегральных уравнений, то их левые части соответствуют контактными задачам для полосы. Для их решения существует большое количество методов. Отличительной особенностью полученных здесь уравнений является наличие сильно осциллирующих функций в правых частях. Для преодоления этой трудности, а также с целью унификации подходов для удовлетворения граничных условий, задача нахождения решения интегральных уравнений также была сведена к задаче Чебышева о наилучшем приближении с использованием несколько модифицированного метода Ремеза [42]. Такой подход показал высокую эффективность при любых значениях относительной толщины слоя, что подтвердило и сравнение результатов расчетов в частных случаях с известными [25]. Отметим еще раз, что при реализации такого подхода всегда известна погрешность, с которой полученное решение удовлетворяет уравнению.

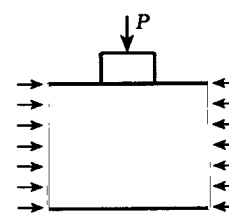


Рис. 11

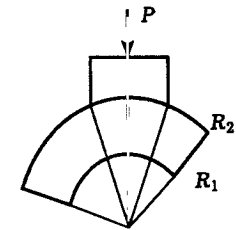


Рис. 12

В работе [52] были проведены многочисленные расчеты с целью определения степени влияния боковой поверхности криволинейной трапеции на распределение напряжений под штампом в зависимости от ее формы и удаленности от края штампа. Результаты расчетов иллюстрируются большим числом графиков.

В работе [46] рассмотрена плоская задача теории упругости о взаимодействии штампа с прямоугольником, в котором задано однородное поле начальных напряжений (задача 11, рис. 11).

На смежных гранях прямоугольника заданы условия отсутствия нормальных перемещений и касательных напряжений. Для описания свойств упругого тела используется модель нелинейного несжимаемого материала [70]. Как это было сделано в задачах 6 и 8 для предварительно напряженных цилиндров, здесь задача сведена к парному ряду-уравнению по тригонометрическим функциям, для решения которого также используется метод сведения его к БСЛАУ с сингулярной матрицей. После регуляризации системы найдено ее решение и проведен численный анализ задачи в зависимости от ее параметров. Расчеты проводились для материалов Муни и Бартенева-Хазановича и отражены в таблицах и графиках [46].

4. В работах [14, 34, 35, 66] рассмотрен ряд плоских и антиплоских контактных задач для кольцевого сектора, для решения которых были использованы метод однородных решений [14, 66] и метод сведения парных или тройных рядов-уравнений к БСЛАУ с сингулярной матрицей [34, 35].

В полярной системе координат (r, φ) рассмотрим упругое тело в форме кольцевого сектора $R_1 \leq r \leq R_2$, $-\gamma_1 \leq \varphi \leq \gamma_2$ ($\gamma_1 \neq \gamma_2$; $\gamma_1, \gamma_2 > 0$) (задача 12, рис. 12).

Пусть в грань $r = R_2$ на участке $|\varphi| \leq \theta$ ($\theta \leq \min(\gamma_1, \gamma_2)$) вдавливается центрально приложенной силой P штамп таким образом, что он перемещается поступательно. Предполагаем также, что на гранях $r = R_1$, $\varphi = -\gamma_1$, $\varphi = \gamma_2$ отсутствуют нормальные перемещения и касательные напряжения. Поставленная задача теории упругости может быть сведена к исследованию тройного ряда-уравнения по тригонометрическим функциям. Здесь,

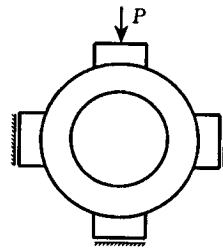


Рис. 13

также как в п. 1.2, для решения полученного тройного ряда-уравнения использован метод сведения его к БСЛАУ с сингулярной матрицей [34, 35]. Решение последней получено методом регуляризации с последующим использованием метода редукции и асимптотическим методом. Произведены соответствующие числовые расчеты контактных напряжений и интегральных характеристик, таких как главный момент и главный вектор контактных напряжений. Расчеты показали, в частности, что существуют такие $\gamma_1 \neq \gamma_2$, при которых величина момента будет равна нулю. Это означает, что как и в контактной задаче для несимметричного прямоугольника (см. п. 3), существует такое несимметричное расположение штампа на поверхности сектора, когда он перемещается поступательно в случае симметрично приложенной к штампу силы. Этот факт может быть использован при проектировании близко расположенных сооружений.

В случае $\gamma_1 = \gamma_2$ эта задача рассматривалась в работах [34, 66]. В работе [66] для исследования задачи был использован метод однородных решений. Схема этого метода изложена в п. 1.3.

В работе [36] изложена схема решения плоской статической контактной задачи для кольца $R_1 \leq r \leq R_2$, взаимодействующего без трения с системой периодически расположенных на поверхности $r = R_1$ штампов, когда их радиальные перемещения, вообще говоря, не равны друг другу, а на поверхности $r = R_2$ отсутствуют нормальные перемещения и касательные напряжения (задача 13, рис. 13).

Предложенная схема опирается на работу [23]. Решение исходной задачи представляется в виде суперпозиции решений более простых задач для кольца, которые эквивалентны некоторым задачам для сектора кольца типа рассмотренных выше. Здесь эти задачи также сводятся к парным (тройным и т.д.) рядам-уравнениям и далее к БСЛАУ первого рода с сингулярной матрицей. Последние урезаются специальным образом с учетом асимптотического поведения их решения [53] и решаются любым прямым методом. Приводятся результаты численной реализации задачи с четырьмя штампами, когда три штампа неподвижны, а перемещение четвертого известно.

5. В сферической системе координат (r, θ, φ) в работах [32, 65, 66] рассмотрены две собственно смешанные осесимметричные задачи теории упругости для тела конечных размеров (сектора шарового слоя), ограниченного двумя сферическими и одной конической поверхностями $R_1 \leq r \leq R_2$, $0 \leq \theta \leq \gamma$. Одна задача — кручение сектора шарового слоя штампом, закрепленным на одной из сферических поверхностей $r = R_2$. При этом другие граничные поверхности (коническая и сферическая) неподвижны или одна из них неподвижна, а другая свободна от напряжений (задача 14). Другая задача — вдавливание штампа в одну из сферических поверхностей $r = R_2$. При этом другая сферическая поверхность $r = R_1$ лежит без трения на жестком основании или жестко сцеплена с этим основанием, а на конической поверхности заданы условия скользящей заделки (задача 15, рис. 14).

Для исследования этих задач был использован метод однородных решений (см. п. 1.3.). Решение задач разыскивается в виде суперпозиции решения родственной неоднородной задачи для сферического слоя и соответствующих однородных решений. Для отыскания функций распределения контактных напряжений задачи сведены к решению БСЛАУ высокого качества типа нормальных систем Пуанкаре–Коха и ряда интегральных уравнений первого рода с одинаковыми ядрами для каждой из задач. Решения систем могут быть получены методом редукции при любых значениях параметров задач. Интегральные уравнения соответствуют хорошо изученным уравнениям аналогичных смешанных задач для шарового слоя и для их решения могут быть использованы известные эффективные методы, например, асимптотические.

В работе [66] приводится доказательство соотношения обобщенной ортогональности однородных решений для сферического слоя в осесимметричном случае, которое было использовано при решении второй задачи.

В работе [68] была рассмотрена осесимметричная задача о взаимодействии жесткого шара (штампа) радиуса R_0 с внутренней поверхностью сферического слоя $R_1 \leq r \leq R_2$, внешняя поверхность которого неподвижна. Вне штампа поверхность $r = R_1$ свободна от напряжений. Предполагается также, что трение между штампом и сферическим слоем отсутствует, линия действия силы P на штамп проходит через центры сферического слоя, шара и точку первоначального касания штампа со слоем, величина $\Delta = R_1 - R_0$ — мала (задача 16, рис. 15).

Поставленная задача сведена к решению парного ряда-уравнений по функциям Лежандра. Как и в п. 1.2 решение парного ряда преобразовано к БСЛАУ с сингулярной матрицей. С учетом сделанной аппроксимации ядра парного ряда построено асимптотическое решение БСЛАУ для случая относительно малой толщины сферического слоя. Проведены расчеты контактных напряжений и размеров области контакта в зависимости от

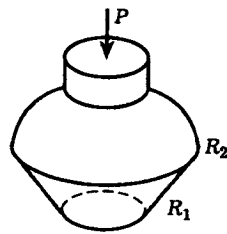


Рис. 14

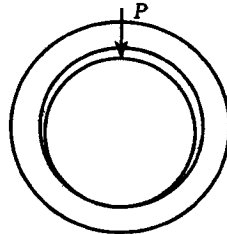


Рис. 15

приложенной к штампу силы. Результаты могут быть использованы при расчете самосмазывающихся сферических подшипников. Кручение штампом шарового слоя рассмотрено в работах [6, 17], шара — [28]. Вдавливание штампа в шар рассмотрено в работе [31].

6. В работе [62] в сферической системе координат r, θ, φ рассмотрена осесимметричная смешанная задача о кручении штампом тела конечных размеров, ограниченного конической поверхностью $\theta = \gamma < \pi$ и двумя сферическими поверхностями $r = R_1$ и $r = R_2$, где $R_1 < R_2$ (усеченный конус). Штмп закреплен на конической поверхности $\theta = \gamma$ в области $R_1 < a \leq r \leq b < R_2$ и закручивается моментом M на угол ϵ , сферические поверхности $r = R_i$ ($i = 1, 2$) — неподвижны. Требуется найти распределение контактных напряжений и связь между моментом M и углом поворота ϵ (задача 17, рис. 16).

Поставленная задача исследовалась методом однородных решений (см. п. 1.3). Задача сведена к БСЛАУ, принадлежащей к типу нормальных систем Пуанкаре–Коха, и ряду интегральных уравнений с ядром, аналогичным ядру интегрального уравнения такой же контактной задачи для бесконечного конуса.

7. В работе [14] в цилиндрической системе координат r, φ, z аналогичным методом рассмотрена смешанная задача о сдвиге штампом тела, занимающего область $R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq \varphi \leq \gamma$ (усеченный клин). Штмп закреплен на поверхности $\varphi = \gamma$ в области $R_1 \leq a \leq r \leq b \leq R_2$ и сдвигается силой T на величину δ . Предполагается, что поверхность $\gamma = 0$ закреплена, а поверхности $r = R_1$ и $r = R_2$ закреплены или свободны от напряжений (задача 18, рис. 17).

Для последних двух задач может быть получено точное решение, если воспользоваться результатами [33]. В этой работе путем построения замкнутых решений соответствующих интегральных уравнений первого рода, содержащих в качестве ядер эллиптические функции Якоби, получены точные решения смешанных задач теории упругости о чистом сдвиге штампом цилиндрического тела. Это тело представляет собой в сечении область, ограниченную координатными линиями произвольной

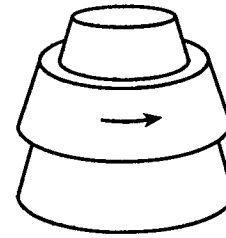


Рис. 16

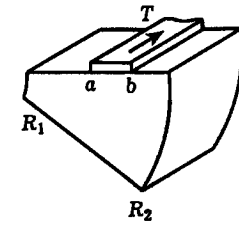


Рис. 17

ортогональной системы координат на плоскости, коэффициенты Ламе которой удовлетворяют некоторым условиям. Схема метода для частного случая была изложена ранее в работе [14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В. М. Метод однородных решений в контактных задачах теории упругости для тел конечных размеров // Изв. СКНЦ ВШ. Сер. естеств. наук. 1974. № 4. С. 12–16.
2. Александров В. М. Об одном методе сведения парных интегральных рядов-уравнений к бесконечным алгебраическим системам // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 2. С. 324–332.
3. Александров В. М. Аналитические методы решения задач теории упругости для тел конечных размеров с собственно смешанными граничными условиями // Актуальные проблемы механики деформируемых сред. Днепропетровск: Изд-во ДГУ, 1979. С. 21–27.
4. Александров В. М. О решении интегральных уравнений, возникающих в периодических задачах со смешанными граничными условиями // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 5. С. 838–844.
5. Александров В. М., Зеленцов В. Б. Метод однородных решений в смешанных задачах деформации чистого сдвига // Изв. АН АрмССР. Механика. 1979. Т. 32. № 3. С. 18–25.
6. Александров В. М., Карпенко В. А. Кручение шарового слоя сферическим кольцевым штампом // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 1. С. 143–150.
7. Александров В. М., Коваленко Е. В. Периодические контактные задачи для упругой полосы // Изв. АН АрмССР. Механика. 1977. Т. 30. № 4. С. 18–33.
8. Александров В. М., Коваленко Е. В. Контактные задачи для полосовых, цилиндрических, клиновидных и конусообразных областей // Статические и динамические смешанные задачи теории упругости. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1983. С. 5–19.
9. Александров В. М., Пожарский Д. А. Об осесимметричной контактной задаче теории упругости для усеченного шара // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 2. С. 305–311.
10. Александров В. М., Пожарский Д. А. К контактным задачам для конечного цилиндра и круглой плиты // Изв. вузов. Сев.-Кав. региона. Естеств. науки. 1999. № 1. С. 33–36.
11. Александров В. М., Сметанин Б. И. О симметричных и несимметричных контактных задачах теории упругости // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 1. С. 136–141.

12. Александров В. М., Ступина Т. М. Об интегральном уравнении, возникающем в периодических задачах механики со смешанными граничными условиями // Вестник МГУ. Серия I. Математика. Механика. 1996. № 5. С. 49–55.
13. Александров В. М., Чебаков М. И. Метод парных рядов по функциям Бесселя в смешанных задачах теории упругости для круглой плиты // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 3. С. 486–492.
14. Александров В. М., Чебаков М. И. О методе однородных решений в смешанных задачах теории упругости для усеченного клина и кольцевого сектора // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 5. С. 790–798.
15. Бабешко В. А. Об одном асимптотическом методе при решении интегральных уравнений теории упругости // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 4. С. 732–741.
16. Бабешко В. А., Векслер В. Е. Возбуждение вибрирующим штампом волн в слое // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 5. С. 884–888.
17. Бабешко В. А., Векслер В. Е. Смешанная стационарная задача кручения сферы с упругим ядром // Прикл. механика. 1976. Т. 12. № 12. С. 55–59.
18. Бабурченков М. Ф., Бородачев Н. М. Подход к решению плоских контактных задач для прямоугольной области // Современные проблемы механики и авиации. М.: Машиностроение, 1982. С. 55–64.
19. Белоконь А. В. Об одном методе решения задач теории упругости для тел конечных размеров // Докл. АН СССР. 1977. Т. 233. № 1. С. 56–59.
20. Белоконь А. В., Ватульян Т. И. Динамическая контактная задача для конечного цилиндра // Тез. докл. Всес. научно-техн. конф. «Жесткость машиностроительных конструкций». 1976. М.: 1976. С. 99–104.
21. Белоконь А. В., Ватульян Т. И. Динамическая контактная задача о взаимодействии двух штампов с анизотропным конечным цилиндром // Тез. докл. Всес. научн. конф. «Смешанные задачи механики деформируемого тела». 1977. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, С. 125–127.
22. Белоконь А. В., Соколова В. Ф. Задача о растяжении круглой плиты жесткими штампами // Изв. СКНЦ ВШ. Естеств. науки. 1978. № 3. С. 13–18.
23. Бурыйшин М. Л. Обобщенная периодическая задача теории упругости // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 3. С. 521–531.
24. Ватульян Т. И. Об одной динамической контактной задаче для цилиндра // Изв. СКНЦ ВШ. Естеств. науки. 1981. № 3. С. 27–29.
25. Ворovich И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
26. Галфаян П. О., Чобанян К. С. Решение одной контактной задачи для упругого прямоугольника // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 3. С. 569–575.
27. Дробязко В. В., Никитенко В. Н., Улитко А. Ф. Периодическая контактная задача с трением на упругой полосе // Изв. АН АрмССР. Механика. 1978. Т. 31. № 1. С. 30–39.
28. Златин А. Н. О кручении упругого шара упругими штампами // Прикл. мех. 1979. Т. 15. № 8. С. 34–39.
29. Златин А. Н., Уфлянд Я. С. Применение метода парных рядов к некоторым смешанным задачам кручения конических тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 4. С. 43–51.
30. Златин А. Н., Уфлянд Я. С. Смешанная задача о сжатии торцовыми штампами упругого цилиндра конечной высоты // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 6. С. 87–93.
31. Карпенко В. А. Осесимметричное вдавливание двух штампов в упругий шар // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 4. С. 763–766.

32. Карпенко В. А., Чебаков М. И. Кручение сектора сферического слоя круговым штампом // Механика сплошной среды. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1985. С. 83–90.
33. Коваленко Е. В., Тарасов Д. Г., Чебаков М. И. Точное решение антиплоской контактной задачи для канонических областей // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 5. С. 837–841.
34. Кучеров Л. В., Цветков А. Н., Чебаков М. И. Контактная задача для кольцевого сектора. Ростов-на-Дону: РГУ, 1998. 17 с. – Деп. в ВИНТИ 26.01.88. № 681–В88.
35. Кучеров Л. В., Чебаков М. И. Несимметричная контактная задача для кольцевого сектора // Изв. СКНЦ ВШ. Сер. естеств. наук. 1989. № 4. С. 58–64.
36. Кучеров Л. В., Чебаков М. И. Контактная обобщенно периодическая задача теории упругости для кольца // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 4. С. 111–118.
37. Лубягин И. А., Чебаков М. И. К асимптотическому методу «больших λ » // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 1. С. 121–126.
38. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука. 1980. 512 с.
39. Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М. Об одном методе решения контактных периодических задач для упругой полосы и кольца // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 3. С. 53–61.
40. Нуллер Б. М. Некоторые задачи о кручении усеченного конуса // Изв. АН АрмССР. Механика. 1968. Т. 21. № 1. С. 17–28.
41. Нуллер Б. М. Контактные задачи для упругого полубесконечного цилиндра // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 4. С. 620–631.
42. Ремез Е. Я. Общие вычислительные методы чебышевского приближения. Киев: Изд-во АН УССР, 1957. 454 с.
43. Тихонов А. Н., Самарский А. Г. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
44. Уфлянд Я. С. Методы парных уравнений в задачах математической физики. Л.: Наука, 1977. 220 с.
45. Уфлянд Я. С. Решение некоторых смешанных задач кручения упругих тел с помощью конечного преобразования типа Мелера–Фока // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 2. С. 53–61.
46. Филиппова Л. М., Цветков А. Н., Чебаков М. И. Контактная задача для предварительно напряженного прямоугольника // Прикл. мех. 1990. Т. 26. № 12. С. 81–88.
47. Филиппова Л. М., Цветков А. Н., Чебаков М. И. Взаимодействие жесткого банджа с предварительно напряженным упругим конечным цилиндром // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 5. С. 51–56.
48. Филиппова Л. М., Чебаков М. И. Контактная задача для предварительно напряженного конечного цилиндра // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 2. С. 62–69.
49. Цветков А. Н., Чебаков М. И. Осесимметричная контактная задача для тела вращения конечных размеров со свободной боковой поверхностью. Ростов-на-Дону: РГУ, 1985. 17 с. – Деп. в ВИНТИ 11.12.85. № 8481–В.
50. Цветков А. Н., Чебаков М. И. Контактная задача для конечного тела вращения со свободной боковой поверхностью // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 2. С. 77–82.
51. Цветков А. Н., Чебаков М. И. Об использовании однородных решений в контактных задачах для тел с криволинейной границей // Гидроаэромеханика и теория упругости. Математическое моделирование в гидроаэродинамике и теории упругости. Днепропетровск: Изд-во ДГУ, 1989. С. 114–119.

52. Цветков А. Н., Чебаков М. И. Плоская контактная задача для криволинейной трапеции // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 6. С. 43–47.
53. Цветков А. Н., Чебаков М. И. Эффективный способ решения одного класса бесконечных систем в контактных задачах теории упругости // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 2. С. 344–347.
54. Чебаков М. И. О парных интегральных уравнениях, связанных с преобразованием Мелера–Фока // Изв. АН СССР. МТТ. 1974. №. 6. С. 66–71.
55. Чебаков М. И. О дальнейшем развитии метода «больших λ » теории смешанных задач // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 3. С. 561–565.
56. Чебаков М. И. Контактная задача для круглой плиты, лежащей на винклеровском основании // Тез. докл. Всес. конф. «Смешанные задачи механики деформируемого тела». Ч. 1. Ростов-на-Дону. 1977. С. 99.
57. Чебаков М. И. Метод однородных решений в смешанной задаче для кругового цилиндра конечных размеров // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 6. С. 1073–1081.
58. Чебаков М. И. Метод однородных решений в контактной задаче теории упругости для кругового цилиндра конечных размеров // Тез. докл. Всес. конф. по теории упругости. Ереван. 1979. С. 365–368.
59. Чебаков М. И. Некоторые динамические и статистическая контактные задачи теории упругости кругового цилиндра конечных размеров // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 5. С. 923–933.
60. Чебаков М. И. Некоторые методы решения контактных задач теории упругости для тел конечных размеров // Тез. докл. 5-го Всес. съезда по теорет. и прикл. механике. Алма-Ата. 1981. С. 353.
61. Чебаков М. И. Контактная задача теории упругости для кругового цилиндра конечных размеров // Механика сплошной среды. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1981. С. 134–139.
62. Чебаков М. И. Кручение штампом усеченного конуса конечных размеров // Механика сплошной среды. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1982. С. 91–102.
63. Чебаков М. И. Кручение штампом усеченного шара // Статические и динамические смешанные задачи теории упругости. Ростов-на-Дону. 1983. С. 27–32.
64. Чебаков М. И. Метод однородных решений в смешанных задачах теории упругости для кругового цилиндра конечных размеров // Статические и динамические смешанные задачи теории упругости. Ростов-на-Дону. 1983. С. 35–41.
65. Чебаков М. И. О некоторых контактных задачах теории упругости для кольцевого сектора и сектора шарового слоя. Ростов-на-Дону: РГУ, 1984. 22 с. – Деп. в ВИНТИ 30.01.84. № 1140–84.
66. Чебаков М. И. О некоторых контактных задачах теории упругости для кольцевого сектора и сектора шарового слоя // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 1. С. 101–109.
67. Чебаков М. И. О характере влияния границ на контактную жесткость тел конечных размеров // Тез. докл. Республ. конф. «Дифференциальные уравнения и их приложения». Ч. 2. Одесса. 1987. С. 126–127.
68. Чебаков М. И. К теории расчета сферического подшипника // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 5. С. 58–63.
69. Чебаков М. И. Смешанные задачи для кругового цилиндра конечных размеров // Статические и динамические смешанные задачи теории упругости. Ростов-на-Дону. 1983. С. 32–35.
70. Черных К. Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных конструкциях. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.

§3. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГИХ ТЕЛ СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Д. А. Пожарский

Под телами сложной геометрии здесь понимаются упругие тела, имеющие угловые линии или точки: пространственный клин (двугранный угол), плоский клин, конус, сферическая линза (образованная пересечением двух сфер) и т.п.

1. В трехмерной теории упругости в качестве тела, имеющего угловую линию часто брали четверть пространства [18, 32, 33, 51–53, 59, 63–69], получая приближенные решения при помощи интегрального преобразования Фурье. Например, в работе [33] изучена задача о четверти пространства, жестко заделанной по одной стороне и нагруженной по другой нормальными и касательными усилиями. Для нормального напряжения в заделке составлено интегральное уравнение первого рода и исследован характер особенности решения вблизи ребра. Большой интерес к задачам для упругой четверти пространства проявляют американские и японские механики. Численный метод компенсирующих нагрузок был применен Хетени для получения общего решения для четверти пространства [66] (в западной печати эта задача теперь носит имя Хетени). Задача Хетени пересматривалась и алгоритм ее решения упрощался [65, 67], затем методом типа конечных элементов была рассмотрена контактная задача о действии прямоугольного штампа на упругую четверть пространства [68].

Вторая основная задача теории упругости для трехмерного клина решена Я. С. Уфляндом [57] при помощи вещественного интегрального преобразования Конторовича–Лебедева. Им же [58] впервые обращено внимание на возможность решения первой основной задачи для клина из несжимаемого материала и намечен путь построения приближенного решения при учете сжимаемости. Задачи о нагрузке, действующей на несжимаемый трехмерный клин, рассматривались в [28, 29]. Контактные задачи для несжимаемого трехмерного клина (полосового штампа) изучались в работах В. М. Александрова и Д. А. Пожарского [3, 44].

Приближенные инженерные подходы к отысканию функции Грина для упругой четверти пространства и для сжимаемого клина произвольного угла раствора предложены в [16, 17, 60]. Затем на основе приближенной функции Грина для четверти пространства исследованы важные для приложений (зубчатые передачи) контактные задачи [61, 62].

С помощью вещественного интегрального преобразования Конторовича–Лебедева В. А. Бабешко и В. Н. Беркович [10, 12] изучили динамическую задачу об антиплоском сдвиге пространственного клина с переменным по углу модулем сдвига и с учетом ползучести материала. Интегральное уравнение этой задачи сведено ими к решению бесконечных алгебраических систем. Впоследствии В. Н. Беркович [14] построил точное

решение (правда, довольно громоздкое) этого интегрального уравнения. Аналогичные задачи для клиновидных композитов рассмотрены в [15].

Эффективный метод решения первой основной и смешанной задачи теории упругости для трехмерного клина при произвольном коэффициенте Пуассона, основанный на применении комплексного интегрального преобразования Конторовича–Лебедева и сведения задачи теории упругости к обобщенной по И. Н. Векуа [20] краевой задаче Гильберта, развит в работах И. Ф. Вовкодава, А. Ф. Улитко и Е. И. Орлюка [21, 42, 43, 55]. В этих работах первая основная задача рассмотрена лишь для частного случая нагрузки, симметричной относительно срединной полуплоскости клина. Предполагается, что эта нагрузка такова, что правая часть интегрального уравнения Фредгольма второго рода, к которому сводится решение этой задачи, принадлежит пространству $L_2(0, \infty)$. Как показано в статье И. А. Лубягина, Д. А. Пожарского и М. И. Чебакова [37], при сосредоточенной нормальной нагрузке правая часть уравнения Фредгольма лежит в пространстве непрерывных ограниченных на полуоси функций $C_M(0, \infty)$, сходимость в котором — равномерная, что важно для аналитического представления функции Грина в виде ряда Неймана. В [37] исследуются случаи, когда одна грань клина свободна от напряжений (вариант а), либо находится в условиях скользящей (вариант б) или жесткой (вариант в) заделки, а на другой грани действуют нормальные и касательные усилия. Все три задачи окончательно сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода, через решения которых можно выразить все компоненты вектора перемещений и тензора напряжений в клине. Проведено численно-аналитическое исследование норм соответствующих интегральных операторов в $C_M(0, \infty)$ и определены диапазоны изменения коэффициента Пуассона ν , содержащие, как правило, все практически важные значения, в которых решения этих интегральных уравнений представляются в виде рядов Неймана по степеням $(1-2\nu)$. Возможность такого представления предсказывалась еще Я. С. Уфляндом [58]. В частном случае из этих формул получают известные решения задач Буссинеска и Черрути для полупространства [40], а также известные формулы плоской задачи для клина [8, 57]. В работе В. И. Короткина и Д. А. Пожарского [36] приводится пример функции Грина для упругой четверти пространства с одной свободной от напряжений гранью (решение задачи Хетени), который показывает недостатки приближенной функции Грина, использованной в ряде статей других авторов.

На основе полученных в [37] функций Грина в работах В. М. Александрова, В. И. Короткина И. А. Лубягина, Д. А. Пожарского, М. И. Чебакова [4, 5, 36, 38, 39, 46, 48, 50] рассматриваются контактные задачи для трехмерного клина в следующей постановке (r, φ, z — цилиндрические координаты, ось z направлена по ребру клина). Пусть в грань клина $\varphi = 2\alpha$ силой P , приложенной на полуоси $z = 0$ на расстоянии H от ребра

клина, вдавливается жесткий штамп, форма основания которого описывается функцией $g(r, z)$, четной по z . Силы трения между штампом и клином не учитываем. Предположим, что известная или неизвестная область контакта есть Ω . Под действием силы P штамп оседает на величину δ и поворачивается на угол γ вокруг прямой $r = a$, проходящей через область Ω . На грани $\varphi = 0$ выполняется один из указанных выше вариантов граничных условий а, б, в. Требуется найти распределение нормальных контактных напряжений под штампом $\sigma_\varphi(r, 2\alpha, z) = -q(r, z)$, $(r, z) \in \Omega$, область контакта Ω (если она неизвестна) и определить связь между величинами δ , γ , a , функцией $g(r, z)$ и величинами P и H . Интегральное уравнение этой задачи можно записать в виде $(\theta = G(1-\nu)^{-1}, G$ — модуль сдвига)

$$\iint_{\Omega} q(x, y) K(x, y, r, z) dx dy = f(r, z) = \delta + \gamma(r - a) - g(r, z), \quad (r, z) \in \Omega, \quad (1)$$

где $(n = 1, 2, 3)$

$$K(x, y, r, z) = \frac{2}{\pi^3 \theta} \int_0^\infty \int_0^\infty \text{sh } \pi u W^n(u) K_{iu}(tr) \times \\ \times \left[\frac{1}{\text{ch}(\pi u/2)} D_n^u \left\{ \text{ch} \frac{\pi y}{2} K_{iy}(tx) \right\} \right] \cos t(z - y) du dt. \quad (2)$$

Здесь $K_{iu}(r)$ — функция Макдональда; для задачи а ($n = 1$)

$$D_1^u = \frac{W_1(u, \alpha)}{2W(u, \alpha)} B_1^u - \frac{W_2(u, \alpha)}{2W(u, \alpha)} B_2^u, \quad (3)$$

а для задач б ($n = 2$) и в ($n = 3$) $D_{2,3}^u = B_{3,4}^u$, где $(k = 1, 2, 3, 4)$

$$B_k^u = \sum_{m=0}^{\infty} (1-2\nu)^m (A_k^u)^m, \quad A_k^u \{T(y, tx)\} = \int_0^\infty L_k(u, y) T(y, tx) dy, \quad (4)$$

$$L_k(u, y) = 2 \text{ch} \frac{\pi u}{2} \text{sh} \frac{\pi y}{2} W_k(y, \alpha) \int_0^\infty \frac{\text{sh } \pi t g_k(t, \alpha) dt}{(\text{ch } \pi t + \text{ch } \pi u)(\text{ch } \pi t + \text{ch } \pi y)},$$

$$W_{1,2}(u, \alpha) = \pm \frac{\text{ch } 2\alpha u \mp \cos 2\alpha}{\text{sh } 2\alpha u \pm u \sin 2\alpha}, \quad g_{1,2}(u, \alpha) = \left\{ \frac{\text{cth } \alpha u}{\text{th } \alpha u} \right\} \frac{\sin^2 2\alpha}{\text{ch } 2\alpha u \mp \cos 4\alpha},$$

$$W_3(u, \alpha) = W_1(u, 2\alpha), \quad g_3(u, \alpha) = g_1(u, 2\alpha),$$

$$W_4(u, \alpha) = \frac{2\kappa \text{sh } 4\alpha u - 2u \sin 4\alpha}{2\kappa \text{ch } 4\alpha u + 2u^2 - 2u^2 \cos 4\alpha + \kappa^2 + 1} \quad (\kappa = 3 - 4\nu),$$

$$g_4(u, \alpha) = -g_2(u, 2\alpha) + \{\sin^2 2\alpha \langle g_5(u) [2g_6(u) - ug_7(u)] - \\ - g_8(u) [2g_7(u) + ug_6(u)] \rangle - 2(1-\nu) \sin 2\alpha \langle g_5(u) (\sin 6\alpha - \\ - \sin 2\alpha \text{ch } 4\alpha u) - g_8(u) \cos 2\alpha \text{sh } 4\alpha u \rangle\} / g_9(u),$$

$$g_5(u) = \kappa \text{sh } 4\alpha u \cos 4\alpha - u \sin 4\alpha, \quad g_6(u) = \cos 4\alpha + \sin^2 4\alpha - \text{ch } 4\alpha u,$$

$$g_7(u) = \sin 4\alpha \operatorname{th} 2\alpha u (1 + \cos 4\alpha), \quad g_8(u) = (\chi \operatorname{ch} 4\alpha u - 1) \sin 4\alpha,$$

$$g_9(u) = [g_5^2(u) + g_8^2(u)](\operatorname{sh}^2 2\alpha u + \cos^2 4\alpha),$$

$$W^1(u) = W(u, \alpha) = \frac{1}{2} [W_1(u, \alpha) - W_2(u, \alpha)], \quad W^{2,3}(u) = W_{3,4}(u, \alpha).$$

При $2\alpha = \pi$ в случае задачи *a* интегральное уравнение (1) переходит в известное интегральное уравнение контактной задачи для полупространства. Ядра интегральных уравнений (1) вида (2) подчиняются условию $K(x, y, r, z) = K(r, y, x, z)$, а интегральные операторы в уравнениях (1) самосопряженные.

Для эффективного решения уравнения (1) в случае, когда область Ω — полоса [4, 46], необходимо знание операторов, обратных операторам D_n^u ($n = 1, 2, 3$). Для случаев *b* и *в* такие операторы очевидны: $(D_{2,3}^u)^{-1} = I - (1 - 2\nu)A_{3,4}^u$, где I — тождественный оператор. Для нетривиального случая *a* необходимо рассмотреть задачу о разрезе в срединной полуплоскости клина [45, 47], связанную с поставленной выше контактной задачей. Тогда при помощи решения вспомогательной обобщенной по И. Н. Векуа краевой задачи Гильберта может быть установлена следующая теорема.

Теорема. Оператор $D_1^u : C_M(0, \infty) \rightarrow C_M(0, \infty)$ вида (3) при любых углах α хотя бы при $\nu > 0,053$ имеет обратный, равный $I - (1 - 2\nu)A_0^u$, где оператор A_0^u определяется формулами

$$\begin{aligned} A_0^u \{f(s)\} &= \int_0^\infty L_0(u, s) f(s) ds + 2 \operatorname{ch} \frac{\pi u}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{W_1(s, \alpha) + W_2(s, \alpha)}{2} \times \\ &\times \frac{\operatorname{sh} \pi y g_0(y, \alpha) \operatorname{sh}(\pi s/2) f(s) ds dy}{(\operatorname{ch} \pi u + \operatorname{ch} \pi y)(\operatorname{ch} \pi s + \operatorname{ch} \pi y)} - \frac{W_0(u, \alpha)}{2} B_0^u \{f(s)\} + \\ &+ (1 - 2\nu) \operatorname{ch} \frac{\pi u}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} \pi t g_0(t, \alpha) \operatorname{sh}(\pi y/2) W_3(y, \alpha)}{(\operatorname{ch} \pi t + \operatorname{ch} \pi u)(\operatorname{ch} \pi t + \operatorname{ch} \pi y)} B_0^y \{f(s)\} dt dy, \\ W_0(u, \alpha) &= \frac{W_1(u, \alpha) + W_2(u, \alpha)}{W_2(u, \alpha) - W_1(u, \alpha)}, \quad g_0(t, \alpha) = \frac{g_1(t, \alpha) + g_2(t, \alpha)}{2}, \\ L_0(u, s) &= 2 \operatorname{ch} \frac{\pi u}{2} \operatorname{sh} \frac{\pi s}{2} W(s, \alpha) \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} \pi t g_3(t, \alpha) dt}{(\operatorname{ch} \pi t + \operatorname{ch} \pi u)(\operatorname{ch} \pi t + \operatorname{ch} \pi s)}, \\ B_0^u \{f(s)\} &= \sum_{n=0}^\infty (1 - 2\nu)^n (A_3^u)^n \circ C^t \{f(s)\}, \\ C^t \{f(s)\} &= 4 \operatorname{ch} \frac{\pi t}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} \pi y g_0(y, \alpha) \operatorname{sh}(\pi s/2) W(s, \alpha)}{(\operatorname{ch} \pi y + \operatorname{ch} \pi s)(\operatorname{ch} \pi y + \operatorname{ch} \pi t)} \times \\ &\times f(s) ds dy + \int_0^\infty L_3(t, s) \frac{W_1(s, \alpha) + W_2(s, \alpha)}{W_3(s, \alpha)} f(s) ds. \end{aligned} \quad (5)$$

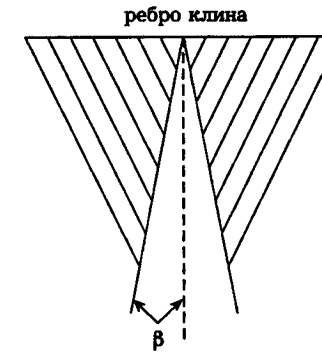


Рис. 1

При численной реализации формул (4), (5) вместо суммирования рядов Неймана предлагается численно решать интегральные уравнения Фредгольма второго рода, аналитические решения которых представляются этими рядами, по методу механических квадратур с использованием квадратурной формулы Гаусса.

В работах [4, 46, 50] для полосового в плане штампа (в (1) $\Omega : \{a \leq r \leq b, |z| < \infty\}$) используются метод парных уравнений при $a = 0$, сводящий решение задачи к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода, и при $a \neq 0$ метод сведения к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений с сингулярной матрицей, главная часть которой может быть точно обращена. В итоге получаются уравнения второго рода, для численного решения которых применимы известные методы. Сделан расчет коэффициента при особенности нормальных контактных напряжений на границе области контакта $r = b$ ($a = 0$).

В [5, 50] изучается случай, когда область контакта Ω — незаштрихованный клин угла 2β (рис. 1). Основное внимание уделяется выделению особенностей контактных давлений в кончике штампа. Исключаются решения уравнения (1) с бесконечной энергией типа решения В. Л. Рвачева [54] для задачи *b* при $\alpha = \pi/4$ и плоской подошве штампа. Вводятся полярные координаты $r = \rho \cos \psi$, $z = \rho \sin \psi$ и новые функции $q_*(\rho, \psi) = q(r, z)\theta^{-1}$, $f_*(\rho, \psi) = f(r, z)$. При помощи преобразования Меллина получается одномерное интегральное уравнение. Для случая $f_*(\rho, \psi) = f\rho^\mu e^{-\gamma\rho}$ ($\mu \geq \delta - 1$, $\delta > 0$, $\gamma > 0$) асимптотическое при малых β решение этого уравнения получено методом «больших $\lambda = 1/\beta$ » при условии $\alpha > \beta/4$. В результате возникает характеристическое уравнение, корни которого исследуются для определения особенностей функции $q_*(\rho, \psi)$ при $\rho \rightarrow 0$. Кроме обычных особенностей порядка $\rho^{-\varepsilon}$, $\varepsilon \in (0; 1)$, доказано наличие осциллирующих особенностей $\rho^{-3/2} \cos(\theta_* \ln \rho\gamma)$ и $\rho^{-3/2} \sin(\theta_* \ln \rho\gamma)$, т.е. в окрестности вершины клиновидного штампа, выходящей на ребро упругого клина, могут

нарушаться условия контакта. Для задачи *a* частота этих осцилляций возрастает при $\alpha \rightarrow 1/(4\lambda)+0$. При фиксированном значении λ и $\alpha \rightarrow 1/(4\lambda)+0$ для задачи *b* обнаружены особенности порядка $\rho^{-3/2-\varepsilon}$, $\varepsilon \in (0; 1)$.

Из работ В. А. Бабешко, Е. В. Глушкова и др. [11] известно, что показатель особенности функции $q_*(\rho, \psi)$ при $\rho \rightarrow 0$ связан с точками спектра интегрального оператора в одномерном интегральном уравнении контактной задачи. При не слишком малых α, β для нахождения точек спектра используется метод Бубнова–Галеркина, связанный с нахождением корней детерминанта $D(s)$ бесконечномерной матрицы. Если $D(s_k)=0$, то $q_*(\rho, \psi) \sim \rho^{-\varepsilon}$, $\varepsilon = 3/2 + s_k$ ($\rho \rightarrow 0$). Как показывают расчеты, проведенные при $\nu = 0,3$, для задачи *a* при $2\beta = \pi$ и $2\alpha \approx 100^\circ$ на интервале $s \in (-3/2; -1/2)$ вблизи точки $s = -1/2$ появляются два дополнительных нуля $D(s)$, которые, если зафиксировать α и уменьшать угол 2β , сливаются в двукратный корень, дающий особенность вида $\rho^{-\varepsilon}(C_1 + C_2 \ln \rho)$, а затем сходят с действительной осью и становятся комплексно сопряженными, что приводит к осцилляциям функции контактных давлений при $\rho \rightarrow 0$ и отрыву кончика штампа. Для задачи *b* при достаточно острых углах α замечены нули $D(s)$ при $s \in (0; 1/2)$, что подтверждает результаты, полученные выше асимптотическим методом. Например, при $2\alpha = 0,1\pi$, $2\beta = 45^\circ$, $s_1 = 0,45$, $s_2 = 0,47$. Соединяясь и выходя в комплексную область, эти нули приводят к наиболее сильной особенности порядка $\varepsilon = \omega_1 + i\omega_2 + 3/2$, $\omega_1 \in (0; 1/2)$. Сравниваются показатели особенностей для одного штампа и двух центрально симметричных клиновидных штампов на упругом полупространстве. Результаты численного метода для вещественных корней хорошо стыкуются с результатами, полученными асимптотическим методом. Однако этот метод даже для известного случая упругого полупространства не эффективен при поиске чисто мнимого корня уравнения $D(s) = 0$, приводящего к особенности порядка $\varepsilon = 3/2 + i\omega$. Тем не менее, по асимптотическому методу для упругого полупространства [1] при $\lambda = 2$ (угол штампа $57,3^\circ$) с точностью до $O(\lambda^{-6} \ln^3 \lambda)$ $\omega = 4,72$. Заметим, что в статье В. Б. Васильева [19] получено в аналитическом виде решение интегрального уравнения контактной задачи о действии клиновидного штампа произвольного угла на полупространство, однако выделение в нем асимптотики контактных давлений в кончике штампа проблематично.

Итак, В. М. Александровым и В. А. Бабешко было показано [1], что в контактной задаче о клиновидном штампе малого угла раствора на упругом полупространстве главными в разложении искомым нормальных контактных давлений в кончике штампа оказываются осциллирующие члены порядка $\rho^{-3/2+i\omega}$ ($\rho \rightarrow 0$). Встает вопрос, сохраняются ли обнаруженные осциллирующие члены в контактной задаче для полупространства о действии клиновидного штампа угла раствора $2\pi - 2\beta$ при малых β ? Известно [24], что нормальные напряжения вне клиновидного разреза угла 2β в упругом пространстве в вершине этого разреза имеют ту же асимпто-

тику, что и контактные напряжения в задаче о клиновидном штампе угла $2\pi - 2\beta$ на упругом полупространстве. Аналогично связаны задачи о разрезе угла 2β в срединной полуплоскости упругого клина угла 4α и о действии штампа на грань упругого клина угла 2α , когда область контакта в плане занимает всю эту грань за исключением клиновидного выреза угла 2β и заштрихована на рис. 1. В [50] при помощи асимптотического метода «больших $\lambda = 1/\beta$ » получено решение вспомогательной задачи, когда область разреза Ω — незаштрихованный клин угла 2β (см. рис. 1). Анализ этого решения показывает, что в контактных задачах о клиновидном штампе угла $2\pi - 2\beta$ на упругом полупространстве и о штампе в виде полуплоскости с вырезанным клином угла 2β на грани упругого клина при малых β в разложении контактного давления $q_*(\rho, \psi)$ при $\rho \rightarrow 0$ не будет осциллирующих членов порядка $\rho^{-3/2+i\omega}$.

Для эллиптического в плане жесткого штампа — эллиптического параболоида — в [39] задача решается при помощи асимптотического метода, эффективного при достаточной удаленности области контакта от ребра. Получены простые формулы, позволившие провести численный анализ связи между эксцентриситетом эллипса контакта и отношением радиусов кривизны штампа, между вдавливающей силой, плечом силы и осадкой и перекосом штампа.

В случае близкого подхода штампа — эллиптического параболоида — к ребру клина область контакта перестает иметь эллиптическую форму. Для этого случая в [48] используется метод нелинейных граничных интегральных уравнений, развитый Б. А. Галановым [22, 23], позволяющий одновременно определить контактные давления и неизвестную область контакта. Предполагается, что область Ω полностью содержится в прямоугольнике S , две стороны которого параллельны ребру клина, с центром на оси r и полуосями b и c ($b \geq c$). Интегральные уравнение и неравенство, к которым сводится решение этой задачи, имеют вид

$$\frac{1}{\theta} \int_S K(M, N)q(N) d\Omega_N = 2\pi f(M), \quad q(M) \geq 0, \quad M \in \Omega,$$

$$\frac{1}{\theta} \int_S K(M, N)q(N) d\Omega_N > 2\pi f(M), \quad q(M) = 0, \quad M \in (S \setminus \Omega), \quad (6)$$

$$M = (r, z), \quad N = (x, y), \quad f(r, z) = \delta + \gamma(r - a) - (r - a)^2(2R_1)^{-1} - z^2(2R_2)^{-1}.$$

Также предполагается, что существует ограниченная область $S_0 = \{M : f(M) > 0\}$ такая, что $\Omega \subset \bar{S}_0 \subset S$. Вводятся нелинейные операторы $v^+(M) = \sup\{v(M), 0\}$, $v^-(M) = \inf\{v(M), 0\}$ и рассматривается операторное уравнение

$$T_* v = 0 \quad (M \in \Omega), \quad T_* \equiv \mu v^- + \theta^{-1} K v^+ - 2\pi f, \quad \mu = \text{const}, \quad (7)$$

где $v^\pm = v^\pm(M)$, $f = f(M)$, K — интегральный оператор вида $Kv^+ = \int_S K(M, N)v^+(N) dS_N$. Формулируются теоремы эквивалентности (6)

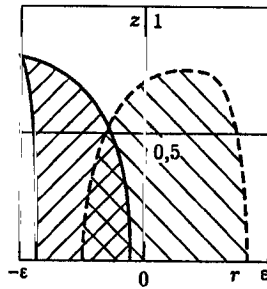


Рис. 2

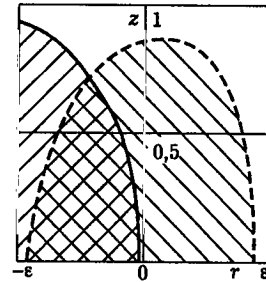


Рис. 3

и уравнения (7), существования и единственности решения уравнения (7). Для определения величин P и H к уравнению (7) следует присоединить два интегральных условия равновесия штампа. При численном решении уравнения (7) применяется метод М. А. Красносельского, суть которого заключается в построении последовательных приближений по формулам $v_{n+1} = v_n - (Q'v_n)^{-1} T_* v_n$, $v_n = v_n(M)$, $n = 0, 1, \dots$, $v_0 = g$, где Q — дифференцируемый оператор, хорошо аппроксимирующий оператор T_* вида (7) по равномерной метрике. Ядро интегрального уравнения контактной задачи регуляризуется как вне ребра, так и на ребре клина. Если прямоугольник S не выходит на ребро клина, то его центр помещается в точку $r = a$, $z = 0$ и вводятся безразмерные величины и обозначения $r - a = r'b$, $z = z'b$, $\delta = \delta'b$, $A = b/(2R_1)$, $B = b/(2R_2)$, $\lambda = a/b$, $\epsilon = c/b$, $P = P'2\pi\theta b^2$, $\Omega' \rightarrow \Omega$ и т.д. Эти формулы имеют место при $\lambda > \epsilon$, когда прямоугольник S вытянут вдоль оси z ($R_1 \leq R_2$) или $\lambda > 1$, когда он вытянут вдоль оси r ($R_1 \geq R_2$). При $\lambda \leq \epsilon$ ($R_1 \leq R_2$) или $\lambda \leq 1$ ($R_1 \geq R_2$) считается, что одна сторона прямоугольника находится на ребре клина и за его центр принимается точка $r = c$, $z = 0$ при $R_1 \leq R_2$ или точка $r = b$, $z = 0$ при $R_1 \geq R_2$. В этих случаях используются те же обозначения с заменой первого на $r - c = r'b$ при $R_1 \leq R_2$ или на $r - b = r'b$ при $R_1 \geq R_2$. Штрихи опускаем. Для отладки созданной компьютерной программы использовались известные точные решения контактных задач для полупространства и найденные в [39] асимптотические решения. Численный анализ проводится для задачи a при $\nu = 0,3$ и двух ориентациях штампа относительно ребра клина. В силу регуляризации ядра значение $\lambda = 0$ отвечает случаю, когда точка первоначального касания штампа и клина «почти» выходит на ребро. Показано, что при $2\alpha \approx 90^\circ$ значение $P = P(\delta)$ при $\lambda \rightarrow 0$ мало зависит от того, вдоль какой из осей координат (r или z) вытянут эллиптический параболоид. При острых углах раствора клина легче вдавить вытянутый вдоль ребра штамп, а при тупых углах — вытянутый перпендикулярно ребру клина. Вблизи ребра сохраняется известная для задачи Герца зависимость $\delta \sim P^{2/3}$. На рис. 2, 3 заштрихованы верхние половины

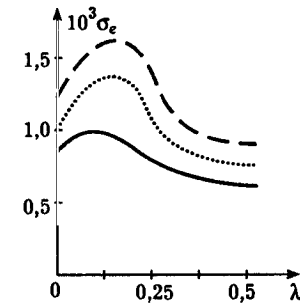


Рис. 4

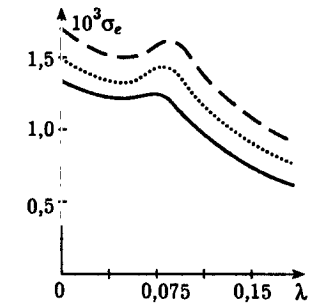


Рис. 5

областей контакта Ω для углов $2\alpha = 65^\circ$ (рис. 2) и $2\alpha = 135^\circ$ (рис. 3). При этом $\epsilon = 0,15$, $\delta = 0,005$, $\gamma = 0$, $A = 0,1$, $B = 0,005$; при $\lambda = 0$ граница области Ω показана сплошной линией, а при $\lambda = \epsilon$ — пунктиром. При $2\alpha = 65^\circ$ площадь области Ω значительно меньше, чем при $2\alpha = 135^\circ$ (этот факт имеет место и в случае $A < B$). Для достаточно острых углов 2α и $\lambda \rightarrow 0$ наблюдается эффект нарушения контакта в окрестности точки первоначального касания (ребро как бы отходит), особенно при вытянутости штампа вдоль ребра.

После решения контактной задачи, зная функцию $q(r, z)$ и площадку контакта Ω , возможно определение играющего важную роль в приложениях (расчет зубчатых передач Новикова) безразмерного эффективного напряжения $\sigma'_e = \sigma_e / (2\pi\theta)$. В качестве примера в рамках понятия поверхностной прочности определяется и сравнивается со случаем упругого полупространства [31] σ'_e в точке первоначального касания $r = a_0$, $z = 0$ ($a_0 = \lambda - \epsilon$ при $\lambda \leq \epsilon$ и $R_1 \leq R_2$; $a_0 = \lambda - 1$ при $\lambda \leq 1$ и $R_1 \geq R_2$; в других случаях $a_0 = 0$) по формуле (штрих опустим)

$$\sigma_e = \frac{\sqrt{2}}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]^{1/2}, \quad (8)$$

где σ_n ($n = 1, 2, 3$) — главные напряжения. Расчеты показывают, что вблизи ребра зависимость σ_e от δ , а также от λ может быть немонотонной. Для острых углов раствора клина эффективные напряжения менее опасные, чем для тупых углов, что объясняется большей податливостью упругого клина в окрестности ребра (осадка же вблизи ребра растет с уменьшением α). При $\pi/2 < 2\alpha < \pi$ максимум поверхностного эффективного напряжения в точке первоначального контакта как функции параметра λ достигается либо вблизи ребра, либо на самом ребре клина ($\lambda \rightarrow 0$), где следует ожидать наибольшего выкрашивания зубчатой передачи.

На рис. 4, 5 приведены характерные графики зависимости σ_e в точке начального касания от λ при $2\alpha = 110^\circ$, $\epsilon = 0,15$, $\gamma = 0$ и $10^3 A = 4,8$,

$10^3 B = 48$ (рис. 4, подход к ребру большей полуосью) или $10^3 A = 48$, $10^3 B = 4,8$ (рис. 5, подход к ребру меньшей полуосью), а также при постоянной вдавливающей силе $10^3 P = P_* = 0,374$ (сплошная линия), $10^3 P = 1,5P_*$ (пунктирная кривая), $10^3 P = 2P_*$ (штриховая кривая). Из рис. 5 видно, что при вытянутости штампа вдоль ребра для появления вблизи ребра локального максимума функции $\sigma_c(\lambda)$ требуется достаточно большая сила P (при этом абсолютный максимум имеем на ребре клина). При тех же параметрах задачи у зависимости нормального контактного давления $q_0(\lambda)$ в точке начального касания локальных максимумов не наблюдается. Численный анализ этой задачи позволил уточнить методику расчета на контактную прочность зубчатых передач Новикова [34, 36].

В решение плоских контактных задач для упругого клина значительный вклад внес В. М. Александров с соавторами [2, 8]. Ими рассмотрены задачи о плоской деформации бесконечного упругого клина, в одну грань которого без учета сил трения вдавливается плоский, наклонный или параболический жесткий штамп, а на другой грани выполняется одно из следующих условий: отсутствие напряжений, скользящая или жесткая заделка. Для решения интегральных уравнений в этих работах развиваются регулярный и сингулярный асимптотические методы (в зависимости от значения основного безразмерного параметра, характеризующего относительную удаленность области контакта от вершины клина), метод получения точного решения интегрального уравнения после специальной аппроксимации функции-символа ядра, другие методы. Получены решения, ограниченные на одном или на обоих краях области контакта, соответственно для наклонного или параболического штампов. Аналогичная задача с неизвестной областью контакта в случае параболического штампа изучалась в работе В. И. Короткина, И. А. Лубягина и М. И. Чебакова [35] с использованием специальной аппроксимации символа ядра интегрального уравнения. Сделаны расчеты применительно к плоским зубчатым зацеплениям.

В. Н. Беркович [13] применил метод факторизации матриц-функций к решению плоских контактных задач для клина, жестко сцепленного со штампом. Б. М. Нуллер [41] изучил плоскую контактную задачу для упругого клина, подкрепленного стержнем равного сопротивления. Двумерные задачи для упруго контактирующих клиньев при наличии трения рассматривались в работах А. Е. Дыхнова [26, 27].

В статье Ю. А. Антипова и Н. Х. Арутюняна [9] введение зон трения в область контакта со сцеплением позволило не только устранить осцилляцию контактных напряжений в окрестности концов штампа, но и построить аналитическое решение плоской контактной задачи для клина при неизвестных контактных касательных и нормальных напряжениях. Аналогичное решение для полностью сцепленного штампа получить пока не удалось.

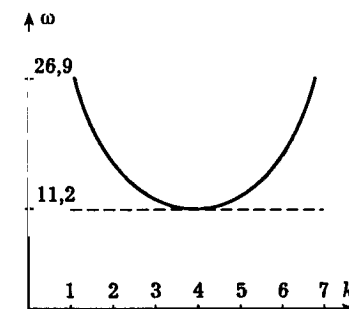


Рис. 6

2. В работах В. М. Александрова и Д. А. Пожарского [7, 49, 50] исследуются пространственные контактные задачи для упругого конуса. При помощи разложения векторных функций по полной системе векторных гармоник на поверхности конуса [25] с использованием интегрального преобразования Меллина и ряда Фурье выводится интегральное уравнение контактной задачи для пространственного конуса. Используются сферические координаты ρ, η, ψ . Для осевой симметрии находятся [50] однородные решения для конуса, включая корни характеристического уравнения при разных углах конусности 2α , полезные при решении контактных задач для усеченного конуса. Рассматриваются задачи о взаимодействии конуса с жестким [49] или деформируемым [50] кольцевым биндажом. Используются асимптотические методы «больших и малых λ », где параметр λ характеризует относительную удаленность биндажа от вершины конуса. Численный анализ свидетельствует о смыкании разных асимптотических решений в определенном диапазоне значений λ , зависящем от α .

Контактная задача о вдавливании без трения системы N периодически расположенных одинаковых клиновидных штампов угла раствора 2β ($\beta < \pi/N$) в упругий конус угла 2α (вершины штампов и конуса совпадают) изучается в [50]. В расчетах $N = 1, 2$. После использования преобразования Меллина получается одномерное интегральное уравнение. Исключаются решения с неограниченной энергией. Следуя методике, развитой в [1], находится асимптотическое решение этого уравнения для малых углов штампов. Анализ нулей характеристического уравнения позволяет описать поведение функции контактных давлений $q(\rho, \psi)$ в кончиках штампов. Как и в работах [1, 5], здесь, независимо от формы основания штампа, в асимптотическом разложении функции $q(\rho, \psi)$ при $\rho \rightarrow 0$ имеются члены порядка $\rho^{-i\omega-3/2}$ (осцилляции) и $\rho^{-\varepsilon}$, $\varepsilon \in (0; 1)$. Исследуется влияние степени конусности упругого тела на показатели ω и ε при фиксированном достаточно малом β .

На рис. 6 приведена зависимость частоты осцилляции штампа ω ($N = 1$) от угла $\alpha = \pi k/8$ ($\beta = 0,2, \nu = 0,3$); штриховая линия соответствует

ТАБЛИЦА 1

n	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 7$
1	0,999	0,999	0,999	0,788	0,999	0,999	0,999
2	0,989	0,991	0,999	0,703	0,998	0,998	0,999
3	0,938	0,951	0,996	0,611	0,994	0,992	0,997
4	0,798	0,848	0,989	0,500	0,983	0,976	0,989
5	0,551	0,665	0,980	0,357	0,966	0,944	0,973
6	0,266	0,463	0,971	0,184	0,945	0,899	0,950
7	0,065	0,375	0,965	0,043	0,930	0,860	0,936

ТАБЛИЦА 2

n	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 7$
1	0,602	0,567	0,524	0,528	0,704	0,882	0,973
2	0,366	0,335	0,294	0,295	0,577	0,822	0,956
3	0,116	0,104	0,087	0,080	0,488	0,772	0,938

такой же задаче для пространственного упругого клина угла раствора α [5]. Если частота осцилляций клиновидного штампа на упругом клине мало зависит от угла раствора последнего, то для упругого конуса частота имеет минимум при $\alpha = \pi/2$ (полупространство), причем при $\alpha = \pi k/8$ и $\alpha = \pi - \pi k/8$, $k = 1, 2, 3$ различие соответствующих значений A не превышает 3%. Расчеты показывают, что при фиксированном малом угле β и уменьшении угла α возникают дополнительные осцилляции штампа. При $N = 2$ и малых углах штампов качественная картина не меняется по сравнению с описанной выше.

При не слишком малых углах β для анализа асимптотики функции контактных давлений в вершине клина применяется численный метод поиска спектра интегрального оператора [11]. Если при $s = s_k$ детерминант $D(s)$ бесконечномерной матрицы обращается в нуль, то $q(\rho, \psi) \sim \rho^{-\varepsilon}$, $\varepsilon = 3/2 + s_k$ при $\rho \rightarrow 0$.

В табл. 1 и 2 при $N = 1$ и $N = 2$, соответственно, даны значения наибольшего показателя особенности ε , соответствующего вещественным нулям $D(s)$, $s \in (-3/2; -1/2)$ в зависимости от углов $\alpha = \pi m/8$ и $\beta = \pi n/8$ при $\nu = 0,3$. Для случая $N = 1$ при небольшом отклонении угла конуса 2α от π (от полупространства) в ту или другую сторону и фиксированном β из точки $s = -1/2$ появляется новый нуль функции $D(s)$, дающий более сильную особенность функции $q(\rho, \psi)$ при $\rho \rightarrow 0$, чем тот корень уравнения $D(s) = 0$ в интервале $s \in (-3/2; -1/2)$, который был единственным при $2\alpha = \pi$. При дальнейшем плавном изменении α этот нуль меняется непрерывно, давая значения показателя особенности ε , приведенные в табл. 1. При $N = 1$ для углов β , близких к π , и значений $\alpha = \pi m/8$,

$m = 2, 3, 5, 6$ появляется двукратный корень уравнения $D(s) = 0$. Возникающая при этом особенность может приводить к смене знака функции контактных давлений при $\rho \rightarrow 0$, т.е. к отрыву кончика штампа. При $N = 2$ и $2\alpha > \pi$ (конусообразная воронка) наблюдаются более сильные, чем при $2\alpha < \pi$, вещественные особенности функции контактных давлений, а также кратные корни. В целом, как видно из сравнения табл. 1 и 2, при $N = 2$ вещественные показатели особенности более слабые, чем при $N = 1$.

В статье [7] исследуется контактная задача с неизвестной областью контакта о вдавливании без трения жесткого штампа — эллиптического параболоида — в упругий конус. В отличие от упругого клина здесь отмечается проблематичность точного выделения всех особенностей ядра интегрального уравнения контактной задачи вне вершины конуса. Для приближенного решения интегрального уравнения при достаточной удаленности области контакта от вершины конуса применяется метод нелинейных граничных уравнений [22, 23]. Приводятся графики вдавливающей штампа силы при постоянной осадке штампа и осадки при постоянной силе в зависимости от удаленности штампа от вершины конуса при разных α , графики зависимости момента силы от α при отсутствии перекоса штампа. Определяются границы неизвестных областей контакта. При приближении штампа к вершине конуса острого угла раствора площадь области контакта уменьшается, а осадка при постоянной вдавливающей силе увеличивается.

3. Геометрическое преобразование инверсии в пространстве связывает клин и сферическую линзу. В работах [43, 50, 56] показывается, что схожи и математические методы решения задач теории упругости для этих тел. В [50] метод сведения задачи теории упругости к обобщенной по И. Н. Векуа краевой задаче Гильберта распространяется на смешанную пространственную задачу для усеченного шара, сферическая поверхность которого жестко закреплена, а на срезе заданы нормальные напряжения, а также на аналогичную задачу для полупространства со сферической выемкой или выступом. Используется обобщенное комплексное интегральное преобразование Мелера—Фока и тороидальные координаты ξ, η, φ , причем $\eta = \text{const}$ — уравнения поверхности тела. Системы функциональных уравнений этих задач преобразуются к системам сингулярных интегральных уравнений. Излагаемая методика применима к исследованию задач для произвольной упругой сферической линзы, т.е. тела, образованного пересечением двух сфер разного радиуса.

На основе указанной выше методики В. М. Александровым и Д. А. Пожарским изучаются осесимметричная [6] и неосесимметричная [50] контактные задачи о вдавливании кругового в плане штампа в срез усеченного шара и осесимметричная контактная задача о вдавливании кольцевого штампа в плоскую часть поверхности полупространства, имеющего

ТАБЛИЦА 3

n	1	2	3	4	5	6
$b = 0,1$	0,300	0,302	0,312	0,324	0,324	0,325
$b = 1$	0,240	0,146	0,194	0,347	0,350	0,359
$b = 2$	0,0943	0,0757	0,127	0,310	0,344	0,359

жестко защемленную сферическую выемку или выступ [50]. Интегральные уравнения этих задач сводятся при помощи метода парных уравнений к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода. Приводится следующий численный пример. Пусть R — радиус усеченного шара, R_* — радиус среза ($\eta = 0$), $R_*/R = \sin \alpha$. В условиях осевой симметрии по координате φ функция нормальных контактных давлений под штампом $\sigma_z(\xi, 0, \varphi)\theta^{-1} = -\psi(\xi)(\operatorname{ch} \xi + 1)^{3/2}$, где θ — контактная жесткость, координата ξ отнесена к R_* , $z = 0$ — уравнение среза в цилиндрических координатах. Пусть отнесенная к R_* осадка плоского штампа — δ , а область контакта — круг $\xi \leq b$. В табл. 3 даны значения коэффициента при особенности функции контактных давлений в точке $\xi = b \lim_{\xi \rightarrow b} \sqrt{\operatorname{ch} b - \operatorname{ch} \xi} \psi(\xi) \delta^{-1} = \kappa$ ($\xi \rightarrow b$) при разных b и углах $\alpha = \pi n/6$, характеризующих степень усеченности шара ($\nu = 0,3$). Отношение размерного радиуса круговой области контакта к радиусу сечения R_* при $b = 0,1$ равно 0,050, при $b = 1$ — 0,462, а при $b = 2$ — 0,762. Расчеты показывают, что при дальнейшем увеличении b значение κ может менять знак, т.е. упругая среда шара может отходить от кромки штампа. Это происходит, например, при $b = 3$ (размерный радиус области контакта равен 0,905 R_*) и $\alpha = \pi/6$.

Отметим, что в [50] также рассматривается плоская контактная задача для круговой лунки, т.е. тела, образованного пересечением двух окружностей (преобразование инверсии клина на плоскости). Используются биполярные координаты. Как и для плоского упругого клина, здесь удается получить точную функцию Грина [30] для последующего решения контактной задачи. Однако для этого после применения комплексного интегрального преобразования Фурье приходится решать функциональное уравнение со сдвигом. Для решения интегрального уравнения контактной задачи применяется асимптотический метод, эффективный для относительно удаленной от угловых точек области контакта. Приводятся численные результаты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В. М., Бабешко В. А. О давлении на упругое полупространство штампа клиновидной формы в плане // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 1. С. 88–93.
2. Александров В. М., Пожарский Д. А. Об одной контактной задаче для упругого клина // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 4. С. 651–656.
3. Александров В. М., Пожарский Д. А. Действие полосового штампа на упругий несжимаемый пространственный клин // Прикл. мех. 1989. Т. 25. № 8. С. 19–26.

4. Александров В. М., Пожарский Д. А. Действие полосового штампа на упругий пространственный клин // Прикл. мех. 1992. Т. 28. № 1. С. 56–62.
5. Александров В. М., Пожарский Д. А. О контактных напряжениях в вершине клиновидного штампа, выходящей на ребро упругого пространственного клина // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 1. С. 135–141.
6. Александров В. М., Пожарский Д. А. Об осесимметричной контактной задаче теории упругости для усеченного шара // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 2. С. 305–311.
7. Александров В. М., Пожарский Д. А. О пространственной контактной задаче для упругого конуса с неизвестной областью контакта // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 2. С. 36–41.
8. Александров В. М., Ромалис Б. Л. Контактные задачи в машиностроении. М.: Машиностроение, 1986. 174 с.
9. Антипов Ю. А., Арутюнян Н. Х. Контактные задачи теории упругости для клиновидных областей в условиях трения и сцепления // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 5. С. 709–722.
10. Бабешко В. А., Беркович В. Н. К теории смешанных задач для пространственного клина // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 5. С. 943–947.
11. Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.
12. Беркович В. Н. Некоторые контактные задачи для пространственного клина с конечным числом областей контакта // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 2. С. 373–377.
13. Беркович В. Н. Метод факторизации матриц в смешанных задачах статики упругого клина // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 4. С. 674–681.
14. Беркович В. Н. О точном решении одного класса интегральных уравнений смешанных задач упругости и математической физики // Докл. АН СССР. 1982. Т. 267. № 2. С. 327–330.
15. Беркович В. Н. К теории смешанных задач динамики клиновидных композиций // Докл. АН СССР. 1990. Т. 314. № 1. С. 172–175.
16. Босаков С. В. Определение перемещений границы пространственного клина от нормальной сосредоточенной силы // Вопросы строительства и архитектуры. Минск. 1981. Вып. 11. С. 77–79.
17. Босаков С. В., Фомичева Н. М. Перемещения границы пространственного клина от действия нормальной сосредоточенной силы при произвольном коэффициенте Пуассона // Вопросы строительства и архитектуры. Минск. 1986. Вып. 15. С. 53–56.
18. Босаков С. В., Фомичева Н. М. Действие сосредоточенной силы на упругое четвертьпространство // Теоретическая и прикладная механика. Вып. 15. Минск: Высшая школа, 1988. С. 100–108.
19. Васильев В. Б. Интегральное уравнение одной задачи о вдавлении клиновидного штампа // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 2. С. 272–279.
20. Векуа И. Н. Об одной линейной граничной задаче Римана // Тр. Тбилиск. Мат. ин-та АН ГрузССР. 1942. Вып. 11. С. 109–139.
21. Вовкодав И. Ф., Орлюк Е. И., Улитко А. Ф. Обобщенная по И. Н. Векуа задача Гильберта в пространственной теории упругости // Тез. докл. Республ. школы-конф. по общей механике и теории упругости. Тбилиси: Мецниереба, 1981. С. 21–22.
22. Галанов Б. А. Метод граничных уравнений типа Гаммерштейна для контактных задач теории упругости в случае неизвестных областей контакта // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 5. С. 827–835.
23. Галанов Б. А. Нелинейные граничные уравнения контактных задач теории упругости // Докл. АН СССР. 1987. Т. 296. № 4. С. 812–815.

24. Глушков Е. В., Глушкова Н. В. Об особенностях поля упругих напряжений в окрестности вершины клиновидной пространственной трещины // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 4. С. 82–86.
25. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. Равновесие упругих тел канонической формы. Киев: Наукова думка, 1985. 280 с.
26. Дыхнов А. Е. Контактная задача для упругих клиньев при наличии трения вдоль примыкающего к общей вершине участка граней // Докл. АН СССР. 1979. Т. 249. № 4. С. 804–808.
27. Дыхнов А. Е. Особенности напряженного состояния в окрестности углов упруго контактирующих плоских клиньев при наличии трения // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 6. С. 144–148.
28. Ефимов А. Б., Ефимов Д. Г. Сосредоточенные воздействия на упругий несжимаемый клин // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 6. С. 89–92.
29. Ефимов А. Б., Ефимов Д. Г. Действие сосредоточенной силы на ребро несжимаемого упругого клина // Вестник МГУ. Сер. Мат. Мех. 1987. № 3. С. 98–101.
30. Керекеша П. В., Лемпер Е. И., Медерос О. В. Первая основная задача теории упругости для симметричной лунки // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 1. С. 149–152.
31. Ковальский Б. С. Расчет деталей машин на местное сжатие. Харьков: Изд-во ХВКИУ, 1967. 223 с.
32. Копасенко В. В., Краснобородько А. А., Лебедев В. К. Решение задач теории упругости для четверти пространства / Тез. докл. Всес. конф. по теории упругости. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1979. С. 189–190.
33. Копасенко В. В., Лебедев В. К. Смешанная задача теории упругости для четверти пространства // Изв. СКНЦ ВШ. Сер. естеств. наук. 1977. № 3. С. 30–31.
34. Короткин В. И. Об учете краевых эффектов при расчете передач Новикова на контактную выносливость // Вестник машиностроения. 1997. № 6. С. 8–11.
35. Короткин В. И., Лубягин И. А., Чебаков М. И. К расчету плоских зубчатых зацеплений // Современные проблемы механики контактных взаимодействий. Днепропетровск: Изд-во ДГУ, 1990. С. 66–69.
36. Короткин В. И., Пожарский Д. А. Вдавливание штампа в упругий пространственный клин как модель контактного взаимодействия зубьев зубчатых передач // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1996. № 3. С. 107–113.
37. Лубягин И. А., Пожарский Д. А., Чебаков М. И. Обобщение задач Буссинеска и Черрути для случая упругого пространственного клина // Докл. АН СССР. 1991. Т. 321. № 1. С. 58–62.
38. Лубягин И. А., Пожарский Д. А., Чебаков М. И. Пространственные контактные задачи для упругого клина // Тез. докл. 7-го Всес. съезда по теоретич. и прикл. механике. М. 1991. С. 232–233.
39. Лубягин И. А., Пожарский Д. А., Чебаков М. И. Внедрение штампа в форме эллиптического параболоида в упругий пространственный клин // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 2. С. 286–295.
40. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
41. Нуллер Б. М. Контактная задача для упругого клина, подкрепленного стержнем равного сопротивления // Докл. АН СССР. 1975. Т. 225. № 3. С. 532–534.
42. Орлюк Е. И. Функциональные уравнения пространственной задачи теории упругости для клина и их решение // Докл. АН УССР. Сер. А. 1979. № 3. С. 194–198.
43. Орлюк Е. И. Обобщенная по И. Н. Векуа краевая задача Гильберта в пространственной теории упругости. Автореф. дисс. на соискание учен. степени канд. физ.-мат. наук. Киев. 1987. 18 с.

44. Пожарский Д. А. Контактная задача теории упругости для пространственного несжимаемого клина // Вестник МГУ. Сер. Мат. Мех. 1988. № 5. С. 78–81.
45. Пожарский Д. А. Об эллиптической трещине в упругом пространственном клине // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 6. С. 105–112.
46. Пожарский Д. А. К задаче о действии полосового штампа на упругий пространственный клин с одной свободной от напряжений гранью // Прикл. мех. 1994. Т. 30. № 5. С. 32–42.
47. Пожарский Д. А. О пространственной задаче для упругого клина, имеющего полосовой разрез // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 5. С. 148–153.
48. Пожарский Д. А. О пространственной контактной задаче для упругого клина с неизвестной областью контакта // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 5. С. 812–818.
49. Пожарский Д. А. О пространственной контактной задаче для упругого конуса // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 4. С. 51–60.
50. Пожарский Д. А. Пространственные задачи теории упругости со смешанными граничными условиями для тел сложной геометрии. Автореф. дисс. на соискание учен. степени докт. физ.-мат. наук. М. 1998. 32 с.
51. Полкунов Ю. Г., Романова Л. М. Напряженное состояние четверти пространства от воздействия единичной распределенной нагрузки // Кемерово: Кузбасск. политехн. ин-т, 1990. 13 с.– Деп. в ВИНТИ. 26.07.90. № 4200–В90.
52. Попов Г. Я. Об одном способе решения краевых задач теории упругости // Тез. докл. 2-й Всес. конф. по теории упругости. Тбилиси: Изд-во Мецниереба, 1984. С. 232–234.
53. Процеров Ю. С., Целиков Г. С. Смешанная задача теории упругости для четвертьпространства // Тез. докл. 4-й Всес. конф. «Смешанные задачи мех. деформир. тела». Ч. 2. Одесса. 1989. С. 66.
54. Развитие теории контактных задач в СССР / Под ред. Л. А. Галина. М.: Наука, 1976. 493 с.
55. Улитко А. Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. Киев: Наукова думка, 1979. 262 с.
56. Улитко А. Ф. Обобщенная по И. Н. Векуа краевая задача Гильберта в пространственной теории упругости / Тр. Всес. симп. «Современные проблемы математической физики». Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1987. Т. 2. С. 341–348.
57. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.
58. Уфлянд Я. С. Некоторые пространственные задачи теории упругости для клина // Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М.: Наука, 1972. С. 549–554.
59. Федоров А. Г., Босаков С. В. Определение перемещений границы упругого четвертьпространства от действия сосредоточенных сил // Фундаменты на искусственных основаниях в условиях БССР. Минск. 1986. С. 55–61.
60. Шевелева Г. И. Расчет упругих контактных перемещений на поверхностях деталей ограниченных размеров // Машиностроение. 1984. № 4. С. 92–98.
61. Шевелева Г. И. Решение контактных задач методом последовательного нагружения при разных условиях равновесия // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1990. № 4. С. 68–74.
62. Шевелева Г. И., Гундаев С. А. Решение контактной задачи методом последовательного нагружения // Изв. вузов. Машиностроение. 1986. № 9. С. 10–15.
63. Шеремет В. Д. Тензор влияния одной задачи для упругой четверти пространства // Изв. вузов. Строительство и архитектура. 1985. № 6. С. 33–38.

64. Шеремет В. Д. Функции и матрицы Грина смешанных граничных задач теории упругости для 1/2, 1/4 и 1/8 пространства. Кишинев: Кишинев. с.-х. ин-т, 1990. 24 с. — Деп. в ВИНТИ. 03.08.90. № 4469-В90.
65. Hanson M. T., Keer L. M. A simplified analysis for an elastic quarter-space // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1990. V. 43. No. 4. P. 561–587.
66. Hetenyi M. A general solution for the elastic quarter space // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1970. V. 37. No. 1. P. 70–76.
67. Keer L. M., Lee J. C., Mura T. Hetenyi's elastic quarter space problem revisited // Int. J. Solids and Struct. 1983. V. 19. No. 6. P. 497–506.
68. Keer L. M., Lee J. C., Mura T. A contact problem for the elastic quarter space // Int. J. Solids and Struct. 1984. V. 20. No. 5. P. 513–524.
69. Shimada I., Okamura H., Sonoda K. Elastic solution of a 1/4 or 1/8-infinite solid with a force at a point in its interior // Mem. Fac. Eng. Osaka City Univ. 1981. V. 22. P. 175–193.

§ 4. СТАТИЧЕСКИЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ПО ГЛУБИНЕ ОСНОВАНИЯ

С. М. Айзикович

Дается обзор результатов, полученных методом парных интегральных уравнений в области контактных задач теории упругости для непрерывно-неоднородных по глубине (или градиентных) тел. Задачи рассматриваются для полуплоскости, полупространства и полосы. Здесь не будут затрагиваться работы, посвященные расчетам слоистых тел.

Напомним, что тело называется стратифицированным, если его коэффициенты упругости зависят от одной координаты. Частным случаем стратифицированных тел являются градиентные тела, у которых упругие свойства непрерывно зависят от координаты, и слоистые — с кусочно-постоянной зависимостью упругих модулей от координаты.

Основное внимание уделяется ключевым этапам построения решения: во-первых, сведению задачи к парному интегральному уравнению (т.е. построению трансформанты ядра парного интегрального уравнения и исследованию ее свойств); во-вторых, построению решения полученного парного интегрального уравнения и использованию найденного решения для определения механических характеристик задачи.

1. Контактные задачи для градиентной полуплоскости сводятся к решению парного интегрального уравнения следующего вида [2, 7, 8]:

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\alpha) \frac{1}{|\alpha|} L(\lambda\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = 2\pi\theta(0)f(x), & |x| \leq 1, \\ \int_{-\infty}^{\infty} Q(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = 0, & |x| > 1. \end{cases} \quad (1)$$

$$q(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad \int_{-1}^1 q(\xi) e^{i\alpha\xi} d\xi = Q(\alpha).$$

Причем имеет место дополнительное условие:

$$\int_{-1}^1 q(x) dx = P. \quad (2)$$

Здесь $q(x)$ — безразмерное неизвестное контактное давление под штампом, $f(x)$ — безразмерная осадка поверхности полуплоскости под штампом, λ — характерный геометрический параметр задачи.

Контактные задачи для полупространства с переменным по глубине коэффициентом Пуассона в плоской постановке подробно исследовались в работах Е. А. Кузнецова [18, 20–22, 34, 35].

Одна из основных трудностей сведения задачи к парному интегральному уравнению состоит в построении трансформанты ядра уравнения, функции $L(\alpha)$.

В работах [2, 7, 8] рассмотрен наиболее общий случай неоднородности.

Здесь на изменение по глубине коэффициентов Ламе наложены следующие ограничения:

$$\begin{aligned} \min_{y \in (0, -\infty)} \theta(y) &\geq c_1 > 0; & \max_{y \in (0, -\infty)} \theta(y) &\leq c_2 < \infty, \\ \lim_{y \rightarrow -\infty} \theta(y) &= \text{const} \neq 0, \\ \theta(y) &= \frac{2M(y)[\Lambda(y) + M(y)]}{\Lambda(y) + 2M(y)}; & \left(\theta(y) = \frac{G(y)}{1 - \nu(y)} = \frac{E(y)}{2(1 - \nu^2(y))} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где c_1, c_2 — некоторые постоянные.

В соотношениях (3) $\Lambda(y), M(y)$ — функции изменения по глубине полуплоскости коэффициентов Ламе, $G(y)$ — функция изменения по глубине y модуля сдвига в неоднородной полуплоскости, $\nu(y)$ — коэффициент Пуассона, $E(y)$ — функция изменения модуля Юнга. Соотношения (3) означают, что коэффициенты Ламе изменяются произвольно от одного конечного значения к другому и отделены от нуля, причем начиная с некоторой глубины стабилизируются, стремясь к некоторому постоянному значению.

Такие свойства соответствуют следующей модели основания: неоднородная по глубине полоса, склеенная с однородной полуплоскостью:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \Lambda_0(y), \quad M = M_0(y), \quad 0 \geq y \geq -H, \\ \Lambda &= \Lambda_1 = \Lambda_0(-H), \quad M = M_1 = M_0(-H), \quad -H \geq y \geq -\infty. \end{aligned} \quad (4)$$

Для построения трансформанты ядра интегрального уравнения, функции $L(\alpha)$, использовался численный алгоритм метода моделирующих функций [2, 7]. Устойчивость алгоритма достигалась за счет выделения в явном виде экспоненциальной составляющей в определяемом численно фундаментальном решении системы обыкновенных дифференциальных уравнений соответствующей краевой задачи. При этом

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= d_1(\alpha)a_1^3(\alpha) + d_2(\alpha)a_2^3(\alpha), \\ \bar{a}_i(\alpha, 0) &= (a_i^1(\alpha), a_i^2(\alpha), a_i^3(\alpha), a_i^4(\alpha)), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь векторы $\bar{a}_i(\alpha, y), (i = 1, 2)$ определяются из решения следующих задач Коши (α — фиксировано):

$$\frac{d\bar{a}_i(\alpha, y)}{dy} = \bar{A}\bar{a}_i - |\alpha|\bar{a}_i, \quad y \in [-H, 0], \quad i = 1, 2 \quad (6)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} 1. \quad \bar{a}_1(\alpha, -H) &= (1, \alpha, 1, \alpha), \\ 2. \quad \bar{a}_2(\alpha, -H) &= (\alpha y, \alpha + \alpha^2 y, -\alpha + \alpha y, -\alpha + \alpha + \alpha^2 y) \Big|_{y=-H}, \\ \kappa &= (3M + \Lambda)(M + \Lambda)^{-1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Матрица \bar{A} имеет вид

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha^2 \frac{2M + \Lambda}{M} & -\frac{M'}{M} & -\alpha \frac{M'}{M} & -\alpha \frac{M + \Lambda}{M} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha \frac{\Lambda'}{2M + \Lambda} & \alpha \frac{M + \Lambda}{2M + \Lambda} & \alpha^2 \frac{M}{2M + \Lambda} & -\frac{2M' + \Lambda'}{2M + \Lambda} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Функции $d_i(\alpha), i = 1, 2$ определяются из линейной алгебраической системы уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 d_i(\alpha) [a_i^2(\alpha) + \alpha a_i^3(\alpha)] &= 0, \\ \sum_{i=1}^2 d_i(\alpha) [-\Lambda(0)\alpha a_i^1(\alpha, 0) + (\Lambda(0) + 2M(0))a_i^4(\alpha, 0)] &= \theta(0)\alpha. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $a_i^k(\alpha, y)$ обозначает k -ю компоненту вектора $\bar{a}_i(\alpha, y)$, а суммы берутся по $i = 1, 2$. При выполнении условий (3) построенная функция $L(\alpha)$ обладает следующими свойствами [2, 5, 7]:

$$L(\alpha) = A + B|\alpha| + o(\alpha^2) \quad \text{при } \alpha \rightarrow 0,$$

$$L(\alpha) = 1 + D|\alpha|^{-1} + o(\alpha^{-2}) \quad \text{при } \alpha \rightarrow \infty,$$

$$A = \theta(0)\theta^{-1}(-H), \quad B, D \text{ — некоторые постоянные.} \quad (10)$$

Свойство (10) означает, что значение $L(0)$ не зависит от того, каким образом изменяются модули упругости в неоднородном слое от $y = 0$ до $y = -H$, а определяются только их значениями при $y = 0$ и $y = -H$.

Для решения уравнения (1) с трансформантой ядра $L(\alpha)$, обладающей свойствами (10), использовался ряд методов: метод «больших λ », функционального параметра, ортогональных полиномов, метод коллокации по чебышевским узлам и двухсторонне асимптотический метод [1, 2, 7, 8]. Наиболее эффективным методом решения такого класса интегральных уравнений показал себя двухсторонне асимптотический метод [3]. Его погрешность значительно меньше, чем у всех перечисленных выше методов, кроме того, он применим практически при всех допустимых значениях характерного геометрического параметра задачи.

Ниже приведем решение уравнения (1), построенного двухсторонне асимптотическим методом.

Считаем, что правая часть уравнения (1) представима в виде ряда Фурье

$$\pi\theta(0)f(x) = \frac{f_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cos k\pi x. \quad (11)$$

В этом случае распределение контактных давлений под штампом имеет вид [7]

$$q(x) = \frac{P}{\pi\sqrt{1-x^2}} + \sum_{n=1}^N C_n F\left(i \frac{a_n}{\lambda}; x\right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k k \pi}{L_N(k\pi)} F(k\pi; x), \quad (12)$$

$$F(\varepsilon, x) = -\frac{J_1(\varepsilon)}{\sqrt{1-x^2}} + \varepsilon \int_x^1 [J_0(\varepsilon)\varepsilon \cos \varepsilon(\alpha-x) - J_1(\varepsilon) \sin \varepsilon(\alpha-x)] \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}},$$

где λ — характерный параметр задачи, $\lambda = H/a$, где H — толщина неоднородной полосы, a — полуширина штампа.

Постоянные C_n определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{n=1}^N C_n Z\left(i \frac{a_n}{\lambda}; \frac{b_k}{\lambda}\right) + PK_0\left(\frac{b_k}{\lambda}\right) \frac{\lambda}{b_k} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m m \pi}{L_N(m\pi)} Z\left(m\pi, \frac{b_k}{\lambda}\right) = 0,$$

$$k = 1, 2, \dots, N;$$

$$Z(m, \varepsilon) = [mJ_0(m)K_1(\varepsilon) + \varepsilon J_1(m)K_0(\varepsilon)](\varepsilon^2 + m^2)^{-1}. \quad (13)$$

Здесь $a_i, b_i, (i = 1, 2, \dots, N)$ — некоторые комплексные постоянные, которые являются коэффициентами аппроксимации трансформанты ядра $L(\alpha)$ выражением вида

$$L_N(\alpha\lambda) = \prod_{i=1}^N (\alpha^2 + a_i^2 \lambda^{-2}) (\alpha^2 + b_i^2 \lambda^{-2})^{-1} \\ (b_i - b_k)(a_i - a_k) \neq 0 \quad \text{при } i \neq k. \quad (14)$$

Доказана теорема [1], что приближенное решение интегрального уравнения (1) вида (12), полученное с использованием аппроксимации трансформанты ядра $L(u)$ вида (14), является двухсторонне асимптотически точным решением уравнения (1) при $\lambda \rightarrow 0$ и $\lambda \rightarrow \infty$.

2. Контактные задачи для неоднородного по глубине полупространства.

В работе Е. А. Кузнецова [18] был предложен приближенный способ решения осесимметричной контактной задачи для полупространства с переменным коэффициентом Пуассона, основывающийся на использовании введенных в работе В. П. Плевако [25] функций напряжений. Позже в работах А. Н. Бородачева [12–14] рассмотрена задача о внедрении жесткого штампа в неоднородное полупространство. Считается, что модуль сдвига постоянный, а коэффициент Пуассона $\nu = \nu(z)$ — произвольная достаточно

гладкая функция глубины. В этом случае удается построить в явном виде трансформанту ядра парного интегрального уравнения [13, 14]:

$$L(\lambda\alpha) = [2(1-\nu_0)(\alpha\lambda)\Lambda(\lambda\alpha)]^{-1}, \\ \Lambda(k) = \int_0^\infty [1-\nu(s)]^{-1} \exp(-2ks) ds. \quad (15)$$

Для задачи о внедрении в неоднородное полупространство кругового штампа с плоской подошвой парное интегральное уравнение сводилось стандартным образом к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, которое решалось методом механических квадратур в области его допустимого применения. Численные расчеты проводились, когда штамп имеет единичный радиус для законов вида

$$1 - \nu(z) = [a + b \exp(-2\gamma z)]^{-1}, \quad (16)$$

где a, b, γ — параметры. Аналогичные законы неоднородности рассматривались в работах Е. А. Кузнецова [19–22]. Заметим, что для тонкого неоднородного слоя метод механических квадратур в случае существенного отличия свойств неоднородного полупространства от однородного дает значительную погрешность в получаемом решении.

В работе А. Н. Бородачева [13] рассмотрена для этой же модели неоднородности задача о внедрении жесткого кругового конического штампа ($f = \beta r$) под действием центральной силы P . Парное интегральное уравнение задачи сводилось к решению двух вспомогательных интегральных уравнений Фредгольма второго рода, подобно задаче для кругового штампа с плоской подошвой. Величина радиуса площадки контакта определялась методом последовательных приближений. За начальную величину радиуса площадки контакта принималась та, которая соответствует такой силе P , что для однородного полупространства с $\nu = \nu_0$ радиус площадки контакта $R_0 = 1$. Также, как и в задаче для кругового штампа, при решении интегральных уравнений Фредгольма второго рода использовался метод механических квадратур.

Решение осесимметричных контактных задач для неоднородного по глубине полупространства сводится [2, 6, 7] к решению парных интегральных уравнений следующего вида

$$\begin{cases} \int_0^\infty Q(\alpha)L(\lambda\alpha)J_0(\alpha r)\alpha d\alpha = \theta(0)f(r), & 0 \leq r \leq 1, \\ \int_0^\infty Q(\alpha)J_0(\alpha r)\alpha d\alpha = 0, & r > 1, \end{cases} \quad (17)$$

$$Q(\alpha) = \int_0^1 q(\rho)J_0(\alpha\rho)\rho d\rho, \quad q(r) = \int_0^\infty Q(\alpha)J_0(\alpha r)\alpha d\alpha.$$

Здесь J_0 — функция Бесселя нулевого порядка, $q(r)$ — неизвестное безразмерное распределение контактных давлений под штампом, λ — характерный геометрический параметр задачи.

Считаем, что неоднородное полупространство описывается моделью следующего вида: неоднородный слой с произвольно изменяющимися по глубине упругими свойствами, склеенный с однородным полупространством. В этом случае коэффициенты Ламе в неоднородном полупространстве изменяются по следующему закону:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \Lambda_0(z), \quad M = M_0(z), \quad 0 \geq z \geq -H, \\ \Lambda &= \Lambda_1 = \Lambda_0(-H), \quad M = M_1 = M_0(-H), \quad -H \geq z \geq -\infty. \end{aligned} \quad (18)$$

Построение функции $L(\alpha)$ аналогично описанному выше построению трансформанты ядра для неоднородной полуплоскости [2, 6, 7]. В отличие от контактной задачи для полуплоскости, в которой при построении этой функции применяется преобразование Фурье к уравнениям равновесия и граничным условиям, здесь используется преобразование Ханкеля. При выполнении условий вида (3) на изменение коэффициентов Ламе по глубине построенная функция $L(\alpha)$ при $\alpha \rightarrow 0$ и $\alpha \rightarrow \infty$ обладает свойствами (10).

Для решения уравнения (17) использовались методы «больших λ », ортогональных полиномов [6], метод механических квадратур [14] и двухсторонне асимптотический метод [6].

Двухсторонний асимптотический метод [1, 3] и в данном случае является наиболее эффективным для построения решения парного интегрального уравнения такого типа.

Используем аппроксимацию трансформанты ядра $L(\alpha)$ выражением вида (14).

Считая, что правую часть уравнения (17) можно представить в виде ряда Дини-Бесселя [17]

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} f_j J_0(\mu_j r), \quad (19)$$

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ — положительные корни уравнения

$$\alpha J_0(x) + \beta J_0'(x) = 0, \quad (20)$$

расположенные в порядке возрастания, причем $\alpha/\beta > 0$. Находится выражение для распределения контактных напряжений:

$$\begin{aligned} \tau(r) &= 2\theta_0(0)\delta\pi^{-1} \left[L_N^{-1}(0) \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} + \sum_{i=1}^N C_i \Psi \left(r, \frac{a_i}{\lambda} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{\infty} f_i L_N^{-1}(\lambda \mu_i) \chi(r, \mu_i) \right], \end{aligned}$$

$$\Psi(r, \varepsilon) = \text{ch } \varepsilon / (1-r^2)^{1/2} - \varepsilon \int_r^1 \text{sh } \varepsilon t / (t^2 - r^2)^{1/2} dt,$$

$$\chi(r, \varepsilon) = \cos \varepsilon / (1-r^2)^{1/2} + \varepsilon \int_r^1 \sin \varepsilon t / (t^2 - r^2)^{1/2} dt, \quad (21)$$

где $\lambda = H/a$ — характерный геометрический параметр, H — толщина неоднородного слоя, a — радиус зоны контакта штампа с полупространством.

Постоянные C_i определяются из системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \alpha (b_k \lambda^{-1}, a_i \lambda^{-1}) + L_N^{-1}(0) \lambda b_k^{-1} + \sum_{j=1}^{\infty} f_j \beta (b_k \lambda^{-1}, \mu_j) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N, \\ \alpha(B, A) = (B \text{ch } A + A \text{sh } A)(B^2 - A^2)^{-1}, \end{aligned}$$

$$\beta(B, \mu) = (B \cos \mu - \mu \sin \mu) L_N^{-1}(\lambda \mu) (B^2 + \lambda^2 \mu^2)^{-1}. \quad (22)$$

Связь между приложенной силой и осадкой штампа имеет вид

$$P = 4\pi a \delta \theta(0) \left[L_N^{-1}(0) + \sum_{i=1}^N C_i a_i^{-1} \lambda \text{sh } a_i \lambda^{-1} + \sum_{j=1}^{\infty} f_j L_N^{-1}(\lambda \mu_j) \mu_j^{-1} \sin \mu_j \right]. \quad (23)$$

В работе [6] доказана теорема, что приближенное решение интегрального уравнения (17) вида (21), (23), полученное с использованием аппроксимации трансформанты ядра $L(u)$ вида (14), является двухсторонне асимптотически точным решением уравнения (17) при $\lambda \rightarrow 0$ и $\lambda \rightarrow \infty$.

Исследование эффективности решения интегрального уравнения методом «больших λ » и ортогональных полиномов [6] показало, что погрешность этих методов значительно превышает погрешность двухсторонне асимптотического метода.

Используя решение вида (21), находится величина осадки поверхности неоднородного полупространства вне штампа:

$$\begin{aligned} f(r) &= \frac{2}{\pi} \delta \theta(0) \left\{ \arcsin \frac{1}{r} + \sum_{n=1}^N D_n \frac{b_n}{\lambda} I_n(r) \times \right. \\ &\quad \times \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_j \sin \mu_j}{L_N(\lambda \mu_j) (b_n^2 \lambda^{-2} + \mu_j^2)} - \sum_{i=1}^N C_i \frac{a_i \lambda^{-1} \text{sh } a_i \lambda^{-1}}{b_n^2 \lambda^{-2} - a_i^2 \lambda^{-2}} \right] + \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \int_0^1 \frac{\cos \mu_j t dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} \right\}, \quad r > 1, \\ I_n(r) &= \int_1^r \frac{e^{-b_n \lambda^{-1}(t-1)}}{\sqrt{r^2 - t^2}} dt, \quad D_n = \left(\frac{a_n^2}{b_n^2} - 1 \right) \prod_{i=1}^N \frac{-b_n^2 + a_i^2}{-b_n^2 + b_i^2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Полученное выражение для распределения контактных давлений под штампом в виде (21) дает возможность построить в аналитической форме

решение задачи об изгибе круглой пластины, лежащей на неоднородном по глубине полупространстве. Решение одновременно эффективное как для жестких, так и для гибких пластин [4, 11]. В работе [11] на большом числе примеров проводится анализ влияния различных законов неоднородности и скорости изменения с глубиной коэффициентов Ламе в полупространстве на распределение контактных давлений под пластиной и ее прогибы, а в работе [9] — на распределение изгибающих и крутящих моментов в пластине, а также осадки поверхности неоднородного полупространства вне пластины.

Решение классической задачи Герца для однородного полупространства хорошо известно, например, [16]. В работе [29] постановка классической задачи Герца обобщается и рассматривается случай, когда сферический штамп вдавливается в слой, лежащий на недеформируемом основании или на однородном полупространстве, имеющем упругие свойства, отличные от упругих свойств слоя.

В последнее время появилось много работ, в которых задача о внедрении сферического штампа в обобщенной постановке исследовалась численно (методом конечных элементов и др.) [32, 33, 36, 37]. Для некоторых специальных законов неоднородности, в частности, экспоненциального, было построено аналитическое решение [30].

Задача о внедрении сферического штампа в поверхность неоднородного упругого полупространства рассматривалась в работе [28].

В окрестности начальной точки контакта сферический штамп аппроксимировался параболоидом вращения

$$z = \psi(r) = \beta r^2. \quad (25)$$

Задача сводится к решению парного интегрального уравнения вида (17). Причем функция $f(r)$ имеет следующий безразмерный вид:

$$f(r) = \delta - \psi(ra)/a, \quad \delta = \chi/a, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad \psi(ar) = \frac{a^2 r^2}{2R}. \quad (26)$$

Используя метод работы [6], получено выражение для распределения контактных нормальных напряжений под штампом в виде

$$q(r) = \frac{2}{\pi} \left\{ -2 \frac{a}{R} \theta(0) L_N^{-1}(0) \sqrt{1-r^2} - \sum_{i=1}^N C_i \frac{a_i}{\lambda} \int_r^1 \frac{\text{sh}(\frac{a_i t}{\lambda})}{\sqrt{t^2 - r^2}} dt \right\}. \quad (27)$$

Коэффициенты C_i определяются из решения следующей линейной алгебраической системы уравнений ($k = 1, \dots, N$):

$$\sum_{i=1}^N C_i \frac{\frac{a_i}{\lambda} \text{sh} \frac{a_i}{\lambda} + \frac{b_i}{\lambda} \text{ch} \frac{a_i}{\lambda}}{\left(\frac{b_k}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{a_i}{\lambda}\right)^2} + L_N^{-1}(0) \left(\frac{b_k}{\lambda}\right)^{-1} \theta(0) \left\{ \frac{\chi}{a} + \frac{a}{R} \times \right. \\ \left. \times \left[1 + 2 \left(\frac{b_k}{\lambda} + 1\right) \left(\frac{b_k}{\lambda}\right)^{-2} + 2 \sum_{i=1}^N \left(\left(\frac{a_i}{\lambda}\right)^{-2} - \left(\frac{b_i}{\lambda}\right)^{-2} \right) \right] \right\} = 0. \quad (28)$$

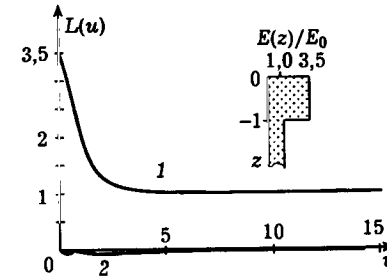


Рис. 1

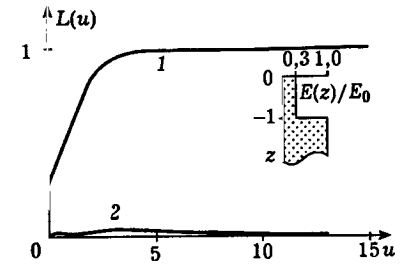


Рис. 2

Постоянная χ определяется из условия $q(1) = 0$. Оно имеет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^N C_i \text{ch} \left(\frac{a_i}{\lambda} \right) + L_N^{-1}(0) \theta(0) \left\{ \frac{\chi}{a} + \frac{a}{R} \left[1 + 2 \sum_{i=1}^N \left(\left(\frac{a_i}{\lambda}\right)^{-2} - \left(\frac{b_i}{\lambda}\right)^{-2} \right) \right] \right\} = 0. \quad (29)$$

Выражение для величины вдавливающей силы имеет вид:

$$P = 4a^2 \left\{ -\frac{2}{3} \frac{a}{R} L_N^{-1}(0) \theta(0) + \sum_{i=1}^N C_i \left[-\text{ch} \frac{a_i}{\lambda} + \left(\frac{a_i}{\lambda}\right)^{-1} \text{sh} \frac{a_i}{\lambda} \right] \right\}. \quad (30)$$

Численный анализ был проведен для типичных примеров слоистых и непрерывно-неоднородных покрытий. Для этих моделей предполагалось, что коэффициент Пуассона $\nu = 1/3$, а модуль Юнга в неоднородном покрытии изменяется по глубине в соответствии со следующими соотношениями:

$$E(z) = \begin{cases} E_c^i = E_0 f_i(z), & -H \leq z \leq 0, \\ E_0, & z < -H. \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (31)$$

Рассмотрены следующие виды неоднородности:

$$\begin{aligned} E_c^1 &= 3,5 E_0, \\ E_c^2 &= \frac{1}{3,5} E_0, \\ E_c^3 &= 3,5 E_0 + 2,5 E_0 \frac{z}{H}, \\ E_c^4 &= \frac{1}{3,5} E_0 + \frac{2,5}{3,5} E_0 \frac{z}{H}. \end{aligned} \quad (32)$$

На рис. 1–4 даны графики трансформант ядер $L(\alpha)$ (кривые 1) интегральных уравнений, построенных численно для соответствующих законов неоднородности. Кривые 2 на этих графиках соответствуют погрешности аппроксимации трансформанты ядра $L(\alpha)$ выражениями вида (14) для $N = 10$.

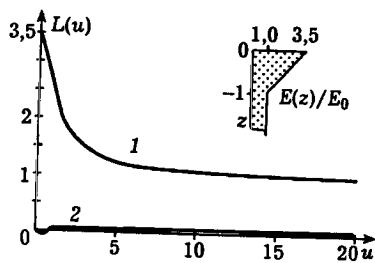


Рис. 3

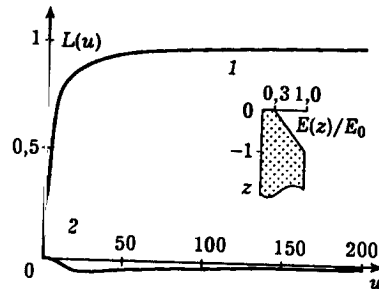


Рис. 4

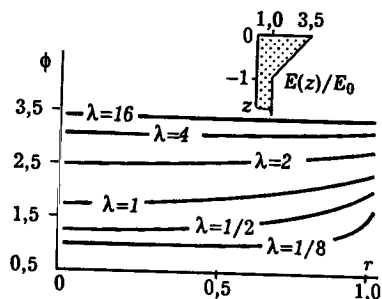


Рис. 5

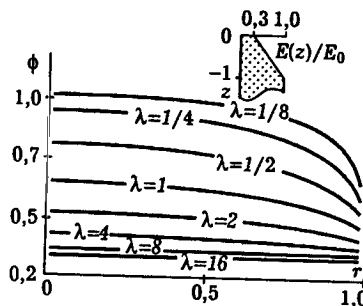


Рис. 6

Заметим, что в соответствии с [26] для слоистого покрытия характерно экспоненциальное убывание трансформанты ядра при $\alpha \rightarrow \infty$:

$$L(\alpha) = 1 + \frac{1}{2} e^{-2|\alpha|h_1} + \alpha(e^{-2|\alpha|h_1}), \quad \alpha \rightarrow \infty, \quad (33)$$

где h_1 — толщина верхнего слоя. В то же время для непрерывно-неоднородного покрытия характерно следующее поведение при $\alpha \rightarrow \infty$

$$L(\alpha) = 1 + C_1|\alpha|^{-1} + C_2\alpha^{-2} + O(|\alpha|^{-3}), \quad \alpha \rightarrow \infty, \quad (34)$$

где C_1, C_2 — некоторые постоянные. Следовательно, трансформанта ядра для слоистого покрытия (когда $\alpha \rightarrow \infty$) стремится к 1 более быстро, чем в случае непрерывно-неоднородного покрытия.

На рис. 5, 6 даны графики отношений $\Phi_i(r) = q_i(r)q_0^{-1}(r)$, которые характеризуют распределение нормальных контактных давлений $q_i(r)$ под сферическим штампом для законов неоднородности вида $E_c^i(z)$ ($i = 3, 4$). Величины контактного давления для неоднородного полупространства $q_i(r)$ и однородного полупространства $q_0(r)$ определялись для одинаковых размеров зоны контакта, причем модуль Юнга однородного полупространства предполагался равным модулю Юнга подложки неоднородного слоя. Значения $q_i(r)$ были найдены по формуле (27) при $N = 10$.

3. Контактные задачи для неоднородной по глубине полосы сводятся к решению парного интегрального уравнения следующего вида [10]:

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\alpha) \frac{L(\lambda\alpha)}{|\alpha|} e^{i\alpha x} d\alpha = 2\pi g(x), & |x| \leq 1, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = 0, & x > 1, \end{cases} \quad (35)$$

$$\Phi(\alpha) = \int_{-1}^1 \varphi(\xi) e^{i\alpha\xi} d\xi, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = \begin{cases} 2\pi\varphi(x), & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

где $\varphi(x)$ — безразмерное распределение нормальных контактных напряжений под штампом, $g(x)$ — безразмерная осадка поверхности полосы под штампом, $\lambda = H/a$ — характерный геометрический параметр задачи, H — толщина полосы, a — полуширина зоны контакта.

Методы решения интегрального уравнения контактной задачи для однородной полосы подробно рассматривались в [15, 27]. В случае непрерывно-неоднородной по глубине полосы возникают трудности при сведении задачи к интегральному уравнению, связанные с решением системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Этого можно избежать, рассматривая специальные виды неоднородности по глубине как, например, в [31]. В ряде работ использовался приближенный метод, основанный на замене непрерывно-неоднородного основания многослойным пакетом [23, 24].

Общий случай неоднородности полосы рассмотрен в работе [10]. Здесь на изменение по глубине коэффициентов Ламе наложены естественные ограничения:

$$\min_{y \in (0, H)} \theta(-y) \geq c_1 > 0, \quad \max_{y \in (0, H)} \theta(-y) \leq c_2 < \infty, \quad (36)$$

где c_1, c_2 — некоторые постоянные.

Коэффициенты Ламе Λ и M полосы с глубиной изменяются по закону

$$\Lambda = \Lambda(y), \quad M = M(y), \quad y \in [-H; 0]. \quad (37)$$

Здесь $\Lambda(y), M(y)$ — произвольные гладкие функции. Рассмотрены следующие задачи: задача 1 — полоса жестко соединена с недеформируемым основанием, задача 2 — полоса без трения покоится на недеформируемом основании. Функция $L(\alpha)$ в (35) находится с использованием метода моделирующих функций.

Построенная функция $L(\alpha)$ обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= A|\alpha| + B|\alpha|^2 + \alpha(\alpha^3), & \alpha \rightarrow 0, \\ L(\alpha) &= 1 + C|\alpha|^{-1} + \alpha(\alpha^{-2}), & \alpha \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (38)$$

где A, B, C — некоторые постоянные.

Следует отметить, что в случае однородного или многослойного основания, задачи 1 и 2 также сводятся к интегральному уравнению вида (35), где функция $L(\alpha)$ определяется следующим образом:

а) для однородной полосы [15]

задача 1

$$L(\alpha) = \frac{\operatorname{ch} 2\alpha - 1}{\operatorname{sh} 2\alpha + 2\alpha}, \quad (39)$$

задача 2

$$L(\alpha) = \frac{2\kappa \operatorname{sh} 2\alpha - 4\alpha}{2\kappa \operatorname{ch} 2\alpha + 1 + \kappa^2 + 4\alpha^2}, \quad \kappa = \frac{3M + \Lambda}{M + \Lambda}; \quad (40)$$

б) для многослойных оснований аналогом функции $L(\alpha)$ для уравнения (35) являются функции $A_n(\alpha, h_1, \dots, h_n)$ [26], характеризующие податливость верхней границы n -слойного основания, направленную нормально к границе; эти функции строятся с помощью рекуррентных соотношений и обладают следующими свойствами:

задача 1

$$A_n(\alpha, h_1, \dots, h_n) \sim 1 - \frac{4h_1^2}{1 + \Delta_1} \alpha^2 e^{-2\alpha h_1}, \quad (n \geq 2), \quad \alpha \rightarrow \infty, \quad (41)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} A_n(\alpha, h_1, \dots, h_n) = 0;$$

задача 2

$$A_n(\alpha) = 1 - (\alpha^2 h_1^2 + \alpha h_1) M e^{-2\alpha h_1} + O(e^{-2\alpha h_1}), \quad \alpha \rightarrow \infty,$$

$$A_n(\alpha) = \alpha \left(k_1 h_1 + \frac{k_2 h_2}{\Delta_1} + \dots + \frac{k_n h_n}{\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_{n-1}} \right) + O(\alpha^2), \quad \alpha \rightarrow 0, \quad (42)$$

где $\Delta_k = E_{k+1}(1 - \nu_k^2) / [E_k(1 - \nu_{k+1}^2)]$, h_k , E_k , ν_k — соответственно толщина, модуль Юнга и коэффициент Пуассона k -того слоя; $A_k(\alpha, h_1, \dots, h_k)$ — функция податливости в нормальном направлении к границе слоя $k_j = (1 - 2\nu_j) / [2(1 - \nu_j)]$, $j = 1, 2, \dots$

Сравнивая (41), (42) и (38), замечаем, что функции $L(\alpha)$ для непрерывно неоднородных и многослойных сред различаются по скорости убывания при $\alpha \rightarrow \infty$.

В случае, когда $L(\lambda\alpha)$ аппроксимируется выражением вида

$$L(\lambda\alpha) = \operatorname{th} A \lambda \alpha \prod_{n=1}^N \frac{\alpha^2 + \delta_n^2 \lambda^{-2}}{\alpha^2 + \gamma_n^2 \lambda^{-2}}, \quad (43)$$

где A — некоторая постоянная, γ_n , δ_n , $n = 1, \dots, N$ — комплексные постоянные, а функция $g(x)$ представлена в виде ряда Фурье

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos k_n x - b_n \sin k_n x), \quad (44)$$

в [10] получено выражение для напряжений и установлена связь между величиной вдавливающей силы и осадкой штампа. Там же [10] доказана

теорема, что приближенное решение уравнения (35) с трансформантой ядра вида (43) является двухсторонне асимптотически точным решением задачи при $\lambda \rightarrow 0$ и $\lambda \rightarrow \infty$. Приведены численные примеры для степенного закона неоднородности.

Из анализа перечисленных выше работ следует, что наиболее эффективным методом решения контактных задач для произвольных непрерывных законов изменения по глубине упругих свойств основания является двухсторонне асимптотический метод, который позволяет построить в аналитической форме приближенные решения этих задач для широкого диапазона изменения характерного геометрического параметра задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзикович С. М. Асимптотические решения контактных задач теории упругости для неоднородных по глубине сред // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 1. С. 148–158.
2. Айзикович С. М. Контактные задачи теории упругости для полупространства и полуплоскости неоднородных по глубине // Статические и динамические смешанные задачи теории упругости. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1983. С. 121–131.
3. Айзикович С. М. Асимптотическое решение одного класса парных уравнений // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 5. С. 872–877.
4. Айзикович С. М. Асимптотическое решение задачи о взаимодействии пластины с неоднородным по глубине основанием // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 4. С. 688–697.
5. Айзикович С. М., Александров В. М. О свойствах функций податливости, соответствующих слоистому и непрерывно-неоднородному полупространству // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266. № 1. С. 40–43.
6. Айзикович С. М., Александров В. М. Осесимметрическая задача о вдавлении круглого штампа в упругое, неоднородное по глубине полупространство // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 2. С. 73–82.
7. Айзикович С. М., Александров В. М. Асимптотические решения контактных задач теории упругости для полупространства и полуплоскости неоднородных по глубине // Изв. АН АрмССР. Механика. 1986. Т. 39. № 3. С. 13–27.
8. Айзикович С. М., Александров В. М. Распределение напряжений под ленточным фундаментом на неоднородном основании // Исследования по теории сооружений. М.: Стройиздат, 1987. Т. 25. С. 82–92.
9. Айзикович С. М., Трубочик И. С. Расчет круглой плиты на неоднородном по глубине основании // Строительная механика и расчет сооружений. 1992. № 3. С. 24–29.
10. Айзикович С. М., Трубочик И. С., Шклярова Е. В. Внедрение штампа в неоднородную по глубине полосу // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 1. С. 61–71.
11. Айзикович С. М., Трубочик И. С., Шклярова Е. В. Расчет круглой пластины, лежащей на неоднородном по глубине полупространстве // Изв. АН СССР. МТТ. 1992. № 4. С. 163–171.
12. Бородачев А. Н. Об одном классе точных решений неосесимметричной контактной задачи для неоднородного упругого полупространства // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 2. С. 294–301.

13. *Бородачев А. Н., Дудинский В. И.* Жесткий штамп на упругом полупространстве с изменяющимися по глубине коэффициентами Пуассона // Прикл. мех. 1985. Т. 21. № 8. С. 34–39.
14. *Бородачев А. Н., Дудинский В. И.* Контактная задача для упругого полупространства с переменным коэффициентом Пуассона // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 1. С. 86–91.
15. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука. 1974. 456 с.
16. *Джонсон К. Л.* Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 509 с.
17. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Основные дифференциальные уравнения математической физики. М.: Физматгиз, 1962. 767 с.
18. *Кузнецов Е. А.* Деформирование неоднородного полупространства при давлении круглого цилиндрического штампа // Проблемы прочности. 1983. № 11. С. 30–37.
19. *Кузнецов Е. А.* О взаимосвязи некоторых контактных характеристик с переменными упругими свойствами сопряженных тел // Трение и износ. 1983. Т. 4. № 2. С. 238–248.
20. *Кузнецов Е. А.* К решению контактных задач для неоднородного полупространства при давлении на него круглого цилиндрического штампа // Прикл. мех. 1984. Т. 20. № 8. С. 24–33.
21. *Кузнецов Е. А.* Распределение напряжений на поверхности неоднородного полупространства при давлении на него кругового штампа // Трение и износ. 1984. Т. 5. № 6. С. 1085–1094.
22. *Кузнецов Е. А.* Давление круглого цилиндра на полупространство с переменным по глубине коэффициентом Пуассона // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 1. С. 73–86.
23. *Наумов Ю. А., Шевляков Ю. А., Чистяк В. И.* К решению основных задач теории упругости для слоя с произвольной неоднородностью по толщине // Прикл. механика. 1970. Т. 6. № 7. С. 25–31.
24. *Никишин В. С.* Задачи теории упругости для неоднородных сред. М.: ВЦ АН СССР, 1976. 60 с.
25. *Плевако В. П.* К теории упругости неоднородных сред // ПИММ. 1971. Т. 35. Вып. 5. С. 853–860.
26. *Приварников А. К.* Пространственная деформация многослойного основания // Устойчивость и прочность элементов конструкций. Днепропетровск: Изд-во ДГУ, 1973. С. 27–45.
27. Развитие теории контактных задач в СССР / Под ред. Л. А. Галина. М.: Наука, 1976. 493 с.
28. *Aizikovich S. M., Krenev L. I., Trubchik I. S.* The Analytical solution of the Hertzian contact problem for functionally gradient materials // 3-rd EUROMECH Solid Mechanics Conference KTH. Royal Institute of Technology. Stockholm. Sweden. August 18-22, 1997. Book of Abstracts. P. 79.
29. *El-Sherbiny M. G. D., Halling J.* The Hertzian Contact of Surfaces Covered with Metallic Films // Wear. 1976. V. 40. № 3. P. 325–337.
30. *Giannakopoulos A.E., Suresh S.* Indentation of solids with gradients in elastic properties: Part I. Point force. Part II. Axisymmetric indentors. // Int. J. Solids Structures. 1997. V. 34. № 19. P. 2357–2428.
31. *Gibson R. E., Brown P. T., Andrews K. R. F.* Some results concerning displacements in a non-homogeneous elastic layer // Z. angew. Math. and Phys. 1971. Bd. 22. H. 5. P. 855–864.

32. *Kral E. R., Komvopoulos K., Bogy D. B.* Elastic-Plastic Finite Element Analysis of Repeated Indentation of a Half-Space by a Rigid Sphere. // ASME Journal of Applied Mechanics. 1993. V. 60. P. 829–841.
33. *Kral E. R., Komvopoulos K., Bogy D. B.* Finite Element Analysis of Repeated Indentation of an Elastic-Plastic Layered Medium by a Rigid Sphere, Part I - Surface Results, Part II - Subsurface Results // Transactions of the ASME. Journal of Applied Mechanics. March 1995. V. 62. P. 20–42.
34. *Kuznetsov Ye. A.* Plane contact problem for a half-space with a Poisson's ratio that varies with depth // Wear. 1983. V. 92. P. 171–196
35. *Kuznetsov Ye. A.* Stress-strain state of an inhomogeneous half-space with Poisson's ratio that varies under the pressure of a round cylinder-shaped indenter // Wear. 1984. V. 97. P. 213–248.
36. *Moutmitounet P., Edlinger M. L., Felder E.* Finite Element Analysis of Elastoplastic Indentation: Part I - Homogeneous Media; Part II - Application to Hard Coatings // Transactions of the ASME, Journal of Tribology. 1993. V. 115. P. 10–19.
37. *Suresh S., Giannakopoulos A. E., Alcalá J.* Spherical indentation of compositionally graded materials: theory and Experiments // Acta mater. 1997. V. 45. № 4. P. 1307–1321.

§ 5. СТАТИЧЕСКИЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНЫХ УПРУГИХ ТЕЛ

В. С. Никушин

1. Структура многослойных тел. Опишем структуру многослойных тел, на которые распространяются решения осесимметричных и плоских контактных и других смешанных задач настоящей обзорной статьи. К ним относится многослойное полупространство, состоящее из произвольного числа N слоев конечной толщины и упругого основания. Каждому слою, считая сверху вниз, присвоен номер $i = \overline{1, N}$, а упругое основание рассматривается как $(N + 1)$ -й слой бесконечной толщины. Модули упругости Юнга E_i и коэффициенты Пуассона ν_i для каждого слоя $i = \overline{1, N + 1}$ могут принимать различные и произвольные значения. Начало отсчета цилиндрической r, z и декартовой x, z систем координат в осесимметричной и плоской задачах берется на граничной плоскости раздела слоев $N, N + 1$. В этих системах координат слои ограничены параллельными плоскостями $z = H_i$ ($i = \overline{0, 1, N}$), ортогональными оси OZ , причем $z = H_0$ является внешней граничной плоскостью многослойного полупространства. Толщины слоев $\Delta H_i = H_{i-1} - H_i$ ($i = \overline{1, N}$) могут принимать различные и произвольные значения. Общая толщина всех N слоев конечной толщины ($i = \overline{1, N}$) равна $H_0 = H$ (рис. 1). В частном случае абсолютно жесткого основания ($E_{N+1} = \infty$) многослойное полупространство представляет собой плиту из N слоев. Рассматриваются два крайних типа однородных контактных условий на границах раздела слоев $z = H_i$ ($i = \overline{1, N}$): жесткое сцепление (идеальный контакт) и полный контакт при отсутствии трения.

2. Базовое общее решение осесимметричных краевых задач. Осесимметричные краевые задачи для многослойного полупространства или плиты решаются в безразмерных переменных $\rho = r/a, t = z/H$, где a — характерная величина, например, длина радиуса круговой области контакта, принятая за линейную единицу измерения. Величина отношения $\lambda = H/a$ является характерным параметром задачи. Конструкция многослойного полупространства (плиты) характеризуется геометрическими параметрами $t_i = H_i/H$, определяющими границы слоев $t = t_i$, и упругими параметрами $\delta_i = E_i/E_{i+1}, \chi_i = \delta_i(1 + \nu_{i+1})/(1 + \nu_i)$ ($i = \overline{1, N}$). Напряжения и перемещения в слое с порядковым номером $i = \overline{1, N + 1}$ обозначаем через

$$\sigma_{ri}(\rho, t), \sigma_{\theta i}(\rho, t), \sigma_{zi}(\rho, t), \tau_{rzi}(\rho, t), u_i(\rho, t), w_i(\rho, t).$$

Базовое общее решение осесимметричных краевых задач строится при следующих условиях:

на внешней границе многослойного полупространства $t = 1$

$$\sigma_{z1} = p(\rho), \tau_{rz1} = q(\rho); \quad (1)$$

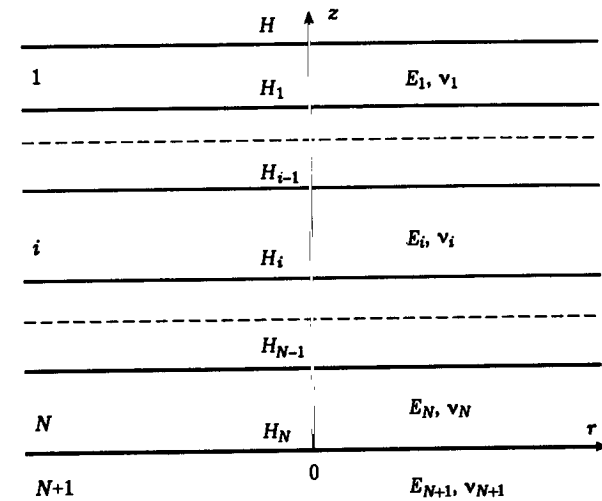


Рис. 1

на границах раздела слоев $t = t_i$ ($i = \overline{1, N}$) в случае их жесткого сцепления

$$\sigma_{zi} = \sigma_{zi+1}, \tau_{rzi} = \tau_{rzi+1}, u_i = u_{i+1}, w_i = w_{i+1}; \quad (2)$$

в случае контакта без трения:

$$\sigma_{zi} = \sigma_{zi+1}, \tau_{rzi} = \tau_{rzi+1} = 0, w_i = w_{i+1}. \quad (3)$$

Интенсивность распределения нормальных и касательных напряжений в краевых условиях на внешней поверхности (1) представляется произвольными функциями $p(\rho), q(\rho)$ на полуоси $0 \leq \rho < \infty$, представимыми интегралами Ханкеля

$$p(\rho) = \int_0^\infty \beta \bar{p}(\beta) J_0(\rho\beta) d\beta, \quad q(\rho) = \int_0^\infty \beta \bar{q}(\beta) J_1(\rho\beta) d\beta, \quad (4)$$

$$\bar{p}(\beta) = \int_0^\infty \rho p(\rho) J_0(\rho\beta) d\rho, \quad \bar{q}(\beta) = \int_0^\infty \rho q(\rho) J_1(\rho\beta) d\rho. \quad (5)$$

Нормальные осевые и касательные напряжения $\sigma_{zi}(\rho, t), \tau_{rzi}(\rho, t)$, радиальные и осевые перемещения $u_i(\rho, t), w_i(\rho, t)$ в произвольном слое $i = \overline{1, N + 1}$ представляются следующими интегралами Ханкеля [11, 12, 14, 18]:

$$\sigma_{zi}(\rho, t) = \int_0^\infty \beta (\bar{p}(\beta) \Delta_{zpi} + \bar{q}(\beta) \Delta_{zqi}) J_0(\rho\beta) d\beta,$$

$$\tau_{rzi}(\rho, t) = \int_0^\infty \beta (\bar{p}(\beta) \Delta_{rpi} + \bar{q}(\beta) \Delta_{rqi}) J_1(\rho\beta) d\beta,$$

$$\begin{aligned} \frac{E_i}{(1+\nu_i)a} u_i(\rho, t) &= \int_0^\infty (\bar{p}(\beta)\Delta_{up_i} + \bar{q}(\beta)\Delta_{uq_i}) J_1(\rho\beta) d\beta, \\ \frac{E_i}{(1+\nu_i)a} w_i(\rho, t) &= \int_0^\infty (\bar{p}(\beta)\Delta_{wp_i} + \bar{q}(\beta)\Delta_{wq_i}) J_0(\rho\beta) d\beta, \end{aligned} \quad (6)$$

где функции $\Delta_{jki} = \Delta_{jki}(t, \beta)$ ($j = z, \tau, u, w; k = p, q$) выражаются через четыре произвольные функции $A_{ki}(\beta)$, $B_{ki}(\beta)$, $C_{ki}(\beta)$, $D_{ki}(\beta)$ для слоев конечной толщины $i = \overline{1, N}$ и через две произвольные функции $A_{kN+1}(\beta)$, $B_{kN+1}(\beta)$ для слоя — основания ($i = N + 1$).

Конструкция решения (6) представлена в виде суперпозиции двух независимых решений, соответствующих нормальной и касательной нагрузкам интенсивностью $p(\rho)$, $q(\rho)$ (4), причем их трансформанты Ханкеля $\bar{p}(\beta)$, $\bar{q}(\beta)$ (5) вынесены в качестве множителей под знаками интегралов. Удовлетворяя в решении (6) краевым условиям (1), (2) или (1), (3) отдельно при $p(\rho) \neq 0$, $q(\rho) \equiv 0$ и при $p(\rho) \equiv 0$, $q(\rho) \neq 0$, приходим к замкнутым системам функциональных уравнений (СФУ) $4N + 2$ порядка для определения полного набора неизвестных функций $A_{ki}(\beta)$, $B_{ki}(\beta)$, $C_{ki}(\beta)$, $D_{ki}(\beta)$ ($i = \overline{1, N}$), $A_{kN+1}(\beta)$, $B_{kN+1}(\beta)$ на полуоси $0 \leq \beta < \infty$ соответственно при нормальной ($k = p$) и касательной ($k = q$) нагрузках. Функциональные матрицы СФУ зависят только от конструкции многослойного полупространства и не зависят от трансформант Ханкеля $\bar{p}(\beta)$, $\bar{q}(\beta)$, которые в первой основной краевой задаче известны, а во второй основной и смешанной краевых задачах неизвестны и подлежат определению соответственно из однородных и смешанных краевых условий.

Для всех рассматриваемых многослойных сред при нормальной и касательной нагрузках построены и математически обоснованы корректные аналитические решения СФУ на всей полуоси $0 \leq \beta < \infty$ и асимптотические решения при $\beta \rightarrow \infty$. На этой основе изучена асимптотика подынтегральных функций при $\beta \rightarrow 0$ и $\beta \rightarrow \infty$ и доказана сходимость интегралов (6) во всей области многослойного полупространства. Подынтегральные функции $\Delta_{jki}(1, \beta)$ ($j = u, w; k = p, q$) на внешней поверхности $t = 1$ после выделения главных членов при $\beta \rightarrow \infty$ представляются в форме

$$\begin{aligned} (\Delta_{wp_1}, \Delta_{uq_1}) &= 2(1 - \nu_1) + (\Delta_{wp}(\beta), \Delta_{uq}(\beta)), \\ (\Delta_{wq_1}, \Delta_{up_1}) &= (1 - 2\nu_1) + (\Delta_{wq}(\beta), \Delta_{up}(\beta)), \end{aligned} \quad (7)$$

где функции $\Delta_{jk}(\beta)$ ($j = w, u; k = p, q$) при $\beta \rightarrow \infty$ стремятся к нулю по экспоненциальным законам порядка $O(\beta^3 \exp(-2\lambda(1 - t_1)\beta))$.

3. Базовое общее решение плоских краевых задач. В условиях плоской деформации многослойного полупространства упомянутое решение строится в безразмерных переменных $\xi = x/a$, $t = z/H$ при произвольных нормальных σ_{z1} и касательных τ_{xz1} напряжениях на внешней

поверхности $t = 1$

$$\sigma_{z1} = p(\xi), \quad \tau_{xz1} = q(\xi) \quad (-\infty < \xi < \infty) \quad (8)$$

и контактных условиях (2) или (3) на границах раздела слоев $t = t_i$ ($i = \overline{1, N}$) с учетом замены переменной ρ на ξ и символа τ_{rzi} на τ_{xzi} . Так как произвольные краевые функции интенсивности распределения нагрузки $p(\xi)$ и $q(\xi)$ можно представить в виде суммы четной и нечетной функций, то достаточно и целесообразно построить отдельно решения для симметричных краевых задач при четной $p(\xi)$ и нечетной $q(\xi)$, а также для кососимметричных при нечетной $p(\xi)$ и четной $q(\xi)$. Четные и нечетные функции представляются соответственно через косинус- и синус-интегралы Фурье

$$\begin{aligned} p(\xi) &= \int_0^\infty \bar{p}_c(\beta) \cos(\xi\beta) d\beta, \quad \bar{p}_c(\beta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty p(\xi) \cos(\xi\beta) d\xi, \\ p(\xi) &= \int_0^\infty \bar{p}_s(\beta) \sin(\xi\beta) d\beta, \quad \bar{p}_s(\beta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty p(\xi) \sin(\xi\beta) d\xi, \end{aligned} \quad (9)$$

и то же для $q(\xi)$. Напряжения σ_{zi} , τ_{xzi} и перемещения $u_i(\xi, t)$, $w_i(\xi, t)$ определяются следующими интегралами Фурье [14, 19]

в симметричной задаче

$$\begin{aligned} \sigma_{zi} &= \int_0^\infty (\bar{p}_c(\beta)\Delta_{zpi} + \bar{q}_s(\beta)\Delta_{zqi}) \cos(\xi\beta) d\beta, \\ \tau_{xzi} &= \int_0^\infty (\bar{p}_c(\beta)\Delta_{\tau pi} + \bar{q}_s(\beta)\Delta_{\tau qi}) \sin(\xi\beta) d\beta, \\ \frac{E_i}{(1+\nu_i)a} u_i &= \int_0^\infty (\bar{p}_c(\beta)\Delta_{up_i} + \bar{q}_s(\beta)\Delta_{uq_i}) \frac{\sin(\xi\beta)}{\beta} d\beta, \\ \frac{E_i}{(1+\nu_i)a} w_i &= \int_0^\infty (\bar{p}_c(\beta)\Delta_{wp_i} + \bar{q}_s(\beta)\Delta_{wq_i}) \frac{\cos(\xi\beta)}{\beta} d\beta \end{aligned} \quad (10)$$

в кососимметричной задаче

$$\begin{aligned} \sigma_{zi} &= \int_0^\infty (\bar{p}_s(\beta)\Delta_{zpi} + \bar{q}_c(\beta)\Delta_{zqi}) \sin(\xi\beta) d\beta, \\ \tau_{xzi} &= - \int_0^\infty (\bar{p}_s(\beta)\Delta_{\tau pi} + \bar{q}_c(\beta)\Delta_{\tau qi}) \cos(\xi\beta) d\beta, \\ \frac{E_i}{(1+\nu_i)a} u_i &= - \int_0^\infty (\bar{p}_s(\beta)\Delta_{up_i} + \bar{q}_c(\beta)\Delta_{uq_i}) \frac{\cos(\xi\beta)}{\beta} d\beta, \\ \frac{E_i}{(1+\nu_i)a} w_i &= \int_0^\infty (\bar{p}_s(\beta)\Delta_{wp_i} + \bar{q}_c(\beta)\Delta_{wq_i}) \frac{\sin(\xi\beta)}{\beta} d\beta. \end{aligned} \quad (11)$$

Существенно, что решения осесимметричных и плоских краевых задач (6), (10), (11) связаны единими подынтегральными функциями

$\Delta_{jki} = \Delta_{jki}(t, \beta)$ ($j = z, \tau, u, w; k = p, q; i = \overline{1, N+1}$) и единичными СФУ для определения наборов функций $A_{ki}(\beta), B_{ki}(\beta), C_{ki}(\beta), D_{ki}(\beta)$ ($i = \overline{1, N}$) $A_{kN+1}(\beta), B_{kN+1}(\beta)$ отдельно в случаях нормальной ($k = p$) и касательной ($k = q$) нагрузок. Таким образом, отмеченные в п. 2 математически обоснованные корректные аналитические решения СФУ на полуоси $0 \leq \beta < \infty$ и в предельном случае $\beta \rightarrow \infty$, а также асимптотика (7) относятся и к плоским задачам. На их основе доказана сходимость интегралов Фурье (10), (11), за исключением характерной для плоских задач расходимости в нижнем пределе интегралов для перемещений w_i при $k = p$ в симметричной задаче и для u_i при $k = q$ в кососимметричной задаче. Указанные особенности легко устраняются для многослойного полупространства при $E_{N+1} = \infty$, т.е. для плиты из N слоев $i = \overline{1, N}$ произвольной толщины H на абсолютно жестком основании.

4. Осесимметричные контактные задачи. Наибольший теоретический и прикладной интерес представляют основные смешанные задачи (ОСЗ) теории упругости в обобщенной постановке, когда краевые условия на внешней поверхности многослойного полупространства разделяются на совокупности произвольного четного $2n$ или нечетного числа $2n - 1$ ($n = 1, 2, \dots$) концентрических окружностей. Частными случаями этих задач являются контактные задачи для n концентрических кольцевых штампов или одного кругового и $n - 1$ концентрических кольцевых штампов с учетом сцепления в области контакта. Математический аппарат исследования ОСЗ непосредственно распространяется и на аналогичные контактные задачи для круговых и кольцевых штампов с учетом и без учета трения, а также на родственные смешанные задачи для многослойного полупространства с круговыми и концентрическими кольцевыми трещинами на границах раздела слоев. Иными словами, ОСЗ имеют общетеоретическое значение и, в свою очередь, являются базовыми для построения и исследования решений обширного класса контактных и других смешанных задач теории упругости для многослойного полупространства. Учитывая это положение, изложим подробнее математическую постановку и методику аналитического и численного решения ОСЗ.

Разобьем внешнюю граничную плоскость многослойного полупространства $t = 1$ на две системы смежных кольцевых областей

$$\begin{aligned} L_I &= \{\rho_{2k-1} \leq \rho \leq \rho_{2k}\} \quad (k = \overline{1, n}), \\ L_{II} &= \{\rho_{2(k-1)} < \rho < \rho_{2k-1}\} \quad (k = \overline{1, n+1}), \end{aligned} \quad (12)$$

где полагаем $\rho_0 = 0, \rho_1 \geq 0, \rho_2 = 1, \rho_{2n+1} = \infty$. С учетом последних условий смежные контуры L_I, L_{II} (12) покрывают всю полуось $0 \leq \rho < \infty$. В ОСЗ при $t = 1$ на контуре L_I произвольно задаются осевые и радиальные перемещения

$$\frac{E_1}{(1 + \nu_1)a_2} w_1 = f_1(\rho), \quad \frac{E_1}{(1 + \nu_1)a_2} u_1 = g_1(\rho) \quad (\rho \in L_I), \quad (13)$$

а на смежном контуре L_{II} — нормальные осевые и касательные напряжения

$$\sigma_{z1} = p_{II}(\rho), \quad \tau_{\tau z1} = q_{II}(\rho) \quad (\rho \in L_{II}), \quad (14)$$

где

$$f_1, g_1 = f_{2k-1}(\rho), g_{2k-1}(\rho) \quad (\rho_{2k-1} \leq \rho \leq \rho_{2k}, k = \overline{1, n}), \quad (15)$$

$$p_{II}, q_{II} = p_{2(k-1)}(\rho), q_{2(k-1)}(\rho) \quad (\rho_{2(k-1)} < \rho < \rho_{2k-1}, k = \overline{1, n+1}), \quad (16)$$

где $f_{2k-1}(\rho), g_{2k-1}(\rho)$ — дифференцируемые функции, а $p_{2(k-1)}(\rho), q_{2(k-1)}(\rho)$ представимы интегралами Ханкеля

$$\begin{aligned} p_{2(k-1)} &= \int_0^\infty \beta \bar{p}_{2(k-1)}(\beta) J_0(\rho\beta) d\beta, \\ q_{2(k-1)} &= \int_0^\infty \beta \bar{q}_{2(k-1)}(\beta) J_1(\rho\beta) d\beta, \\ \bar{p}_{2(k-1)} &= \int_{\rho_{2(k-1)}}^{\rho_{2k-1}} \rho p_{2(k-1)}(\rho) J_0(\rho\beta) d\rho, \\ \bar{q}_{2(k-1)} &= \int_{\rho_{2(k-1)}}^{\rho_{2k-1}} \rho q_{2(k-1)}(\rho) J_1(\rho\beta) d\rho. \end{aligned} \quad (17)$$

$$\bar{p}_{2(k-1)} = \int_{\rho_{2(k-1)}}^{\rho_{2k-1}} \rho p_{2(k-1)}(\rho) J_0(\rho\beta) d\rho, \quad \bar{q}_{2(k-1)} = \int_{\rho_{2(k-1)}}^{\rho_{2k-1}} \rho q_{2(k-1)}(\rho) J_1(\rho\beta) d\rho. \quad (18)$$

С учетом (18) известные трансформанты Ханкеля $\bar{p}_{II}(\beta), \bar{q}_{II}(\beta)$ от функций интенсивности нормальной и касательной нагрузки $p_{II}(\rho), q_{II}(\rho)$ (5) на контуре L_{II} определяются по формулам

$$\bar{p}_{II}(\beta) = \sum_{k=1}^{n+1} \bar{p}_{2(k-1)}(\beta), \quad \bar{q}_{II}(\beta) = \sum_{k=1}^{n+1} \bar{q}_{2(k-1)}(\beta). \quad (19)$$

Аналогично представляются и подлежащие определению в ходе решения формулируемой ОСЗ неизвестные трансформанты $\bar{p}_I(\beta), \bar{q}_I(\beta)$ на контуре L_I :

$$\bar{p}_I(\beta) = \sum_{k=1}^n \bar{p}_{2k-1}(\beta), \quad \bar{q}_I(\beta) = \sum_{k=1}^n \bar{q}_{2k-1}(\beta). \quad (20)$$

По формулам (19), (20) находим представления трансформант Ханкеля $\bar{p}(\beta), \bar{q}(\beta)$ от неизвестных и известных напряжений $\sigma_{z1} = p(\rho), \tau_{\tau z1} = q(\rho)$ в смежных кольцевых областях L_I, L_{II} (12), покрывающих всю внешнюю поверхность многослойного полупространства:

$$\bar{p}(\beta) = \bar{p}_I(\beta) + \bar{p}_{II}(\beta), \quad \bar{q}(\beta) = \bar{q}_I(\beta) + \bar{q}_{II}(\beta). \quad (21)$$

Представляя перемещения $w_1(\rho, 1), u_1(\rho, 1)$ в краевых условиях (13) по формулам базового решения (6), а напряжения $\sigma_{z1}(\rho, 1) = p(\rho),$

$\tau_{rz1}(\rho, 1) = q(\rho)$ в (14) интегралами (4) и учитывая (21), приходим к следующей системе парных интегральных уравнений относительно неизвестных трансформант Ханкеля $\bar{p}_1(\beta)$, $\bar{q}_1(\beta)$:

$$\int_0^\infty [\Delta_{wp1}(1, \beta)\bar{p}_1(\beta) + \Delta_{wq1}(1, \beta)\bar{q}_1(\beta)]J_0(\rho\beta) d\beta = \mathcal{F}_1(\rho) \quad (\rho \in L_1), \quad (22)$$

$$\int_0^\infty [\Delta_{up1}(1, \beta)\bar{p}_1(\beta) + \Delta_{uq1}(1, \beta)\bar{q}_1(\beta)]J_1(\rho\beta) d\beta = \mathcal{G}_1(\rho) \quad (\rho \in L_1), \quad (23)$$

$$\int_0^\infty \beta\bar{p}_1(\beta)J_0(\rho\beta) d\beta = 0 \quad (\rho \in L_{II}), \quad (24)$$

$$\int_0^\infty \beta\bar{q}_1(\beta)J_1(\rho\beta) d\beta = 0 \quad (\rho \in L_{II}), \quad (25)$$

где

$$\mathcal{F}_1(\rho) = f_1(\rho) - w_{II}(\rho), \quad \mathcal{G}_1(\rho) = g_1(\rho) - u_{II}(\rho),$$

$$w_{II}(\rho) = \int_0^\infty [\Delta_{wp1}(1, \beta)\bar{p}_{II}(\beta) + \Delta_{wq1}(1, \beta)\bar{q}_{II}(\beta)]J_0(\rho\beta) d\beta, \quad (26)$$

$$u_{II}(\rho) = \int_0^\infty [\Delta_{up1}(1, \beta)\bar{p}_{II}(\beta) + \Delta_{uq1}(1, \beta)\bar{q}_{II}(\beta)]J_1(\rho\beta) d\beta.$$

По теореме обращения Ханкеля легко видеть, что уравнения (24), (25) на контуре L_{II} тождественно удовлетворяются и, следовательно, система парных интегральных уравнений (22)–(25) равносильна системе двух интегральных уравнений (22), (23) на контуре L_1 относительно $\bar{p}_1(\beta)$, $\bar{q}_1(\beta)$. В развернутом виде с учетом формул (7), (20) она автоматически преобразуется к следующей системе $2n$ интегральных уравнений относительно трансформант $\bar{p}_{2k-1}(\beta)$, $\bar{q}_{2k-1}(\beta)$ ($k = \overline{1, n}$) на последовательности промежутков $\rho_{2j-1} \leq \rho \leq \rho_{2j}$ ($j = \overline{1, n}$) контура L_1 (12):

$$\sum_{k=1}^n \int_0^\infty [(2(1-\nu_1) + \Delta_{wp}(\beta))\bar{p}_{2k-1}(\beta) + (1-2\nu_1 + \Delta_{wq}(\beta))\bar{q}_{2k-1}(\beta)]J_0(\rho\beta) d\beta = \mathcal{F}_{2j-1}(\rho), \quad (27)$$

$$\sum_{k=1}^n \int_0^\infty [(1-2\nu_1 + \Delta_{up}(\beta))\bar{p}_{2k-1}(\beta) + (2(1-\nu_1) + \Delta_{uq}(\beta))\bar{q}_{2k-1}(\beta)]J_1(\rho\beta) d\beta = \mathcal{G}_{2j-1}(\rho), \quad (28)$$

$$\rho_{2j-1} \leq \rho \leq \rho_{2j} \quad (j = \overline{1, n}),$$

где

$$\mathcal{F}_{2j-1}(\rho) = f_{2j-1}(\rho) - w_{II}(\rho), \quad \mathcal{G}_{2j-1}(\rho) = g_{2j-1}(\rho) - u_{II}(\rho). \quad (29)$$

Система уравнений (27), (28) непосредственно неразрешима в квадратурах и вместе с тем сложна и неудобна для численного решения. Поэтому она сводится к равносильной системе n сингулярных интегральных уравнений (СИУ) в двух родственных формах относительно новых

неизвестных функций, через которые с помощью квадратур выражаются неизвестные напряжения $\sigma_{z1} = p_{2k-1}(\rho)$, $\tau_{rz1} = q_{2k-1}(\rho)$ на промежутках $\rho_{2k-1} \leq \rho \leq \rho_{2k}$ ($k = \overline{1, n}$). Две формы разрешающей системы СИУ позволяют строить два решения исходной ОСЗ, отличающихся только по форме, но совпадающих в численном виде. Первое из них позволяет выделить в явном виде особенности искомых напряжений σ_{z1} , τ_{rz1} только на четных $\rho = \rho_{2k}$, а второе только на нечетных контурах $\rho = \rho_{2k-1}$ ($k = \overline{1, n}$) раздела краевых условий. В целом две формы решения ОСЗ обеспечивают эффективные вычислительные алгоритмы и надежное средство контроля достоверности реализуемого на их основе единого численного решения.

Методика преобразования системы уравнений (27), (28) в равносильную систему СИУ сводится к последовательности стандартных математических операций с использованием представлений интегралов

$$S_{nn}(\rho, \tau) = \int_0^\infty J_n(\rho\beta)J_n(\tau\beta) d\beta \quad (n = 0, 1)$$

в двух формах

$$S_{nn}(\rho, \tau) = \frac{2}{\pi(\rho\tau)^n} \int_0^{\min(\rho, \tau)} x^{2n}(\rho^2 - x^2)^{-1/2}(\tau^2 - x^2)^{-1/2} dx, \quad (30)$$

$$S_{nn}(\rho, \tau) = \frac{2}{\pi}(\rho\tau)^n \int_{\max(\rho, \tau)}^\infty x^{-2n}(x^2 - \rho^2)^{-1/2}(x^2 - \tau^2)^{-1/2} dx, \quad (31)$$

и обращений интегральных уравнений Абеля

$$\int_a^x \frac{g(t)}{\sqrt{x^2 - t^2}} dt = f(x), \quad g(t) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{xf(x)}{\sqrt{t^2 - x^2}} dx \quad (a \leq x, t \leq b), \quad (32)$$

$$\int_x^b \frac{g(t)}{\sqrt{t^2 - x^2}} dt = f(x), \quad g(t) = -\frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_t^b \frac{xf(x)}{\sqrt{x^2 - t^2}} dx \quad (a \leq x, t \leq b). \quad (33)$$

Разрешающая система СИУ первой формы для комплексных функций действительного переменного (КФДП) $\omega_j(\rho) = \varphi_j(\rho) + i\vartheta_j(\rho)$ ($j = \overline{1, n}$) получена [14, 24] с использованием формул (30), (32), (33):

$$2(1-\nu_1)\omega_j(\rho) + \frac{1-2\nu_1}{\pi i} \int_{\rho_{2j-1}}^{\rho_{2j}} \frac{\omega_j(\tau)}{\tau - \rho} d\tau + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{\rho_{2k-1}}^{\rho_{2k}} \frac{K_{1jk}^{(1)}(\rho, \tau)\omega_k(\tau) + K_{2jk}^{(1)}(\rho, \tau)\overline{\omega_k(\tau)}}{\sqrt{(\rho - \rho_{2j-1})(\tau - \rho_{2k-1})}} d\tau = \frac{1}{\pi} \frac{\Phi_j^{(1)}(\rho)}{\sqrt{\rho - \rho_{2j-1}}} \quad (34)$$

$$(\rho_{2j-1} \leq \rho \leq \rho_{2j}, \quad j = \overline{1, n}),$$

где $K_{1jk}^{(1)}(\rho, \tau)$, $K_{2jk}^{(1)}(\rho, \tau)$, $\Phi_j^{(1)}(\rho)$ — непрерывные КФДП, выраженные через равномерно и быстро сходящиеся интегралы на полуоси $0 \leq \beta \leq \infty$

и элементарные функции, которые эффективно вычисляются с любой необходимой точностью.

Искомые напряжения $\sigma_{z1} = p_{2j-1}(\rho)$, $\tau_{rz1} = q_{2j-1}(\rho)$ на отрезках $\rho_{2j-1} \leq \rho \leq \rho_{2j}$ ($j = \overline{1, n}$) контура L_1 и трансформанты Ханкеля $\bar{p}_{2j-1}(\beta)$, $\bar{q}_{2j-1}(\beta)$ выражаются через решение $\omega_j(\rho) = \varphi_j(\rho) + i\vartheta_j(\rho)$ ($j = \overline{1, n}$) системы СИУ (34) по следующим формулам:

$$\rho p_{2j-1}(\rho) = -\frac{d}{d\rho} \int_{\rho_{2j-1}}^{\rho_{2j}} \frac{\tau \varphi_j(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - \rho^2}} d\tau, \quad q_{2j-1}(\rho) = -\frac{d}{d\rho} \int_{\rho_{2j-1}}^{\rho_{2j}} \frac{\vartheta_j(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - \rho^2}} d\tau, \quad (35)$$

$$\bar{p}_{2j-1}(\beta) = \int_{\rho_{2j-1}}^{\rho_{2j}} \varphi_j(\rho) L_{0j}^{(1)}(\rho, \beta) d\rho, \quad \bar{q}_{2j-1}(\beta) = \int_{\rho_{2j-1}}^{\rho_{2j}} \rho^{-1} \vartheta_j(\rho) L_{1j}^{(1)}(\rho, \beta) d\rho, \quad (36)$$

$$L_{0j}^{(1)}(\rho, \beta) = \frac{d}{d\rho} \int_{\rho_{2j-1}}^{\rho} \frac{\tau J_0(\tau\beta)}{\sqrt{\rho^2 - \tau^2}} d\tau, \quad L_{1j}^{(1)}(\rho, \beta) = \frac{d}{d\rho} \int_{\rho_{2j-1}}^{\rho} \frac{\tau^2 J_1(\tau\beta)}{\sqrt{\rho^2 - \tau^2}} d\tau.$$

Разрешающая система СИУ второй формы для КФДП $\omega_j(\rho) = \varphi_j(\rho) + i\vartheta_j(\rho)$ ($j = \overline{1, n}$) получена с использованием формул (31), (32), (33) [14]:

$$2(1 - \nu_1)\omega_j(\rho) + \frac{1 - 2\nu_1}{\pi i} \int_{\rho_{2j-1}}^{\rho_{2j}} \frac{\omega_j(\tau)}{\tau - \rho} d\tau + \frac{1 - 2\nu_1}{2\pi i} \int_{\rho_{2j-1}}^{\rho_{2j}} \frac{\ln|\tau - \rho|}{\tau \rho} ((\tau - \rho)\omega_j(\tau) + (\tau + \rho)\overline{\omega_j(\tau)}) d\tau + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{\rho_{2k-1}}^{\rho_{2k}} \frac{K_{1jk}^{(2)}(\rho, \tau)\omega_k(\tau) + K_{2jk}^{(2)}(\rho, \tau)\overline{\omega_k(\tau)}}{\sqrt{(\rho_{2j} - \rho)(\rho_{2k} - \tau)}} d\tau = \frac{2}{\pi} \frac{\Phi_j^{(2)}(\rho)}{\sqrt{\rho_{2j} - \rho}} \quad (37)$$

$$(\rho_{2j-1} \leq \rho \leq \rho_{2j}, \quad j = \overline{1, n}),$$

где $K_{1jk}^{(2)}(\rho, \tau)$, $K_{2jk}^{(2)}(\rho, \tau)$, $\Phi_j^{(2)}(\rho)$ — непрерывные КФДП, выраженные через равномерно и быстро сходящиеся интегралы на полуоси $0 \leq \beta < \infty$ и элементарные функции, которые эффективно вычисляются с любой необходимой точностью.

Искомые напряжения $\sigma_{z1} = p_{2j-1}(\rho)$, $\tau_{rz1} = q_{2j-1}(\rho)$ на отрезках $\rho_{2j-1} \leq \rho \leq \rho_{2j}$ ($j = \overline{1, n}$) контура L_1 и трансформанты Ханкеля $\bar{p}_{2j-1}(\beta)$, $\bar{q}_{2j-1}(\beta)$ выражаются через решение $\omega_j(\rho) = \varphi_j(\rho) + i\vartheta_j(\rho)$ ($j = \overline{1, n}$) системы СИУ (37) по следующим формулам:

$$\rho p_{2j-1}(\rho) = \frac{d}{d\rho} \int_{\rho_{2j-1}}^{\rho} \frac{\tau \varphi_j(\tau)}{\sqrt{\rho^2 - \tau^2}} d\tau, \quad \rho^2 q_{2j-1}(\rho) = \frac{d}{d\rho} \int_{\rho_{2j-1}}^{\rho} \frac{\tau^2 \vartheta_j(\tau)}{\sqrt{\rho^2 - \tau^2}} d\tau, \quad (38)$$

$$\bar{p}_{2j-1}(\beta) = \int_{\rho_{2j-1}}^{\rho_{2j}} \varphi_j(\rho) L_{0j}^{(2)}(\rho, \beta) d\rho,$$

$$\bar{q}_{2j-1}(\beta) = \int_{\rho_{2j-1}}^{\rho_{2j}} \rho \vartheta_j(\rho) L_{1j}^{(2)}(\rho, \beta) d\rho, \quad (39)$$

$$L_{0j}^{(2)}(\rho, \beta) = -\frac{d}{d\rho} \int_{\rho}^{\rho_{2j}} \frac{\tau J_0(\tau\beta)}{\sqrt{\tau^2 - \rho^2}} d\tau, \quad L_{1j}^{(2)}(\rho, \beta) = -\frac{d}{d\rho} \int_{\rho}^{\rho_{2j}} \frac{J_1(\tau\beta)}{\sqrt{\tau^2 - \rho^2}} d\tau.$$

Аналитические и численные решения систем СИУ (34), (37) представляют серьезную самостоятельную математическую и вычислительную проблему, принципиальные вопросы которой изучены в работе [14]. Отметим важные свойства этих систем уравнений и основные результаты их исследования.

Системы СИУ (34), (37) имеют нулевые индексы и, стало быть, являются квазифредгольмовыми: для них три основные теоремы Ф. Нетера равнозначны трем теоремам Фредгольма. Соответствующие системы СИУ распадаются на n независимых СИУ, допускающих простые замкнутые решения в адекватном ОСЗ классе функций, что обеспечивает возможность эффективного применения к исследованию исходных систем СИУ метода регуляризации Карлемана–Векуа. Характерным свойством ядер в регулярных частях систем СИУ (34), (37) является наличие корневых особенностей одновременно по обоим переменным, что делает их нефредгольмовыми и приводит в результате регуляризации к системам интегральных уравнений типа Фредгольма третьего рода. Для сравнения напомним, что канонические СИУ с фредгольмовыми ядрами в регулярной части сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода.

В работе [14] методом Карлемана–Векуа проведена регуляризация систем СИУ (34), (37); в результате они сведены к равносильным системам регулярных интегральных уравнений типа Фредгольма третьего рода, эффективно разрешимым численными методами. В процессе регуляризации выделены в явном виде особенности решений систем СИУ (34), (37) на концах отрезков интегрирования $\rho_{2j-1} \leq \rho \leq \rho_{2j}$ ($j = \overline{1, n}$), на основе которых затем изучены особенности и установлены коэффициенты интенсивности напряжений на всех сингулярных контурах раздела краевых условий $\rho = \rho_{2j-1}, \rho_{2j}$ ($j = \overline{1, n}$) в ОСЗ. В целом здесь разработаны надежные и достоверные вычислительные алгоритмы для эффективной численной реализации решения ОСЗ.

Данная методика исследования осесимметричных ОСЗ непосредственно разрешает соответствующие контактные задачи при наличии сцепления и распространяется на контактные задачи с учетом трения и без трения в областях контакта, имеющие более частный характер и сводящиеся, соответственно, к сходным сингулярным и регулярным интегральным уравнениям с теми же корневыми особенностями регулярных ядер, как в СИУ (34), (37). Контактные задачи для одного кругового или кольцевого штампов сводятся в конечном счете к разрешающим интегральным уравнениям типа Фредгольма соответственно второго или третьего

рода с непрерывными ядрами. Эффективность метода подтверждает численная реализация решений многих примеров контактных задач с известными и неизвестными границами областей контакта с учетом как двухсторонних, так и односторонних связей с многослойным полупространством [2, 11, 13, 14, 17, 20–23].

5. Плоские контактные задачи. В условиях плоской деформации многослойного полупространства наибольший теоретический и прикладной интерес представляют основные смешанные задачи в обобщенной постановке, аналогичных осесимметричным ОСЗ (п. 4). В случае плоских ОСЗ краевые условия на внешней поверхности многослойного полупространства разделяются на совокупности произвольного числа $4n$ или $2(2n-1)$ ($n = 1, 2, \dots$) прямых $\xi = \pm \xi_k$ ($k = \overline{1, 2n}$ или $k = \overline{1, 2n-1}$). Частными случаями этих задач являются контактные задачи для четного $2n$ или нечетного числа $2n-1$ ($n = 1, 2, \dots$) полосовых в плане штампов с учетом сцепления, трения и без трения в областях контакта. Кроме того, математический аппарат исследования плоских ОСЗ непосредственно распространяется и на родственные смешанные задачи для многослойного полупространства с полосовыми трещинами на границах раздела слоев.

Краевые условия симметричных и кососимметричных плоских ОСЗ на внешней граничной прямой $t = 1$, $-\infty < \xi < +\infty$ многослойной полуплоскости ξ, t достаточно сформулировать на положительной полуоси $0 \leq \xi < \infty$. Разобьем последнюю на два контура смежных промежутков

$$\begin{aligned} L_1^+ &= \{\xi_{2k-1} \leq \xi \leq \xi_{2k}\} \quad (k = \overline{1, n}), \\ L_2^+ &= \{\xi_{2(k-1)} < \xi < \xi_{2k-1}\} \quad (k = \overline{1, n+1}), \end{aligned} \quad (40)$$

где полагаем $\xi_0 = 0, \xi_1 \geq 0, \xi_2 = 1, \xi_{2n+1} = \infty$. В симметричной и кососимметричной ОСЗ при $t = 1$ на контуре L_1^+ произвольно задаются вертикальные и горизонтальные перемещения

$$\frac{E_1}{(1+\nu_1)a_2} w_1 = f_1(\xi), \quad \frac{E_1}{(1+\nu_1)a_2} u_1 = g_1(\xi) \quad (\xi \in L_1^+), \quad (41)$$

а на контуре L_2^+ — нормальные и касательные напряжения

$$\sigma_{z1} = p_{\Pi}(\xi), \quad \tau_{xz1} = q_{\Pi}(\xi) \quad (\xi \in L_2^+), \quad (42)$$

где

$$f_1, g_1 = f_{2k-1}(\xi), g_{2k-1}(\xi) \quad (\xi_{2k-1} \leq \xi \leq \xi_{2k}, \quad k = \overline{1, n}), \quad (43)$$

$$p_{\Pi}, q_{\Pi} = p_{2(k-1)}(\xi), q_{2(k-1)}(\xi) \quad (\xi_{2(k-1)} < \xi < \xi_{2k-1}, \quad k = \overline{1, n+1}), \quad (44)$$

$f_{2k-1}(\xi), g_{2k-1}(\xi)$ — дифференцируемые функции, а $p_{2(k-1)}(\xi), q_{2(k-1)}(\xi)$ представимы интегралами Фурье на соответствующих промежутках их определения. При этом в соответствии со структурой базовых решений

(10), (11) учитывается, что на симметричных контурах $L_1 = \{L_1^-, L_1^+\}$ и $L_{\Pi} = \{L_{\Pi}^-, L_{\Pi}^+\}$ оси $-\infty < \xi < +\infty$ в симметричной ОСЗ краевые функции $f_1(\xi), p_{\Pi}(\xi)$ являются четными, $g_1(\xi), q_{\Pi}(\xi)$ — нечетными, в кососимметричной, наоборот, $f_1(\xi), p_{\Pi}(\xi)$ — нечетными, $g_1(\xi), q_{\Pi}(\xi)$ — четными.

Неизвестные напряжения σ_{z1}, τ_{xz1} на контуре L_1^+ граничной прямой $t = 1$ обозначим соответственно $p_1(\xi), q_1(\xi)$, тогда на всей полуоси $0 \leq \xi < \infty$ они запишутся в виде

$$\sigma_{z1}, \tau_{xz1} = p(\xi), q(\xi) = \begin{cases} p_1(\xi), q_1(\xi) & (\xi \in L_1^+), \\ p_{\Pi}(\xi), q_{\Pi}(\xi) & (\xi \in L_{\Pi}^+). \end{cases} \quad (45)$$

В случае симметричной ОСЗ четная $p(\xi)$ и нечетная $q(\xi)$ функции (45) представляются соответственно через косинус- и синус-интегралы Фурье (9):

$$\begin{aligned} p(\xi) &= \int_0^{\infty} (\bar{p}_{1c}(\beta) + \bar{p}_{\Pi c}(\beta)) \cos(\xi\beta) d\beta, \\ q(\xi) &= \int_0^{\infty} (\bar{q}_{1s}(\beta) + \bar{q}_{\Pi s}(\beta)) \sin(\xi\beta) d\beta, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\bar{p}_{jc}(\beta) = \frac{2}{\pi} \int_{L_j^+} p_j(\xi) \cos(\xi\beta) d\xi,$$

$$\bar{q}_{js}(\beta) = \frac{2}{\pi} \int_{L_j^+} q_j(\xi) \sin(\xi\beta) d\xi \quad (j = I, II). \quad (47)$$

Напомним, что здесь функции $p_j(\xi), q_j(\xi)$ и их трансформанты Фурье (47) при $j = II$ известны, а при $j = I$ неизвестны и подлежат определению в ходе решения симметричной ОСЗ. Теперь внесем в левые части краевых условий (41), (42) формулы (10) для w_1, u_1 и (45), (46) для σ_{z1}, τ_{xz1} , в результате получим следующую систему парных интегральных уравнений относительно неизвестных трансформант Фурье $\bar{p}_{1c}(\beta), \bar{q}_{1s}(\beta)$:

$$\int_0^{\infty} [\Delta_{wp1}(1, \beta) \bar{p}_{1c}(\beta) + \Delta_{wq1}(1, \beta) \bar{q}_{1s}(\beta)] \frac{\cos(\rho\beta)}{\beta} d\beta = \mathcal{F}_1(\xi) \quad (\xi \in L_1^+), \quad (48)$$

$$\int_0^{\infty} [\Delta_{up1}(1, \beta) \bar{p}_{1c}(\beta) + \Delta_{uq1}(1, \beta) \bar{q}_{1s}(\beta)] \frac{\sin(\rho\beta)}{\beta} d\beta = \mathcal{G}_1(\xi) \quad (\xi \in L_1^+), \quad (49)$$

$$\int_0^{\infty} \bar{p}_{1c}(\beta) \cos(\xi\beta) d\beta = 0, \quad \int_0^{\infty} \bar{q}_{1s}(\beta) \sin(\xi\beta) d\beta = 0 \quad (\xi \in L_{\Pi}^+), \quad (50)$$

где

$$\mathcal{F}_1(\xi) = f_1(\xi) - w_{\Pi}(\xi), \quad \mathcal{G}_1(\xi) = g_1(\xi) - u_{\Pi}(\xi), \quad (51)$$

$$w_{\Pi}(\xi) = \int_0^{\infty} [\Delta_{wp1}(1, \beta) \bar{p}_{\Pi c}(\beta) + \Delta_{wq1}(1, \beta) \bar{q}_{\Pi s}(\beta)] \frac{\cos(\xi\beta)}{\beta} d\beta, \quad (52)$$

$$u_{\Pi}(\xi) = \int_0^{\infty} [\Delta_{up1}(1, \beta) \bar{p}_{\Pi c}(\beta) + \Delta_{uq1}(1, \beta) \bar{q}_{\Pi s}(\beta)] \frac{\sin(\xi\beta)}{\beta} d\beta.$$

Неизвестные трансформанты $\bar{p}_{1c}(\beta)$, $\bar{q}_{1s}(\beta)$ будем искать в форме интегралов (47), когда оба уравнения (50) на контуре L_{II}^+ тождественно удовлетворяются и, стало быть, система ПИУ (48)–(50) равносильна системе двух интегральных уравнений (48), (49) на контуре L_I^+ .

Далее вносим в уравнения (48), (49) формулы (47) для $\bar{p}_{1c}(\beta)$, $\bar{q}_{1s}(\beta)$, меняем порядки интегрирования, выделяем из функций $\Delta_{wk1}(1, \beta)$, $\Delta_{uk1}(1, \beta)$ ($k = p, q$) главные члены при $\beta \rightarrow \infty$ по формулам (7) с использованием равенств

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\beta} + \cos(\eta\beta)}{\beta} d\beta = \ln|\eta|, \quad \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(\eta\beta)}{\beta} d\beta = \operatorname{sgn}(\eta)$$

и затем дифференцируем оба уравнения по ξ . В результате после этих операций и очевидных простых преобразований сводим их к следующим СИУ относительно КФДП $\omega(\xi) = p_1(\xi) + iq_1(\xi)$, разрешающим симметричную ОСЗ

на контуре L_I^+

$$(1 - 2\nu_1)\omega(\xi) + \frac{2(1 - \nu_1)}{\pi i} \int_{L_I^+} \frac{\omega(\eta)}{\eta - \xi} d\eta + \frac{1}{\pi} \int_{L_I^+} [K_1(\xi, \eta)\omega(\eta) + (K_2(\xi, \eta) + \frac{2(1 - \nu_1)i}{\eta + \xi})\overline{\omega(\eta)}] d\eta = \Phi_1^{(e)}(\xi) \quad (53)$$

и на симметричном контуре L_I

$$(1 - 2\nu_1)\omega(\xi) + \frac{2(1 - \nu_1)}{\pi i} \int_{L_I} \frac{\omega(\eta)}{\eta - \xi} d\eta + \frac{1}{\pi} \int_{L_I} [K_1(\xi, \eta)\omega(\eta) + K_2(\xi, \eta)\overline{\omega(\eta)}] d\eta = \Phi_1^{(e)}(\xi), \quad (54)$$

где

$$\begin{aligned} K_1 &= K_{21} + K_{12} + i(K_{11} - K_{22}), \\ K_2 &= K_{21} - K_{12} + i(K_{11} + K_{22}), \\ K_{11} &= \int_0^\infty \Delta_{wp}(\beta) \cos(\eta\beta) \sin(\xi\beta) d\beta, \\ K_{12} &= \int_0^\infty \Delta_{wq}(\beta) \sin(\eta\beta) \sin(\xi\beta) d\beta, \\ K_{21} &= \int_0^\infty \Delta_{up}(\beta) \cos(\eta\beta) \cos(\xi\beta) d\beta, \\ K_{22} &= \int_0^\infty \Delta_{uq}(\beta) \sin(\eta\beta) \cos(\xi\beta) d\beta, \end{aligned}$$

функции $\Phi_1^{(e)}(\xi) = \frac{dG_1}{d\xi} - i \frac{dF_1}{d\xi}$, $G_1(\xi)$, $F_1(\xi)$ вычисляются по формулам (51), (52).

Кососимметричная ОСЗ с использованием базового решения (11) по той же методике сводится к СИУ (53), (54) с заменой в них только знаков + на – перед сингулярными частями (интегралами с ядром Коши) и функций $\Phi_1^{(e)}(\xi)$ в правых частях на функции $\Phi_1^{(k)}(\xi)$:

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(k)}(\xi) &= \frac{dG_1}{d\xi} + i \frac{dF_1}{d\xi}, \quad G_1(\xi) = g_1(\xi) + u_{II}(\xi), \quad F_1(\xi) = f_1(\xi) - w_{II}(\xi), \\ u_{II}(\xi) &= \int_0^\infty [\Delta_{up1}(1, \beta)\bar{p}_{IIc}(\beta) + \Delta_{uq1}(1, \beta)\bar{q}_{IIc}(\beta)] \frac{\cos(\xi\beta)}{\beta} d\beta, \\ w_{II}(\xi) &= \int_0^\infty [\Delta_{wp1}(1, \beta)\bar{p}_{IIc}(\beta) + \Delta_{wq1}(1, \beta)\bar{q}_{IIc}(\beta)] \frac{\sin(\xi\beta)}{\beta} d\beta. \end{aligned} \quad (55)$$

При разделении ОСЗ на симметричную и кососимметричную задачи разрешающее СИУ (54) на симметричном контуре L_I целесообразно использовать для одного штампа ($n = 1$, $\xi_1 = 0$). Для упрощения регуляризации, аналитического и численного исследования СИУ (53) на контуре L_I^+ целесообразно преобразовать к следующей системе СИУ относительно КФДП $\omega_j(\xi) = p_{2j-1}(\xi) + iq_{2j-1}(\xi)$ на совокупности отрезков $\xi_{2j-1} < \xi < \xi_{2j}$ ($j = \overline{1, n}$):

$$\begin{aligned} (1 - 2\nu_1)\omega_j(\xi) + \frac{2(1 - \nu_1)}{\pi i} \int_{\xi_{2j-1}}^{\xi_{2j}} \frac{\omega_j(\eta)}{\eta - \xi} d\eta + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{\xi_{2k-1}}^{\xi_{2k}} [K_{1jk}(\xi, \eta)\omega_k(\eta) + K_{2jk}(\xi, \eta)\overline{\omega_k(\eta)}] d\eta = -i\gamma_j + \Phi_j^{(e)}(\xi), \\ K_{1jk} = K_1(\xi, \eta) + i(1 - \delta_{jk}) \frac{2(1 - \nu_1)}{\eta - \xi}, \quad K_{2jk} = K_2(\xi, \eta) + i \frac{2(1 - \nu_1)}{\eta + \xi}, \\ \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k, \end{cases} \quad \Phi_j^{(e)}(\xi) = \frac{dG_j}{d\xi} - i \frac{dF_j}{d\xi}, \\ G_j(\xi) = g_{2j-1}(\xi) - u_{II}(\xi), \quad F_j(\xi) = f_{2j-1}^*(\xi) - w_{II}(\xi). \end{aligned} \quad (56)$$

Функции $u_{II}(\xi)$, $w_{II}(\xi)$ определяются по формулам (52). Поясним, что здесь правая часть системы СИУ (56) представлена в форме, когда вертикальные перемещения w_1 в краевом условии (41) реализуются под давлением жестких штампов:

$$f_1(\xi) = f_{2j-1}(\xi) = -h_j + \gamma_j \xi + f_{2j-1}^*(\xi) \quad (\xi_{2j-1} < \xi < \xi_{2j}, \quad j = \overline{1, n}),$$

где $h_j = \text{const} > 0$, $\gamma_j = E_1(1 + \nu_1)^{-1} \operatorname{tg} \varphi_j$, φ_j — неизвестные углы поворота штампов под действием приложенных к ним сил и моментов, $f_{2j-1}^*(\xi) \geq 0$ — функции, описывающие выпуклые контуры оснований штампов.

Кососимметричная ОСЗ разрешается системой СИУ (56) с учетом замены знака + на – перед сингулярной частью и функции $-i\gamma_j + \Phi_j^{(e)}(\xi)$

в правой части на функцию $i\gamma_j + \Phi_j^{(k)}(\xi)$, где $\Phi_j^{(k)}(\xi) = \frac{dG_j}{d\xi} + i \frac{dF_j}{d\xi}$, $G_j(\xi) = g_{2j-1}(\xi) + u_{II}(\xi)$, $F_j(\xi) = f_{2j-1}^*(\xi) - w_{II}(\xi)$, а $u_{II}(\xi)$ и $w_{II}(\xi)$ определены в (55).

Соответствующая системе СИУ (56) характеристическая система СИУ, очевидно, распадается на n независимых СИУ, допускающих простые замкнутые решения в различных классах функций $\omega_j(\xi)$ в зависимости от условий на концах отрезков интегрирования $\xi_{2j-1} < \xi < \xi_{2j}$ ($j = \overline{1, n}$), адекватным конкретным задачам, что обеспечивает возможность эффективно исследовать полную систему СИУ (56) путем ее регуляризации методом Карлемана–Векуа. В работе [14] дано исследование системы СИУ (56) для обеих ОСЗ (симметричной и кососимметричной) в классе неограниченных функций $\omega_j(\xi)$ на всех концах отрезков интегрирования $\xi_{2j-1} < \xi < \xi_{2j}$ ($j = \overline{1, n}$). В этом случае характеристические СИУ для каждого $j = \overline{1, n}$ имеют единичные индексы $\kappa = 1$, в результате решение полной системы СИУ (56) получает n произвольных комплексных постоянных C_j ($j = \overline{1, n}$) дополнительно к имеющимся в правой части действительным постоянным γ_j ($j = \overline{1, n}$). Все неизвестные постоянные γ_j, C_j ($j = \overline{1, n}$) однозначно определяются из следующих условий статического равновесия штампов:

$$\begin{pmatrix} P_j \\ Q_j \end{pmatrix} = a_2 \int_{\xi_{2j-1}}^{\xi_{2j}} \begin{pmatrix} \text{Re} \\ \text{Im} \end{pmatrix} \omega_j(\xi) d\xi, \quad M_j = a_2^2 \int_{\xi_{2j-1}}^{\xi_{2j}} \xi \omega_j(\xi) d\xi \quad (j = \overline{1, n}), \quad (57)$$

где P_j, Q_j, M_j — соответственно проекции на оси $O\xi, O\eta$ главных векторов и главные моменты приложенных к штампам внешних сил. В результате регуляризации система СИУ (56) сводится к равносильной системе регулярных интегральных уравнений типа Фредгольма 2-го рода, эффективно разрешимой стандартными численными методами. В работе [15] методика исследования ОСЗ распространена на аналогичные контактные задачи с трением и без трения, которые сводятся к сходным СИУ на контуре L_1^+ и к системе СИУ на совокупности отрезков $\xi_{2j-1} < \xi < \xi_{2j}$ ($j = \overline{1, n}$). В работе [16] разработана методика решения контактных задач с односторонними связями.

Представленная здесь методика решения ОСЗ и контактных задач для многослойной полуплоскости распространяется и на однородную полуплоскость как простейший частный случай при $\Delta_{kw}(\beta) \equiv \Delta_{ku}(\beta) \equiv 0$ ($k = p, q$), $K_1(\xi, \beta) \equiv K_2(\xi, \beta) \equiv 0$ и является аналогом метода ТФКП Г. В. Колосова и Н. И. Мухелишвили. В этом частном случае контактные задачи для одного штампа со сцеплением и без трения сводятся к характеристическим СИУ и разрешаются в замкнутом виде, аналогичном решению М. В. Келдыша и Л. И. Седова методом ТФКП.

6. К выбору и обоснованию метода. В пп. 2–5 освещен наиболее прямой и простой путь решения базовых краевых задач для многослойного полупространства методом интегральных преобразований, который

при удовлетворении краевых условий на внешней поверхности и на границах раздела слоев приводит к линейной системе функциональных уравнений (СФУ), определенной на полуоси $0 \leq \beta < \infty$. Далее остается стандартная процедура численного интегрирования интегралов Фурье–Ханкеля, в которой главным звеном является численная реализация решения СФУ. Но при этом СФУ должна удовлетворять условиям корректности по Адамару — иметь единственное устойчивое решение на всей полуоси $0 \leq \beta < \infty$, включая предельное асимптотическое решение при $\beta \rightarrow \infty$.

Математический и численный анализ показал, что в исходном решении краевой задачи, построенной методом интегрального преобразования с параметром α в размерных переменных, СФУ некорректна — она не имеет решения при больших значениях $\alpha \rightarrow \infty$. Причина некорректности заключается в неограниченном росте по экспоненциальному закону модуля функционального определителя СФУ

$$\Delta(\alpha) = \det \|\delta_{ij}(\alpha)\| \quad (i, j = \overline{1, 4N+2})$$

при возрастании $\alpha \rightarrow \infty$ в связи с наличием у отличных от нуля элементов матрицы возрастающих и убывающих экспоненциальных множителей: $\delta_{ij}(\alpha) = l_{ij}(\alpha) \exp(\pm H_i \alpha)$, где $l_{ij}(\alpha)$ — линейные функции. Этот факт свидетельствует о некорректности исходного решения краевой задачи и необходимости его тождественного преобразования, чтобы удовлетворить условиям корректности. В анализируемом методе исходные некорректные базовые решения тождественно преобразуются в корректные решения в безразмерных переменных (6), (10), (11) путем перехода к новым неизвестным функциям от параметра $\beta = a\alpha$ с введением в них единственного набора нормирующих экспоненциальных множителей. Полученная при этом новая СФУ корректна, ее матрица содержит только убывающие экспоненты $\exp(-\lambda(t_{i-1} - t_i)\beta)$, а определитель $\Delta(\beta)$ не принимает близких к нулю значений на всей полуоси $0 \leq \beta < \infty$, а при $\beta \rightarrow \infty$ имеет асимптоту $\Delta(\beta) = C$ ($C = \text{const}$, $1 < |C| < \infty$). При ином наборе нормирующих множителей СФУ сохраняет некорректность: модуль ее определителя $\Delta(\beta)$ при $\beta \rightarrow \infty$ или по-прежнему неограниченно возрастает, или стремится к нулю по экспоненциальному закону, т.е. имеет асимптоту $\Delta(\beta) = 0$, обращаясь в машинный нуль на полубесконечном интервале $1 < \beta^* < \beta < \infty$.

Важное теоретическое значение имеет логически и методически простая блочная структура матрицы, позволяющая построить замкнутое аналитическое решение СФУ в форме произведения матриц-клеток 4-го порядка и обосновать его корректность на всей полуоси $0 \leq \beta < \infty$, включая предельное асимптотическое решение, стремящееся по экспоненциальному закону к нулю при $\beta \rightarrow \infty$. Кроме того, СФУ допускает применение оптимальных по быстродействию и простоте прямых точных численных методов, например метода Гаусса с последовательным исключением неизвестных в компактной модификации. Результаты исследования СФУ

позволили доказать методами математического анализа сходимость интегралов (6), (10), (11) и, стало быть, существование решений исходных краевых задач. Этим самым в целом эффективно решена вычислительная проблема численной реализации базовых решений основных краевых задач и регулярных ядер интегральных уравнений смешанных (контактных) задач.

7. Матричный метод. В ряде работ [25, 26, 29, 30] в качестве базовых решений осесимметричных и плоских краевых задач предложены и развиты решения модифицированным методом матриц-размножителей (propagator matrix method). Поясним существо этого метода на примере представления базовых решений в форме (6), (10), (11). Методом матриц-размножителей решения в форме (6), (10), (11) строятся в процессе последовательного рекуррентного перехода от слоя к слою с учетом их совместного деформирования, начиная от известного решения в интегралах Ханкеля (Фурье) для $(N + 1)$ -го слоя — основания при произвольных нормальных и касательных напряжениях на его границе $t = t_N$ с последующим их определением через известные напряжения на внешней поверхности $t = 1$ многослойного полупространства. При этом формируется нелинейная система из 4-х функциональных рекуррентных соотношений (СФРС), которая связывает 8 подинтегральных функций $\Delta_{jki}(t, \beta)$, $\Delta_{jki+1}(t, \beta)$ ($j = z, \tau, u, w$) на границах раздела слоев $t = t_i$ ($i = \overline{N, 1}$) с известными функциями $\Delta_{jkN+1}(t, \beta)$ отдельно при нормальной ($k = p$) и касательной ($k = q$) нагрузках. Кстати отметим, что в рассматриваемых работах функции $\Delta_{jki}(t, \beta)$ выражаются через гиперболические функции $\text{sh}(\lambda t_i \beta)$, $\text{ch}(\lambda t_i \beta)$. Легко видеть, что СФРС в методе матриц-размножителей является эквивалентом СФУ в методе единого пакета (см. пп. 2–7) и служит главным звеном численной реализации решения краевых задач. Вопросы корректности СФРС сводятся к устранению путем тождественных преобразований (см. п. 6) быстро растущих гиперболических функций $\text{sh}(\lambda t_i \beta)$, $\text{ch}(\lambda t_i \beta)$ и надлежащему обоснованию сходимости итерационного процесса нелинейных рекуррентных соотношений при возрастании числа слоев N на всей полуоси $0 \leq \beta < \infty$.

На основе представленного матричного метода в работах [1, 3–8, 29, 30] построены сингулярные и регулярные интегральные уравнения плоских и осесимметричных контактных задач для отдельных штампов и систем штампов при условиях сцепления, трения и без трения в областях контакта со слоистой средой. Публикуются результаты численного решения примеров конкретных контактных задач.

8. Контактные задачи для стратифицированного полупространства. В работах [12, 14] реализован предельный переход при $N \rightarrow \infty$, $\max \Delta H_i \rightarrow 0$ ($i = \overline{1, N}$) в решениях краевых задач (см. пп. 2–5) для многослойного полупространства (см. п. 1), аппроксимирующего страти-

фицированное полупространство из слоя $0 \leq z \leq H$ произвольной толщины H с непрерывными или кусочно-непрерывными упругими характеристиками $E(z)$, $\nu(z)$, сцепленного с однородным полупространством $z < 0$ ($E_{N+1} = E_n$, $\nu_{N+1} = \nu_n$). Предельный переход базируется на глубоком математическом анализе всей триады корректности исходных аппроксимирующих и предельных решений и доказательстве совпадения предельных решений с известными тождественно преобразованными аналитическими решениями соответствующих краевых задач на основе уравнения равновесия для стратифицированного полупространства [27, 28]. Аналитическое решение СФУ в аппроксимирующих решениях в пределе переходит в матрицант линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, через который выражаются подинтегральные функции $\Delta_{jk}(t, \beta)$ ($j = z, \tau, u, w$; $k = p, q$) предельных решений в форме интегралов Фурье–Ханкеля (6), (10), (11). В результате решения контактных задач для аппроксимирующего многослойного полупространства (см. пп. 4, 5) переходят в предельные решения контактных задач для стратифицированного полупространства с надлежащим математическим обеспечением вычислительной проблемы.

Аналогичный предельный переход в решениях краевых задач для N -слойного пакета матричным методом (см. п. 7) реализован в работах [9, 10, 30].

Исследования контактных задач на основе уравнений равновесия стратифицированного полупространства с переходом к аппроксимирующему его многослойному полупространству, обычно связанному с численными методами, выходят за рамки настоящего обзора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вольский С. Л., Ильман В. М., Приварников А. К. Плоская контактная задача для многослойного основания при наличии трения и сцепления // Вопросы прочности и пластичности. Днепропетровск: Изд-во ДГУ, 1974. С. 41–57.
2. Заболоцкая А. Ф., Никишин В. С., Парийский Б. С. Аналитическое и численное исследование контактных задач теории упругости для слоистых сред с односторонними связями // Проблемы прикладной математики и информатики. М.: Наука, 1987. С. 145–169.
3. Ильман В. М. Некоторые контактные задачи для многослойных сред // Автореф. дисс. на соискание учен. степени канд. физ.-мат. наук. Донецк: Изд-во ДГУ, 1972. 22 с.
4. Ильман В. М., Ламзюк В. Д., Приварников А. К. О характере взаимодействия штампа с упругим многослойным основанием // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 5. С. 134–138.
5. Ильман В. М., Приварников А. К. Действие системы штампов на упругое многослойное основание // Прикл. мех. 1971. Т. 7. № 6. С. 25–30.
6. Ильман В. М., Приварников А. К. Плоская задача о действии системы штампов на упругое многослойное основание // Вопросы прочности и пластичности. Днепропетровск: Изд-во ДГУ, 1971. С. 36–57.

7. Ламзюк В. Д. Некоторые контактные задачи теории упругости для многослойных оснований // Автореф. дисс. на соискание учен. степени канд. физ.-мат. наук. Днепрпетровск. 1975. 18 с.
8. Ламзюк В. Д., Приварников А. К. Смешанные задачи теории упругости для многослойных оснований с круговыми линиями раздела граничных условий. Тез. докл. Всес. конф. по смешанным задачам МДТ. Ч. 1. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1977. С. 37–38.
9. Наумов Ю. А. Пространственная деформация неоднородного по толщине упругого слоя // Вопросы прочности и пластичности. Днепрпетровск: Изд-во ДГУ, 1974. С. 3–22.
10. Наумов Ю. А., Шевляков Ю. А., Чистяк В. И. К решению основных задач теории упругости для слоя с произвольной неоднородностью по толщине // Прикл. механика. 1970. Т. 6. № 7. С. 35–31.
11. Никишин В. С. Осесимметричные контактные задачи теории упругости для многослойных сред // Сообщения по прикл. матем. М.: ВЦ АН СССР, 1976. Вып. 3. 102 с.
12. Никишин В. С. Задачи теории упругости для неоднородных сред // Сообщения по прикл. матем. М.: ВЦ АН СССР, 1976. Вып. 4. 60 с.
13. Никишин В. С. Краевые задачи теории упругости для многослойных и непрерывно-неоднородных сред. Автореф. дисс. на соискание ученой степени докт. физ.-мат. наук. М. 1977. 32 с.
14. Никишин В. С. Корректная постановка и численное решение основных и смешанных задач теории упругости для многослойных и непрерывно-неоднородных сред. Автореф. дисс. на соискание ученой степени докт. физ. мат. наук. М. 1982. 36 с.
15. Никишин В. С., Китороагэ Т. В. Плоские контактные задачи теории упругости для многослойных сред // Сообщения по вычисл. матем. М.: ВЦ АН СССР, 1990. 68 с.
16. Никишин В. С., Китороагэ Т. В. Плоские контактные задачи теории упругости с односторонними связями для многослойных сред // Сообщения по прикл. матем. М.: ВЦ РАН, 1994. 44 с.
17. Никишин В. С., Парийский Б. С., Шапиро Г. С. Задача о консолидации упругой пористой многослойной среды под давлением кругового в плане штампа // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 5. С. 909–918.
18. Никишин В. С., Шапиро Г. С. Пространственные задачи теории упругости для многослойных сред. М.: ВЦ АН СССР, 1970. 260 с.
19. Никишин В. С., Шапиро Г. С. Задачи теории упругости для многослойных сред. М.: Наука, 1973. 131 с.
20. Никишин В. С., Шапиро Г. С. О контактных задачах для упругих многослойных сред // Тр. симпозиума по механике сплошной среды и родственным проблемам анализа. Т. 1. Тбилиси: МЕЦНИЕРЕБА, 1973. С. 192–205.
21. Никишин В. С., Шапиро Г. С. Задача о неполном контакте кольцевого или кругового штампа с упругой слоистой средой // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 5. С. 27–38.
22. Никишин В. С., Шапиро Г. С. Контактная задача теории упругости для слоя, локально прижатого к полупространству // Изв. АН АрмССР. Механика. 1976. Т. 29, № 2. С. 3–15.
23. Никишин В. С., Шапиро Г. С. Контактная задача теории упругости с односторонними связями // Докл. АН АрмССР. Механика. 1976. № 4. С. 224–231.

24. Никишин В. С., Шапиро Г. С. Осесимметричные смешанные задачи теории упругости для многослойных сред // Теоретична и приложна механика. Трети конгрес. Доклади, книга 1. София: БАН, 1977. С. 556–561.
25. Петришин В. И., Приварников А. К. Основные граничные задачи теории упругости для многослойных оснований // Прикл. мех. 1965. Т. 1. № 4. С. 58–66.
26. Петришин В. И., Приварников А. К., Шевляков Ю. А. К решению задач для многослойных оснований // Изв. АН СССР. Механика. 1965. Вып. 2. С. 138–143.
27. Плевако В. П. К теории упругости неоднородных сред // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 5. С. 853–860.
28. Плевако В. П. Неоднородный слой, сцепленный с полупространством, под воздействием внутренних и внешних сил // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 5. С. 865–875.
29. Приварников А. К. Пространственная деформация многослойного основания // Устойчивость и прочность элементов конструкций. Днепрпетровск: Изд-во ДГУ, 1973. С. 27–45.
30. Шевляков Ю. А. Матричные алгоритмы в теории упругости неоднородных сред. Киев–Одесса: Вища школа, 1977. 216 с.

§ 6. СТАТИЧЕСКИЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЕЛ С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

Т. И. Белянкова, Л. М. Филиппова

Повышение требований к точности расчета конструкций, находящихся в условиях контактного взаимодействия, приводит к необходимости усложнения моделей сплошной среды, в частности, к необходимости учета начальных (остаточных) напряжений, к необходимости развития эффективных методов исследования особенностей контактного взаимодействия преднапряженных упругих тел. Первые работы по контактным задачам для преднапряженных тел были основаны на использовании простых форм упругого потенциала (Трелоара, Муни, Джона и др.) с целью более прозрачного представления о характере влияния и сущности изменений, вносимых начальными напряжениями. В этом плане Л. М. Филипповой в работе [28] рассмотрена задача о внедрении жесткого штампа в упругую полуплоскость из несжимаемого материала Муни. Начальная деформация предполагалась однородной, действующей вдоль границы полуплоскости, трение в области контакта не учитывалось. Задача сведена к решению интегрального уравнения вида

$$\frac{K(\Delta)}{4\pi(C_1\Delta + C_2)} \int_{-a}^a q(\xi) \ln \frac{1}{|x - \xi|} d\xi = f(x), \quad (1)$$

где

$$K(\Delta) = \frac{-2\Delta^2(1 - \Delta^3)}{(1 + \Delta^3)^2 - 4\Delta^{3/2}}. \quad (2)$$

Здесь C_1, C_2 — параметры материала Муни, Δ — относительное удлинение волокон в начально-деформированном состоянии. Из (1) видно, что в данном случае интегральное уравнение для преднапряженной среды отличается от уравнения соответствующей классической (т.е. при отсутствии начальных напряжений) контактной задачи лишь наличием множителя, зависящего от величины начальной деформации. Это обстоятельство позволило привлечь для исследования хорошо известные решения классических интегральных уравнений, а также непосредственно из (2) определить критические значения Δ^* , при которых перемещения точек полуплоскости становятся неограниченными, когда наступает потеря устойчивости сжатой полуплоскости. В работе получены соотношения, описывающие влияние начальной деформации на распределение контактных давлений в случае плоского, наклонного и параболического штампов, проведен анализ особенностей этого влияния.

Эта же задача в пространственной постановке рассмотрена Л. М. Филипповой в работе [29]. Исследовалось преднапряженное упругое полупространство из несжимаемого неогуковского материала. Начальное на-

пряженное состояние предполагалось однородным. Задача сведена к решению интегрального уравнения, символ ядра которого в этом случае существенно зависит от вида начального напряженного состояния.

В случае, когда предварительное растяжение (сжатие) одинаково в обоих направлениях (трансверсальная анизотропия), интегральное уравнение для преднапряженной среды, как и в [28], отличается от классического интегрального уравнения лишь наличием множителя. Это позволило на основе привлечения известных решений интегральных уравнений классических задач выявить особенности влияния начальной деформации на распределение контактных давлений для плоского, наклонного и параболического штампов, а также определить диапазон допустимых деформаций, при которых сжатое полупространство является устойчивым.

В случае, когда начальные удлинения различны по направлениям, символ ядра интегрального уравнения отличается от классического существенным образом. Автору удалось построить решение этого уравнения для случая, когда коэффициенты удлинения по различным направлениям мало отличаются друг от друга, и провести анализ особенностей влияния начальной деформации на распределение напряжений в зоне контакта для плоского, наклонного и параболического штампов.

Задача для тяжелой полуплоскости из несжимаемого изотропного материала исследована В. М. Александровым, Л. М. Филипповой в [7]. В работе отмечено, что в отличие от классического случая, перемещения в тяжелой преднапряженной полуплоскости от действия сосредоточенной силы определяются однозначно и убывают на бесконечности. Здесь впервые при исследовании контактных задач для преднапряженных тел для решения интегрального уравнения был использован асимптотический метод, оказавшийся достаточно эффективным. Для наклонного штампа установлено, что учет напряжений от собственного веса позволяет однозначно определить смещение штампа, в отличие от классической задачи, где смещение штампа является неопределенным. Для параболического штампа проведен анализ влияния начальных растяжений на распределение контактного давления и размер зоны контакта.

Постановку контактных задач для гиперупругих тел, подверженных однородной начальной деформации, изложил А. Н. Гузь в работе [15] для сжимаемых материалов и в работе [16] для несжимаемых материалов произвольной формы упругого потенциала. В этих работах предложены методы решения отдельных классов задач. В качестве иллюстрации рассмотрены контактные задачи о кручении для начально-деформированного полупространства, приведены простые соотношения, связывающие момент, приложенный к штампу, с углом его поворота.

Изучение более сложных контактных задач для преднапряженных тел стало возможным благодаря развитию эффективных подходов к исследованию смешанных краевых задач теории упругости и методов реше-

ния интегральных уравнений. Одним из наиболее эффективных подходов исследования указанных задач для материалов с произвольным видом упругого потенциала и однородной начальной деформации явился подход, предложенный А. Н. Гузем в работах [17, 18, 20]. Этот подход, основанный на использовании аппарата теории функций комплексных переменных (комплексные потенциалы и методы решения задачи Римана-Гильберта) для плоских задач [17, 18] и теории потенциала (интегральных преобразований, интегральных уравнений) для пространственных задач [20], в дальнейшем развили в большом цикле работ А. Н. Гузь и его ученики: С. Ю. Бабич, Ю. П. Глухов, В. И. Кнюх, В. М. Назаренко, В. Б. Рудницкий. В работах [9–12, 15–18, 20, 21] и др. проведен широкий спектр исследований по контактными задачам для гиперупругих тел, подверженных однородной начальной деформации, включая постановку контактных задач и общее представление их решений в рамках теории больших (конечных) начальных деформаций, а также в рамках различных вариантов теории малых начальных деформаций при произвольной структуре упругого потенциала как для сжимаемых, так и для несжимаемых материалов. Подробный и полный обзор работ этого направления приведен в монографии [21].

Другим, не менее эффективным подходом для исследования статических контактных задач для предварительно напряженных тел оказался подход, основанный на использовании асимптотических методов решения интегральных уравнений. В рамках этого подхода удалось исследовать контактные задачи для физически или геометрически нелинейных материалов, для сложных видов напряженных состояний, обусловленных наложением полей однородных начальных напряжений и силы тяжести.

Общая постановка плоских контактных задач для полупространства и слоя, подверженных одновременному воздействию сил тяжести и однородных, ориентированных вдоль границы, начальных напряжений дана в работе В. М. Александрова и Н. Х. Арутюняна [1]. Предполагалось, что материал среды является несжимаемым и описывается либо уравнениями физически нелинейной (геометрически линейной) теории установившейся ползучести, либо уравнениями геометрически нелинейной (физически линейной) теории упругости. В предположении, что силы трения в области контакта отсутствуют, изучена проблема эллиптичности линеаризованных уравнений (внутренней устойчивости среды), исследованы явления поверхностной неустойчивости среды. В качестве иллюстрации проведен анализ влияния механических свойств и начального напряженного состояния среды на контактную жесткость. Для потенциала Муни обнаружены значения начальных напряжений, при которых упругий континуум начинает работать как основание Винклера.

Влияние начальной деформации на процесс внедрения штампа в полосу из несжимаемого гиперупругого материала, находящуюся под дей-

ствием собственного веса и приложенных на бесконечности усилий рассмотрели В. М. Александров и С. Р. Брудный [2].

Плоские и осесимметричные контактные задачи для физически нелинейного (линейного геометрически) и геометрически нелинейного (гармонического типа) материала исследовались И. В. Воротынцевой [13] совместно с В. М. Александровым [3] и с Е. В. Коваленко [14]. С помощью соответствующих интегральных преобразований задачи сведены к решению интегральных уравнений с нерегулярными разностными ядрами. Структура этих уравнений совпадает со структурой соответствующих уравнений классической теории упругости, а свойства символов их ядер позволяют использовать для решения асимптотические методы «больших» и «малых λ », развитые в работах В. М. Александрова. Влияние нелинейных свойств среды и начальных напряжений на контактную жесткость, функцию распределения контактных напряжений и величину вдавливающей силы в плоском случае исследовано в [13], в осесимметричном случае — в [3, 14]. В работах установлено, что начальные напряжения не влияют на порядок особенности на краях штампа, но влияют на проникающую составляющую решения как в области контакта, так и вне ее. Исследованы условия потери внутренней устойчивости среды в зависимости от начальных напряжений. Для ряда конкретных нелинейно-упругих сред построены области эллиптичности линеаризованных уравнений, при переходе через границу которых происходит либо потеря поверхностной устойчивости, либо потеря поверхностной деформируемости, связанные с потерей эллиптичности. В работе установлено, что при стыковке решений, полученных методами «больших» и «малых λ », значение относительной толщины λ^* , на которой стыкуются эти методы, существенно зависит от параметров начального напряженного состояния среды.

Слой из физически нелинейного упругого материала рассматривался В. М. Александровым, В. С. Порошиным [4, 5] и В. С. Порошиным [26]. Он же в [27] рассмотрел эту задачу с учетом упруго-пластических деформаций для сжимаемых материалов. В [6] получено интегральное уравнение, которое отличается от интегрального уравнения для линейно-упругой среды видом подынтегральной функции. В качестве примера исследована задача о плоском эллиптическом в плане штампе. Установлено, что увеличение начальных напряжений приводит к уменьшению силы, необходимой для внедрения штампа на фиксированную величину.

Контактные задачи для преднапряженных полуплоскости и полосы из сжимаемого упругого материала рассмотрели В. Б. Зеленцов и Л. М. Филиппова [24]. Задача о вдавливании жесткого штампа в упругую полуплоскость из полулинейного материала (трение в области контакта не учитывается) приводится к интегральному уравнению, ядро которого, как и в контактной задаче для полуплоскости из несжимаемого материала, отличается от ядра классической контактной задачи лишь множителем, зави-

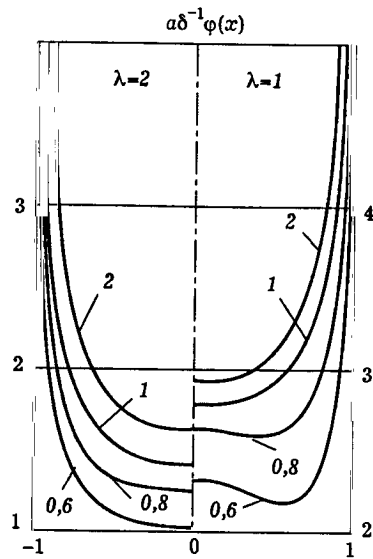


Рис. 1

сящим от величины начальной деформации. Как и в [28], в данной статье приведены условия потери устойчивости сжатой полуплоскости. Для штампов конкретной формы проведен анализ влияния начальных напряжений на распределение контактного давления и величину зоны контакта при заданной прижимающей силе.

Задача о вдавливании жесткого гладкого штампа в преднапряженный слой рассмотрена в двух вариантах: в одном варианте слой без трения лежит на жестком основании (задача 1), в другом — слой жестко сцеплен с недеформируемым основанием (задача 2). Символы ядер интегральных уравнений в обоих случаях существенно зависят от начальных напряжений, при определенных значениях Δ (относительных удлинениях волокон) имеют экспоненциальный рост на бесконечности. В трактовке авторов это свидетельствует о том, что в слое и на его поверхности вне штампа появляется стоячая волна перемещений со стремящейся к нулю длиной волны.

Свойства символов ядер, полученных в работе интегральных уравнений, позволяют использовать для их решения асимптотические методы «больших» и «малых λ ». На рис. 1, 2 приведены графики нормированных контактных давлений для задачи 1 при различных значениях λ (относительной толщины слоя) и Δ (относительного удлинения). Значения последних указаны возле кривых. Из графиков следует, что характер влияния начальной деформации на распределение контактных давлений претерпевает существенные изменения с ростом относительной толщины слоя или уменьшения ширины штампа.

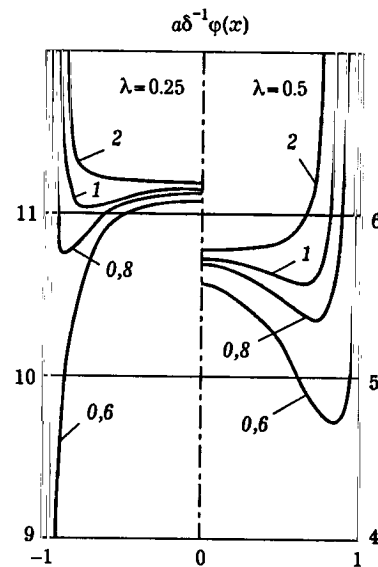


Рис. 2

Изучению контактного взаимодействия штампов (бандажа) с преднапряженным телом (цилиндром) конечных размеров посвящен ряд работ Л. М. Филипповой, А. Н. Цветкова, М. И. Чебакова [34–36]. Так в [36] рассмотрена задача о внедрении симметрично расположенных штампов в торцы конечного цилиндра. Предполагается, что трение в области контакта отсутствует, на боковой поверхности цилиндра реализуется условие скользящей заделки, начальное напряженное состояние является однородным, обусловленным действием сил, приложенных к боковой поверхности. Контактная задача сведена к парному ряду-уравнению, которое, в свою очередь, сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. В качестве примера исследовано влияние начальных напряжений σ_0 на распределение контактных напряжений и действующей на штамп силы для материалов Муни и Бартенева–Хазановича. Анализ показал, что жесткость системы «штамп–цилиндр» существенно зависит от вида материала и отношения высоты цилиндра к радиусу штампа. В работе отмечено, что для рассмотренных материалов жесткость системы «штамп–цилиндр» при стремлении радиуса цилиндра к радиусу штампа неограниченно возрастает.

Аналогичным образом в [35] исследовалось влияние осевого растяжения (сжатия) конечного цилиндра, контактирующего с жестким бандажом меньшего радиуса, на жесткость системы «бандаж–цилиндр». Предполагалось, что бандаж расположен на боковой поверхности цилиндра симметрично и без трения, а торцы цилиндра взаимодействуют с жесткой гладкой поверхностью. Материал цилиндра представляет собой нелинейный упругий изотропный несжимаемый материал общего вида. Анализ, проведенный на примере материала Муни, показал, что с увеличением осевого напряжения σ_0 жесткость системы «бандаж–цилиндр» увеличивается.

В [34] исследовалась плоская задача о взаимодействии двух штампов с противоположными гранями прямоугольника, в котором создано однородное поле начальных напряжений. На двух других оставшихся гранях созданы условия скользящей заделки. Анализ показал, что характер влияния параметра σ_0 на жесткость прямоугольника в случае материала Муни существенно зависит от соотношения его геометрических параметров, а в случае материала Бартенева–Хазановича жесткость при увеличении σ_0 не убывает при любых соотношениях его геометрических параметров.

Влияние преднапряжений на контактное взаимодействие тел с учетом износа исследовалось Л. М. Филипповой в работе [33]. Рассмотрена осесимметричная контактная задача о внедрении жесткого штампа, вращающегося с постоянной угловой скоростью, в преднапряженное упругое полупространство в предположении, что на площадке контакта возникают силы трения, действующие в окружном направлении и связанные с контактным давлением законом Кулона. В связи с этим, перемещение штампа зависит от времени t , так как определяется не только приложенной силой,

но и наличием износа упругого основания. В работе проведен анализ влияния начальных напряжений на скорость изменения контактного давления во времени за счет износа. Показано, что при предварительном сжатии контактное давление с течением времени убывает медленнее, чем при отсутствии начальных напряжений. Предварительное растяжение приводит к противоположному результату.

В настоящем обзоре представлены исследования по контактным задачам для начально-деформированных тел лишь применительно к жестким штампам. К исследованиям по контактным задачам о воздействии штампов на упругие тела тесно примыкают задачи теории трещин. Различные аспекты влияния начальной деформации на напряженно-деформированное состояние тела, ослабленного трещиной, в частности, исследование влияния начальных напряжений на образование и развитие трещин, проблемы устойчивости трещин в упругих телах и т.п. рассматривались В. М. Александровым, Л. М. Филипповой [8], В. М. Александровым, В. В. Соболев [6], В. Б. Зеленцовым, Л. М. Филипповой [25], В. Б. Зеленцовым, Ю. Е. Пузановым [23], Л. М. Филипповой в ряде работ [30–32]. Большой цикл работ в этих направлениях выполнили А. Н. Гузь [19], а также его ученики В. И. Кнюх, В. М. Назаренко [22] и др.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В. М., Арутюнян Н. Х. Контактные задачи для преднапряженных деформируемых тел // Прикл. мех. 1984. Т. 20. № 3. С. 9–16.
2. Александров В. М., Брудный С. Р. Две задачи со смешанными граничными условиями для несжимаемого изотропного гиперупругого материала // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 700–704.
3. Александров В. М., Воротынцева И. В. Осесимметричные контактные задачи для преднапряженных деформируемых тел // ПМТФ. 1990. № 3. С. 146–153.
4. Александров В. М., Порошин В. С. Контактная задача для предварительно напряженного физически нелинейного упругого слоя // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 6. С. 79–85.
5. Александров В. М., Порошин В. С. Контактная задача для преднапряженного физически нелинейного упругого слоя, имеющего постоянный коэффициент Пуассона // Трение и износ. 1991. Т. 12. № 4. С. 604–609.
6. Александров В. М., Соболев В. В. Равновесие предварительно напряженного упругого тела, ослабленного плоской эллиптической трещиной // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 2. С. 348–352.
7. Александров В. М., Филиппова Л. М. Контактная задача для тяжелой полуплоскости // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 3. С. 483–489.
8. Александров В. М., Филиппова Л. М. Прямолинейная трещина в предварительно напряженном упругом теле // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 3. С. 106–111.
9. Бабич С. Ю. О контактных задачах для предварительно напряженной полуплоскости с учетом сил трения // Докл. АН УССР. Сер. А. 1980. № 2. С. 21–24.
10. Бабич С. Ю., Гузь А. Н. Пространственные контактные задачи для упругого полупространства с начальными напряжениями // Докл. АН УССР. Сер. А. 1981. № 9. С. 35–39.

11. Бабич С. Ю., Гузь А. Н. Общая пространственная статическая контактная задача для предварительно напряженного упругого полупространства // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 3. С. 438–444.
12. Бабич С. Ю., Рудницкий В. Б. Некоторые плоские контактные задачи предварительно напряженного слоя // Прикл. механика. 1989. Т. 25. № 1. С. 93–100.
13. Воротынцева И. В. Плоские контактные задачи для физически нелинейной преднапряженной упругой среды // ПММ. 1986. Т. 22. Вып. 4. С. 657–662.
14. Воротынцева И. В., Коваленко Е. В. Осесимметричная контактная задача для преднапряженного физически нелинейного полупространства и слоя конечной глубины // Аналитические и численные методы решения краевых задач пластичности и вязкоупругости. Пермь. 1986. С. 33–38.
15. Гузь А. Н. О контактных задачах для упругих сжимаемых тел с начальными напряжениями // Докл. АН УССР. Сер. А. 1980. № 6. С. 48–52.
16. Гузь А. Н. К теории контактных задач для упругих несжимаемых тел с начальными напряжениями // Докл. АН УССР. Сер. А. 1980. № 7. С. 42–45.
17. Гузь А. Н. Комплексные потенциалы плоской линеаризованной задачи теории упругости (сжимаемые тела) // Прикл. механика. 1980. Т. 16. № 5. С. 72–83.
18. Гузь А. Н. Комплексные потенциалы плоской линеаризованной задачи теории упругости (несжимаемые тела) // Прикл. механика. 1980. Т. 16. № 6. С. 64–70.
19. Гузь А. Н. Теория трещин в упругих телах с начальными напряжениями (постановка задач, трещины отрыва) // Прикл. мех. 1980. Т. 16. № 12. С. 3–14.
20. Гузь А. Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. Киев: Наукова думка, 1983. 296 с.
21. Гузь А. Н., Бабич С. Ю., Рудницкий В. Б. Контактное взаимодействие упругих тел с начальными напряжениями. Киев: Вища школа, 1995. 304 с.
22. Гузь А. Н., Кнюх В. И., Назаренко В. М. Пространственная осесимметричная задача о разрушении материала с двумя дискообразными трещинами при сжатии вдоль трещин // Прикл. механика. 1984. Т. 20. № 11. С. 3–20.
23. Зеленцов В. Б., Пузанов Ю. Е. Об эффективном методе решения интегральных уравнений задач теории трещин // Изв. СКНЦ ВШ. Естеств. науки. 1989. № 3. С. 16–32.
24. Зеленцов В. Б., Филиппова Л. М. Контактные задачи для предварительно напряженных полуплоскости и полосы // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 2. С. 73–76.
25. Зеленцов В. Б., Филиппова Л. М. Трещина на границе раздела предварительно напряженных упругих сред // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 5. С. 830–836.
26. Порошин В. С. Вдавливание штампа в предварительно напряженный физически нелинейный упругий слой // Изв. АН АрмССР. Механика. 1986. Т. 39. № 2. С. 24–30.
27. Порошин В. С. О контактной задаче для сжимаемых упругопластических тел // Трение и износ. 1986. Т. 7. № 6. С. 1123–1127.
28. Филиппова Л. М. Плоская контактная задача для предварительно напряженного упругого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 3. С. 143–146.
29. Филиппова Л. М. Пространственная контактная задача для предварительно напряженного упругого тела // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 6. С. 1080–1084.
30. Филиппова Л. М. О влиянии начальных напряжений на раскрытие круговой трещины // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 2. С. 286–290.
31. Филиппова Л. М. Распределение напряжений вблизи кромки трещины в предварительно напряженном упругом теле // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 2. С. 320–327.
32. Филиппова Л. М. Устойчивость сжатого упругого слоя, ослабленного круговой трещиной // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 2. С. 327–330.

33. Филиппова Л. М. Осесимметричная контактная задача для предварительно напряженного упругого тела при наличии износа // Изв. СКНЦ ВШ. Естеств. науки. 1992. № 1–2. С. 31–35.
34. Филиппова Л. М., Цветков А. Н., Чебаков М. И. Плоская контактная задача для предварительно напряженного состояния тела прямоугольного сечения // Прикл. мех. 1990. Т. 26. № 12. С. 81–89.
35. Филиппова Л. М., Цветков А. Н., Чебаков М. И. Взаимодействие жесткого бандажа с предварительно напряженным упругим цилиндром // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 5. С. 51–56.
36. Филиппова Л. М., Чебаков М. И. Контактная задача для предварительно напряженного конечного цилиндра // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 2. С. 62–69.

§ 7. КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ СО СЦЕПЛЕНИЕМ И УТОЧНЕННЫМ УСЛОВИЕМ КОНТАКТА

И. А. Солдатенков

Ниже используются следующие обозначения: μ — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, $\kappa = 3 - 4\nu$.

1. Контактные задачи со сцеплением. Соответствующие постановки задач предполагают наличие участков области контакта, на которых поверхности контактирующих тел жестко связаны друг с другом. Контактные задачи со сцеплением можно условно разделить на два класса: задачи с фиксированной областью контакта и задачи квазистатического внедрения с возрастающей областью контакта.

1.1. Задачи первого класса при полном сцеплении штампа с упругим телом предполагают известными граничные перемещения в пределах области контакта. Подобная задача теории упругости, по всей видимости, была впервые решена в [27] в виде степенных рядов. Замкнутое решение задачи о плоском штампе, сцепленном с упругой полуплоскостью, дано в [2], где, в частности, выявлено свойство контактных напряжений менять свой знак бесконечное число раз вблизи концов области контакта.

Рассмотренные в последнее время постановки контактных задач при полном сцеплении допускают различные усложнения условий взаимодействия.

Решения задач со сцеплением для упругих тел конечных размеров содержатся в [7, 20]. Метод решения [7] плоской задачи со сцеплением для прямоугольника основывается на представлении функции напряжения Эри рядом Фурье и получении из граничных условий сингулярного интегрального уравнения с ядром Гильберта. В результате задача сводится к бесконечной системе алгебраических уравнений. В задаче [20] о взаимодействии сцепленных по торцу цилиндра и слоя получено уравнение с положительным оператором относительно контактного напряжения, что позволяет затем с помощью метода Ритца свести задачу также к бесконечной системе алгебраических уравнений.

В работе [41] анализируется упомянутая выше особенность контактных напряжений менять свой знак бесконечное число раз на концах области контакта. Проводится аналогия между напряженным состоянием вблизи конца трещины и напряженным состоянием на конце области контакта сцепленного с полуплоскостью штампа. С помощью известных асимптотических подходов решения задачи для трещины устанавливается спиралевидная особенность перемещения свободной поверхности полуплоскости вблизи концов области контакта. Делается попытка устранить указанные особенности напряженно-деформированного состояния полуплоскости путем замены прямоугольной формы штампа на трапецеидаль-

ную, в предположении, что на боковых сторонах такой трапеции трение отсутствует.

Задача о контакте со сцеплением торца упругой полуполосы и упругой полуплоскости рассматривается в [42]. Решение строится в предположении, что при удалении от области контакта напряженное состояние полуполосы соответствует равномерному продольному сжатию. С использованием аппарата преобразования Фурье задача сводится к системе трех сингулярных интегральных уравнений второго рода относительно контактных напряжений и нормального перемещения.

Постановка задачи [35] допускает наличие внутри полуплоскости, с которой взаимодействует плоский наклонный штамп, источников тепла при условии стационарности температурного поля. Задача сводится к интегральному уравнению

$$\int_{-a}^a \left[\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x-t) - \frac{i}{\pi \epsilon} \ln|x-t| \right] \chi(t) dt = F(x),$$

где $\chi(t) = p(t) - \mu k T(t) + iq(t)$, q и p — касательное и нормальное контактные напряжения, T — заданная температура границы полуплоскости под штампом, F — функция, связанная с граничными условиями, ϵ и k — известные коэффициенты. Решение данного уравнения находится в виде разложения по многочленам Якоби, полученного в [34].

Задача со сцеплением для полуплоскости с пьезокерамическими свойствами рассмотрена в [9]. Решение ищется в виде интегралов Фурье, которые совместно с граничными условиями дают систему парных интегральных уравнений. Применение к этим уравнениям обратного преобразования Фурье приводит к системе сингулярных интегральных уравнений, решение которых находится в замкнутом виде. Метод парных интегральных уравнений для получения точного решения контактной задачи электроупругости для полуплоскости при наличии сцепления использовался также в [8].

В работе [22] рассматривается контактное взаимодействие со сцеплением штампа и цилиндрической оболочки, несущей внутреннюю равномерную гидростатическую нагрузку. Решение задачи находится из дифференциальных уравнений деформирования оболочки в предположении, что область контакта задана.

Постановка [33] допускает наличие сферической полости в полупространстве, с которым сцеплен круговой штамп. Решение задачи ищется обобщенным методом Фурье, с использованием наборов точных решений для полупространства и пространства с полостью. В результате задача сводится к системе парных интегральных уравнений, которые, в конечном счете, преобразуются в бесконечную систему алгебраических уравнений.

Контакт со сцеплением торца цилиндрического штампа и полупространства при наличии между ними тонкого слоя рассмотрен в [47]. Де-

формационные свойства слоя описываются моделью Винклера с коэффициентами податливости на сдвиг и сжатие k_τ и k_σ , связывающих касательное и нормальное контактные напряжения с касательным и нормальным граничными перемещениями слоя, соответственно. Для решения задачи используются известные интегральные представления функций напряжения через функции Бесселя 1-го рода. С их помощью из граничных условий получена система парных интегральных уравнений, решение которых ищется в виде рядов.

Контактная задача со сцеплением для штампа произвольной формы с плоским основанием и упругого полупространства рассмотрена в [23]. Решение ищется в форме Треффтца, причем соответствующие функции представляются интегральными операторами, после чего, в силу граничных условий, получается система парных интегральных уравнений. Для построения решения этой системы вводятся дополнительные осесимметричные гармонические функции, с помощью которых задача сводится к симметричной, и после ряда преобразований — к плоской задаче сопряжения.

Основанное на теории потенциала решение для трансверсально изотропного полупространства, сцепленного с круговым штампом, имеющим плоское наклонное основание, дано в [43].

В работе [6] рассматривается метод решения интегральных уравнений, к которым сводится контактная задача о вибрации штампа, сцепленного с упругим полупространством, слоем или слоистой средой. Метод основывается на аппроксимации ядер уравнений рациональными функциями. Решение аналогичной задачи со сцеплением в [1] представляется в виде рядов по полиномам Чебышева первого рода, для коэффициентов которых получена бесконечная система алгебраических уравнений.

Задача со сцеплением, при условии, что силы контактного взаимодействия могут зависеть от интенсивности адгезии, рассмотрена в вариационной постановке в [21]. Для ее решения используется термодинамический подход, предполагающий включение в число параметров состояния деформируемого тела интенсивности адгезии — от полного сцепления до полного разрушения адгезионных связей.

Описанные выше постановки контактных задач с постоянной областью контакта предполагают полное сцепление контактирующих тел. Более сложная постановка допускает наличие в пределах области контакта дополнительных участков проскальзывания. Впервые такая задача была рассмотрена в [14, 40] для полуплоскости в предположении, что участок сцепления располагается в центральной части области контакта, а по бокам от него лежат два участка проскальзывания. В работе [40] пренебрегалось трением на участках проскальзывания и решение было получено в замкнутом виде путем составления и последующего решения уравнения класса Фукса для двух аналитических функций $w_1(z)$, $w_2(z)$, описыва-

ющих напряженно-деформированное состояние полуплоскости. В работе [14] была поставлена более общая задача с кулоновым трением на участках проскальзывания, причем метод решения задачи основывается на введении в рассмотрение определенной области, конформное отображение которой на исходную полуплоскость, определяется искомыми функциями $w_1(z)$, $w_2(z)$. Другими словами, задача сводится к определению конформного отображения полуплоскости на известную область, что также приводит к решению уравнения класса Фукса, но более сложного, нежели в [40].

В последнее время был предложен ряд подходов к решению задачи с трением и сцеплением в постановке Л. А. Галина [14].

В работах [18, 19] задача с трением и сцеплением сводится к следующим граничным условиям для аналитической функции $\Phi(z)$, первое из которых составляет задачу Римана с разрывным коэффициентом G :

$$\begin{aligned}\Phi^+(t) &= G(t)\Phi^-(t) + F(t), \quad t \in L_0 \cup L_1, \\ \operatorname{Im}[\alpha_1\Phi^+(t) + \alpha_2\Phi^-(t)] &= 2\alpha_3g'(t), \quad t \in L_1,\end{aligned}$$

где L_0 обозначает центральный участок сцепления, L_1 — совокупность двух боковых участков проскальзывания, $g(t)$ — форма штампа, величины α_k , $k=1, 2, 3$ зависят от упругих постоянных, а функция $G(t)$ определяется ещё и размерами участков проскальзывания и сцепления.

Общее решение записанной выше задачи Римана подставляется во второе граничное условие, в результате чего получается следующее сингулярное интегральное уравнение для контактного давления p на участке проскальзывания:

$$A\rho\varphi(t) + \frac{1}{\pi} \int_{L_1} \frac{\varphi(\xi)d\xi}{\xi-t} + \frac{1}{\pi} \int_{L_1} \Gamma(t, \xi)\varphi(\xi) d\xi = U(t),$$

в котором ρ — коэффициент трения, $\varphi(t)$ выражается через $p(t)$, коэффициент A зависит от упругих постоянных, $\Gamma(t, \xi)$, $U(t)$ — известные функции. Условие разрешимости данного уравнения в классе ограниченных решений совместно с условием равновесия дают дополнительные равенства для определения неизвестных участков сцепления и проскальзывания. Найденная в результате таких выкладок функция $\Phi(z)$ позволяет определить контактное давление на участке сцепления по известным формулам [28].

Сведение задачи с трением и сцеплением к задаче сопряжения использовалось в [26]. Для этого, аналогично [14], вводят две аналитические функции $w_1(z)$, $w_2(z)$ и выполняют преобразование координат $\zeta = -(w_2 + iw_1)/(w_2 - iw_1)$. Затем для комбинаций Y_1Y_2 и $\ln(Y_1/Y_2)$ функций $Y_1 = \sqrt{(z^2 - l^2)}(w_2 - iw_1)$, $Y_2 = -\sqrt{(z^2 - l^2)}(w_2 + iw_1)$ выписывают две задачи сопряжения, решения которых получают в явном виде. В частности, для

размера a области сцепления получено уравнение

$$-\frac{\ln \kappa}{2 \arctg \rho} = \int_a^l \frac{dx}{\sqrt{(l^2 - x^2)(x^2 - a^2)}} \left[\int_l^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - l^2)(x^2 - a^2)}} \right]^{-1},$$

где ρ — коэффициент трения, l — полуширина области контакта.

В работах [31, 32] задача с трением и сцеплением сводится к комбинированной задаче Дирихле–Римана: $\operatorname{Im} \Phi^\pm(t) = f^\pm(t)$, $\Phi^+(t) + \kappa\Phi^-(t) = g(t)$, где $f^\pm(t)$, $g(t)$ определяются через граничные перемещения и напряжения. Данный подход позволяет рассматривать взаимодействие с упругой полуплоскостью системы произвольно нагруженных штампов при условии, что касательное контактное напряжение на участках проскальзывания задано. Получены необходимые и достаточные условия, при которых решение имеет механический смысл. Эти условия имеют вид неравенств с параметром $k = 0, 1, 2, \dots$, связывающих размеры участков сцепления и проскальзывания с условиями внешнего нагружения.

Постановка плоской задачи с трением и сцеплением при действии на штамп дополнительного момента сил дана в [25]. Основание штампа считается плоским, а расположение участков сцепления и проскальзывания принимается как в [14]. Решение задачи ищется в виде суммы решения для полностью сцепленного наклонного штампа и симметричного решения задачи [14], которое сводится к решению уравнения класса Фукса и представляется здесь в виде ряда по отрицательным степеням z . В результате общее решение задачи дается равенством

$$\Phi(z) = \frac{2i\mu\omega}{\kappa + 1} + \frac{P_0 i}{2\pi} (Kz + C) \left(\frac{1}{z} + \frac{a_{-1}}{z^2} + \frac{2a_{-2} + l^2}{2z^3} + \dots \right),$$

где ω — угол поворота штампа, величины P_0 , K , C определяются условиями нагружения, $a_{-2} = -\lambda_a/2$, λ_a — акцессорный параметр уравнения класса Фукса, определяемый при решении этого уравнения. Коэффициент a_{-1} находится путем обхода интегралами уравнения класса Фукса бесконечно удаленной точки.

В аналогичной постановке задача с трением и сцеплением при дополнительном моменте сил решена в [30]. Здесь задача разбивается на симметричную и кососимметричную, при этом предполагается, что в каждой такой задаче участок сцепления имеет вид $[-b, b]$, но при разных b . Получены интегральные уравнения относительно симметричной и кососимметричных составляющих контактных напряжений, решения которых представляются в виде разложений, соответственно, по многочленам Гегенбауэра и Якоби, после чего на основе известных интегральных соотношений для этих многочленов интегральные уравнения сводятся к бесконечной системе алгебраических уравнений.

В работе [3] для решения осесимметричной задачи с трением и сцеплением используется интегральное представление функции напряжения

через функции Бесселя 1-го рода. С его помощью из граничных условий получена система парных интегральных уравнений, которые преобразованием Фурье сводятся к двум сингулярным уравнениям

$$\left[1 + \frac{\kappa}{2} h_a(x)\right] \Phi_1(x) - \frac{i\kappa}{2\pi} \int_{-b}^b \frac{h_b(s)\Phi_2(s)}{s-x} ds = G_1(x),$$

$$\left[1 + \frac{\kappa}{2} h_b(x)\right] \Phi_2(x) - \frac{i\kappa}{2\pi} \int_{-b}^b \frac{h_a(s)\Phi_1(s)}{s-x} ds = G_2(x),$$

где $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$ — образы Фурье искоемых функций, $G_1(x)$, $G_2(x)$ — образы Фурье функций, выражающихся через форму штампа и величину его внедрения, $h_a(x)$, $h_b(x)$ — известные функции, b — радиус участка сцепления. Решение этих уравнений, совместно с условием непрерывности касательных контактных напряжений позволяет определить неизвестную величину b .

В работе [4] в полярной системе координат рассматривается задача о полубесконечном штампе с участками проскальзывания $r \in (0, b)$ и сцепления $r \in (b, \infty)$. В рассмотрение вводятся функции $\chi(r) = \tau_{r\theta} - \rho\sigma_\theta$, $\psi(r) = 2\mu \partial u_r / \partial r$, $\theta = 0$, $r \in (0, \infty)$, к которым применяется преобразование Меллина. В результате получается задача Римана: $\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + F(t)$, где

$$\Phi^+(t) = \int_1^\infty \chi(br)r^t dr, \quad \Phi^-(t) = \int_0^1 \psi(br)r^t dr.$$

Функция $F(t)$ определяется через искоемые контактные напряжения. Применение к известному решению задачи Римана обратного преобразования Меллина позволяет определить функции $\chi(r)$ и $\psi(r)$. Неизвестный размер b определяется из условия $\tau_{r\theta} - \rho\sigma_\theta = 0$, $\theta = 0$.

Для решения задачи с трением и сцеплением в постановке Л. А. Галина в [4] вводятся функции

$$\chi_1(r) = \sigma_\theta, \quad \chi_2(r) = \tau_{r\theta} + \rho\sigma_\theta,$$

$$\psi_1(r) = 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \psi_2(r) = 2\mu \frac{\partial u_\theta}{\partial r},$$

где $\theta = 0$, $r \in (0, \infty)$. С помощью преобразования Меллина получается однородная задача Римана для двух аналитических функций. Решение этой задачи ищется в виде рядов, для коэффициентов которых выводится бесконечная система алгебраических уравнений. В свою очередь, решение этой системы представляется в виде асимптотических разложений по степеням b/a , где a, b — полудлины области контакта и центрального участка сцепления, в результате чего строится решение исходной задачи с любой наперед заданной точностью. Данный подход позволяет получить решение задачи, когда на штамп дополнительно действуют касательная нагрузка и момент сил.

Осесимметричная задача с трением и сцеплением для трансверсально-изотропного полупространства рассматривается в [10]. Постановка задачи предполагает малым отношение $\varepsilon = E^*/E$ модулей упругости в перпендикулярном к плоскости изотропии направлении (E^*) и в плоскости изотропии (E). В этом случае соответствующая система уравнений Ламе расщепляется на две подсистемы, первая из которых описывает относительно медленно меняющееся вдоль нормального к границе направления напряженное состояние, тогда как решение второй подсистемы носит характер погранслоя. Решение такой задачи ищется в виде асимптотических по ε степенных рядов. В частности, для штампа с плоским основанием получено следующее соотношение для радиуса b участка сцепления:

$$\sqrt{k} \ln \left(\frac{1+b/a}{1-b/a} \right) = 2\rho \frac{b}{a} K' \left(\frac{b}{a} \right),$$

где a — радиус области контакта, ρ — коэффициент трения, $k = \mu^*/E^*$, μ^* — модуль сдвига в перпендикулярном к плоскости изотропии направлении, K — полный эллиптический интеграл первого рода.

Ряд постановок контактных задач с проскальзыванием и сцеплением касается качения тела по деформируемому основанию. В работах [16, 17, 39] подобное взаимодействие исследуется в квазистатическом приближении. Для этого используется вариационная постановка задачи, которая сводится к минимизации определенного функционала, зависящего от контактных напряжений, при нелинейных ограничениях в виде неравенств. Данная постановка позволяет определить расположение участков проскальзывания и сцепления, а также доказать теоремы существования и единственности решения. При численной реализации метода исходная вариационная задача заменяется конечномерной задачей математического программирования.

Вопросы расположения участков проскальзывания и сцепления при упругопластическом контакте катящегося цилиндра и полупространства исследуются в [45]. Здесь также изучаются динамические эффекты рассматриваемого контактного взаимодействия и затрагивается вопрос определения остаточных напряжений на основе модели Прандтля – Рейсса.

1.2. Постановка задачи внедрения выпуклого штампа со сцеплением в упругое тело предполагает монотонное возрастание области контакта. Соответствующие граничные условия включают следующее соотношение для касательного перемещения границы u :

$$u(x, a) = \varphi(x), \quad (1)$$

в котором x — координата, a — параметр внедрения (например, величина внешней нагрузки, размер области контакта), тогда как $\varphi(x)$ — некоторая неизвестная функция, независимость которой от a выражает условие сцепления жесткого штампа с упругим телом.

Впервые контактные задачи подобного типа для симметричного штампа были поставлены и решены в [24, 44]. Используемый в этих работах инкрементальный подход к решению задач подобного типа состоит в том, что при нагружении контактирующего со сцеплением тела (полупространства) скорость изменения его напряженного состояния совпадает с напряженным состоянием полупространства, сцепленного со штампом, имеющим уже плоское основание. Интегрирование такого состояния по параметру внедрения дает решение исходной задачи.

В работе [46] рассмотрены две контактные задачи со сцеплением для полосы, ширина h которой много больше размера a области контакта. В первой задаче рассматривается штамп с плоским основанием и, следовательно, постоянной областью контакта. Решение строится с помощью преобразования Фурье бигармонического уравнения относительно функции напряжения Эри с последующим асимптотическим разложением в ряды по x/a ядер получаемых интегральных уравнений. Вторая задача касается внедрения в полосу со сцеплением выпуклого штампа и ее решение строится с помощью инкрементального подхода, при этом используется напряженное состояние уже полученного решения для штампа с плоским основанием.

Отличный от инкрементального подход к решению задач о внедрении штампа со сцеплением в упругую полуплоскость предложен в [37, 38]. Соответствующая процедура получения решения основывается на обращении по методу Н. И. Мусхелишвили [29] системы сингулярных интегральных уравнений для контактных напряжений и использовании дополнительного условия корректности подобного обращения в качестве интегрального уравнения для неизвестной функции $\varphi(x)$ из (1):

$$\int_{-a}^b \left(\varphi'(x) \begin{Bmatrix} -\sin \alpha(x, a) \\ \cos \alpha(x, a) \end{Bmatrix} + g'(x) \begin{Bmatrix} \cos \alpha(x, a) \\ \sin \alpha(x, a) \end{Bmatrix} \right) \frac{dx}{\sqrt{(a+x)(b-x)}} = 0,$$

где $(-a, b)$ — область контакта, $\alpha(x, a) = \frac{1}{2} \tau \ln[(a+x)/(b-x)]$, $\tau = \pi^{-1} \ln(3-4\nu)$, $g(x)$ — форма штампа. Важно, что такой подход позволяет решать несимметричные задачи.

Численный анализ задачи о внедрении со сцеплением выпуклого штампа в упругое тело конечных размеров выполнен в [15].

Задача о внедрении клиновидного штампа в упругую полуплоскость при наличии центрального участка сцепления и двух боковых участков проскальзывания рассматривалась в [5]. Решение задачи основывается на методе, изложенном в [4] применительно к постановке с фиксированной областью контакта. В качестве одного из результатов получена линейная зависимость размера области контакта от нормальной нагрузки на штамп. Рассмотрена также задача о вдавлении с трением и сцеплением штампа в упругий клин.

2. Контактные задачи с уточненным условием контакта. Отличие описываемой ниже постановки контактной задачи от классической заключается в том, что в ней граничное условие для нормального перемещения v учитывает наличие касательного перемещения u границы:

$$v(x) = g(x + u(x)) + \text{const}, \quad (2)$$

где $g(x)$ — форма контртела (штампа), x — координата точек контактирующей поверхности.

Впервые такая задача рассматривалась в [11–13] для упругого полупространства, взаимодействующего без трения со штампами различной формы (пирамида, конус, параболоид). После линеаризации по u правой части условия (2) и замены в нем перемещений u, v их известными выражениями через контактное давление p , получается интегральное уравнение первого рода относительно $p(x)$. Решение этого уравнения, при условии равновесия и соотношениях $p(x) \geq 0$, $x \leq a$, $p(a) = 0$, строится либо с помощью конечно-разностной аппроксимации интегрального оператора, либо методом последовательных приближений с применением регуляризующего алгоритма. Проведенный анализ показывает, что уточненная постановка задачи приводит к уменьшению несовместности контактных деформаций.

В работе [36] в уточненной постановке рассмотрена симметричная контактная задача для полуплоскости и параболического штампа $g(x) = \gamma x^2$. С использованием метода Н. И. Мусхелишвили обращения сингулярных интегральных уравнений [29] доказана теорема существования решения поставленной задачи и установлено, что характер поведения контактного давления на концах области контакта имеет вид

$$p(x) \rightarrow \text{const} (1-x^2)^\lambda, \quad x \rightarrow \pm a; \quad \lambda = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctg \left[\left(\frac{1-2\nu}{1-\nu} \right) \gamma a \right],$$

тогда как в классическом случае [28] $\alpha = 1/2$.

В уточненной постановке также решалась задача о внедрении штампа со сцеплением в упругую полуплоскость в [37]. Полученные в этой работе соотношения позволяют определить влияние учета касательного перемещения в правой части (2) на контактное давление и размер области контакта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдуллаев У. Р. Вертикальные гармонические колебания жесткого штампа, сцепленного с упругой полуплоскостью // Докл. АН УзССР. 1982. № 2. С. 14–16.
2. Абрамов В. М. Проблема контакта упругой полуплоскости с абсолютно жестким фундаментом при учете сил трения // Докл. АН СССР. 1937. Т. 17. № 4. С. 173–178.

3. *Абрамян Б. Л., Мхитарян С. М.* Об осесимметрической контактной задаче при наличии участков сцепления и скольжения // Тез. докл. Выездного заседания по современным проблемам теории контактных взаимодействий. Ереван. 1988. С. 3–8.
4. *Антипов Ю. А., Арутюнян Н. Х.* Контактные задачи теории упругости при наличии трения и сцепления // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 6. С. 1005–1017.
5. *Антипов Ю. А., Арутюнян Н. Х.* Контактные задачи теории упругости для клиновидных областей в условиях трения и сцепления // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 5. С. 709–721.
6. *Бабешко В. А., Пряхина О. Д.* Метод фиктивного поглощения в плоских контактных задачах теории упругости при наличии сцепления // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 4. С. 725–733.
7. *Баблюян А. А., Енгибарян А. А.* Контактная задача для прямоугольника при наличии сцепления // Изв. АН АрмССР. Механика. 1977. Т. 30. № 3. С. 3–14.
8. *Бежаниян В. А.* Плоская контактная задача электроупругости для полуплоскости при наличии сцепления // Дифференциальные уравнения с частными производными в прикладных задачах. Киев. 1986. С. 99–103.
9. *Бежаниян В. А., Улитко А. Ф.* Контактная задача для пьезокерамической полуплоскости, электродированной под штампом, при наличии сцепления // Докл. АН УССР. Сер. А. 1990. № 6. С. 35–39.
10. *Воробьева Н. И., Коблик С. Г., Маневич Л. И.* Осесимметричная контактная задача с учетом сцепления и проскальзывания // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 3. С. 550–558.
11. *Галанов Б. А.* Численное определение зон нарушения совместности деформаций в некоторых контактных задачах теории упругости и решение этих задач в уточненной постановке // Докл. АН УССР. Сер. А. 1982. № 7. С. 36–40.
12. *Галанов Б. А.* Постановка и решение некоторых уточненных задач упругого контакта двух тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 6. С. 56–63.
13. *Галанов Б. А., Кривонос Ю. М.* Об учете в задаче Герца тангенциальных смещений на поверхности контакта // Вычислительная и прикладная математика. 1984. Вып. 53. С. 87–94.
14. *Галин Л. А.* Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления // ПММ. 1945. Т. 9. Вып. 5. С. 413–424.
15. *Гасанов А. И.* К численному решению контактной задачи теории упругости с неизвестной зоной контакта при наличии полного сцепления // Докл. АН АзССР. 1982. Т. 38. № 7. С. 3–7.
16. *Гольдштейн Р. В., Заковский А. Ф., Спектор А. А., Федоренко Р. П.* Решение вариационными методами пространственных контактных задач качения с проскальзыванием и сцеплением // Успехи механики. 1982. Т. 5. Вып. 3/4. С. 61–102.
17. *Гольдштейн Р. В., Спектор А. А.* Вариационные методы решения и исследования пространственных контактных и смешанных задач с трением / Механика деформируемого тела. М.: Наука. 1986. С. 52–73.
18. *Доборджинидзе Л. Г.* К задаче давления штампа при наличии участков трения и сцепления // Сооб. АН ГрузССР. 1982. Т. 105. № 2. С. 265–268.
19. *Доборджинидзе Л. Г.* Задача сжатия двух упругих тел при наличии участков сцепления и скольжения // Сооб. АН ГрузССР. 1983. Т. 109. № 3. С. 493–496.
20. *Златин А. Н.* Вариационный метод решения контактной задачи для сцепленных цилиндра и слоя // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 1. С. 152–158.
21. *Иванова Е. Б., Кравчук А. С.* Вариационный подход к решению контактных задач с учетом адгезии // Расчеты на прочность. М. 1989. Вып. 30. С. 156–165.

22. *Карпенко Т. Н.* Контактная задача для цилиндрической оболочки со штампом в условиях сцепления // Прикл. мех. 1980. Т. 16. № 5. С. 57–61.
23. *Качаловская Н. Е., Моссаковский В. И.* Контактная задача для штампа некруговой формы, сцепленного с основанием // Прочность и долговечность конструкций. Киев. 1980. С. 45–55.
24. *Моссаковский В. И.* Сжатие упругих тел в условиях сцепления (осесимметричный случай) // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 3. С. 418–427.
25. *Моссаковский В. И., Бискуп А. Г., Моссаковская Л. В.* Дальнейшее развитие задачи Галина с трением и сцеплением // Докл. АН СССР. 1983. Т. 271. № 1. С. 60–64.
26. *Моссаковский В. И., Бискуп А. Г., Моссаковская Л. В.* Об одном методе решения плоских контактных задач с трением и сцеплением // Докл. АН СССР. 1989. Т. 308. № 3. С. 561–564.
27. *Мухелишвили Н. И.* Решение основной смешанной задачи теории упругости для полуплоскости // Докл. АН СССР. 1935. Т. 3. № 2. С. 51–54.
28. *Мухелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Изд-во АН СССР. 1954. 648 с.
29. *Мухелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука. 1968. 512 с.
30. *Мхитарян С. М.* К контактным задачам о вдавливании штампа в упругое основание при наличии участков трения и сцепления // Тез. докл. Выездного заседания по современным проблемам теории контактных взаимодействий. Ереван. 1988. С. 105–109.
31. *Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М.* Контакт упругой полуплоскости с частично отслоившимся штампом // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 4. С. 663–673.
32. *Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М.* Давление системы штампов на упругую полуплоскость при общих условиях контактного сцепления и скольжения // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 2. С. 284–293.
33. *Николаев А. Г.* Круговой штамп на трансверсально изотропном полупространстве со сферической полостью при наличии сцепления // Прикл. мех. 1994. Т. 30. № 8. С. 48–53.
34. *Попов Г. Я.* Плоская контактная задача теории упругости с учетом сил сцепления или трения // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 3. С. 551–563.
35. *Попова А. П.* Плоская контактная задача термоупругости для полуплоскости с учетом сил сцепления и источников тепла // Прикл. мех. 1976. Т. 12. № 1. С. 117–123.
36. *Солдатенков И. А.* Контактная задача для полуплоскости при учете касательного перемещения на контакте // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 4. С. 51–61.
37. *Солдатенков И. А.* О вдавливании со сцеплением симметричного штампа в упругую полуплоскость // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 2. С. 267–273.
38. *Солдатенков И. А.* О вдавливании со сцеплением штампа в упругую полуплоскость при наличии касательной нагрузки // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 1. С. 111–118.
39. *Спектор А. А.* Вариационный метод исследования контактных задач с проскальзыванием и сцеплением // Докл. АН СССР. 1977. Т. 236. № 1. С. 39–42.
40. *Фалькович С. В.* О давлении жесткого штампа на упругую полуплоскость при наличии участков сцепления и скольжения // ПММ. 1945. Т. 9. Вып. 5. С. 425–432.
41. *Adams G. G.* A Rigid Punch Bonded to a Half Plane // Trans. of the ASME. Ser. E.J. Appl. Mech. 1979. V. 46. № 4. P. 844–848.

42. Adams G. G., Bogy D. B. The Plane Solution for the Elastic Contact Problem of a Semi-Infinite Strip and Half Plane // Trans. of the ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1976. V. 43. № 4. P. 603–607.
43. Fabrikant V. I. Inclined Circular Punch Bonded to Transversely Isotropic Half-Space // J. of Engineering Mechanics. 1990. V. 116. № 7. P. 1599–1617.
44. Goodman L. E. Contact stress analysis of normally loaded rough spheres // Trans. of the ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1962. V. 29. P. 515–522.
45. Ichimaru Kazunori. Contact mechanics III // J. Jap. Soc. Lubr. Eng. 1982. V. 27. № 9. P. 657–661.
46. Pauwelussen J. P., Alblas J. B. The indentation of an elastic layer by a rigid stamp under conditions of complete adhesion // Acta Mechanica. 1980. V. 35. № 1–2. P. 109–126.
47. Shibuya T., Koizumi T. The Contact Problem of an Elastic Half Space with an Adhered Rigid Punch // Bulletin of the JSME. 1984. V. 27. № 234. P. 2651–2657.

§ 8. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ФУНДАМЕНТНЫХ ПЛИТ С ЛИНЕЙНО-УПРУГИМ ОСНОВАНИЕМ

Г. Н. Павлик

1. Широкое применение теория расчета тонкостенных элементов, взаимодействующих с деформируемым основанием, находит в строительстве. Несмотря на обширный опыт, накопленный современной теорией расчета конструкций на деформируемом основании, ряд проблем, ввиду их математической сложности, продолжают оставаться актуальными. К числу таких проблем можно отнести:

- 1) выбор расчетной модели основания в смысле сближения ее с реальными свойствами грунта;
- 2) разработку методов расчета сложных пространственных конструкций с учетом их взаимодействия с деформируемым основанием;
- 3) создание универсальных программных комплексов, ориентированных на широкого пользователя, предусматривающих автоматизацию всех этапов расчета в целях более полного внедрения достижений теории в инженерную практику.

К настоящему времени проблема выбора расчетной модели основания решается неоднозначно. По-видимому, дальнейшее развитие этого вопроса вряд ли приведет к созданию единой универсальной модели, описывающей всё многообразие физических явлений, происходящих в естественных грунтах, и в каждом конкретном случае выбор той или иной модели будет обусловлен ее практической целесообразностью.

Известно, что естественные грунты под действием нагрузки деформируются и получают осадку, приблизительно пропорциональную нагрузке. Однако, после удаления нагрузки всегда наблюдается остаточная деформация. Таким образом, грунт не является вполне упругим телом, но ему все же в стадии нагружения можно приписать некоторые упругие свойства. В связи с этим возникла задача о расчете конструкций на упругом основании, моделирующем естественный грунт.

Долгое время единственной расчетной моделью была модель Фуса–Винклера–Циммермана. Она основана на прямо пропорциональной зависимости между осадкой поверхности основания и реактивным давлением. Введение гипотезы Винклера позволило уточнить существовавшие методы расчета, а также решить ряд новых задач. Так, впервые академиком А. Н. Динником была решена задача о расчете круглой плиты на упругом основании.

Хотя методики расчета, основанные на гипотезе Винклера, широко используются в нормативных материалах и до настоящего времени, но в ряде случаев большая условность такой модели заставила специалистов искать более точные подходы. В 20-х годах Г. Э. Проктором и К. Вигхардом, а затем в 1939 г. М. И. Горбуновым-Посадовым была выдвинута

новая модель — упругое однородное изотропное полупространство. Такой шаг привел к значительному увеличению точности расчета фундаментных плит и послужил стимулом для создания новых математических методов теории упругости. Модель упругого полупространства получила широкое развитие в фундаментальных трудах М. И. Горбунова-Посадова и Т. А. Маликовой [20], Б. Н. Жемочкина и А. П. Синицина [25], Б. Г. Коренева [32], а также в работах П. И. Клубина [31], А. Г. Ишковой, Н. Н. Безуховой [27–29] и др.

Опыт показал, что и эта модель не лишена недостатков. Поэтому рядом авторов были выдвинуты новые модели для более точного описания свойств естественных грунтовых оснований. Здесь следует упомянуть двухпараметрическую модель В. З. Власова и Н. Н. Леонтьева [14], М. М. Филоненко-Бородича [49], П. Л. Пастернака [42]. Вопросам дальнейшего совершенствования модели основания в рамках теории упругости большое внимание уделено в работах В. М. Александрова, И. И. Воровича [5, 6], К. Е. Егорова [24], Ю. А. Наумова, Ю. А. Шевлякова [34], Г. Я. Попова [43, 44], А. И. Цейтлина [50] и др.

В настоящей работе в качестве модели реального основания изучено линейно-деформируемое основание (ЛДО) общего типа [15] и, более подробно, его частный случай — многослойное упругое полупространство. Интерес к этой модели объясняется тем, что многослойное линейно-упругое полупространство по своим механическим свойствам почти всегда может быть достаточно точно приближено к реальному грунтовому основанию соответствующим подбором упругих и геометрических характеристик слоев и граничных условий между ними. Данная модель дает надежные результаты при расчете конструкций на лессовых грунтах. Известно, что лессовые грунты занимают большую часть Ростовской области и Северного Кавказа. Для лессовых грунтов характерно, что верхний слой грунта может оказаться более жестким, чем нижний, в результате поверхностного уплотнения или искусственного закрепления грунта, а также подъема уровня грунтовых вод в естественном основании. Возможна и обратная картина, когда происходит замачивание верхнего слоя грунта и, вследствие этого, снижение его модуля деформации. Тогда более жестким оказывается нижний слой. В этих ситуациях модули деформации слоев могут различаться в десять и более раз.

Расчет конструкций на многослойном грунтовом основании приводит к постановке и решению сложной специальной задачи теории упругости: определению контактных давлений под конструкцией при известной ее осадке. Такие задачи, в которых область раздела граничных условий соизмерима с размерами взаимодействующих в контакте тел, относятся к области неклассических смешанных задач.

Основополагающими в теории неклассических смешанных задач являются работы Б. Л. Абрамяна, А. Я. Александрова, В. М. Алексан-

дрова, И. И. Воровича, В. А. Бабешко, Н. М. Бородачева, В. Т. Гринченко и А. Ф. Улитко, А. И. Каландия, Б. М. Нуллера, Г. Я. Попова, В. Л. Рвачева, Ю. А. Устинова, Я. С. Уфлянда [1, 3–7, 12, 22, 30, 36, 44, 45, 48].

Довольно обстоятельно контактные задачи для многослойного основания изучены в работах Г. П. Александровой, В. С. Губенко, В. М. Ильмана, В. Д. Ламзюка, Ю. А. Наумова, В. С. Никишина и Г. С. Шапиро, А. К. Приварникова [11, 23, 26, 34, 35].

При решении были использованы асимптотический метод «больших λ », метод коллокации, метод сведения к линейной алгебраической системе.

В работах ростовских механиков глубокому математическому анализу были подвергнуты контактные задачи для основания, представляющего собой упругий слой, подстилаемый скалой. Обобщение этих исследований можно найти в монографии И. И. Воровича, В. М. Александрова, В. А. Бабешко [15].

В настоящей работе для расчета тонкостенных осесимметричных конструкций, взаимодействующих с линейно-деформируемым основанием, предлагается метод специальных ортонормированных полиномов (МСОП). Математическая схема метода базируется на работах И. И. Воровича, В. М. Александрова и их учеников [2–11, 15–18, 37–41, 51]. Основная идея метода состоит в построении специального множества ортонормированных полиномов, которые позволяют с заданной точностью обработать главный оператор в интегро-дифференциальном уравнении задачи. Благодаря этому приему, метод позволяет по единой схеме рассматривать различные типы конструкций при различных вариантах нагружения и моделях основания. Относительная простота математических приемов и четкость расчетной схемы в сочетании с быстрой сходимостью делают рассматриваемый метод весьма гибким и позволяют решать не только основные задачи по расчету конструкций на ЛДО, но и ряд более сложных вопросов. Сюда относится, например, вопрос об устойчивости конструкции на деформируемом основании, который возникает при работе фундаментов глубокого заложения, заглубленных резервуаров и т. д.

В данном исследовании метод специальных ортонормированных полиномов использован при решении следующих задач:

- 1) изгиб круглой плиты на ЛДО под действием осесимметричной нормальной нагрузки;
- 2) изгиб круглой плиты на ЛДО при одновременном действии продольных и поперечных усилий;
- 3) устойчивость круглой плиты под действием продольных сжимающих усилий;
- 4) изгиб круглой плиты Рейсснера на ЛДО.

Из перечисленных задач наиболее изученной является первая. Осесимметричная задача изгиба круглых плит на многослойном основании впер-

вые рассматривалась в работе Ю. А. Наумова и Ю. А. Шевлякова [34].

В работах В. М. Александрова и Г. Н. Павлик [9, 37, 40] эта задача подвергнута более детальному численному анализу, в том числе, впервые получены результаты расчета плит на двухслойном основании (слой на упругом полупространстве).

Задача об изгибе плиты на упругом полупространстве при одновременном действии продольных и поперечных усилий впервые рассмотрена А. Г. Ишковой [28].

В. М. Александровым и М. Д. Солодовником была решена задача об устойчивости балочной плиты на упругом полупространстве под действием радиальных сжимающих усилий, а также задача о круглой накладке на упругом полупространстве [10, 46].

Задачи 2), 3) для многослойных оснований поставлены и решены впервые в работах В. М. Александрова и Г. Н. Павлик [9, 38, 40]. В. В. Воротынцевым [19] рассмотрена задача об изгибе плиты Рейсснера на упругом полупространстве, модуль Юнга которого изменяется по закону $E(z) = E_0(1 + cz)^2$. Результаты расчета круглой плиты Рейсснера на многослойном основании получены впервые автором [39, 40].

2. Идею метода специальных ортонормированных полиномов схематично можно представить в виде последовательности трех операций.

а) На первом этапе строится специальная система полиномов $Q_k(r)$, удовлетворяющая граничным условиям. Полиномы ортонормированы по отношению к дифференциальному оператору M , описывающему деформацию тонкостенной конструкции: $M[w(r)] = p(r) - q(r)$, где $p(r)$ — нормальная осесимметричная внешняя нагрузка. Функция вертикального перемещения конструкции $w(r)$ представляется в виде линейной комбинации этих полиномов

$$w(r) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k Q_k(r). \quad (1)$$

б) На втором этапе, учитывая линейность задачи, контактное давление $q(r)$ представляется в виде линейной комбинации частных решений $q_k(r)$ с теми же коэффициентами, что и для функции прогиба

$$q(r) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k q_k(r). \quad (2)$$

Для определения частных решений $q_k(r)$ получаем k интегральных уравнений с полиномами $Q_k(r)$ в правой части. При решении интегральных уравнений используется метод сведения каждого из них к бесконечной алгебраической системе на основе разложения функций, входящих в уравнение, в ряды по собственным функциям главной части интегрального оператора [15].

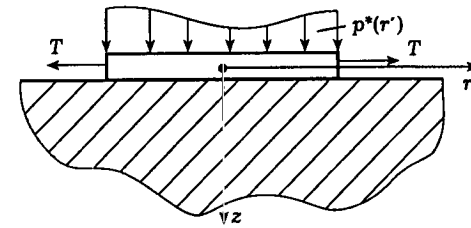


Рис. 1

в) На третьем этапе происходит сопряжение решения (1) с решением соответствующей контактной задачи 2). При этом выражения (1), (2) подставляются в дифференциальное уравнение, описывающее деформацию конструкции. С учетом условия ортогональности полиномов $Q_k(r)$ и условия статики, получается бесконечная линейная алгебраическая система уравнений для определения коэффициентов b_k .

Зная b_k , можно найти искомые характеристики задачи.

В работах [15, 40] доказывается вполне регулярность и квазивполне регулярность получаемых бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Математическое обоснование метода специальных ортонормированных полиномов приведено в работах [3–6, 15, 16].

Следует отметить, что изучение конкретных задач с помощью предлагаемого метода специальных ортонормированных полиномов показало его высокую надежность и эффективность. Это обстоятельство, наряду с простой программной реализацией алгоритма расчета, позволило использовать метод в строительстве при проектировании фундаментов и резервуаров [2], а также рекомендовать его применение в широкой инженерной практике.

Ниже, в качестве иллюстрации возможностей МСОП, рассматривается задача об изгибе тонкой круглой плиты на ЛДО под действием осесимметричных нормальных и продольных усилий.

3. Пусть круглая плита радиуса r лежит без трения на ЛДО общего типа (рис. 1). На плиту действует осесимметрично распределенная по верхней поверхности нормальная нагрузка $p^*(r')$, продольные усилия T и реактивное давление со стороны основания $q^*(r')$.

При определении прогибов плиты $w^*(r')$ будем допускать возможность использования теории Кирхгофа–Лява [47]. Задачу можно сформулировать в виде системы уравнений, которая в безразмерных координатах имеет вид ($r' = Rr$, $\rho' = R\rho$)

$$M[w(r)] = p(r) - q(r), \quad (3)$$

$$\int_0^1 q(\rho) \left[\frac{2\lambda}{\pi(r+\rho)} K \left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho} \right) + F \left(\frac{r}{\lambda}, \frac{\rho}{\lambda} \right) \right] \rho d\rho = \lambda sv(r, 0), \quad (4)$$

где M — дифференциальный оператор изгиба плиты:

$M = \Delta^2 - t\Delta$ — при действии поперечных и продольных усилий,

$M = \Delta^2$ — при отсутствии продольных усилий ($t = 0$),

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right),$$

$w(r) = v(r, 0)$, $r \leq 1$ — условие полного контакта плиты с ЛДО,

$\lambda = HR^{-1}$, $s = \theta R^3 D^{-1}$, $w^*(r') = w(r)R$, $t = TD^{-1}R^2$,

$v^*(r', 0) = v(r, 0)R$, $p^*(r') = p(r)DR^{-3}$, $q^*(r') = q(r)DR^{-3}$.

Здесь $v^*(r', 0)$ — осадка поверхностных точек основания, D — цилиндрическая жесткость плиты, H — некоторый геометрический параметр основания, θ характеризует физико-механические свойства основания, $K(e)$ — полный эллиптический интеграл первого рода [21].

Функция $F(\gamma, \tau)$ имеет вид

$$F(\gamma, \tau) = \int_0^\infty [L(u) - 1] J_0(\gamma, u) J_0(\tau, u) du. \quad (5)$$

Здесь $L(u)$ — некоторая функция, описывающая упругие свойства основания, $J_0(\tau, u)$ — функция Бесселя нулевого порядка. Для основных моделей основания поведение функции $L(u)$ на бесконечности и в нуле подчиняется следующим соотношениям:

$$L(u) = 1 + O(u^{-2}), \quad u \rightarrow \infty; \quad L(u) = O(u^\gamma), \quad u \rightarrow 0, \quad \gamma \geq 1. \quad (6)$$

Функция $w(r)$ должна удовлетворять на контуре плиты условиям свободного края для момента и перерезывающей силы (ν — коэффициент Пуассона материала плиты)

$$\Delta w(r) - \frac{1-\nu}{r} \frac{dw(r)}{dr} \Big|_{r=1} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{d}{dr} \left[\Delta w(r) - t \frac{dw(r)}{dr} \right] \Big|_{r=1} = 0.$$

К условиям (3), (4), (7) надо присоединить очевидное условие статики

$$\int_0^1 [p(r) - q(r)] r dr = 0. \quad (8)$$

Поставленная краевая задача является самосопряженной [33].

Это позволяет представить функцию прогиба в виде (1).

Здесь $Q_m(r)$ — специальная система ортонормированных полиномов, удовлетворяющих граничным условиям (7). Условие их ортогонализации и нормировки

$$\int_0^1 M[Q_m(r)] Q_k(r) r dr = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ 1, & k = m. \end{cases} \quad (9)$$

Имеем

$$Q_0(r) = 1, \quad Q_k(r) = \sum_{n=0}^{k+1} \ell_n(t) r^{2n+2}. \quad (10)$$

Учитывая линейность задачи, решение интегрального уравнения ищется в том же виде, что и функция прогиба (2).

Коэффициенты $b_m(t, \lambda, \mu)$ определяются из уравнений (3) и (8) при условии (9).

$$\gamma_m b_m = \int_0^1 [p(r) - q(r)] Q_m(r) r dr, \quad (11)$$

$$\gamma_m = 0 \text{ при } m = 0, \quad \gamma_m = 1 \text{ при } m \geq 1.$$

Подставляя в интегральное уравнение (4) выражения (1) и (2), получаем для определения $q_m(r)$ интегральные уравнения вида

$$\int_0^1 q_m(\rho) \left[\frac{2\lambda}{\pi(r+\rho)} K \left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho} \right) + F \left(\frac{2}{\lambda}, \frac{\rho}{\lambda} \right) \right] \rho d\rho = \lambda s Q_m(r), \quad (12)$$

$$r \leq 1, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Для решения m -го интегрального уравнения (12) воспользуемся методом сведения его к бесконечной линейной алгебраической системе.

Представим функцию $F(t, \tau)$ вида (5) в форме двойного ряда по четным полиномам Лежандра. Функции $q_m(\rho)$ и $Q_m(r)$ также разложим в ряды по полиномам Лежандра. Имеем

$$F \left(\frac{2}{\lambda}, \frac{\rho}{\lambda} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} e_{kj}(\lambda) P_{2k}(\sqrt{1-\rho^2}) P_{2j}(\sqrt{1-r^2}), \quad (13)$$

$$q_m(\rho) = s \sum_{k=0}^{\infty} S_k^m \frac{P_{2k}(\sqrt{1-\rho^2})}{\sqrt{1-\rho^2}},$$

$$Q_m(r) = \sum_{k=0}^{\infty} R_k^m P_{2k}(\sqrt{1-r^2}), \quad R_k^m = 0 \text{ при } k > m + 2.$$

Воспользовавшись известным свойством ортогональности полиномов Лежандра и интегралом [21, 33]

$$\int_0^1 J_0(bx) P_{2k}(\sqrt{1-x^2}) \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{1}{\sqrt{b}} J_{2k+1/2}(b), \quad (14)$$

получим для коэффициентов $e_{kj}(\lambda)$ выражение

$$e_{kj} = \pi \lambda (4k+1)(4j+1) \frac{(2k-1)!!(2j-1)!!}{2(2k)!!(2j)!!} \times$$

$$\times \int_0^\infty [1 - L(u)] J_{2k+1/2} \left(\frac{u}{\lambda} \right) J_{2j+1/2} \left(\frac{u}{\lambda} \right) \frac{du}{u}. \quad (15)$$

Для коэффициентов R_k^m имеем

$$R_k^m = (4k+1) \int_0^1 Q_m(\rho) P_{2k}(\sqrt{1-\rho^2}) \frac{\rho d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}, \quad k \leq m+2. \quad (16)$$

Подставляя в интегральное уравнение (12) функции $F(t, \tau)$, $q_m(\rho)$, $Q_m(r)$ вида (13) и используя спектральное соотношение [15, 21]

$$\int_0^1 \frac{\rho P_{2m}(\sqrt{1-\rho^2})}{\sqrt{1-\rho^2}} K\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right) \frac{d\rho}{r+\rho} = \frac{\pi^2}{4} \frac{[(2m-1)!!]^2}{[(2m)!!]^2} P_{2m}(\sqrt{1-r^2}), \quad (17)$$

получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов S_k^m :

$$S_k^m \frac{\pi^2}{4} \frac{[(2m-1)!!]^2}{[(2m)!!]^2} = R_k^m + \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} S_n^m \frac{e_{kn}(\lambda)}{4n+1}. \quad (18)$$

Система (18), как доказывается в работах [4, 15], квазивполне регулярна при всех $0 < \lambda < \infty$. Ее можно решить методом редукции.

Найдя коэффициенты $S_k^m(\lambda, t)$, для окончательного решения задачи второе выражение (13) подставим в (11) и решим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$\gamma_m b_m + \sum_{s=0}^{\infty} b_s c_{sm} = f_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (19)$$

$$\gamma_m = 0 \text{ при } m = 0, \quad \gamma_m = 1 \text{ при } m \geq 1,$$

$$c_{sm} = \int_0^1 q_s(\rho) Q_m(\rho) \rho d\rho, \quad f_m = \int_0^1 p(r) Q_m(r) r dr.$$

В работе [8] доказывается, что эта система также квазивполне регулярна для $0 < s < \infty$.

После определения коэффициентов b_m основные параметры рассматриваемой задачи находятся по формулам (1) и (2).

Таким образом, задача сводится к последовательному решению систем линейных алгебраических уравнений (18) и (19).

Для примера в качестве моделей упругого основания рассматриваются:

а) упругий слой конечной толщины H , лежащий без трения на жестком основании

$$L(u) = \frac{\operatorname{ch} 2u - 1}{\operatorname{sh} 2u + 2u}, \quad (20)$$

б) упругий слой, жестко соединенный с недеформируемым основанием

$$L(u) = \frac{2\kappa \operatorname{sh} 2u - 4u}{2\kappa \operatorname{ch} 2u + 1 + \kappa^2 + 4u^2}, \quad \kappa = 3 - 4\nu_1, \quad (21)$$

в) слой, свободно лежащий на упругом полупространстве

$$L(u) = \frac{\operatorname{ch} 2u - 1 + 2\chi(2u + \operatorname{sh} 2u)}{2u + \operatorname{sh} 2u + \chi(\operatorname{ch} 2u - 1 - 2u^2)}, \quad (22)$$

где $\chi = \theta_1/\theta_2$, θ_1, θ_2 — характеризуют механические свойства слоя и полупространства: $\theta_i = G_i/(1-\nu_i)$, G_i, ν_i ($i = 1, 2$) — соответственно модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала слоя и полупространства;

г) слой, жестко соединенный с упругим полупространством

$$L(u) = \frac{Z + 4ue^{-2u} - Ye^{-4u}}{Z - (1 + 4u^2 + ZY)e^{-2u} + Ye^{-4u}}, \quad (23)$$

$$Z = \frac{(1-\nu_2)\kappa_1 - \chi(1-\nu_1)}{\chi(1-\nu_1) - (1-\nu_2)},$$

$$Y = \frac{\chi(1-\nu_1)\kappa_2 - (1-\nu_2)\kappa_1}{\chi(1-\nu_1)\kappa_2 + (1-\nu_2)}, \quad \kappa_i = 3 - 4\nu_i, \quad (i = 1, 2).$$

Рассматриваются следующие виды нагружения: равномерная нагрузка, сосредоточенная сила в центре или по краю, сосредоточенные моменты по краю.

Исследование задачи проводится в следующем плане: а) выявляется характер влияния способов нагружения плиты $p(r)$ и безразмерных параметров λ и s на основные характеристики задачи и на сходимость метода для различных моделей основания; б) изучаются условия, при которых плиту можно считать абсолютно жесткой; в) устанавливается, при какой относительной толщине верхнего слоя λ способ прикрепления его к основанию перестает оказывать существенное влияние на величину контактных усилий, а также, при каких λ и других параметрах основание можно считать упругим полупространством или основанием Фуса-Винклера; г) находится диапазон изменения характеристик задачи, при которых возможен отрыв плиты от основания.

Было замечено, что при фиксированном значении параметра t с уменьшением λ сходимость метода ухудшается. Это следует из того, что при $\lambda \rightarrow 0$ первый ряд (13) расходится по линии $\gamma = \tau$ [15]. Однако, как показывают расчеты при $\lambda \geq 0,5$ и $s < 30$ решения с тремя верными знаками обеспечиваются, если в системе (18) брать 4–8 уравнений, а в системе (19) — 3–6 уравнений. Причем, чем меньше λ и больше s , тем большее число уравнений требуется для достижения заданной точности. С увеличением параметра t от 0 до 15 сходимость метода улучшается. Дальнейший рост t , а также отрицательные значения ухудшают сходимость. Для отрицательных значений необходимо рассматривать дополнительно вопрос об устойчивости плиты.

При сосредоточенных нагрузках наблюдается тот же эффект, но порядок систем (18) и (19) на единицу выше.

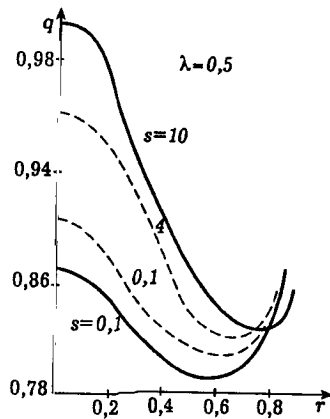


Рис. 2

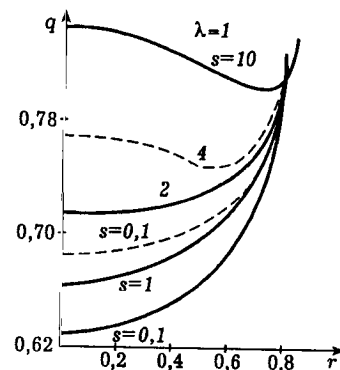


Рис. 3

Расчеты показывают, что при $\lambda > 4$ и при любых s, t способ прикрепления слоя к основанию перестает оказывать существенное влияние на результаты расчета контактного давления и прогиба.

При $\lambda > 6$ с погрешностью не более 3% можно рассматривать как частный случай задачу об изгибе пластины на упругом полупространстве. При этом результаты расчетов хорошо согласуются с данными работы [27].

4. Подробно проводится численный анализ задачи 3) для наиболее распространенного на практике случая нормальной осесимметричной нагрузки, т. е. $t = 0$.

Для равномерной нагрузки $p(r) = 1$ при $\lambda = 0,5, \lambda = 1$ и различных s зависимости $q(r)$ для основания а), б) изображены на рис. 2, 3. Для основания б) графики нанесены штриховой линией.

На этих рисунках отмечено три типа кривых: 1) монотонно-возрастающая кривая; 2) волнообразная кривая; 3) кривая со впадиной. Причем, переход от кривой типа 1) к кривой типа 3) происходит быстрее с увеличением гибкости плиты и жесткости основания.

Таким образом, анализ кривых контактного давления задач а) и б) показывает, что при уменьшении толщины слоя увеличивается давление в центральной зоне, резко проявляется действие внешней нагрузки, особенно для очень гибких плит.

Результаты расчетов для модели основания, представляющего собой слой, свободно лежащий на жестком основании, сравнивались с соответствующими результатами работ [13, 50]. Отмечено хорошее совпадение результатов.

Для слоя, подстилаемого упругим полупространством, в случае $\chi = 2$ и $\chi = 5$ (т. е. верхний слой более жесткий, чем нижний) графики зависимостей $q(r)$ для равномерной нагрузки $p(r) = 1$ и, соответственно, при $\lambda = 0,5$

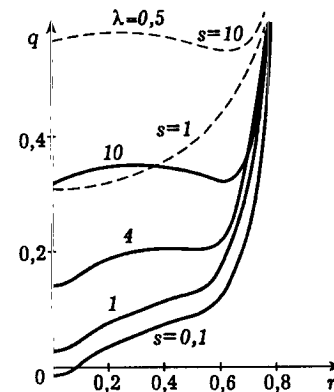


Рис. 4

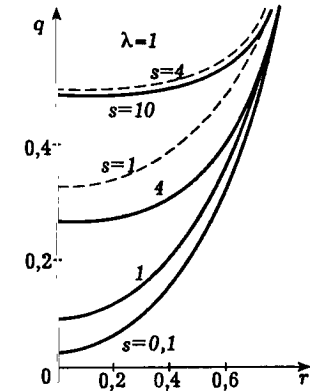


Рис. 5

и $\lambda = 1$ и различных s представлены на рис. 4, 5 (в случае $\chi = 5$ кривые нанесены сплошной линией, в случае $\chi = 2$ — штриховой).

Из графиков видно, что в центральной зоне контактное давление значительно уменьшается с увеличением параметра χ и уменьшением относительной толщины λ верхнего слоя. При некоторых соотношениях параметров λ, χ, s оно становится отрицательным. Это говорит о том, что контакт плиты с основанием будет неполным и предположение о полном контакте плиты с ЛДО неверно. В действительности область контакта будет многосвязной. Это явление наблюдается для жестких плит и объясняется тем, что при большой относительной жесткости слоев χ верхний слой будет подвержен более деформации изгиба, чем деформации сжатия. Ясно, что при этом гибкие плиты будут повторять форму изгиба слоя, а в случае жестких плит может произойти отставание верхней границы основания.

Для других значений λ, s и χ зависимости носят тот же характер.

В случае сосредоточенной силы в центре графики контактных напряжений для задач а) и в) при $\lambda = 0,5, \chi = 5$ и различных s представлены на рис. 6, 7. Анализ этих графиков показывает, что для слоя, лежащего на жестком основании, с увеличением относительной гибкости плиты s может произойти отрыв краев плиты от основания. Для слоя, лежащего на упругом полупространстве с увеличением χ и уменьшением λ для жестких плит фиксируется отрыв в центральной зоне, а для гибких плит зона отрыва может смещаться к краю плиты.

На рис. 8, 9 изображены графики контактных давлений для оснований а), в) при $\lambda = 1$ в случае нагружения сосредоточенными силами и моментами по краю, соответственно. Для основания в) $\chi = 5$ графики нанесены штриховой линией.

В результате вычислений было установлено, что для всех моделей

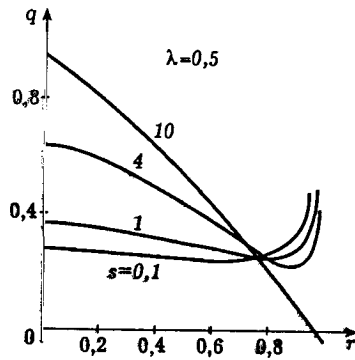


Рис. 6

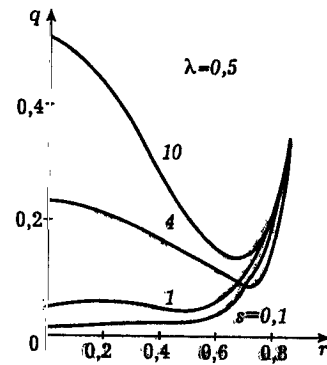


Рис. 7

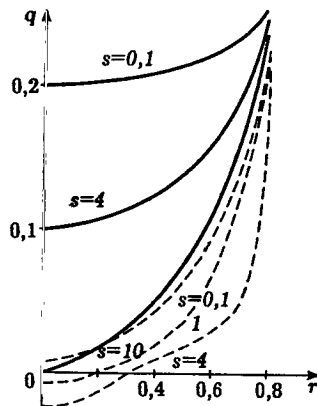


Рис. 8

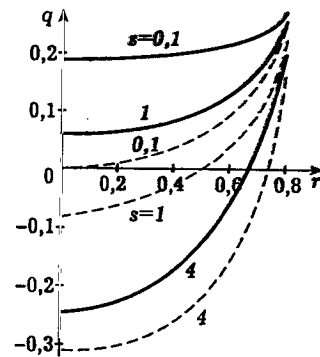


Рис. 9

основания и видов нагрузки при $s \leq 0,2$ и $\lambda > 1$ с погрешностью не более 1–3% плиту можно считать абсолютно жесткой.

При $\lambda \leq 0,8$ и $s < 1$ в случае сосредоточенной силы в центре для основания а) на некотором участке плиты ($r \leq 0,5$) наблюдалась прямо пропорциональная зависимость между контактным давлением и прогибом плиты. В этом случае можно сказать, что основание на данном участке плиты работает как основание Винклера.

Для задач а) и б) в случае единичных сосредоточенных нагрузок были получены зависимости s от λ , при которых наблюдается явление отрыва плиты от основания.

Для сосредоточенной силы в центре было обнаружено явление отрыва краев плиты. Для сосредоточенной силы по краю и сосредоточенных моментов по краю отрыв плиты происходит в центральной зоне. Полученные

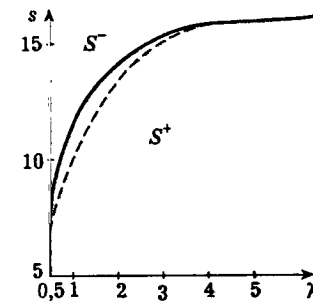


Рис. 10

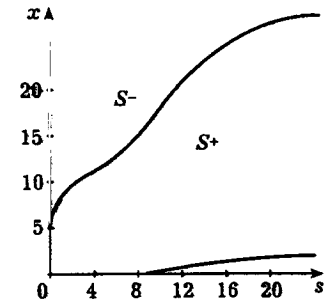


Рис. 11

зависимости для случая единичной сосредоточенной силы в центре представлены в виде графика (рис. 10). Сплошная линия соответствует задаче а) — изгиба плиты на слое, свободно лежащем на жестком основании, штриховая — задаче б) — изгиба плиты на слое, жестко соединенном с недеформируемым основанием.

Кривые делят плоскость на две области S^+ и S^- . Область слева от границы раздела S^- соответствует отрыву плиты от основания. Сами же кривые соответствуют случаю, когда края плиты только начинают отрываться от основания и контактные давления на краях обращаются в нуль. Решение верно только в области S^+ , в области S^- оно становится непригодным.

Значение s , при котором наступает отрыв для $\lambda \geq 6$, совпадает с тем значением для гибкости плиты, которое было получено в работе [28] в случае упругого полупространства.

Для задач в) и г) при некоторых соотношениях параметров s и χ происходит отрыв плиты от основания как при равномерном, так и при сосредоточенном нагружении.

На рис. 11 в случае сосредоточенной силы в центре представлен график зависимости χ от s , при которых наступает отрыв. График изображен для модели основания в) при $\lambda = 0,5$. Область S^+ соответствует безотрывному состоянию плиты. В области S^- — решение непригодно. Сами кривые соответствуют условию, когда плита только начинает отрываться. Причем, для $0 \leq \chi < 5$ с увеличением относительной гибкости плиты наблюдается отрыв краев плиты. Начиная с $\chi = 5$, отрыв фиксируется в центральной зоне только для жестких плит. При увеличении $\chi > 10$ отрыв происходит и для гибких плит, но зона отрыва при этом смещается к краю плиты.

5. Задача 2) — изгиб круглой плиты на ЛДО при одновременном действии продольных и поперечных усилий подробно изучена в работе [38]. Параметр $t \neq 0$ менялся в диапазоне: $t_{cr} < t < 0$ и $0 < t < 20$, где t_{cr} —

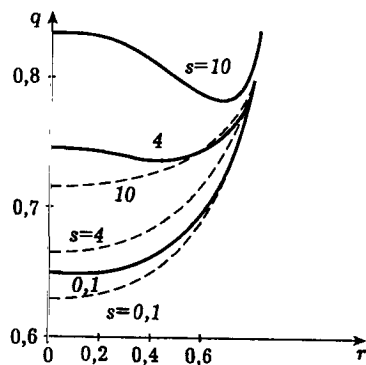


Рис. 12

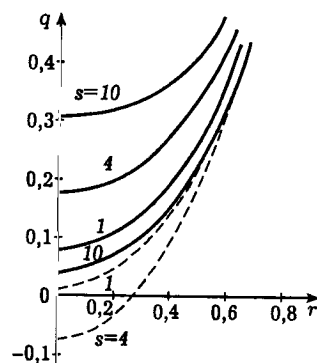


Рис. 13

значение параметра, при котором происходит потеря устойчивости плиты под действием сжимающих усилий.

На рис. 12, 13 представлены графики контактного давления, соответственно, для моделей основания а) и в) при равномерной нагрузке $p(r) = 1$, $\lambda = 1$, $t = 1$, 10 и различных s ($\nu = 1/6$, $\nu_1 = 0,3$). Для случая в) $\chi = 5$. Кривые, соответствующие $t = 10$, нанесены штриховыми линиями.

Анализ результатов расчета показывает, что при увеличении параметра t повышается жесткость плиты. Причем, влияние растягивающих (сжимающих) усилий в большей мере сказывается с увеличением s , т. е. относительной гибкости плиты. Эта тенденция проявляется сильнее в случае слоя, свободно лежащего на жестком основании. Так, в частности, для этого случая кривая распределения контактных напряжений для $s = 10$ и $t = 10$ (рис. 12) практически совпадает с кривой, соответствующей $s = 2$ и $t = 0$ (рис. 3). Таким образом, в данном случае контактная жесткость плиты повышается в пять раз.

Вычислениями установлено, что при значениях параметра $|t| < 0,5$ результаты расчета контактного давления и прогиба плиты практически не отличаются от результатов задачи об изгибе плиты под действием вертикальной нагрузки.

Следовательно, при $|t| < 0,5$ растягивающие (сжимающие) усилия можно не учитывать.

Как и для задачи 1) в случае сосредоточенных нагрузок для модели основания а) были получены зависимости характерных параметров задачи, при которых наблюдается явление отрыва плиты от основания.

Зависимости для случая единичной сосредоточенной силы в центре при различных t представлены в виде графика (рис. 14). Сплошная линия соответствует задаче а), штриховая — задаче б).

Анализ кривых, представленных на рис. 14 и сравнение их с соответствующими кривыми на рис. 10 показывает, что при фиксированном λ с

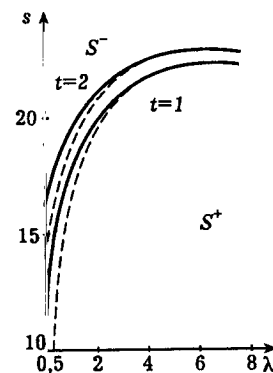


Рис. 14

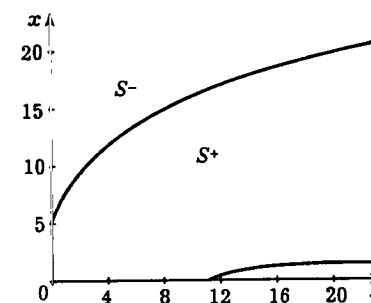


Рис. 15

увеличением t явление отрыва краев плиты наблюдается позже, т. е. при больших значениях s .

Аналогичные кривые могут быть получены для других видов сосредоточенного нагружения.

В случае слоя, лежащего на упругом полупространстве, при увеличении $\chi \geq 5$ наблюдается отрыв центральной зоны плиты даже при равномерном нагружении. На рис. 15 представлен график зависимости χ от s ($\lambda = 0,5$ и $t = 1$), при которых контактное давление обращается в нуль. График соответствует случаю сосредоточенной нагрузки в центре.

Сравнение этого графика с соответствующим графиком, представленным на рис. 11, показывает, что наличие растягивающих усилий увеличивает жесткость плиты, а значит, ускоряет наступление явления отрыва, т. е. для одних и тех же s отрыв происходит при меньших значениях χ .

6. Как отмечалось выше, МСОП позволяет исследовать задачу 3) об устойчивости конструкции на ЛДО. Постановка такой задачи приводит к совместному решению на собственные значения системы дифференциального (3) (при $t < 0$, $p(r) = 0$) и интегрального (4) уравнений с граничными условиями (7) и условием статики (8).

Однако функция прогиба $w(r)$ представляется в виде

$$w(r) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m Q_m(r) + \delta, \quad (24)$$

где δ — жесткое перемещение плиты.

Здесь $Q_m(r)$ — специальная система полиномов, ортонормированных по отношению к дифференциальному оператору $M = \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) \right]^2$ и удовлетворяющих граничным условиям (7) и

$$\tilde{w}(r)|_{r=1} = 0, \quad \text{где } \tilde{w}(r) = w(r) - \delta. \quad (25)$$

Приведем вид первых трех полиномов $Q_m(r)$:

$$Q_1(r) = (r^4 - 5,42857r^2 + 4,42857)/2,57616;$$

$$Q_2(r) = (r^6 - 2,87789r^4 + 2,33693r^2 - 0,45923)/2,036286;$$

$$Q_3(r) = (r^6 - 2,97821r^6 + 2,96089r^4 - 1,08038r^2 + 0,09738)/1,150.$$

Учитывая линейность задачи, ищем решение интегрального уравнения в виде ряда по частным решениям с теми же коэффициентами, что и функцию прогиба

$$q(r) = \sum_{m=1}^N b_m q_m(r) + \delta q_0(r). \quad (26)$$

Подставив в интегральное уравнение (4) выражения (24) и (26), получим для определения $q_m(r)$ интегральные уравнения вида (12), которые сводятся к системе (18).

После нахождения частных решений $q_m(r)$ для окончательного решения задачи необходимо найти коэффициенты b_m и δ .

Коэффициенты b_m определяются из дифференциального уравнения (8) при условии ортогональности (9):

$$b_m = - \int_0^1 [q(r) - t\Delta w(r)] Q_m(r) r dr, \quad m = 1, 2, \dots, N, \quad (27)$$

или

$$b_m + \sum_{k=0}^N b_k (c_{km} - t f_{km}) = 0, \quad (28)$$

где

$$c_{km} = \int_0^1 q_k(r) Q_m(r) r dr, \quad f_m = \int_0^1 \Delta Q_k(r) Q_m(r) r dr.$$

Причем, N — номер приближения, при котором достигается заданная точность решения. Он находится в процессе счета в силу квазивполне регулярности системы [40].

$N+1$ -неизвестное δ находится из удовлетворения второму граничному условию из (7):

$$\sum_{m=1}^N b_m (A_m - t B_m) = 0, \quad (29)$$

$$\text{где } A_m = \frac{d}{dr} \Delta Q_m \Big|_{r=1}, \quad B_m = \frac{d}{dr} Q_m \Big|_{r=1}.$$

Таким образом, имеем систему $N+1$ уравнений (28), (29) с $N+1$ неизвестными.

Для того чтобы эта однородная система имела нетривиальное решение, определитель ее должен быть равен нулю. Из этого условия находится

ТАБЛИЦА 1

задача а), $\lambda = 1$			
s	1	4	10
$-t_{cr}$	6,189	7,311	9,352

ТАБЛИЦА 2

задача б), $\lambda = 1$			
s	1	4	10
$-t_{cr}$	6,941	8,004	9,993

значение параметра $t = t_{cr}$, соответствующее критическому сжимающему усилию T_{cr} , при котором плита теряет устойчивость.

Таким образом, с помощью метода специальных ортогональных полиномов задача об устойчивости круглой плиты на линейно-деформируемом основании приведена к решению бесконечной квазивполне регулярной алгебраической системы и исследованию на собственные значения некоторой конечной системы алгебраических уравнений (28), (29).

В качестве конкретных примеров изучены задачи об устойчивости плиты для моделей основания а) и б).

В табл. 1, 2 приведены значения критических параметров t_{cr} для $\lambda = 1$ и различных значений относительной гибкости плиты s .

7. При постановке задачи 4) об изгибе плиты Рейсснера на ЛДО дифференциальное уравнение (3) и граничные условия (7) принимают вид

$$\Delta^2 w(r) + \beta^2 \Delta [p(r) - q(r)] = p(r) - q(r), \quad (30)$$

$$M_r = - \left[\Delta w(r) - \frac{1-\nu}{r} \frac{dw(r)}{dr} \right] - \frac{2\beta^2(1-\nu)}{2-\nu} \left\{ \frac{d^2}{dr^2} \Delta w(r) + \beta^2 \frac{d^2}{dr^2} [p(r) - q(r)] \right\} - \frac{\beta^2 \nu}{2-\nu} [p(r) - q(r)] \Big|_{r=1} = 0, \quad (31)$$

$$Q_r = - \frac{d}{dr} \Delta w(r) - \beta^2 \frac{d}{dr} [p(r) - q(r)] \Big|_{r=1} = 0,$$

$$\text{где } \beta^2 = \frac{h^2}{R^2} \frac{2-\nu}{10(1-\nu)}.$$

Контактное давление $q(r)$ определяется из интегрального уравнения Фредгольма первого рода (4), к которому приводит решение соответствующей контактной задачи [39, 40].

Алгоритм решения поставленной задачи также основан на использовании МСОП. Однако ввиду сложности основного разрешающего уравнения (30) и громоздкости граничных условий (31) метод был подвергнут существенной модификации.

После введения обозначения

$$\Delta w(r) + \beta^2 [p(r) - q(r)] = \Delta z(r) \quad (32)$$

дифференциальное уравнение изгиба плиты Рейсснера (30) запишется

$$\Delta^2 z(r) = p(r) - q(r). \quad (33)$$

Уравнение (33) есть дифференциальное уравнение для прогиба $z(r)$ тонкой кирхгофской плиты.

Преобразованные граничные условия (31) имеют вид для перерезывающей силы

$$Q_r = -\frac{d}{dr} \Delta z(r) \Big|_{r=1} = 0, \quad (34)$$

что полностью совпадает с соответствующим граничным условием для тонкой плиты;

для момента

$$M_r = -\left[\Delta z(r) - \frac{1-\nu}{r} \frac{d}{dr} z(r) \right] - B(r) \Big|_{r=1} = 0, \quad (35)$$

что отличается от соответствующего граничного условия для тонкой плиты на величину $B(r) \Big|_{r=1}$, где

$$B(r) = \beta^2 \frac{2(1-\nu)}{(2-\nu)} \left[p(r) - q(r) - \frac{d^2}{dr^2} \Delta z(r) \right] + \frac{1-\nu}{r} \frac{d}{dr} [w(r) - z(r)]. \quad (36)$$

Учитывая произвол выбора $z(r)$ и $z'(r)$ (согласно замене (32)), можно положить $w(1) = z(1)$. Тогда функция $B(r)$ при $r = 1$ обратится в нуль.

Таким образом, краевая задача (30), (31) сведена к решению краевой задачи (33)–(35), полностью совпадающей с соответствующей краевой задачей для тонкой плиты (3)–(8).

Функция $z(r)$ представляется в виде ряда по четным полиномам $Q_m(r)$, аналогичного ряду (1).

Коэффициенты разложения b_m ($m = 1, 2, \dots$) определяются из дифференциального уравнения (33) и условия ортогональности (9), где оператор $M = \Delta^2$;

$$b_m = \int_0^1 [p(r) - q(r)] Q_m(r) r dr. \quad (37)$$

Неизвестное контактное давление $q(r)$ определяется из интегрального уравнения (4). Однако, необходимо функцию $v(r, 0) = w(r)$ при $r \leq 1$, стоящую в правой части этого уравнения, выразить через функцию $z(r)$. Для этого решается дифференциальное уравнение (32), записанное в виде

$$-\Delta w(r) = -\Delta z(r) + \beta^2 [p(r) - q(r)] \quad (38)$$

при граничном условии

$$w(1) = \delta, \quad (39)$$

где δ — жесткое перемещение плиты, и условия ограниченности $w(r)$ в нуле.

Представляя функцию $w(r)$ в виде

$$w(r) = \delta + \tilde{w}(r), \quad (40)$$

можно прийти к следующей задаче для $\tilde{w}(r)$:

$$-\Delta \tilde{w}(r) = -\Delta z(r) + \beta^2 [p(r) - q(r)], \quad (41)$$

$$\tilde{w}(1) = 0. \quad (42)$$

Эта задача является самосопряженной, поэтому для ее решения также используется МСОП.

Представим функцию $\tilde{w}(r)$ в виде

$$\tilde{w}(r) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k C_k(r). \quad (43)$$

Здесь $C_k(r)$ — система полиномов, удовлетворяющая граничному условию (42) и ортонормированная следующим образом:

$$\int_0^1 [-\Delta C_k(r)] C_m(r) r dr = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m. \end{cases} \quad (44)$$

По изложенному выше (см. п. 2) алгоритму исходную краевую задачу можно свести к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений для определения b_m и A_k .

На процесс сходимости рядов для $q(r)$ и $w(r)$ существенно влияние параметров s и β^2 . Так, при $s < 10$, $\beta^2 < 0,05$ заданная точность вычисления (три значащие цифры) $q(r)$ и $w(r)$ при равномерно распределенной нагрузке $p(r) = 1$ достигается после четырех-пяти приближений. Дальнейшее увеличение параметра β^2 нецелесообразно, так как, например, при $\beta^2 = 0,1$ ($\nu = 1/6$) имеем плиту, толщина которой приблизительно равна радиусу. Ясно, что в рамках данной теории такие плиты не могут рассматриваться.

Сходимость метода также ухудшается и в случае сосредоточенных нагрузок.

Сравнение результатов, полученных по теории Рейсснера, с результатами, полученными по теории Кирхгофа, показывает, что плита Рейсснера ведет себя как более гибкая по сравнению с плитой Кирхгофа. Так, например, плита Рейсснера, имеющая относительную гибкость $s = 1$, соответствует плите Кирхгофа с относительной гибкостью $s \approx 1,5$.

Результаты расчетов для случая сосредоточенной силы в центре позволяют сделать следующие выводы:

1) для жестких плит различие между результатами, полученными по обеим теориям, не существенно;

2) с увеличением относительной гибкости плиты s для плиты Рейсснера наблюдается возрастание контактного давления в центральной зоне, значительно возрастает также величина относительного прогиба $w_{\text{отн}} = w(0) - w(1)$ по сравнению с плитой Кирхгофа;

3) для плиты Рейсснера явление отрыва наблюдается раньше, чем для плиты Кирхгофа, т. е. при меньших значениях относительной гибкости s .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамян Б. Л., Александров А. Я.* Осесимметричные задачи теории упругости // Тр. 2-го Всес. съезда по теорет. и прикл. механике. М.: Изд-во НИИМАШ, 1966. Вып. 3. С. 7–38.
2. *Айзикович С. М., Павлик Г. Н., Раецкий Г. Н.* Расчет цилиндрического заглубленного резервуара на упругом слоистом основании. // Тез. докл. Всес. конф. «Смешанные задачи механики деформируемого тела». Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1977. С. 34–35.
3. *Александров В. М.* Асимптотические методы в контактных задачах теории упругости // ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 4. С. 672–683.
4. *Александров В. М.* Асимптотические методы в смешанных задачах теории упругости // Автореферат дисс. на соискание учен. степени докт. физ.-мат. наук. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1970. 38 с.
5. *Александров В. М., Ворovich И. И.* О действии штампа на упругий слой конечной толщины // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 2. С. 323–333.
6. *Александров В. М., Ворovich И. И.* Контактные задачи для упругого слоя малой толщины // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 2. С. 350–351.
7. *Александров В. М., Гришин С. А., Коваленко Е. В.* Контактное взаимодействие толстой плиты с упругим слоем большой толщины // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 5. С. 64–69.
8. *Александров В. М., Павлик Г. Н.* Изгиб круглой плиты на линейно-деформируемом основании // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 6. С. 102–107.
9. *Александров В. М., Павлик Г. Н.* Устойчивость круглой плиты на линейно-деформируемом основании под действием радиальных сжимающих усилий // Изв. АН АрмССР. Механика. 1977. № 6. С. 53–58.
10. *Александров В. М., Солодовник М. Д.* О продольной устойчивости балочных плит на упругом полупространстве при наличии двухсторонних связей // Конструирование и производство транспортных машин. Харьков: Изд-во ХГУ, 1977. Вып. 9. С. 124–126.
11. *Александрова Г. П.* Контактные задачи изгиба плит, лежащих на упругом основании // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 1. С. 97–106.
12. *Бородачев Н. М., Бородачева Ф. Н.* Вдавливание кольцевого штампа в упругое полупространство // Изв. АН СССР. МТТ. 1966. № 4. С. 135–141.
13. *Венцовский Б. К.* Изгиб кольцевых и круглых пластинок на обобщенном упругом основании при одновременном действии поперечных и радиальных усилий // Расчеты на прочность. М.: Машгиз, 1958. Вып. 3. С. 133–150.
14. *Власов В. З., Леонтьев Н. Н.* Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Физматгиз, 1960. 407 с.
15. *Ворovich И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
16. *Ворovich И. И., Александров В. М., Солодовник М. Д.* Эффективное решение задачи о цилиндрическом изгибе пластинки конечной ширины на упругом полупространстве // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 4. С. 62–67.
17. *Ворovich И. И., Солодовник М. Д.* Задача об изгибе круглой пластинки, лежащей на упругом полупространстве // Изв. СКНЦ ВШ. Сер. естеств. наук. 1974. Т. 4. С. 51–58.
18. *Ворovich И. И., Устинов Ю. А.* О давлении штампа на слой конечной толщины // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 3. С. 445–455.
19. *Воротынцев В. В.* Контактные задачи для балок и пластин с низкой сдвиговой жесткостью. Одесса. Одесс. ун-т, 1977. 7 с. – Деп. в ВИНТИ 24.10.1977. № 4088-77Деп.

20. *Горбунов-Посадов М. И., Маликова Т. А.* Расчет конструкций на упругом основании. М.: Стройиздат, 1973. 627 с.
21. *Градиштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
22. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф.* Равновесие упругих тел канонической формы. Киев: Наукова думка, 1985. 280 с.
23. *Губенко В. С., Киселев М. Л., Ламзюк В. Д.* Действие кольцевого в плане штампа с плоским основанием на слой, лежащий на упругом полупространстве // Прикл. мех. 1975. Т. 11. № 7. С. 59–65.
24. *Егоров К. Е.* О деформации основания конечной толщины // Основания, фундаменты и механика грунтов. Минск: Изд-во Высшейшая школа, 1961. Вып. 1. С. 12–19.
25. *Жемочкин Б. Н., Сеницын А. П.* Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании. М.: Госстройиздат, 1962. 257 с.
26. *Ильман В. М., Ламзюк В. Д., Приварников А. К.* О характере взаимодействия штампа с упругим многослойным основанием // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 5. С. 131–137.
27. *Ишкова А. Г.* Точное решение задачи об изгибе круглой пластинки, лежащей на упругом полупространстве под действием осесимметричной равномерно распределенной нагрузки // Докл. АН СССР. 1947. Т. 56. № 2. С. 129–132.
28. *Ишкова А. Г.* Изгиб круглой пластинки на упругом полупространстве под действием сосредоточенной силы и продольных сил // Изв. Вузов. Математика. 1962. № 3. С. 28–35.
29. *Ишкова А. Г., Безугова Н. Н.* Изгиб круглой пластинки, лежащей на упругом полупространстве под действием некоторой неосесимметричной нагрузки и сил, лежащих в ее плоскости // Исслед. по теории сооруж. М.: Стройиздат, 1976. Вып. 22. С. 17–23.
30. *Каландия А. И.* К контактными задачам теории упругости // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 3. С. 459–503.
31. *Клубин П. И.* Расчет балочных и круглых плит на упругом основании // Инж. сб. 1952. Т. 12. С. 95–135.
32. *Корнев Б. Г.* Конструкции, лежащие на упругом основании. Строительная механика в СССР 1917–1967. М.: Стройиздат, 1969. 257 с.
33. *Корн Г. и Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. 831 с.
34. *Наумов Ю. А., Шевляков Ю. А.* К изгибу круглых плит на многослойном основании // Изв. АН СССР. МТТ. 1967. № 1. С. 98–104.
35. *Никишин В. С., Шапиро Г. С.* Задачи теории упругости для многослойных сред. М.: Наука, 1973. 262 с.
36. *Нуллер Б. М.* Об одном методе решения смешанных задач теории упругости для конечных областей // Изв. АН СССР. МТТ. 1970. № 3. С. 111–119.
37. *Павлик Г. Н.* Изгиб круглой плиты на слое конечной мощности // Изв. СКНЦ ВШ. Сер. естеств. наук. 1976. № 4. С. 19–25.
38. *Павлик Г. Н.* Изгиб круглой плиты на линейно-деформируемом основании при одновременном действии продольных и поперечных усилий // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 5. С. 915–919.
39. *Павлик Г. Н.* Контактное взаимодействие пластины Рейсснера с линейно-деформируемым основанием. Тез. докл. Всес. конф. «Смешанные задачи механики деформируемого тела», Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1977. С. 101–103.

40. *Павлик Г. Н.* Некоторые задачи о контактном взаимодействии тонкостенных упругих элементов с линейно-деформируемым основанием. Автореф. дисс. на соискание учен. степени канд. физ.-мат. наук. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1978. 28 с.
41. *Павлик Г. Н., Ткачев Г. В., Чебаков М. И.* О двух смешанных задачах теории упругости для полупространства с переменными по глубине упругими постоянными // Молодые ученые — научно-техническому прогрессу. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1973. С. 12–15.
42. *Пастернак П. Л.* Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при наличии двух коэффициентов постели. М.-Л.: Госстройиздат, 1954. 205 с.
43. *Попов Г. Я.* Пластинки на линейно-деформируемом основании (обзор) // Прикл. мех. 1972. Т. 8. Вып. 3. С. 3–17.
44. *Попов Г. Я.* Контактные задачи для линейно-деформируемого основания. Киев: Вища школа, 1982. 168 с.
45. *Рвачев В. Л., Проценко В. С.* Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. Киев: Наукова думка, 1977. 235 с.
46. *Солодовник М. Д.* Некоторые задачи изгиба балочных и круглых плит на упругом полупространстве. Автореф. дисс. на соискание учен. степени канд. физ.-мат. наук. Ростов-на-Дону. 1974. 26 с.
47. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 635 с.
48. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1968. 402 с.
49. *Филоненко-Бородич М. М.* Некоторые приближенные теории упругого основания // Ученые записки МГУ. 1940. Вып. 46. С. 3–18.
50. *Цейтлин А. И.* Об изгибе круглой плиты, лежащей на линейно-деформируемом основании // Изв. АН СССР. МТТ. 1968. № 1. С. 51–59.
51. *Шацких Л. С.* К расчету изгиба плиты на упругом слое // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 2. С. 99–105.

Глава 3

Стационарные динамические контактные задачи

(гармонические колебания,
движение с постоянной
скоростью)

§ 1. ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ АСИМПТОТИКА В ДИНАМИЧЕСКИХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ

М. А. Сумбатян

При исследовании динамических контактных задач для полуограниченных тел выбор методов исследования напрямую зависит от значений частоты колебания. Случаи низких и средних частот могут быть изучены с применением регулярных методов (см. гл. 1) — метод ортогональных многочленов, метод «больших λ », метод фиктивного поглощения, прямые численные методы и т.д. С ростом частоты колебания регулярные методы, как правило, приводят к алгебраическим системам очень высокой размерности и при дальнейшем росте частоты теряют устойчивость. Сингулярные асимптотические методы (в частности, метод «малых λ ») с успехом применялись к решению высокочастотных контактных задач в антиплоском случае [1, 2], где символ ядра основного интегрального уравнения допускает факторизацию в простой форме. Данный параграф посвящен развитию сингулярных методов для задач, в которых известные стандартные подходы, как правило, не приводят к явным аналитическим решениям. Изложение, в основном, следует работам автора [3–5].

1. Рассмотрим вертикальные высокочастотные гармонические колебания жесткого штампа, соединенного без трения с упругой полуплоскостью. Основная трудность построения высокочастотной асимптотики состоит в осуществлении эффективной факторизации символа ядра основного интегрального уравнения. Предлагается функция, учитывающая все свойства символа, позволяющая осуществить его равномерную аппроксимацию и легко факторизуемая. Такое решение проблемы приближенной факторизации позволяет в простом явном виде выписать главный член асимптотики решения.

Как известно, рассматриваемая задача сводится к следующему интегральному уравнению:

$$\int_{-1}^1 p(t)K\left(\frac{x-t}{\lambda}\right) dt = \frac{\mu}{b}W, \quad |x| < 1,$$

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} L_*(u)e^{-iux} du, \quad \lambda^2 = \frac{\mu}{\rho\omega^2 b^2}, \quad \beta^2 = \frac{1-2\nu}{2-2\nu},$$

$$L_*(u) = \frac{\sqrt{u^2 - \beta^2}}{4u^2 \sqrt{u^2 - \beta^2} \sqrt{u^2 - 1} - (2u^2 - 1)^2}. \quad (1)$$

Зависимость от времени всех величин принимается в виде $f(x, t) = \text{Re}[f(x)e^{-i\omega t}]$. В уравнении (1) $p(x)$ — амплитуда контактного напряжения, W — амплитуда колебаний штампа, λ — параметр, который на высоких частотах мал, μ — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, ρ — плотность материала, b — полуширина штампа, ω — частота колебания.

Исходное уравнение (1) эквивалентно двум:

$$\int_0^\infty \varphi(t)K(x-t)dt = \frac{1}{\lambda} + \int_0^\infty \left[\varphi\left(\frac{2}{\lambda} + \tau\right) - v(\tau)\right] K(x+\tau) d\tau \quad (2)$$

$$\int_{-\infty}^\infty v(t)K\left(\frac{x-t}{\lambda}\right) dt = 1, \quad (3)$$

если

$$p(x) = \frac{G}{a}W \left[\varphi\left(\frac{1+x}{\lambda}\right) + \varphi\left(\frac{1-x}{\lambda}\right) - v(x)\right]. \quad (4)$$

Рассматриваемая задача является типичной задачей с сингулярными возмущениями по малому параметру λ .

Часто при построении главного члена асимптотики решения при $\lambda \rightarrow 0$ последний интеграл в (2) можно отбросить, и уравнение (2) превращается в уравнение Винера–Холфа на полуоси. Обычно это дает погрешность порядка $\exp(-\varepsilon/\lambda)$ ($\varepsilon > 0$) равномерно по x . Иногда эта погрешность носит степенной характер, т.е. является более существенной. Ниже будет показано, что в данной задаче *невязка* за счет отбрасывания указанного члена — малая степенного порядка. Имеет место оценка

$$\int_0^\infty \left[\varphi\left(\frac{2}{\lambda} + \tau\right) - v(\tau)\right] K(x+\tau) d\tau = O(\lambda^{1/2}), \quad \lambda \rightarrow 0 \quad (5)$$

равномерно по x .

В дальнейшем ставим целью построение главного члена асимптотики решения. Оценка (5) приводит к тому, что главный член (4) определяется решением задач для двух полубесконечных штампов (2) и одного бесконечного (3). Физически это означает, что высокочастотные колебания обладают настолько малой длиной волны, что возмущения от правого конца штампа в главном практически не влияют на волновой процесс у левой кромки, и наоборот.

Решение уравнения на оси (3) строится применением преобразования Фурье и имеет вид

$$v(x) = -i(\beta\lambda)^{-1} \equiv v. \quad (6)$$

Для успешного решения уравнения на полуоси

$$\int_0^\infty \varphi(t)K(x-t)dt = \frac{1}{\lambda} \quad (7)$$

необходимо факторизовать символ ядра. Как известно, решение уравнения (7) обладает устойчивостью к малым возмущениям символа на вещественной оси, поэтому осуществим его приближенную факторизацию.

Символ ядра $L_*(u)$ представляет собой комбинацию четырех радикалов $\sqrt{u+\beta}$, $\sqrt{u+1}$, $\sqrt{u-\beta}$, $\sqrt{u-1}$, имеющих точки ветвления. Проведем в плоскости комплексного переменного u разрезы, соединяющие точки $-\beta$ и -1 с бесконечностью в нижней полуплоскости, а точки β и 1 — с бесконечностью в верхней полуплоскости. Кроме точек ветвления на вещественной оси у символа есть два полюса Релея: $u = \pm u_1$, $u_1 > 1$. Согласно принципу предельного поглощения, контур Γ в (1) совпадает с вещественной осью, обходя положительные особенности снизу, а отрицательные — сверху.

Функция $L_*(u)$ обладает качественно различным поведением на разных отрезках вещественной оси. При $|u| \geq 1$ она вещественная, при $\beta < |u| < 1$ — комплекснозначная, при $|u| \leq \beta$ — принимает мнимые значения.

Аппроксимируем символ $L_*(u)$ выражением

$$L_* = \sqrt{u^2 - \beta^2} \frac{4u^2 \sqrt{u^2 - \beta^2} \sqrt{u^2 - 1} + (2u^2 - 1)^2}{16u^4(u^2 - \beta^2)(u^2 - 1) - (2u^2 - 1)^4} \approx L(u) = \frac{A\sqrt{u^2 - \beta^2}}{(u^2 - u_1^2)(u^2 - z^2)(u^2 - \bar{z}^2)} M_+(u)M_-(u), \quad (A, B, \text{Im } az > 0),$$

$$M_{\pm}(u) = Bu\sqrt{u \pm \beta}\sqrt{u \pm 1} + (\sqrt{2}u \pm 1)^2. \quad (8)$$

Функция $L(u)$, как и $L_*(u)$, четна, имеет два полюса Релея $u = \pm u_1$ и обладает таким же качественным поведением на различных отрезках вещественной оси. При этом она точно улавливает поведение в нуле и на бесконечности. Кроме того, она везде имеет истинный знак мнимой части, что важно для выполнения теоремы единственности. Выражение $M_+(u)$ имеет нуль в верхней полуплоскости, который должен быть погашен нулем знаменателя $u = -\bar{z}$. Заметим, что точка $u = -z$ является его вторым нулем.

С учетом сказанного факторизация функции $L(u)$ осуществляется в виде

$$L_+(u) = \frac{A\sqrt{u+\beta}}{(u+u_1)(u+z)(u+\bar{z})} M_+(u). \quad (9)$$

Реализация метода Винера–Хопфа для уравнения (7) с учетом факторизации (9) приводит к следующему выражению для образа Фурье функции $\varphi(x)$:

$$\Phi_+(u) = C \frac{(u+u_1)(u+z)(u+\bar{z})}{u\sqrt{u+\beta}M_+(u)} = C \frac{(u+u_1)(u+z)(u+\bar{z})}{u\sqrt{u+\beta}\Delta(u)} \times$$

$$\times \left[Bu\sqrt{u+\beta}\sqrt{u+1} - (\sqrt{2}u+1)^2 \right], \quad C = \frac{u_1|z|^2}{A\lambda\sqrt{\beta}},$$

$$\Delta(u) = B^2u^2(u+\beta)(u+1) - (\sqrt{2}u+1)^4 =$$

$$= d(u+z)(u+\bar{z})(u+\eta)(u+\bar{\eta}), \quad d = B^2 - 4. \quad (10)$$

Таким образом,

$$\Phi_+(u) = \frac{C}{d} \left[a_1 \frac{\sqrt{u+1}}{u+\eta} + a_2 \frac{\sqrt{u+1}}{u+\bar{\eta}} + \frac{a_3}{u\sqrt{u+\beta}} + \frac{a_4}{(u+\eta)\sqrt{u+\beta}} + \frac{a_5}{(u+\bar{\eta})\sqrt{u+\beta}} \right], \quad a_1 = B \frac{u_1 - \eta}{\bar{\eta} - \eta},$$

$$a_2 = \bar{a}_1, \quad a_3 = -\frac{u_1}{|\eta|^2}, \quad a_4 = \frac{(u_1 - \eta)(\sqrt{2}\eta - 1)^2}{\eta(\bar{\eta} - \eta)}, \quad a_5 = \bar{a}_4. \quad (11)$$

Это позволяет выписать функцию $\varphi(x)$ в явном виде, поскольку имеют место следующие формулы обращения:

$$\frac{1}{(u+\eta)\sqrt{u+\beta}} \leftarrow -i \frac{e^{i\eta x}}{\sqrt{\beta-\eta}} \text{erf} \sqrt{-ix(\beta-\eta)}, \quad x > 0,$$

$$\frac{\sqrt{u+1}}{u+\eta} \leftarrow \frac{e^{-i(\pi/4-x)}}{\sqrt{\pi x}} - ie^{i\eta x} \sqrt{1-\eta} \text{erf} \sqrt{-ix(1-\eta)}. \quad (12)$$

Из явного вида функции $\varphi(x)$, как и непосредственно из формулы (11), получается оценка

$$\varphi(x) \sim v + ae^{i\beta x} x^{-1/2}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad (13)$$

которая говорит о том, что погранслоное решение, как и следовало ожидать, во внешней зоне переходит в решение задачи о бесконечном штампе (6). Однако этот процесс происходит очень медленно.

Если к оценке (13) добавить еще очевидную оценку

$$K(x) \sim c_1 e^{iu_1 x} + c_2 e^{i\beta x} x^{-3/2} + c_3 e^{ix} x^{-3/2}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad (14)$$

то можно убедиться в истинности соотношения (5).

Найдем связь между силой, действующей на штамп, и его осадкой (считаем штамп невесомым)

$$P = b \int_{-1}^1 p(x) dx = \mu W \int_{-1}^1 \left[\varphi \left(\frac{1+x}{\lambda} \right) + \varphi \left(\frac{1-x}{\lambda} \right) - v \right] dx =$$

$$= \mu W \left\{ 2v + 2 \int_{-1}^{\infty} \left[\varphi \left(\frac{1+x}{\lambda} \right) - v \right] dx \right\}. \quad (15)$$

Последнее равенство выполняется в силу оценки (13) с погрешностью $O(\lambda^{1/2})$, равной погрешности построенного решения уравнения (1). Далее, поскольку

$$\int_{-1}^{\infty} \left[\varphi \left(\frac{1+x}{\lambda} \right) - v \right] dx =$$

$$= \lambda \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(t) - vH(t)] dt = \lambda [\Phi_+(u) - V_+(u)]_{u=0} \quad (16)$$

($H(t)$ — функция Хевисайда), окончательно получаем следующее выражение для податливости основания:

$$W = \frac{P}{2\mu} \frac{\lambda}{-i\beta^{-1} + \lambda CD},$$

$$D = \frac{1}{d} \left\{ 2\text{Re} \left[\frac{1}{\eta} \left(a_1 + \frac{a_4}{\sqrt{\beta}} \right) \right] - \frac{a_3}{2\beta^{3/2}} \right\}. \quad (17)$$

Заметим, что в (17) постоянные C и D вещественны, поэтому, например, сдвиг фаз между осадкой и приложенной силой дается формулой

$$\theta = -\text{arctg}(\beta CD\lambda)^{-1}. \quad (18)$$

Очевидно, что решение задачи для невесомого штампа можно переписать на штамп с любой массой. Это достигается умножением на некоторый комплексный множитель.

2. Рассмотрим антиплоскую задачу (SH-волны) о высокочастотных колебаниях полосового штампа на упругом слое конечной толщины, сцепленным с жестким основанием. Рассматриваемая задача с помощью преобразования Фурье может быть сведена к интегральному уравнению 1-го рода относительно контактного давления, отнесенного к $\mu W/h$:

$$\int_{-a}^a p(\xi)K(x-\xi)d\xi = 1, \quad |x| < a; \quad K(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} L(u)e^{-ixuz} du, \\ L(u) = \frac{\text{th } \chi\gamma}{\gamma}, \quad \gamma = \sqrt{u^2 - 1}. \quad (19)$$

Здесь h — толщина слоя, $\chi = \lambda^{-1} = \omega b \sqrt{\rho/\mu}$, $a = b/h$.

В рассматриваемой задаче — два независимых безразмерных параметра: χ и a . Если оба они ограничены, то любой регулярный метод может быть с успехом применен для построения эффективного решения уравнения (19) (в качестве возможного укажем здесь на метод ортогональных многочленов — см. гл.1). Если параметр χ ограничен, а параметр a велик, то эффективно применение асимптотического метода по этому параметру — в духе метода «фиктивных поглощений». Однако в данном разделе исследуется совершенно другой предельный случай.

Область высоких частот ω соответствует большим значениям безразмерного параметра χ , при этом второй независимый безразмерный параметр задачи полагается фиксированным, а именно $a = \text{const}$.

Свойства символа ядра $L(u)$ (19) в задаче о слое коренным образом отличаются от символа (1) в задаче о полуплоскости. С ростом параметра χ у функции $L(u)$ появляется все больше вещественных нулей $\pm\alpha_k$ и полюсов $\pm\beta_k$:

$$\alpha_k = \sqrt{1 - \left(\frac{\pi k}{\chi}\right)^2}, \quad \beta_k = \sqrt{1 - \left(\frac{\pi k - \pi/2}{\chi}\right)^2}. \quad (20)$$

Это делает невозможным применение коротковолновых сингулярных асимптотических методов (в духе метода «малых λ » [2]) в стандартном виде. Здесь развивается новый метод построения высокочастотной асимптотики именно для рассматриваемого класса интегральных уравнений.

Прежде всего заметим, что случаи, когда $\chi = \pi m$ или $\chi = \pi m - \pi/2$ (резонанс), являются особыми. Поэтому все дальнейшие рассуждения справедливы для χ , лежащих вне малых ε — окрестностей этих особых значений.

Выделим из ядра $K(x)$ функцию $K_1(x)$ с символом $L_1(u)$, обладающим алгебраическим поведением при $u \rightarrow \pm\infty$ и не имеющим нулей на вещественной оси:

$$L(u) = \frac{1}{(1 + e^{-2\chi\gamma})\gamma} - \frac{e^{-2\chi\gamma}}{(1 + e^{-2\chi\gamma})\gamma} = L_1(u) - L_2(u). \quad (21)$$

Появляющиеся здесь новые функции имеют точки ветвления $u = \pm 1$. Для выделения однозначных ветвей в плоскости комплексного переменного u стандартным образом проводятся разрезы. Запишем уравнение (19) в виде

$$\int_{-a}^a p(\xi)K_1(x-\xi)d\xi = 1 + \int_{-a}^a p(\xi)K_2(x-\xi)d\xi, \quad |x| < a. \quad (22)$$

Рассматриваемая задача является типичной задачей с сингулярными возмущениями по малому параметру $\lambda = \chi^{-1}$. Это, в частности, означает, что вся область контакта разбивается на две малые погранслойные области длиной $\sim \lambda$, прилегающие к кромкам штампа, и основную, внешнюю область — вне погранслоев. В погранслойных областях проявляется корневая особенность контактного давления. Нас будет интересовать глобальная структура решения — ее поведение во внешней области.

Отсутствие у символа оператора K_1 вещественных нулей позволяет в рамках асимптотического метода «малых λ » для построения внешнего решения $\tau(x)$ уравнения (22) распространить оператор K_1 на всю вещественную ось. Полученное таким образом уравнение применением преобразования Фурье легко сводится к следующему:

$$\int_{-a}^a \tau(\xi)Q(x-\xi)d\xi = l_0, \quad |x| < a; \quad l_0 = (1 + e^{-2\chi\gamma})\gamma|_{u=0} = \\ = -i(1 + e^{2\chi i}); \quad Q(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} G(u)e^{-ixuz} du; \quad G = 1 - e^{-2\chi\gamma}. \quad (23)$$

При этом, как будет показано ниже, такой подход дает погрешность порядка $\sim \chi^{-1/2}$.

Уравнение (23) лучше приспособлено для асимптотического анализа, чем исходное уравнение (19), вследствие простого вида его ядра. Заметим, что представление (21) неединственно. Например, возможно $L(u) = 2/(1 + e^{-2\chi\gamma})\gamma - 1/\gamma$. Легко видеть, что все подобные разложения приводят к одному и тому же виду уравнения (23).

Представим уравнение (23) в форме уравнения второго рода

$$\tau(x) - \chi \int_{-a}^a \tau(\xi)Q_1(x-\xi)d\xi = l_0\chi, \quad |x| < a, \\ Q_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} G_1(u)e^{-ixuz} du, \quad G_1 = e^{-2\chi\gamma}. \quad (24)$$

Легко показать, что уравнение (24) эквивалентно системе

$$\varphi(x) - \chi \int_0^{\infty} \varphi(\xi)Q_1(x-\xi)d\xi = \\ = l_0\chi - \chi \int_0^{\infty} [\varphi(2a+\xi) - v]Q_1(x+\xi)d\xi, \quad x > 0, \quad (25)$$

$$v(x) - \chi \int_{-\infty}^{\infty} v(\xi) Q_1(x - \xi) d\xi = l_0 \chi, \quad -\infty < x < \infty, \quad (26)$$

если

$$\tau(x) = \varphi(a + x) + \varphi(a - x) - v(x), \quad |x| < a. \quad (27)$$

Докажем, что интеграл в правой части уравнения (25) имеет порядок $\sim \chi^{-1/2}$ при $\chi \rightarrow \infty$ и, следовательно, может быть отброшен. Для доказательства получим вначале асимптотическое выражение ядра $Q_1(x)$ методом перевала:

$$Q_1(x) \sim \frac{e^{-\pi i/4}}{\sqrt{\chi}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{ix\sqrt{4+x^2}}}{(4+x^2)^{3/4}}, \quad \chi \rightarrow \infty, \quad (28)$$

равномерное по $x \in (-\infty, \infty)$. Далее заметим, что у ядра $Q_1(x + \xi)$ (25) при $x, \xi > 0$ нет стационарной точки. Поэтому обычный прием интегрирования по частям легко приводит к требуемой асимптотической оценке.

Полученный результат представляется неожиданным. Обычно в подобном рода асимптотических методах «хвосты» типа интеграла в правой части (25) являются малыми в силу того, что $\varphi(x) \rightarrow v$, $\chi \rightarrow \infty$ (ср. с задачей для полуплоскости, рассмотренной выше). Здесь же наличие нулей символа $G(u)$ нарушает это свойство. Тем не менее рассмотренный интеграл оказался мал, но уже в силу свойств ядра $Q_1(x)$.

С учетом сказанного функция $\varphi(x)$ легко находится из уравнения Винера–Хопфа (25). Окончательно внешнее решение принимает вид

$$\tau(x) = \frac{\chi}{\operatorname{tg} \chi} - \frac{i\pi l_0 \chi}{2G_-(0)} \sum_{k=1}^n \frac{k G_+(\alpha_k)}{\chi^2 - (\pi k)^2} \times \\ \times \{ \exp[i\sqrt{\chi^2 - (\pi k)^2}(a + x)] + \exp[i\sqrt{\chi^2 - (\pi k)^2}(a - x)] \}, \quad (29)$$

где G_+ — фактор функции $G(u)$, n — число нулей $\alpha_k > 0$.

Структура решения (29) такова, что на постоянное значение («вырожденное» — оно получается решением уравнения (19) на всей оси) накладываются осцилляции. Несколько первых волн (при $\pi k \sim \chi$) имеют амплитуду, соизмеримую с этой постоянной. С ростом частоты колебания эпюра контактных напряжений носит все более волнообразный характер. Оказывается, что число «горбов» и «впадин» имеет порядок $\sim \chi^{1/2}$. Этот результат отличается от результата рассмотренной выше контактной задачи для полупространства, где эпюра стремится к постоянному, «вырожденному» значению. Указанное отличие объясняется влиянием дна в задаче о слое и вызвано многократным наложением отраженных от дна лучей.

В заключение заметим, что последние исследования [6] показывают, что глобальная структура высокочастотного решения может быть корректно сконструирована путем прямого применения изложенного здесь метода к исходному уравнению (19), без предварительного сведения его к более простому уравнению (24).

3. Здесь рассмотрим задачу, аналогичную предыдущей, но в плоской постановке (P -волны). Пусть жесткий штамп совершает вертикальные гармонические колебания на поверхности упругой полосы, расположенной на жестком основании. Трение в области контакта, а также между полосой и основанием отсутствует. Данная задача может быть сведена к интегральному уравнению относительно неизвестного контактного напряжения $p(x)$, отнесенного к $\mu W/h$:

$$\int_{-a}^a p(\xi) K(x - \xi) d\xi = 1, \quad |x| < a, \quad (a = b/h);$$

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} L(u) e^{-ixxu} du, \quad L(u) = L_1(u) - L_2(u),$$

$$L_1(u) = \sigma_1 / \Delta(u), \quad L_2(u) = \sigma_1 P_1(u) / \Delta(u),$$

$$P_1(u) = e^{-2\chi\sigma_1} + e^{-2\chi\sigma_2} - e^{-2\chi(\sigma_1 + \sigma_2)}, \quad \chi = \omega h \sqrt{\rho/\mu},$$

$$\Delta(u) = 4u^2 \sigma_1 \sigma_2 G_1(u) F_2(u) - (2u^2 - 1)^2 G_2(u) F_1(u),$$

$$G_k(u) = 1 - e^{-2\chi\sigma_k}, \quad F_k(u) = 1 + e^{-2\chi\sigma_k}, \quad k = 1, 2;$$

$$\sigma_1 = \sqrt{u^2 - \beta^2}, \quad \sigma_2 = \sqrt{u^2 - 1}, \quad \beta^2 = \frac{1 - 2\nu}{2 - 2\nu}. \quad (30)$$

Как и в антиплоской задаче, с увеличением частоты колебания (т.е. безразмерного параметра χ) число нулей и полюсов символа $L(u)$, расположенных на вещественной оси, также неограниченно растет. Решающее значение имеет расположение вещественных нулей символа $\pm\alpha_k$ и $\pm\beta_k$:

$$\alpha_k = \sqrt{1 - \left(\frac{\pi k}{\chi}\right)^2}, \quad (k = 1, \dots, n_\alpha),$$

$$\beta_k = \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{\pi k}{\chi}\right)^2}, \quad (k = 1, \dots, n_\beta). \quad (31)$$

Развиваемый здесь метод является существенным обобщением метода, разработанного для задачи об антиплоских колебаниях штампа.

Как и в случае уравнения (19), выделим из ядра $K(x)$ функцию $K_1(x)$ с символом $L_1(u)$, обладающим алгебраическим поведением при $u \rightarrow \pm\infty$ и не имеющим нулей на вещественной оси:

$$\int_{-a}^a p(\xi) K_1(x - \xi) d\xi = 1 + \int_{-a}^a p(\xi) K_2(x - \xi) d\xi. \quad (32)$$

Для построения внешнего (вне «погранслоев») решения при $\chi \rightarrow \infty$, как и ранее, распространим оператор с ядром K_1 на всю вещественную ось. В результате приходим к следующему уравнению

$$\int_{-a}^a p(\xi) Q(x - \xi) d\xi = l_0, \quad |x| < a; \quad Q(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} G(u) e^{-ixxu} du,$$

$$G(u) = G_1(u)G_2(u) = (1 - e^{-2\chi\sigma_1})(1 - e^{-2\chi\sigma_2}),$$

$$l_0 = \frac{\Delta}{\sigma_1} \Big|_{u=0} = -\frac{i}{\beta}(1 + e^{2i\chi\beta})(1 - e^{2i\chi}). \quad (33)$$

Учитывая равенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} e^{-i\chi ux} du = \frac{1}{\chi} \delta(x), \quad (34)$$

уравнение (33) можно привести к виду

$$p(x) - \chi \int_{-a}^a p(\xi)Q_1(x - \xi)d\xi = l_0\chi, \quad |x| < a$$

$$Q_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} P_1(u)e^{-i\chi ux} du, \quad P_1(u) = 1 - G(u). \quad (35)$$

Очевидно, что ядро $Q_1(x)$ непрерывно (на самом деле оно даже бесконечно дифференцируемо).

По аналогии с антиплоской задачей, воспользуемся тем, что уравнение (35) эквивалентно двум уравнениям относительно новых неизвестных функций $\varphi(x)$ и $v(x)$:

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \chi \int_0^{\infty} \varphi(\xi)Q_1(x - \xi)d\xi = \\ = l_0\chi - \chi \int_0^{\infty} [\varphi(2a + \xi) - v]Q_1(x + \xi)d\xi, \quad x > 0, \end{aligned} \quad (36)$$

$$v(x) - \chi \int_0^{\infty} v(\xi)Q_1(x - \xi)d\xi = l_0\chi, \quad |x| < \infty, \quad (37)$$

если только

$$p(x) = \varphi(a + x) + \varphi(a - x) - v, \quad |x| < a. \quad (38)$$

Докажем, что интеграл в правой части (36) асимптотически мал, исходя из свойств ядра $Q_1(x)$. Вначале получим асимптотическое выражение для $Q_1(x)$ при $\chi \rightarrow \infty$. Основную трудность здесь представляет оценка интеграла вида

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} e^{-i\chi ux} e^{-2\chi(\sigma_1 + \sigma_2)} du. \quad (39)$$

Можно показать, что основной вклад в J дает окрестность стационарной точки u_* фазы S :

$$S(u, x) = ux + 2\sqrt{1 - u^2} + 2\sqrt{\beta^2 - u^2}, \quad (40)$$

причем $0 < u_* < \beta$. Можно также показать, что S_u — монотонно убывающая непрерывная функция для любого фиксированного $x > 0$, причем $S_u > 0$ при $u = 0$ и $S_u < 0$ при $u = \beta - 0$. Следовательно, уравнение $S_u = 0$, определяющее

стационарную точку u_* , всегда имеет единственное решение. В итоге получаем

$$J \sim \frac{\exp(-i\pi/4)}{\sqrt{2\pi\chi}} \frac{\exp(i\chi S(u_*, x))}{\sqrt{|S_{uu}(u_*, x)|}}, \quad \chi \rightarrow \infty. \quad (41)$$

Используя асимптотики двух других слагаемых, входящих в ядро $Q_1(x)$ (см. соотношение (28)), окончательно приходим к следующей оценке

$$\begin{aligned} Q_1 \sim \chi^{-1/2} [A_1(x) \exp(i\chi S(u_*, x)) + \\ + A_2(x) \exp(i\chi\beta\sqrt{4 + x^2}) + A_3(x) \exp(i\chi\sqrt{4 + x^2})], \end{aligned} \quad (42)$$

где $A_1(x)$, $A_2(x)$, $A_3(x)$ — гладкие, не зависящие от χ функции.

Дальнейшая оценка интеграла в правой части (36) будет основана на применении хорошо известного в таких случаях приема интегрирования по частям. Поскольку при $x > 0$ фазовая функция $(4 + x^2)^{1/2}$ не имеет стационарных точек, такое интегрирование по частям показывает, что вклад в рассматриваемый интеграл от слагаемых, соответствующих функциям A_2 и A_3 , имеет порядок $\chi^{-1/2}$. Для выяснения асимптотического поведения слагаемого, соответствующего функции A_1 , сначала убеждаемся в отсутствии при $x > 0$ стационарных (по x) точек функции $S(u_*, x)$. В самом деле, равенство $S_u(u_*, x) = 0$ определяет стационарную точку $u_* = u_*(x)$, поэтому $S(u_*, x) = S[u_*(x), x]$. Отсюда следует $dS/dx = S_u u_{*x} + S_x = S_x = u = u_*(x)$.

Таким образом, $dS/dx = 0$ лишь при $u_* = 0$, а это возможно только при $x = 0$, что доказывается непосредственно. Отсюда следует, что и от слагаемого с A_1 вклад в интеграл правой части (36) имеет порядок $\chi^{-1/2}$.

Опуская подробности решения уравнения Винера–Хопфа (36) и уравнения свертки (37), выпишем окончательный результат

$$\begin{aligned} p(x) = \frac{\chi}{\beta \operatorname{tg} \chi\beta} - \frac{i\pi l_0\chi}{2G_-(0)} \times \\ \times \left\{ \sum_{k=1}^{n_\alpha} \frac{kG_+(\alpha_k)H_k(x, 1)}{1 - \exp[-2\chi\sigma_1(\alpha_k)]} + \sum_{k=1}^{n_\beta} \frac{kG_+(\beta_k)H_k(x, \beta)}{1 - \exp[-2\chi\sigma_2(\beta_k)]} \right\}, \\ G(\alpha) = G_+(\alpha)G_-(\alpha), \quad H_k(x, \beta) = \\ = \frac{\exp[i\sqrt{(\chi\beta)^2 - (\pi k)^2}(a + x)] + \exp[i\sqrt{(\chi\beta)^2 - (\pi k)^2}(a - x)]}{(\chi\beta)^2 - (\pi k)^2} \end{aligned} \quad (43)$$

(функция $G_+(\alpha)$ аналитична в верхней полуплоскости).

Как и в антиплоской задаче, эпюра контактных напряжений (43) имеет волнообразный характер, причем с ростом параметра частоты χ число «горбов» и «впадин» имеет порядок $\sim \chi^{1/2}$.

В заключение заметим, что случай, когда полоса сцеплена с жестким основанием, также может быть исследован методом, предложенным в данной работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В. М., Буряк В. Г. О некоторых динамических смешанных задачах теории упругости // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 1. С. 114–121.
2. Александров В. М., Буряк В. Г. Неосесимметричная динамическая задача о кручении штампом упругого полупространства // Изв. АН АрмССР. Механика. 1978. Т. 31. № 2. С. 28–33.
3. Боев С. И., Сумбатьян М. А. Динамическая контактная задача для упругой полуплоскости при высоких частотах колебания // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 6. С. 1039–1043.
4. Сумбатьян М. А. Асимптотика решения контактной задачи для упругого слоя при высоких частотах колебания // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299. № 6. С. 1344–1346.
5. Сумбатьян М. А. Плоская контактная задача для упругого слоя при высоких частотах колебания // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 2. С. 307–311.
6. Scalia A., Sumbatyan M. A. On high-frequency asymptotics in diffraction by finite-length waveguides: Open structures // Journ. Engineering Mathematics. 1999. V. 35. No. 4. P. 427–436.

§ 2. ДИНАМИЧЕСКИЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ
ДЛЯ ТЕЛ С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

В. В. Калинин

Исследование динамического контактного взаимодействия жестких штампов с преднапряженными телами и поиск закономерностей этого взаимодействия создают теоретическую основу для развития принципиально новых методов диагностики и контроля напряженного состояния упругих тел, находящихся в условиях больших силовых воздействий. В первых работах в этом направлении исследовались особенности влияния преднапряжений на волновой процесс под штампом и на свободной поверхности среды. Задача о колебаниях штампа на поверхности преднапряженного полупространства в плоской постановке рассматривалась в коллективной работе [29], в более общей постановке для произвольного и кругового в плане штампов — в работе В. В. Калинин, И. Б. Поляковой [40]. Среда предполагалась сжимаемой, первоначально изотропной, имеющей упругий потенциал. Начальное состояние — однородным, наводящим в среде трансверсальную анизотропию. При аналогичных предположениях были рассмотрены задачи контактного взаимодействия штампа с преднапряженным слоем [38] и банджа с начально-деформированным цилиндром [39]. Переменные по глубине начальные напряжения в неоднородном слое и цилиндре рассматривались в работах И. В. Анянueva, В. В. Калинин, И. Б. Поляковой [2–5]. Исследование базировалось на методе численного построения функции Грина, предложенном в работе [1]. Этот же метод был использован в работе В. В. Калинин, И. В. Лысенко, И. Б. Поляковой [37] для исследования особенностей взаимодействия осциллирующего штампа с неоднородным тяжелым основанием и в работе Т. И. Белянковой, В. В. Калинин, И. Б. Поляковой [25] при исследовании процессов возбуждения упругих волн в двухслойных преднапряженных средах. В работах В. А. Бабешко, В. В. Калинин, О. А. Малаховой [7, 8] были рассмотрены динамические контактные задачи для упругого слоя из несжимаемого материала. Основной особенностью этого класса задач является наличие у символа ядра интегрального оператора двукратного нуля в начале координат. Для исследования этих задач в [7] получил дальнейшее развитие предложенный в [28] метод решения интегральных уравнений.

Исследование конкретных задач показало, что закономерности влияния начальной деформации на интегральные характеристики динамических задач (реакция среды, амплитуда и фаза смещения штампа) и на резонансные явления, возникающие при контактном взаимодействии, содержат больше информации о напряженном состоянии тела. Влияние однородной начальной деформации произвольного вида на динамику массивных тел и инерционных систем, контактирующих с предварительно напряженной средой, исследовалось в [21–23]. Неоднородная начальная деформация и ее влияние на динамику массивных тел и инерционных систем, взаимодействующих с неоднородными преднапряженными средами и на возникающие при этом резонансные явления, изучались в работах Т. И. Белянковой, И. А. Зайцевой, В. В. Калинин, Ю. Е. Пузанова [18, 19, 24, 26].

Другим направлением динамических контактных задач для преднапряженных тел, которому посвящен цикл работ С. Ю. Бабица, А. Н. Гузя, Ю. П. Глухова, В. В. Зозули, В. Б. Рудницкого, являются задачи о нагрузке, штампе [9–17, 32, 33], а также задачи о полубесконечной трещине [30, 32, 34, 35], движущихся с постоянной скоростью. При этом исходная динамическая задача допускает преобразование к статическим задачам, что позволяет использовать аппарат теории функций комплексных переменных, методов задач Римана–Гильберта и интегральных преобразований Фурье. В работах этого направления получены общие представления на-

пращений и перемещений через комплексные потенциалы. Эти представления при однородной начальной деформации имеют одинаковую структуру, как для статических, так и для динамических задач независимо от формы упругого потенциала и вида материала. Подробный обзор работ, связанных с изучением движущихся нагрузок, штампов и трещин приведен в монографиях А. Н. Гузя [31] и А. Н. Гузя, С. Ю. Бабича, В. Б. Рудницкого [34].

1. В общем случае изучение механических процессов в начально-деформированных телах необходимо проводить в рамках нелинейной теории упругости. Однако, множество процессов, происходящих в начально-деформированных телах, можно рассматривать в рамках линеаризованной теории наложения малых деформаций (возмущений) на конечные деформации (начальное состояние) в предположении, что возмущения малы. Традиционно [30, 41, 42] различают три состояния тела: естественное (ненапряженное) состояние (ЕС), начально-деформированное состояние (НДС) и актуальное (возмущенное по отношению к НДС) состояние. При этом особое значение приобретает выбор системы координат, которая может быть связана либо с естественной конфигурацией (система координат Лагранжа или материальная система координат), либо с актуальной конфигурацией (система координат Эйлера) [30, 41, 42]. Линеаризованные уравнения движения существенным образом зависят как от выбора системы координат, так и от выбора определяющих соотношений, поскольку имеет место возможность определения напряженного состояния различными тензорами (Коши, Пиола, Кирхгофа и т.д.) и множественность их представления через меры деформации (Коши-Грина, Фингера, Альманзи) или градиент места. Более детально с особенностями постановки задач для преднапряженных тел можно ознакомиться в монографиях А. И. Лурье [41], А. Лява [42] и А. Н. Гузя [30].

Краевая задача о колебаниях преднапряженной среды под действием распределенной в области Ω осциллирующей нагрузки $q(x_1, x_2)e^{-i\omega t}$ в общем случае описывается линеаризованными уравнениями движения [30, 41, 42] с граничными условиями:

$$\nabla \cdot \underline{\Theta} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$\underline{n} \cdot \underline{\Theta} = \begin{cases} q(x_1, x_2)e^{-i\omega t}, & x_3 = x_{30}, \quad x_1, x_2 \in \Omega, \\ 0, & x_3 = x_{30}, \quad x_1, x_2 \notin \Omega. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь ∇ — оператор Гамильтона, ρ — плотность среды, \underline{u} — вектор перемещения, \underline{q} — заданный вектор напряжений, \underline{n} — внешняя нормаль к поверхности слоя, которые определены в выбранной системе координат. Общий вид тензора $\underline{\Theta}$, играющего в линейной теории упругости роль тензора напряжений Коши, для различных систем координат и видов напряженного состояния среды приводится в [20, 24]. В зависимости от

типа среды, задача (1)–(2) дополняется граничными условиями на нижней грани (слой), условиями убывания перемещений на бесконечности (полупространство), условиями стыковки напряжений и перемещений между слоями (многослойная среда).

В работах [37, 40] при исследовании контактных задач для преднапряженной неоднородной по глубине среды (механические параметры равно как и начальные напряжения являются произвольными, достаточно гладкими функциями координаты x_3) в записи краевой задачи (1), (2) использовалось специальное представление тензора $\underline{\Theta}$ в виде суммы симметричного \underline{P} и антисимметричного \underline{U} тензоров [36]. Тензор \underline{U} не зависит от свойств материала и представляется через тензор начальных напряжений \underline{T} и симметричный $\underline{\epsilon}$ и кососимметричный $\underline{\Omega}$ тензоры деформации:

$$\underline{U} = 1/2[\underline{T} \cdot \underline{\epsilon} - \underline{\epsilon} \cdot \underline{T}] - \underline{T} \cdot \underline{\Omega}. \quad (3)$$

Тензор \underline{P} не зависит от начальных напряжений и в случае малых начальных деформаций имеет вид $(\lambda, \mu$ — параметры Ламе, \underline{E} — единичный тензор):

$$\underline{P}(\underline{\epsilon}) = \lambda(x_3) \text{tr}(\underline{\epsilon}) \cdot \underline{E} + 2\mu(x_3)\underline{\epsilon}. \quad (4)$$

В последующих работах [18, 19] в постановке краевой задачи для среды с неоднородными начальными напряжениями использовалось более общее представление тензора $\underline{\Theta}$.

2. Решение краевой задачи (1), (2) имеет вид $(\alpha, \beta$ — параметры преобразования Фурье по переменным x_1, x_2)

$$\underline{u}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\Omega} \underline{k}(x_1 - \xi, x_2 - \eta, x_3, \omega) \underline{q}(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (5)$$

$$\underline{k}(s, t, x_3, \omega) = \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \underline{K}(\alpha, \beta, x_3, \omega) e^{-i(\alpha s + \beta t)} d\alpha d\beta. \quad (6)$$

Контуры Γ_1 и Γ_2 выбираются в соответствии с принципом предельного поглощения [28] и поведением $K_{ij}(\alpha, \beta, x_3, \omega)$ — элементов матрицы-функции $\underline{K}(\alpha, \beta, x_3, \omega)$ на вещественной оси. Полагая в выражении (5) $x_3 = x_{30}$, получаем систему интегральных уравнений относительно неизвестной функции распределения контактных напряжений $q(x_1, x_2)$. При этом $\underline{u}(x_1, x_2, x_{30}) = \underline{f}(x_1, x_2)$ — заданная амплитуда перемещений подошвы штампа.

В работах [1–5, 24, 25, 37, 38] проводилось численное исследование ряда конкретных задач, которые сводились к решению интегральных уравнений вида

$$u_i(x, x_{30}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 k_{ij}(x - \xi) q_j(\xi) d\xi = f(x), \quad |x| \leq 1, \quad (7)$$

$$k_{ij}(t) = \int_{\Gamma} K_{ij}(u) e^{iut} du. \quad (8)$$

Представление $K_{ij}(\alpha, \beta, x_{30}, \omega)$ для различных задач и произвольного однородного напряженного состояния, когда начальное напряженное состояние задается условием (σ_{ii}^0 — компоненты тензора начальных напряжений \underline{T}) $\sigma_{11}^0 \neq \sigma_{22}^0 \neq \sigma_{33}^0$, приводится в работах [21–24]. При $u \rightarrow \infty (u^2 = \alpha^2 + \beta^2)$ функции $K_{ij}(\alpha, \beta, x_{30}, \omega)$ обладают асимптотикой вида

$$K_{ij} = u^{-1} C_{ij}(\gamma) [1 + O(u^{-2})], \quad \alpha = u \cos \gamma, \quad \beta = u \sin \gamma.$$

Их свойства определяются как типом рассматриваемой области, так и видом начального напряженного состояния.

В случае колебаний штампа на поверхности однородного или неоднородного полупространства функции K_{ij} имеют от одной до трех пар точек ветвления на вещественной оси и являются аналитическими в комплексной плоскости с разрезами, проведенными в первом и третьем квадрантах от точек ветвления до бесконечно удаленных точек [6, 28].

В случае колебаний штампа на поверхности преднапряженного слоя, функции K_{ij} являются аналитическими в комплексной плоскости и имеют на вещественной оси конечное, зависящее от частоты, количество нулей и полюсов. В достаточно широких пределах изменения величины начальной деформации наблюдается строгое чередование нулей и полюсов за исключением особых областей [2, 24, 26, 37, 38], где имеются двукратные полюсы функции $K_{ij}(\alpha, \beta, x_{30}, \omega)$.

Детальное исследование влияния начальной деформации на полюсы функции $K_{ij}(\alpha, \beta, x_{30}, \omega)$ и связанные с ними фазовые скорости рэлеевских волн в частном случае $\sigma_{11}^0 = \sigma_{22}^0$ проведено в [38]. В общем случае ($\sigma_{11}^0 \neq \sigma_{22}^0 \neq \sigma_{33}^0$) влияние начальной деформации носит более сложный характер. Детальное исследование дисперсионных свойств в общем случае проведено в [24].

Представление о влиянии начальной деформации на дисперсионные поверхности, имеющие в отсутствие начальных напряжений вид тел вращения, можно получить (как показано в [24]) из рис. 1 и рис. 2, на которых изображены кривые сечений дисперсионных поверхностей плоскостями $\kappa_2 = 2, 80, 2, 81, 2, 82$ и $2, 83$ (кривые 0, 1, 2 и 3 на рис. 1) при растяжении вдоль оси x_1 и плоскостями $\kappa_2 = 2, 84, 2, 85, 2, 854$ и $2, 86$ (кривые 0, 1, 2 и 3 на рис. 2) при сжатии вдоль оси x_1 . В силу симметрии кривых, на рисунках даны их изображения, расположенные в первой четверти. Видно, что дисперсионные поверхности деформируются как за счет растяжения или сжатия в плоскости $\kappa_2 = \text{const}$, так и за счет сдвига точек, их образующих, в сторону низких или высоких частот. Деформация происходит неравномерно: сильнее по оси, соосной направлению действия напряжений (на рис. 1, 2 $\gamma = 0$), слабее в перпендикулярном направлении ($\gamma = \pi/2$). В ре-

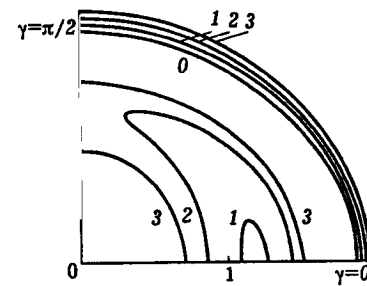


Рис. 1

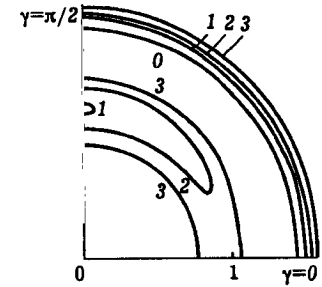


Рис. 2

зультате на дисперсионной поверхности образуется локальный минимум на оси α (растяжение) или на оси β (сжатие), что обуславливает более раннее или более позднее зарождение второй моды в окрестности оси α .

3. Центральным моментом при исследовании динамических задач для преднапряженных тел является точный учет влияния начальных напряжений на динамические свойства этих задач. Одним из наиболее эффективных в этом плане методов является метод факторизации [6, 28]. Это обстоятельство определило выбор этого метода в работах [1–5, 37, 38] для решения интегральных уравнений типа (7).

Функция $K_{33}(\alpha)$ аппроксимируется функцией $K^*(\alpha) = K_+(\alpha) \cdot K_-(\alpha)$

$$K_{\pm}(\alpha) = c^{1/2} (B \pm i\alpha)^{-1/2} \prod_{k=1}^N (\alpha \pm z_k) (\alpha \pm \gamma_k)^{-1}, \quad (9)$$

где $B \gg 1$ — параметр аппроксимации, z_k ($k = 1, \dots, m$) — нули, γ_k ($k = 1, \dots, n$) — полюсы функции $K_{33}(\alpha)$, остальные z_k ($k = m + 1, \dots, N$), γ_k ($k = n + 1, \dots, N$) — выбираются из условия наилучшего совпадения $K^*(\alpha)$ и $K_{33}(\alpha)$ на вещественной оси.

Решение интегрального уравнения в случае $f(x) = \exp(i\eta x)$ и аппроксимирующей функции (9) имеет вид [28]

$$q_{\eta}(x) = -\frac{e^{i\eta x}}{K(\eta)} + q_{\eta}^+(a+x) + q_{\eta}^-(a-x) + O(e^{-2Ba}), \quad (10)$$

$$q_{\eta}^{\pm}(t) = \frac{e^{-Bt}}{\sqrt{\pi t}} A^{\pm} + \frac{e^{\pm i\eta(t-a)}}{K(\eta)} \Phi(1, B, \pm\eta, t) + \sum_{k=1}^N \left[B_k^{\pm} e^{iz_k t} \Phi(1, B, z_k, t) + \frac{i b_k^{\pm} e^{-iz_k t}}{2 K_+(z_k)} (1 - \Phi(1, B, -z_k, t)) \right]. \quad (11)$$

Здесь $\Phi(\alpha, B, z, t) = \text{erf} \sqrt{\alpha(B + iz)t}$, участвующие в (11) коэффициенты $A^{\pm}, B_k^{\pm}, b_k^{\pm}$, зависят от вида и величины начальной деформации. Их представление для различных задач можно найти в [24, 28, 38, 39].

Формулы (10), (11) позволяют исследовать волновое поле под штампом при произвольной форме его основания. В случае штампа с плоским основанием в (10), (11) необходимо положить $\eta = 0$. В [1–5, 25, 29, 37–40] на основе использования формул (10), (11) было проведено исследование влияния начальной деформации на волновое поле как под штампом, так и на поверхности среды в ряде задач для слоя, полупространства, неоднородного полупространства, цилиндра. Исследование позволило установить, что для указанных выше задач характерно наличие на поверхности тел как зон, достаточно чувствительных к изменению начального напряженного состояния, так и зон, где это изменение не ощутимо.

4. Изложенный выше метод, эффективный при исследовании задач для областей типа слоя, пакета слоев, цилиндра не учитывает наличия точек ветвления на вещественной оси, что приводит к потере его эффективности при исследовании задач для областей типа полупространства и слоистого полупространства. В работе [20] было предложено обобщение метода факторизации на класс интегральных уравнений вида (7), символы ядер которых имеют пару точек ветвления на вещественной оси, и построено следующее решение:

$$q_\eta(x) = -\frac{e^{i\eta x}}{K(\eta)} + S^+(\eta, a-x) + S^-(\eta, a+x) + O(e^{-2z_N a}), \quad (12)$$

$$S^\pm(\eta, t) = \frac{e^{ixt}}{\sqrt{\pi t}} R^\pm + \frac{e^{\pm i\eta(a-t)}}{K(\eta)} \Phi(1, -ix, \mp\eta, t) + \frac{i}{2} \sum_{k=1}^N \frac{e^{-iz_k t}}{K_+(z_k)} P_k^\pm(t). \quad (13)$$

Здесь $z_k = \kappa + it_k$ ($k = 1, 2, \dots, N$) — точки, располагающиеся на берегах разреза $[\kappa, \kappa + i\infty]$. Принцип их выбора, а также вид коэффициентов R^\pm и функций $P_k^\pm(t)$ приведен в [20]. Из формул (12) и (13) видно, что при особенности на краях штампа стоит осциллирующий множитель, связанный с точкой ветвления. Механический смысл такой осцилляции заключается в том, что от краев штампа движется по одной медленно (степенным образом) затухающей волне. Скорость ее равна скорости сдвиговой волны в преднапряженной среде. В [20] показано, что на свободной поверхности от краев штампа также движется по одной медленно затухающей волне, имеющей скорость сдвиговой волны в преднапряженной среде. Остальные волны как под штампом, так и на свободной поверхности затухают экспоненциальным образом.

В работе [21] метод факторизации обобщен на класс интегральных уравнений вида (7), символы ядер которых имеют две пары точек ветвления на вещественной оси. Существенным моментом явилось использование специальной аппроксимации [27]. Решение имеет вид

$$q_\eta(x) = -\frac{e^{i\eta x}}{K(\eta)} + q^+(x) + q^-(x) + O(e^{-2z_N a}), \quad (14)$$

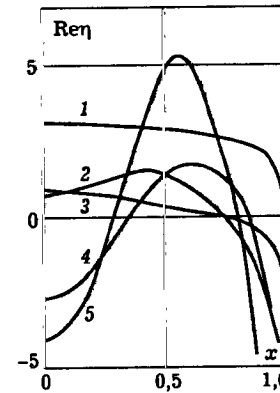


Рис. 3

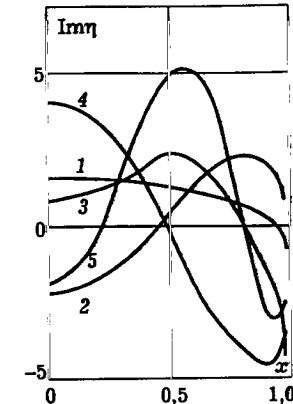


Рис. 4

$$q^\pm(x) = \sum_{n=1}^2 \left[G_{0n}^\pm \frac{e^{ix_n(a \mp x)}}{\sqrt{\pi(a \mp x)}} + \sum_{m=1}^3 q_{mn}^\pm(x) + \sum_{k=1}^{N+M} P_{kn}^\pm(x) \right]. \quad (15)$$

Здесь $z_k = \kappa_1 + it_k$, $k = 1, 2, \dots, N$ — узлы по берегам разреза $[-\kappa_1, -\kappa_1 - i\infty]$, $z_k = \kappa_2 + it_k$, $k = N+1, \dots, N+M$ — узлы по берегам разреза $[-\kappa_2, -\kappa_2 - i\infty]$. G_{0n}^\pm — коэффициенты, $q_{mn}^\pm(x)$, $P_{kn}^\pm(x)$ — функции, представление которых можно найти в [21]. Достоинством этого решения является то, что оно учитывает не только полюс Релея, но и две пары вещественных точек ветвления. Структура формул (14), (15) в явном виде представляет осциллирующий, связанный с двумя парами точек ветвления, характер особенностей у краев штампа. От каждого края штампа движется по паре медленно (степенным образом) затухающих волн со скоростями равными скоростям продольных и поперечных волн в преднапряженной среде. На свободной поверхности по обе стороны от штампа, наряду с релеевскими незатухающими, существуют две пары медленно затухающих волн [21], движущихся от его краев и имеющих скорости продольных и поперечных волн преднапряженной среды. Остальные волны как под штампом, так и на свободной поверхности быстро (экспоненциальным образом) затухают.

Формулы (12)–(15) позволяют наглядно представить структуру и особенности волнового поля при контактом взаимодействии штампа с преднапряженной средой. Некоторые закономерности влияния начальной деформации на волновой процесс под штампом иллюстрируются рис. 3–6.

На рис. 3, 4 приведены графики функций $\text{Re} \eta(x)$ (рис. 3) и $\text{Im} \eta(x)$ (рис. 4) в зависимости от частоты, где $\eta(x) = [q^0(x) - q(x)]10^3$ — изменение контактных напряжений. Кривые 1 — 5 соответствуют возрастающим значениям частоты κ_2 при фиксированной начальной деформации. Из графиков следует, что на низких частотах влияние начальной деформации имеет монотонный характер во всей области контакта. По мере увеличения ча-

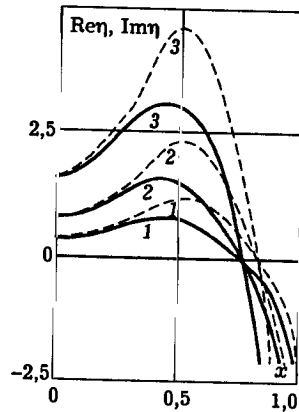


Рис. 5

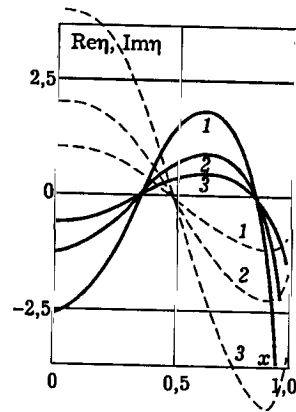


Рис. 6

стоты характер влияния усложняется, появляется осцилляция, усиливающаяся с ростом частоты.

На рис. 5, 6 приведены графики функций $Re \eta(x)$ (сплошные кривые) и $Im \eta(x)$ (штриховые кривые) в зависимости от величины начальных напряжений при фиксированных значениях частоты. Кривые 1, 2, 3 соответствуют возрастающим значениям начальных напряжений. На рис. 5 — более низкое, а на рис. 6 — более высокое значение частоты. Видно, что под штампом имеются точки, в которых влияние начальной деформации отсутствует, равно как и точки, в которых это влияние максимально. С ростом частоты количество этих точек увеличивается.

5. Исследование влияния начальной деформации на распределение контактных напряжений под штампом имеет определенный дефект, связанный с недостаточно обоснованным использованием линеаризации в окрестности краев штампа, где контактные напряжения имеют особенность. Аналогичная ситуация имеет место в линейных контактных задачах. Представляется более целесообразным проводить исследование связи начально-деформированного состояния с интегральными характеристиками задачи: реакцией среды, смещением и поворотом штампа и т.д.

Впервые исследование влияния начальной деформации на реакцию среды проведено в [20]. В этой работе построено выражение для амплитудного значения реактивной силы в случае сдвиговых колебаний плоского штампа на поверхности полупространства. При использовании обозначений в смысле (12), (13), оно имеет вид

$$P = 2i\kappa + (1 - 4i\kappa)\Phi(2a, -i\kappa, 0, 1) + \frac{2\sqrt{-2i\kappa}}{\sqrt{\pi}} e^{2i\kappa} + P_{01}(z_k, \kappa), \quad (16)$$

где функция P_{01} [20] представляется в виде суммы осциллирующих, экспоненциально затухающих элементов.

В [21] с использованием обозначений в смысле выражений (14)–(15) построена формула, определяющая амплитудное значение реактивной силы в случае вертикальных колебаний плоского штампа на поверхности полупространства, которая имеет вид

$$P = P_1 + P_2, \quad P_n = 2P_{00n} + 2P_{0n} + 2P_{1n}, \quad (17)$$

$$P_{00n} = -\frac{1}{K(0)} + \Phi_n(0) \left[G_{0n} + 2 \left(1 + \frac{1}{4i\kappa} \right) G_{1n} \right] + iG_{1n} \frac{\sqrt{2}}{\kappa_n \sqrt{\pi}} e^{2i\kappa_n}, \quad (18)$$

$$\Phi_n(x) = e^{-ix} \operatorname{erf} \sqrt{-2i(\kappa_n + x)} \left[-i(\kappa_n + x) \right]^{-1/2}, \quad n = 1, 2; \quad (19)$$

где функции P_{0n}, P_{1n} [21] представляется в виде суммы осциллирующих, экспоненциально затухающих элементов.

Формулы (16)–(18) построены безотносительно к виду начального напряженного состояния, а также к свойствам материала среды. Их структура позволяет наглядно представить особенности влияния того или иного вида начальной деформации на реакцию среды.

В качестве примера рассмотрим особенности влияния НДС на реакцию среды при сдвиговых колебаниях штампа. С этой целью представим реакцию среды P (16) в виде

$$P = P_0 + P_1 \sigma_{ii}^{*0} + O(\sigma_{ii}^{*02}), \quad P_1 = \left. \frac{\partial P}{\partial \sigma_{ii}^{*0}} \right|_{\sigma_{ii}^{*0}=0}. \quad (20)$$

В данном случае P_1 можно представить следующим образом:

$$P_1 = G \cdot \left. \frac{\partial \kappa}{\partial \sigma_{ii}^{*0}} \right|_{\sigma_{ii}^{*0}=0}, \quad G = \left. \frac{\partial P}{\partial \kappa} \right|_{\kappa=\kappa^0}, \quad \kappa^0 = \kappa \Big|_{\sigma_{ii}^{*0}=0}. \quad (21)$$

Из выражения (20) нетрудно получить представление для функции $G = Ae^{i\kappa^0} + f(\kappa^0)$, из которого следует, что G имеет осциллирующий характер и не зависит от начальных напряжений. Влияние НДС определяется лишь зависимостью безразмерной частоты от начальных напряжений.

В случае вертикальных колебаний влияние НДС на реакцию среды усложняется в связи с наличием двух типов волн. Участвующая в представлении (20) реакции среды функция P_1 имеет вид

$$P_1 = \sum_{k=1}^2 G_k \cdot \left. \frac{\partial \kappa_k}{\partial \sigma_{ii}^{*0}} \right|_{\sigma_{ii}^{*0}=0}, \quad G_k = \left. \frac{\partial P}{\partial \kappa} \right|_{\kappa_k=\kappa_k^0}, \quad \kappa_k^0 = \kappa_k \Big|_{\sigma_{ii}^{*0}=0}. \quad (22)$$

Исходя из (20) с учетом выражения (22), нетрудно получить представление функций $G_k = A_k e^{i\kappa_k^0} + f_k(\kappa_1^0, \kappa_2^0)$, $k = 1, 2$, из которого следует, что G_1 и G_2 также являются осциллирующими и не зависят от начальных напряжений. Влияние начальной деформации на функцию P_1 определяется поведением κ_1 и κ_2 , в частности, их зависимостью от начальных напряжений [21].

На основе использования представления (20) с учетом выражений (17), (18) в работе [21] выявлены перечисленные ниже закономерности влияния НДС на динамику массивного штампа, осциллирующего на поверхности полупространства.

1) Влияние НДС носит резонансный характер и определяется частотами κ^\pm и κ^0 . На частотах κ^\pm его влияние на амплитуду A^\pm колебаний массивного штампа максимально, а на частотах κ^0 — минимально (изменяется только фаза колебаний штампа). Изменение величины начального напряжения не влияет на κ^\pm и κ^0 , изменяется лишь A^\pm .

2) Увеличение массы штампа (при фиксированной деформации) приводит к уменьшению значений κ^\pm и κ^0 и увеличению значения A^\pm . Уменьшение массы приводит к обратному результату.

3) При конкретном виде напряженного состояния изменение амплитуды и фазы колебаний массивного штампа (при фиксированной массе) прямо пропорционально величине начальных напряжений.

4) Масса штампа оказывает значительное влияние на чувствительность амплитудных и фазовых характеристик колебаний штампа к изменению вида и величины начального напряженного состояния (увеличение массы повышает чувствительность амплитуды и фазы колебаний штампа).

6. В работе [24] построено более общее выражение для реакции среды, представляющей собой слой, пакет слоев, цилиндр и т.п., с высокой точностью учитывающее динамические свойства задачи. Амплитудное значение реактивной силы, действующей на штамп со стороны среды (используются обозначения из выражений (10), (11) и аппроксимации (9)), имеет вид

$$P_\eta = \int_{-a}^a q_\eta(x) dx = P_{0\eta} + P_{1\eta}^+ + P_{1\eta}^- + P_{2\eta}^+ + P_{2\eta}^-, \quad (23)$$

$$P_{0\eta} = -\frac{2 \sin \eta}{\eta K(\eta)}, \quad P_{1\eta}^\pm = S_{0\eta}^\pm \Phi(2a, B, 0, 1) + S_\eta^\pm \Phi(2a, B, \pm \eta, 1), \quad (24)$$

$$P_{2\eta}^\pm = \sum_{k=1}^{n+N} \left[S_{1k}^\pm \Phi(2a, B, z_k, 1) + S_{2k}^\pm \Phi(2a, B, -z_k, 1) + S_{0k}^\pm \right]. \quad (25)$$

Представление участвующих в (23)–(25) коэффициентов $S_{0\eta}^\pm$, S_η^\pm и S_{nk}^\pm приведено в [24]. Из (23)–(25) видно, что исследование влияния начальной деформации на динамическую составляющую (25) требует проведения численного анализа, поскольку z_k ($k = 1, 2, \dots, m$) — нули символа ядра интегрального уравнения (7) определяются численно.

В работе [24] при исследовании вертикальных поступательных колебаний массивного штампа на поверхности слоя установлено, что поведение штампа имеет ярко выраженный резонансный характер, причем различный для разных диапазонов частот.

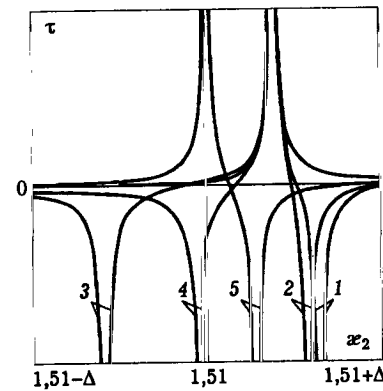


Рис. 7

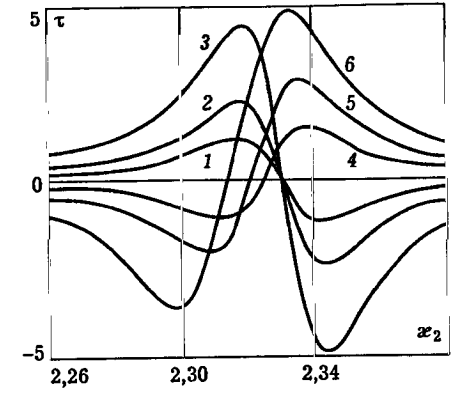


Рис. 8

В низкочастотном диапазоне ($\kappa < \kappa^*$ — критической частоты или частоты запирания слоя) существует возможность возникновения бесконечного (так называемого «изолированного») резонанса [28].

Особенность влияния начальной деформации на амплитуду колебаний массивного штампа в низкочастотном диапазоне иллюстрируется графиками на рис. 7. Здесь приведены кривые $\tau = |w_0| - |w^*|$ (w_0 и w^* — амплитуды колебаний штампа в ЕС и НДС, соответственно) для различных НДС. Линии 1 — 3 соответствуют деформации вдоль осей x_1 , x_2 , x_3 , линия 4 соответствует уменьшенной в два раза деформации вдоль оси x_3 , кривая 5 соответствует увеличенной массе тела при деформации вдоль оси x_1 . Видно, что каждая кривая состоит из двух резонансных пиков, один из которых определяется свойствами среды и массой штампа (верхний пик кривых 1 — 4 и кривой 5). Центральная частота нижнего пика определяется видом (кривые 1, 2, 3) и величиной (кривые 3, 4) начальной деформации. Из графиков следует, что в низкочастотном диапазоне любое изменение НДС влияет на амплитуду колебаний штампа, причем максимальное влияние оказывает деформация вдоль оси x_3 .

В диапазоне $[\kappa^*, \kappa_{2,1}]$ ($\kappa_{2,1}$ — первая собственная частота колебаний слоя) реакция среды является комплексной, с положительной вещественной частью. Это обуславливает появление ограниченных резонансов III рода [28]. Особенность влияния начальной деформации на амплитуду колебаний массивного штампа в этом диапазоне иллюстрируется графиками на рис. 8, где приведены кривые τ для различных НДС. Линии 1 и 4 соответствуют начальной деформации вдоль осей x_1 и x_3 , линии 2 (3) и 5 (6) отвечают увеличенной в 2 (4) раза деформации вдоль осей x_1 и x_3 , соответственно. Из графиков следует, что в рассматриваемом диапазоне частот изменение НДС также приводит к определенному изменению динамики массивного штампа. Однако, в отличие от рассмотренного выше докритиче-

ческого диапазона, при деформации вдоль оси x_1 существует частота, на которой амплитуда колебаний штампа не зависит от величины начальной деформации. При деформации вдоль оси x_3 такая частота отсутствует.

Аналогичным образом в работах Т. И. Белянковой, И. А. Зайцевой, В. В. Калининчука, Ю. Е. Пузанова [18, 19, 24, 26] исследовалось влияние неоднородной начальной деформации на динамику массивных тел и инерционных систем, взаимодействующих с неоднородными преднапряженными средами, а также на возникающие при этом резонансные явления, и установлен ряд закономерностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ананьев И. В., Бабешко В. А.* Колебания штампа на слое с переменными по глубине характеристиками // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 1. С. 64–69.
2. *Ананьев И. В., Калининчук В. В., Полякова И. Б.* Динамические контактные задачи для слоя с неоднородными начальными напряжениями // Тез. докл. 2-й Всес. конф. «Смешанные задачи механики деформ. твердого тела». Днепропетровск: Изд-во ДГУ, 1981. С. 120.
3. *Ананьев И. В., Калининчук В. В., Полякова И. Б.* Изучение особенностей колебания предварительно напряженных сред под действием осциллирующей нагрузки // Тез. докл. Всес. конф. «Динамика оснований, фундаментов и подземных сооружений». Ташкент. 1981. С. 37.
4. *Ананьев И. В., Калининчук В. В., Полякова И. Б.* Динамические контактные задачи для сред с неоднородными начальными напряжениями и переменными по глубине свойствами. М., 1982. 23 с.—Деп. в ВИНТИ 10.05.1982. № 2321-82.
5. *Ананьев И. В., Калининчук В. В., Полякова И. Б.* О возбуждении волн вибрирующим штампом в среде с неоднородными начальными напряжениями // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 3. С. 483–489.
6. *Бабешко В. А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.
7. *Бабешко В. А., Калининчук В. В.* Динамические контактные задачи для предварительно напряженного слоя из несжимаемого материала. М., 1985. 34 с.—Деп. в ВИНТИ. 26.06.85. № 5538-85.
8. *Бабешко В. А., Калининчук В. В., Малахова О. А.* О вибрации штампа на поверхности предварительно напряженного слоя. М., 1985. 21 с.—Деп. в ВИНТИ. 24.06.85. № 4436-85.
9. *Бабич С. Ю.* О динамических контактных задачах для полуплоскости с начальными напряжениями // Прикл. мех. 1982. Т. 18. № 2. С. 68–73.
10. *Бабич С. Ю.* К вопросу динамической контактной задачи для полуплоскости с начальными напряжениями // Прикл. мех. 1987. Т. 23. № 4. С. 39–43.
11. *Бабич С. Ю., Глухов Ю. П., Гузь А. Н.* Динамика слоистого сжимаемого предварительно напряженного полупространства при воздействии подвижной нагрузки // Прикл. мех. 1986. Т. 22. № 9. С. 8–15.
12. *Бабич С. Ю., Глухов Ю. П., Гузь А. Н.* К решению задачи о воздействии подвижной нагрузки на двухслойное полупространство с начальными напряжениями // Прикл. мех. 1988. Т. 24. № 8. С. 55–60.
13. *Бабич С. Ю., Гузь А. Н.* Динамические контактные задачи для полуплоскости с начальными напряжениями / Тез. докл. 2-й Всес. конф. «Смешанные задачи механики деформ. твердого тела». Днепропетровск: Изд-во ДГУ, 1981. С. 121.

14. *Бабич С. Ю., Гузь А. Н.* Комплексные потенциалы плоских динамических задач для упругих несжимаемых тел с начальными напряжениями // Докл. АН УССР. Сер. А. 1981. № 11. С. 41–45.
15. *Бабич С. Ю., Гузь А. Н.* Комплексные потенциалы плоской динамической задачи для сжимаемых упругих тел с начальными напряжениями // Прикл. мех. 1981. Т. 17. № 7. С. 75–83.
16. *Бабич С. Ю., Гузь А. Н.* Плоские динамические задачи для упругих несжимаемых тел с начальными напряжениями // Прикл. мех. 1982. Т. 46. № 2. С. 263–271.
17. *Бабич С. Ю., Гузь А. Н., Рудницкий В. Б.* Контактные задачи для упругих тел с начальными напряжениями (жесткие штампы) // Прикл. мех. 1989. Т. 25. № 8. С. 3–18.
18. *Белянкова Т. И.* Взаимодействие массивных тел и инерционных систем с преднапряженными средами // Тр. 2-й Междунар. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды». Ростов-на-Дону: МП «Книга», 1996. Т. 3. С. 19–23.
19. *Белянкова Т. И., Зайцева И. А., Пузанов Ю. Е.* Влияние неоднородности среды на динамику массивных тел // Тр. 3-й Междунар. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды». Ростов-на-Дону: МП «Книга», 1997. С. 50–54.
20. *Белянкова Т. И., Калининчук В. В.* О сдвиговых колебаниях штампа на поверхности предварительно напряженного полупространства // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 2. С. 313–320.
21. *Белянкова Т. И., Калининчук В. В.* О взаимодействии осциллирующего штампа с предварительно напряженным полупространством // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 4. С. 123–134.
22. *Белянкова Т. И., Калининчук В. В.* Некоторые закономерности взаимодействия упругой инерционной системы с предварительно напряженным полупространством // Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемых сред и конструкций. Нижний Новгород: НГУ, РГУ, 1993. Вып. 1. С. 78–87.
23. *Белянкова Т. И., Калининчук В. В.* Динамика массивного тела, взаимодействующего с предварительно напряженным полупространством // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 6. С. 83–94.
24. *Белянкова Т. И., Калининчук В. В.* Динамика массивного тела, взаимодействующего с предварительно напряженным слоем // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 2. С. 89–101.
25. *Белянкова Т. И., Калининчук В. В., Полякова И. Б.* Динамические контактные задачи для начально-деформированных упругих тел // Тез. 6-го Всес. съезда по теор. и приклад. механике. Ташкент. 1986. С. 97.
26. *Белянкова Т. И., Пузанов Ю. Е.* Некоторые динамические свойства неоднородных преднапряженных сред // Тр. 2-й Междунар. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды». Ростов-на-Дону: МП «Книга», 1996. Т. 3. С. 12–16.
27. *Боев С. И., Сумбатян М. А.* Динамическая контактная задача для упругой полуплоскости при высоких частотах колебания // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 6. С. 1039–1043.
28. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
29. *Гриценко С. И., Калининчук В. В., Полякова И. Б.* О возбуждении предварительно напряженного полупространства вибрирующим штампом // Изв. СКНЦ ВШ. Сер. естеств. науки. № 4. 1976. С. 108.

30. Гузь А. Н. Движущиеся трещины в упругих телах с начальными напряжениями // Прикл. мех. 1982. Т. 18. № 2. С. 60–67.
31. Гузь А. Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. Киев: Наукова думка, 1986. Т. 1. 376 с. Т. 2. 536 с.
32. Гузь А. Н., Бабич С. Ю. О плоских динамических задачах для упругих тел с начальными напряжениями // Докл. АН СССР. 1981. Т. 261. № 2. С. 313–316.
33. Гузь А. Н., Бабич С. Ю. Плоские динамические задачи для упругих несжимаемых тел с начальными напряжениями // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 2. С. 263–271.
34. Гузь А. Н., Бабич С. Ю., Рудницкий В. Б. Контактное взаимодействие упругих тел с начальными напряжениями. Киев: Вища школа, 1995. 304 с.
35. Гузь А. Н., Зозуля В. В. Проблемы динамической механики разрушения с учетом контакта берегов трещин // Прикл. мех. 1995. Т. 31. № 1. С. 3–36.
36. Зубов Л. М. Теория малых деформаций предварительно напряженных оболочек // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 1. С. 85–95.
37. Калинчук В. В., Лысенко И. В., Полякова И. Б. Об особенностях взаимодействия колеблющегося штампа с неоднородным тяжелым основанием // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 2. С. 301–308.
38. Калинчук В. В., Полякова И. Б. О возбуждении волн в слое с начальными напряжениями // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 2. С. 320–326.
39. Калинчук В. В., Полякова И. Б. О возбуждении преднапряженного цилиндра // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 2. С. 384–389.
40. Калинчук В. В., Полякова И. Б. О вибрации штампа на поверхности предварительно напряженного полупространства // Прикл. мех. 1982. Т. 18. Вып. 6. С. 22–27.
41. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
42. Ляв А. Математическая теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.

§ 3. ДИНАМИЧЕСКИЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

А. О. Ватульян

1. В связи с внедрением в практику (строительство, машиностроение, микроэлектронику) конструктивных элементов, для адекватного описания поведения которых недостаточно модели изотропной упругой среды, в последние годы возрос интерес к изучению класса задач о колебаниях анизотропных упругих тел, среди которых контактные задачи занимают центральное место. Особенно важны задачи такого плана в геофизике, при сооружении фундаментов и в расчетах на прочность конструкций из композиционных материалов в рамках концепции эффективных модулей. Отметим, что получение решений задач в анизотропной теории упругости значительно сложнее, чем в соответствующих изотропных задачах из-за отсутствия общих представлений полей смещений и напряжений, невозможности разделения в общем случае волновых полей на продольные и поперечные.

Развитие анизотропной теории упругости, в целом, связано с основополагающими монографиями С. Г. Лехницкого [15], Г. И. Петрашени [19], В. С. Саркисяна [20], А. С. Космодамианского и В. И. Сторожева [14]. Специфика уравнений анизотропной теории упругости (отсутствие сферической симметрии у соответствующего оператора) делает весьма сложной проблему построения решений даже в относительно простых задачах для канонических областей.

Ряд смешанных задач о колебаниях анизотропной полуплоскости был исследован в работах В. А. Свекло [21, 22] на основе обобщения метода функционально-инвариантных решений. Изучению свойств решения для ортотропной полуплоскости посвящены работы В. С. Будаева [6, 7]. Значительный вклад в развитие методов решения динамических задач для анизотропных сред внесли Р.Барридж и Дж.Виллис [25, 26], причем метод Виллиса решения автотомельных задач анизотропной теории упругости позволил получить решение ряда важных контактных задач, например, задачи о внедрении клиновидного штампа в анизотропную полуплоскость. В то же время отметим, что в случае установившихся колебаний исследования подобных задач оказывается значительно более сложным.

Новый этап в изучении динамических контактных задач для полугораниченных анизотропных тел связан с исследованиями И. И. Воровича и В. А. Бабешко [13]. И. И. Воровичем дана общая постановка динамических контактных задач для анизотропных сред, доказаны теоремы о существовании обобщенных решений. В. А. Бабешко разработаны методы исследования широкого класса динамических контактных задач для полугораниченных сред, в том числе и для анизотропных, в основе которых лежит метод факторизации функций и матриц-функций. Как правило,

краевая задача сводилась к интегральному уравнению или системе с разностными ядрами. На основе подходов, разработанных в монографии [13], был решен ряд краевых задач для анизотропных полуограниченных тел. А. О. Ватульяном [8] исследована контактная задача для ортотропного слоя при наличии сцепления в области контакта. На основе метода факторизации и фиктивного поглощения А. О. Ватульяном, В. В. Овселяном и О. Д. Пряжиной были изучены контактные задачи для сплошного и полого ортотропного цилиндров [10, 11]. Методы факторизации и фиктивного поглощения (гл. 1) развиты В. А. Бабешко [1, 2] применительно к анализу пространственных динамических контактных задач для анизотропных тел, сформулированы условия «статичности», обеспечивающие отсутствие поверхностных волн. Метод фиктивного поглощения позволяет осуществить приближенный способ расчета контактных напряжений, основанный на сочетании выделения особенности на краю штампа и детальном анализе волновых полей под штампом и вне его.

Развитию метода суперпозиции применительно к изучению контактных задач для тел конечной формы посвящены работы А. В. Белокопия [3, 4]. При помощи метода суперпозиции построены системы интегральных уравнений относительно контактных напряжений для прямоугольника, кругового цилиндра. Решение этих уравнений построены на основе метода Галеркина для различных типов координатных функций, учитывающих особенность на краю штампа. Ряд динамических смешанных задач для анизотропного конечного цилиндра при использовании конечного интегрального преобразования решен Ю. Э. Сеницким [23]. Динамическим контактным задачам для однородной ортотропной полуплоскости и составной плоскости посвящена работа Е. Л. Нахмейна, Б. М. Нуллера [18].

Отметим, что области, для которых изучены динамические контактные задачи для анизотропных тел, — канонические (слой, прямоугольник, конечный и бесконечный цилиндры). Это связано с тем обстоятельством, что главным аппаратом, позволяющим осуществить сведение краевой задачи к интегральным уравнениям, является либо аппарат интегрального преобразования Фурье, либо метод разделения переменных.

2. Совершенно иные возможности при исследовании динамических задач, в том числе и контактных для анизотропных тел, открылись с использованием техники граничных интегральных уравнений (ГИУ) и развитием методов их численного исследования. Метод граничных интегральных уравнений стал одним из наиболее эффективных средств анализа динамических контактных задач для ограниченных и полуограниченных анизотропных тел. Он позволяет снизить размерность исследуемых краевых задач на единицу [5, 24]. Главным препятствием на пути интенсивного использования этого подхода при решении контактных задач является отсутствие явного представления фундаментальных и сингуляр-

ных решений для анизотропных тел даже в частных случаях анизотропии.

Одними из первых исследований в этом направлении были работы Д. Г. Натрошвили [16, 17], где изучены свойства фундаментальных решений в виде кратных интегралов Фурье и обобщенных потенциалов. Однако, возможно построение интегральных представлений в виде однократных интегралов по контуру в комплексной плоскости или по конечному отрезку [9]. Они могут быть эффективно использованы при численной реализации этих интегральных уравнений на основе метода граничных элементов [5]. Так, например, для ортотропной среды в плоской задаче представление фундаментальных решений имеет вид

$$U_j^{(j)}(x, \xi) = \frac{1}{4\pi c_{55}} \int_{\sigma} [\varphi_j(\mu_1)\psi(\mu_1, \xi_3, x_3) - \varphi_j(\mu_2)\psi(\mu_2, \xi_3, x_3)] \times \\ \times \frac{e^{ik\beta(\xi_1 - x_1)}}{\mu_2^2 - \mu_1^2} d\beta; \quad j = 1, 3; \quad (1)$$

$$U_3^{(1)} = U_1^{(3)}(x, \xi) = -\frac{i(\gamma_5 + \gamma_7) \operatorname{sgn}(\xi_3 - x_3)}{4\pi c_{55}} \times$$

$$\times \int_{\sigma} (\psi(\mu_1, \xi_3, x_3) - \psi(\mu_2, \xi_3, x_3)) e^{ik\beta(\xi_1 - x_1)} \frac{\beta}{\mu_2^2 - \mu_1^2} d\beta;$$

$$\varphi_1(\mu) = (\gamma_5\beta^2 - \mu^2 - 1)\mu^{-1}, \quad \varphi_3(\mu) = (\gamma_1\beta^2 - \gamma_5\mu^2 - 1)\mu^{-1},$$

$$\psi(\mu, \xi_3, x_3) = e^{-k\mu|\xi_3 - x_3|}, \quad k = \omega \sqrt{\frac{\rho}{c_{33}}},$$

$$\gamma_1 = \frac{c_{11}}{c_{33}}, \quad \gamma_5 = \frac{c_{55}}{c_{33}}, \quad \gamma_7 = \frac{c_{13}}{c_{33}},$$

где μ_j ($j = 1, 2$) — корни характеристического уравнения для ортотропного материала [12], а контур σ выбирается в соответствии с принципом предельного поглощения [13]. Сингулярные решения $\sigma_{ij}^{(m)}(x, \xi)$ находятся из $U_i^{(m)}(x, \xi)$ в соответствии с законом Гука для ортотропного тела.

В качестве иллюстрации этого подхода рассмотрим задачу об установившихся колебаниях массивного жесткого штампа на поверхности ортотропной упругой среды с полостью произвольной формы. Пусть плоская область S с границей l занята ортотропной упругой средой, совершающей установившиеся гармонические колебания с частотой ω под действием массивного жесткого тела массы m с моментом инерции относительно центра масс J . Внутри S имеется полость S_0 с границей l_0 , которая свободна от напряжений рис. 1. Итак, краевая задача описывается следующей системой дифференциальных уравнений в частных производных 2-го порядка

$$L_{ij}u_j + \rho\omega^2 u_i + f_i = 0; \quad i, j = 1, 3; \quad (2)$$

$$L_{11} = c_{11}\partial_1^2 + c_{55}\partial_3^2, \quad L_{33} = c_{55}\partial_1^2 + c_{33}\partial_3^2,$$

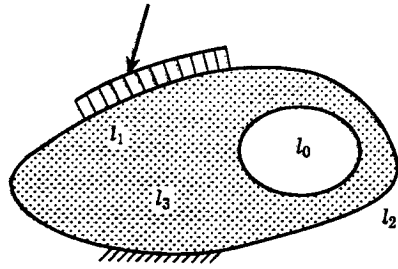


Рис. 1

$$L_{13} = L_{31} = (c_{13} + c_{55})\partial_1\partial_3, \quad \partial_j = \partial/\partial x_j,$$

где c_{ij} — упругие постоянные, ρ — плотность. Граничные условия

$$u_i|_{l_1} = u_{i\varepsilon}, \quad M_{ij}u_j|_{l_2} = 0, \quad u_i|_{l_3} = 0, \quad M_{ij}u_j|_{l_0} = 0, \quad (3)$$

$$M_{11} = c_{11}n_1\partial_1 + c_{55}n_3\partial_3, \quad M_{13} = c_{13}n_1\partial_3 + c_{55}n_3\partial_1,$$

$$M_{31} = c_{55}n_1\partial_3 + c_{13}n_3\partial_1, \quad M_{33} = c_{55}n_1\partial_1 + c_{33}n_3\partial_3,$$

n_j — координаты единичного вектора внешней нормали к соответствующей границе (l_2, l_0); $u_{1\varepsilon} = a_1 + \varphi x_3, u_{3\varepsilon} = a_3 - \varphi x_1$ — смещения точек твердого тела. Для определения a_1, a_3, φ имеем систему

$$m\omega^2 a_i = \int_{l_i} q_i dl_x - P_i \quad i = 1, 3; \quad (4)$$

$$J\omega^2 \varphi = \int_{l_1} (x_3 q_1 - x_1 q_3) dl_x - M;$$

здесь $q_i = \sigma_{ij}n_j$ — компоненты вектора контактных напряжений, P_i ($i = 1, 3$) — компоненты главного вектора нагрузки, приложенной к телу; M — главный момент нагрузки. Для сведения задачи к системе интегральных уравнений используем теорему взаимности. На её основе получены формулы Соммильяны в анизотропной теории упругости для среды с полостью

$$u_m(\xi) = \int_{l_1} [t_i(x)U_i^{(m)}(x, \xi) - u_i(x)T_i^{(m)}(x, \xi)] dl_x + \quad (5)$$

$$+ \int_{l_0} [t_i(x)U_i^{(m)}(x, \xi) - u_i(x)T_i^{(m)}(x, \xi)] dl_x,$$

$$m = 1, 3; \quad \xi \in S \setminus S_0,$$

$T_i^{(m)}(x, \xi) = \sigma_{ij}^{(m)}(x, \xi)n_j, \sigma_{ij}^{(m)}(x, \xi)$ — сингулярные решения; в (5) контур l обходится против часовой стрелки, а l_0 — по часовой стрелке.

Учитывая граничные условия (3), из (5) получаем

$$u_m(\xi) = \int_{l_1 \cup l_3} q_i(x)U_i^{(m)}(x, \xi) dl_x - \int_{l_2} u_i(x)T_i^{(m)}(x, \xi) dl_x - \quad (6)$$

$$- \int_{l_0} u_i(x)T_i^{(m)}(x, \xi) dl_x - \int_{l_1} u_{i\varepsilon}T_i^{(m)}(x, \xi) dl_x, \quad \xi \in S \setminus S_0.$$

Это представление позволяет определять смещения в упругой среде, если известны $u_i|_{l_2}, q_i|_{l_1 \cup l_3}, u_i|_{l_0}$ и a_i, φ . Для их нахождения сформулируем систему интегральных уравнений относительно этих неизвестных. Устремим в (6) $\xi \rightarrow y \in l, l_0$ и используем следующий результат о предельных значениях обобщенных потенциалов.

Пусть l — кусочно-гладкая кривая, u_i удовлетворяют на l условию Гельдера с показателем $0 < \gamma < 1$, а t_i с корневым весом непрерывна на l . Тогда существуют пределы

$$\lim_{\xi \rightarrow y} \int_l t_i(x)U_i^{(m)}(x, \xi) dl_x = \int_l t_i(x)U_i^{(m)}(x, y) dl_x, \quad (7)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow y} \int_l u_i(x)T_i^{(m)}(x, \xi) dl_x = (-\frac{1}{2}\delta_{km} + \alpha_{km})u_k(y) +$$

$$+ \text{v.p.} \int_l u_i(x)T_i^{(m)}(x, y) dl_x.$$

В последнем равенстве интеграл в правой части понимается в смысле главного значения по Коши. Для регулярной точки границы $\alpha_{km} = 0$. Для нерегулярной точки границы α_{km} выражаются в виде интегралов по конечному отрезку. Таким образом, относительно основных неизвестных задачи получим следующую систему ГИУ:

$$\left(\frac{1}{2}\delta_{km} + \alpha_{km}\right)u_k(y) = \int_{l_1 \cup l_3} q_i(x)U_i^{(m)}(x, y) dl_x - \quad (8)$$

$$- \int_{l_2} u_i(x)T_i^{(m)}(x, y) dl_x - \int_{l_0} u_i(x)T_i^{(m)}(x, y) dl_x -$$

$$- \int_{l_1} u_{i\varepsilon}(x)T_i^{(m)}(x, y) dl_x; \quad y \in l, l_0.$$

Система (8) вместе с (4) является разрешающей для сформулированной задачи.

3. Наиболее эффективным методом анализа системы ГИУ (8) является метод граничных элементов, согласно которому границы l_j, l_0 разбиваются на элементы

$$l_1 = \bigcup_{m=1}^{N_1} L_m, \quad l_2 = \bigcup_{m=N_1+1}^{N_2} L_m, \quad l_3 = \bigcup_{m=N_2+1}^{N_3} L_m, \quad l_0 = \bigcup_{m=N_3+1}^{N_4} L_m.$$

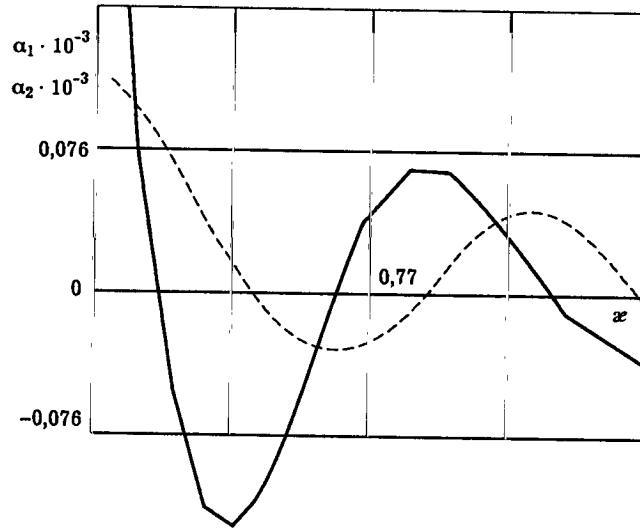


Рис. 2

На каждом из элементов вводится аппроксимация неизвестных функций (постоянная, линейная, квадратичная). В наиболее просто реализуемом варианте и часто используемом случае аппроксимации постоянными элементами

$$u_i|_{L_m} = u_{im}, \quad q_j|_{l_m} = q_{jm} \quad (9)$$

при использовании метода коллокаций система (8) в совокупности с (4) сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно узловых неизвестных u_{im}, q_{jm} и параметров a_j, φ . При этом коэффициенты алгебраической системы могут быть представлены после явного интегрирования по элементу в виде интегралов по контуру σ . Конкретная реализация этого подхода для прямоугольного штампа длины $2a$, заглубленного в ортотропную полуплоскость без полости, приведена в [12]. Отметим, что система интегральных уравнений вида (8) оказывается значительно проще, если вместо фундаментальных решений для плоскости $U_i^{(m)}(x, \xi)$ использовать фундаментальные решения для полуплоскости, удовлетворяющие условию отсутствия напряжений на границе полуплоскости. Коэффициенты алгебраических систем рассчитываются при помощи квадратурных формул Гаусса с 16 узлами; интегрирование осуществляется сразу для всей матрицы системы. Серия расчётов при различных частотах $\kappa = \omega a \sqrt{\frac{\rho}{c_{33}}}$ показала достаточную эффективность метода. Отметим, что для нахождения a_j, φ с погрешностью не выше 5% требовалось 7–15 элементов, однако для стабильного нахождения узловых значений контактных напряжений q_{im} требуется гораздо более мелкие разбиения. На

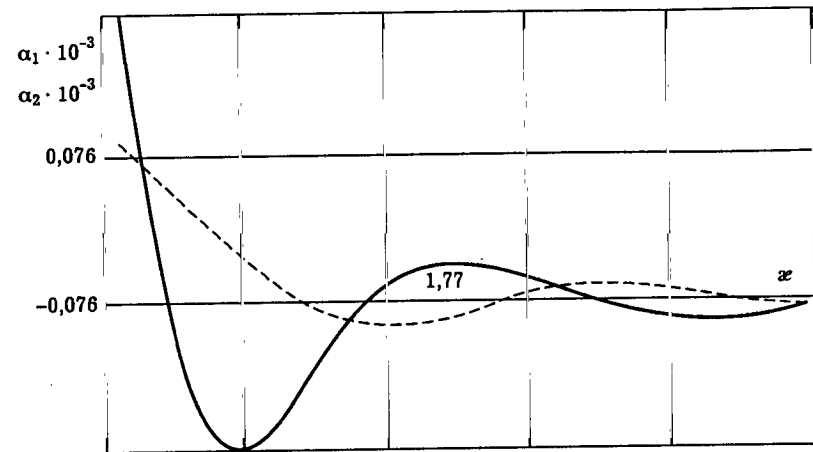


Рис. 3

рис. 2 и рис. 3 приведены зависимости $\alpha_1 = \text{Re } a_3$ (сплошная линия) и $\alpha_2 = \text{Im } a_3$ (штриховая линия от κ) при $h = 0$ (поверхностное расположение плиты) и $h/a = 0,16$, соответственно, при чисто вертикальных колебаниях плиты с $m = 70$ т при действии внутреннего источника. Обратим внимание, что максимум вертикальных смещений плиты в обоих случаях достигается при $\kappa = 0,9$, однако амплитудные значения для поверхностной плиты в 1,7 раза выше, чем для заглубленной.

Отметим, что естественное стремление учитывать реальную структуру контактных напряжений на границе области контакта приводит лишь к усложнению вычислительной процедуры и увеличению затрат машинного времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабешко В. А. К теории пространственных контактных задач для анизотропных сред. // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256. № 2. С. 324–328.
2. Бабешко В. А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 255 с.
3. Белоконь А. В. К теории динамических контактных задач для упругих тел конечных размеров. // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 2. С. 77–84.
4. Белоконь А. В., Маликов Е. П. Метод интегральных уравнений в задачах осесимметричной деформации трансверсально-изотропного цилиндра. // Изв. АН АрмССР. Механика. 1982. Т. 35. № 2. С. 17–26.
5. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
6. Будаев В. С. Об одном классе решений для системы уравнений в частных производных второго порядка динамики упругих анизотропных сред. // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. Вып. 5. С. 127–135.

7. Будаев В. С. Корни характеристического уравнения и классификация упругих анизотропных сред. // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 3. С. 33–40.
8. Ватульян А. О. Контактные задачи со сцеплением для анизотропного слоя. // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 4. С. 727–734.
9. Ватульян А. О., Гусева И. А., Сюнякова И. М. О фундаментальных решениях для ортотропной среды и их применение. // Изв. СКНЦ ВШ. Сер. естеств. науки. 1989. № 2. С. 81–85.
10. Ватульян А. О., Овсепян В. В. О контактной динамической задаче для бесконечного ортотропного двухслойного цилиндра. // Изв. АН АрмССР. Механика. 1986. Т. 39. № 4. С. 3–11.
11. Ватульян А. О., Овсепян В. В., Пряхина О. Д. Контактная динамическая задача для ортотропного цилиндра. // Изв. АН АрмССР. Механика. 1983. Т. 36. № 4. С. 47–55.
12. Ватульян А. О., Сюнякова И. М. О колебаниях массивной заглубленной плиты на поверхности ортотропной среды. // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 3. С. 68–73.
13. Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
14. Космодамианский А. С., Сторожев В. И. Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред. Киев: Наукова думка, 1985. 175 с.
15. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
16. Натрошвили Д. Г. О свойствах фундаментальных решений установившихся колебаний анизотропной упругой среды. // Сообщ. АН ГрузССР. 1981. Т. 104. № 3. С. 557–560.
17. Натрошвили Д. Г., Чкадуа О. О., Шаргородский Е. М. Смешанные задачи для однородных анизотропных упругих сред // Тр. Ин-та прикл. мат. Тбил. ун-та. 1990. Т. 39. С. 133–181.
18. Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М. Динамические контактные задачи для ортотропной упругой полуплоскости и составной плоскости. // ПММ, 1990. Т. 54. Вып. 4. С. 633–641.
19. Петрашень Г. И. Распространение волн в анизотропных упругих средах. Л.: Наука, 1980. 175 с.
20. Саркисян В. С. Некоторые задачи теории упругости анизотропного тела. Ереван: Изд-во Ерев. ун-та, 1976. 536 с.
21. Свекло В. А. К решению динамических задач плоской теории упругости для анизотропного тела. // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 5. С. 885–896.
22. Свекло В. А. Смешанная задача для упругой анизотропной полуплоскости // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 5. С. 896–905.
23. Сеницкий Ю. Э. К решению осесимметричной задачи динамики для анизотропного короткого толстостенного цилиндра. // Прикл. мех. 1981. Т. 17. № 8. С. 95–100.
24. Угодчиков А. Г., Хуторянский Н. М. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1986. 296 с.
25. Burridge R. Lamb's problem for an anisotropic half-space. // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1971. V. 24. No. 1. P. 81–98.
26. Willis J.R. Self-similar problems in elastodynamics. // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1973. V. 274. No. 1240. P. 435–491.

§ 4. ДИНАМИЧЕСКИЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНЫХ СРЕД С ДЕФЕКТАМИ

М. Г. Селезнев

Исследование динамических контактных задач для многослойных сред с расположенными в них дефектами (полостями или упругими включениями) связано с многочисленными трудностями как чисто теоретического, так и практического характера. Это обусловлено тем, что исследуемая область характеризуется большим количеством параметров, которые определяют соотношения упругих и геометрических характеристик слоев, положение полости по отношению к границам раздела сред и поверхности, форму границы неоднородности (полости или включения). Кроме того различные части границ области (границы слоев и неоднородности) описываются в различных системах координат, даже в случае полости (включения) канонической (круговой или эллиптической цилиндр, сфера, эллипсоид) формы. Еще сложнее комплекс проблем в случае неоднородности сложной формы. Указанные факты, по-видимому, определяют весьма ограниченное количество публикаций, посвященных данной проблематике как в отечественной, так и в зарубежной литературе.

Отмеченные сложности определяют также и многообразие подходов к решению задач. Наиболее распространен при их исследовании метод, опирающийся на использование принципа суперпозиции, позволяющего для неоднородности канонической формы, целиком расположенной в одном из слоев структуры, точным образом свести краевую задачу к системе интегро-функциональных уравнений. В случае, когда неоднородность пересекает границу слоя (полупространства), или имеет произвольную форму, наиболее перспективно использование методики граничных интегральных уравнений (ГИУ) и реализующих ее на ЭВМ метода граничных элементов (ГЭ). Использование метода конечного элемента в данной проблематике практически ограничено исследованием задач нестационарного контактного взаимодействия при относительно малых временах и некоторых ограничениях на импульс силового воздействия (его частотный спектр).

Краткое изложение особенностей использования различных методов решения контактных задач для слоистых сред с неоднородностями будем проводить по мере усложнения их постановки и методов решения.

1. Многослойная структура с полостью или упругим включением канонической формы. Рассмотрим случай, когда полость (упругое включение) целиком расположено в одном из элементов многослойной структуры и имеет границу, представляющую собой координатную поверхность в ортогональной криволинейной системе координат (цилиндрической, сферической, эллипсоидальной). В этом случае при исследовании задачи о динамическом воздействии плоского жесткого штампа на поверхность пакета слоев или многослойного полупространства с полостью или включением целесообразно использовать принцип суперпозиции. Это позволяет точным образом свести краевую задачу динамической теории упругости к системе интегро-функциональных уравнений, при решении которой можно использовать, в зависимости от расположения неоднородности, различные методы анализа.

Остановимся подробнее на получении системы интегро-функциональных уравнений контактной задачи. Использование принципа суперпозиции предполагает возможность получения аналитического решения краевой задачи динамической теории упругости с однородными граничными условиями в напряжениях для составляющих многослойную область с каноническим включением элементов. Таковыми являются однородный упругий слой, однородное упругое полупространство, полость в безграничном пространстве и упругое включение, граница которого тождественна границе полости. Решение задач для однородного слоя (полупространства) строится методом интегральных преобразований с использованием принципа предельного поглощения и может быть получено в виде контурного несобственного интеграла [2, 4, 14]. В зависимости от постановки задачи (пространственная, плоская, осесимметричная) получаем контурные интегралы типа обращения преобразования Фурье или Ханкеля [16]. Решение задачи для пространства с полостью, описываемой координатной поверхностью в ортогональной криволинейной системе координат, получаем в виде рядов по специальным функциям (сферическим, цилиндрическим (Ханкеля), эллиптическим (Матье)) [17]. При этом важно корректно удовлетворить условиям излучения, для чего можно использовать принцип излучения. Исключение составляет случай горизонтальной цилиндрической полости при исследовании пространственной задачи. Здесь необходимо использовать метод интегральных преобразований Фурье [16] вдоль образующей цилиндра и принцип предельного поглощения [3] для корректного удовлетворения условиям излучения энергии вдоль образующей.

Решение задачи о колебаниях слоя (полупространства) с полостью канонической формы при заданных на его гранях напряжениях строим в виде суммы решений вспомогательных задач для слоя и полости в пространстве. Взаимное положение границ учитывается связью локальных систем координат (декартовых и криволинейных), в которых получены решения вспомогательных задач. При объединении слоев используются заданные условия их контакта. При жестком сцеплении имеем условия непрерывности компонент векторов смещения и напряжения при переходе через границу раздела упругих параметров.

Для наглядности и в связи с ограниченностью объема публикации проиллюстрируем описанную выше схему исследования на примере решения контактной задачи для двуслойного полупространства с заглубленной круговой цилиндрической полостью в антиплоской постановке.

Существенно, что при использовании описанного подхода схема проведения исследования не изменяется при усложнении постановки задачи. Анализ более сложных задач порождает, естественно, существенное усложнение всех соотношений, определяющее технические трудности при построении решений.

Постановка задачи.

Пусть упругая среда занимает в декартовой системе координат область

$$x \geq -H \cap R = \sqrt{(h-x)^2 + y^2} \geq a, \quad (1)$$

$$x \geq 0: \rho_1, \lambda_1, \mu_1; \quad 0 \geq x \geq -H: \rho, \lambda, \mu; \quad \varepsilon = \frac{a}{h}.$$

Полость имеет форму кругового цилиндра радиуса a и целиком расположена, например, в полупространстве. Центр полости заглублен на величину h по отношению к началу координат. Жесткий полосовой штамп ширины $2b$ с плоским основанием расположен асимметрично положению полости, сдвинут относительно начала координат на величину c и совершает установившиеся гармонические колебания с частотой ω . Амплитуда его колебаний задана. Для этого случая граничные условия контактной задачи можно сформулировать следующим образом:

$$x = -H: \quad y \in [c-b, c+b], \quad u_z = f(y) \exp(-i\omega t); \quad y \notin [c-b, c+b], \quad \tau_{xz} = 0, \quad (2)$$

$$R = 1: \quad \tau_{Rz} = \tau(\varphi) \exp(-i\omega t).$$

На бесконечности заданы условия излучения энергии упругих колебаний.

При использовании принципа суперпозиции необходимо решение трех вспомогательных задач: 1) о колебании упругого слоя толщины H , нагруженного произвольной системой поверхностных сдвиговых усилий, осциллирующих с частотой ω : $\tau_{xz} \exp(-i\omega t)$; 2) упругого полупространства, на поверхность которого действуют распределенная осциллирующая нагрузка $\tau_{xz} = X(y) \exp(-i\omega t)$ (также неизвестная); 3) пространства с полостью под действием усилий $\tau_{Rz} = Y(\varphi) \exp(-i\omega t)$.

Рассмотрим для простоты случай, когда полость целиком расположена в полупространстве. Решение вспомогательных задач строится в локальной системе координат, связанной с соответствующей подобластью. При этом решение задачи о колебаниях полупространства с полостью строим с использованием принципа суперпозиции в виде суммы решений вспомогательных задач о колебаниях полупространства и пространства с полостью.

Из условия удовлетворения граничным условиям (2) в предположении, что закон распределения напряжений под штампом задан ($\tau_{xz} = t(y)$), используя соотношения закона Гука и связь локальных систем координат между собой, получаем систему двух интегро-функциональных уравнений относительно трех неизвестных ($X(y), Y(\varphi), t(y)$). Для замыкания системы используем заданный закон смещения подошвы штампа. В результате получаем дополнительное интегральное уравнение, замыкающее систему. Таким образом, исходная краевая задача сведена к системе интегро-

функциональных уравнений следующего вида

$$\bar{X}(\alpha) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \{Y(\varphi) L_m(\alpha) \exp(-im\eta)\} d\eta = \bar{T}(\alpha),$$

$$Y(\varphi) - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \bar{X}(\alpha) K(\alpha, \varphi) d\alpha = \tau(\varphi), \quad (3)$$

$$\int_{\Gamma} \bar{T}(\alpha) M(\alpha) \exp(-i\alpha y) d\alpha = \frac{2\pi}{a} f(y) -$$

$$- \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} Y(\varphi) \int_{\Gamma} M_m(\alpha) \exp(-i\alpha y) d\alpha \exp(-im\varphi) d\varphi,$$

где

$$M(\alpha) = -[\gamma\sigma \operatorname{ch} \sigma h + \sigma_1 \operatorname{sh} \sigma h][\mu\sigma\delta(\alpha)]^{-1}, \quad (4)$$

$$M_m(\alpha) = -\frac{\gamma}{\mu\delta(\alpha)} \left[\bar{K}_{1m}(\alpha) - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_1}{\Delta_{1m}(\alpha)} H_m^{(1)} \left(\frac{\theta_1 \sqrt{1+(\varepsilon\eta)^2}}{\varepsilon} \right) \exp\{-i[m \operatorname{arctg}(\varepsilon\eta) - \alpha\eta]\} d\eta \right],$$

$$K(\alpha, \varphi) = [\cos \varphi + i\alpha\sigma^{-1} \sin \varphi] \exp[-\sigma(\varepsilon^{-1} - \cos \varphi) + i\alpha(\eta + \sin \varphi)],$$

$$\bar{K}_{1m}(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(im \operatorname{arctg}[-\varepsilon y])}{\Delta_m} \left\{ \left[\frac{m\varepsilon}{R_0} H_m^{(1)}(\theta\varepsilon^{-1}R_0) - \theta H_{m+1}^{(1)}(\theta\varepsilon^{-1}R_0) \right] + im H_m^{(1)}(\theta\varepsilon^{-1}R_0) \frac{\varepsilon^2 y}{R_0} \right\} \exp(i\alpha y) dy,$$

$$R_0 = \sqrt{1 + \varepsilon^2 y^2}; \quad \varepsilon = ah^{-1}; \quad \theta = \omega a \sqrt{\rho\mu^{-1}},$$

$$\theta_1 = \omega a \sqrt{\rho_1\mu_1^{-1}}; \quad \sigma = \sqrt{\alpha^2 - \theta^2}; \quad \sigma_1 = \sqrt{\alpha^2 - \theta_1^2},$$

$$\bar{T}(\alpha) = \sigma_1 \delta^{-1}(\alpha) \bar{t}(\alpha); \quad \bar{t}(\alpha) = \int_{c-b}^{c+b} t(y) \exp(i\alpha y) dy,$$

$$\Delta_m = m H_m^{(1)}(\theta) - \theta H_{m+1}^{(1)}(\theta),$$

$$\Delta_{m1} = m H_m^{(1)}(\theta_1) - \theta_1 H_{m+1}^{(1)}(\theta_1),$$

$$\delta(\alpha) = \sigma_1 \operatorname{ch} \sigma H + \gamma\sigma \operatorname{sh} \sigma H; \quad \gamma = \mu\mu_1^{-1},$$

$$\bar{X}(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(y) \exp(i\alpha y) dy.$$

Структура полученной системы интегро-функциональных уравнений такова, что первые два ее уравнения определяются операторами, вполне

непрерывными в пространстве суммируемых функций. Последнее уравнение имеет свойства, аналогичные интегральному уравнению динамической контактной задачи для двуслойного полупространства без полости [1, 5, 10, 11, 13]. В случае, когда полость целиком расположена в одном из слоев структуры (не касаясь границы раздела упругих параметров), операторы системы вполне непрерывны в пространстве суммируемых функций. Этот факт легко может быть доказан математически. Физически он определяется непрерывностью полей смещений и напряжений в каждом из слоев структуры вдоль любого непрерывного контура, не выходящего на границу.

Следует отметить, что указанная структура и свойства системы имеют место при расположении полости целиком в слое или полупространстве. При расположении полости в полупространстве и при дополнительном условии об относительной малости ее радиуса ($\varepsilon \ll 1$) операторы первых уравнений являются сжимающими. В этом случае представляется возможным эффективно использовать асимптотические методы при построении решения системы интегро-функциональных уравнений.

Так, в первом приближении, с точностью до малых порядка $O(\sqrt{\varepsilon\theta^{-1}})$, получаем

$$\bar{X}(\alpha) = \bar{t}(\alpha) + O(\sqrt{\varepsilon\theta^{-1}}); \quad Y(\varphi) = \tau(\varphi) + O(\sqrt{\varepsilon\theta^{-1}}), \quad (5)$$

$$\int_{\Gamma} M(\alpha) \bar{t}(\alpha) \exp(-i\alpha y) d\alpha = 2\pi a^{-1} f(y) + O(\sqrt{\varepsilon\theta^{-1}}),$$

$$y \in [c-b, c+b].$$

Последнее соотношение тождественно хорошо изученному уравнению динамической контактной задачи для двуслойного полупространства без полости в соответствующей постановке. Для его решения можно использовать любой из хорошо развитых и апробированных методов [1, 2, 4, 5, 10, 11, 13] (метод приближенной факторизации функций и матриц-функций, метод фиктивного поглощения, метод малого параметра и др.). Предположим, что решение этого уравнения получено и обозначим его $t_0(y)$. Подставляя его в правые части двух первых уравнений системы, получаем во втором приближении

$$Y(\varphi) = \tau(\varphi) + (2\pi)^{-1} \int_{\Gamma} \left[\frac{-i\bar{t}_0(\alpha)}{\delta(\alpha) \cos(H\sqrt{\theta^2 - \alpha^2})} + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tau(\varphi) L_m(\alpha) \left(\cos \varphi + \frac{i\alpha}{\sigma_1} \sin \varphi \right) \times \right. \\ \left. \times \exp\{-\sigma_1(\varepsilon^{-1} - \cos \varphi) + i\alpha \sin \varphi\} \exp(-im\varphi) d\varphi \right] d\alpha, \quad (6)$$

$$L_m(\alpha) = \frac{-2\sigma \operatorname{ch} \sigma H + 2i\gamma\sigma \operatorname{sh} \sigma H}{\Delta_{m1}\delta(\alpha)} \times \\ \times \exp\left\{i\left[\varepsilon^{-1}\sqrt{\theta_1^2 - \alpha^2} - m\frac{\pi}{2} + m \operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\theta_1^2 - \alpha^2}}\right)\right]\right\} + O(\varepsilon).$$

Подставляя эти выражения в третье уравнение (3), получаем уравнение первого рода вида (5) с возмущенной правой частью. Обозначая ее $f_1(y)$, получаем

$$f_1(y) = 2\pi a^{-1} \left\{ f(y) - \right. \\ \left. - \int_{-\pi}^{+\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tau(\varphi) \int_{\Gamma} \left\{ -\delta^{-1}(\alpha) \frac{4i}{\mu_1 \Delta_{m1}} \exp\left[i\left(\varepsilon^{-1}\sqrt{\theta_1^2 - \alpha^2} + \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + m \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\sqrt{\theta_1^2 - \alpha^2}} - \frac{m\pi}{2}\right)\right] \exp(-i\alpha y) \right\} d\alpha \exp(-im\varphi) d\varphi \right\}, \quad (7)$$

$$\bar{T}(\alpha) = -\frac{i\delta^{-1}(\alpha)\bar{t}_0(\alpha)\sqrt{\theta_1^2 - \alpha^2}}{\cos(H\sqrt{\theta_1^2 - \alpha^2})}.$$

Анализ полученных соотношений показывает, что поправочные слагаемые имеют более высокий порядок малости, чем нулевое приближение. Процесс последовательных приближений можно продолжить до достижения требуемой точности.

Существенно, что аналогичную структуру и свойства имеют системы интегро-функциональных уравнений контактных задач для многослойного полупространства с заглубленной полостью канонической формы, целиком расположенной в одном из слоев структуры, в плоской, осесимметричной и пространственной постановках [8, 9, 12, 15].

Изложенный алгоритм практически без изменения переносится и на решение контактных задач для этих случаев при относительно сильном заглублении полости.

При расположении полости целиком в одном из слоев структуры или в полупространстве, на малом удалении от границы, целесообразно использовать метод сведения задачи к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений [8, 9] с использованием аппроксимационного подхода при описании закона распределения контактных напряжений. При аппроксимации закона распределения напряжений под штампом точным образом учитывается порядок особенности в угловых точках штампа. Гладкая составляющая определяется в виде отрезка ряда по полной системе ортогональных функций с неопределенными коэффициентами. Наряду с этим используется метод коллокаций и естественное представление вспомогательных функций напряжения на цилиндрической поверхности в виде ряда Фурье. При усложнении постановки задачи возникают технические

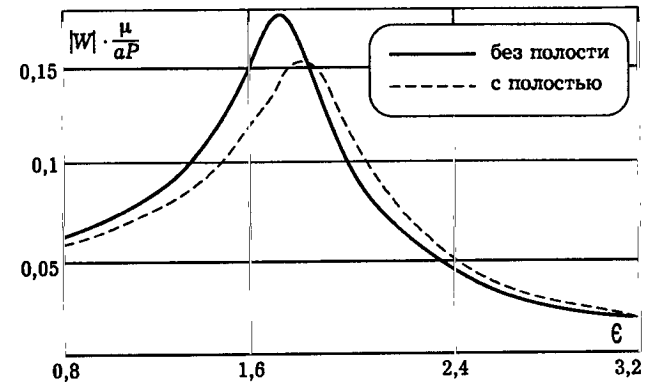


Рис. 1

сложности, связанные с тем, что коэффициенты системы определяются кратными несобственными интегралами в комплексной плоскости. Для повышения эффективности численного алгоритма в этом случае целесообразно использовать формулы перерасложения [6, 7], позволяющие понизить кратность интегрирования.

Реализация изложенного алгоритма позволяет не только построить решение контактной задачи, т.е. определить закон распределения контактных напряжений под штампом и зависимость его от расположения и размеров полости, но и исследовать закономерности распределения формируемого поля смещений в многосвязной слоистой области.

На рис. 1 приведен пример расчета амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) смещения круглого штампа с плоским основанием на поверхности двуслойного полупространства со сферической полостью и без нее (осесимметричная задача) ($\varepsilon = 0,5$, $H = 1$, $\rho_1 = 2000 \text{ кг/м}^3$, $\lambda_1 = 1,4 \cdot 10^9 \text{ Па}$, $\mu_1 = 7,2 \cdot 10^8 \text{ Па}$, $\rho = 1800 \text{ кг/м}^3$, $\lambda = 3,2 \cdot 10^8 \text{ Па}$, $\mu = 1,6 \cdot 10^8 \text{ Па}$).

Очевидно, что наличие полости относительно малого радиуса приводит к заметному снижению амплитуды конечного резонанса, свойственного штампу на поверхности двуслойного полупространства («мягкий» слой на более «жестком» полупространстве). Закон распределения контактных напряжений при симметричном расположении полости практически не искажается. Изменяется только амплитуда контактных напряжений, что соответствует изменению АЧХ штампа. При асимметричном расположении полости относительно штампа, например, при анализе плоской задачи, положение полости определяет степень асимметрии в законе распределения контактных напряжений наряду с количественным изменением амплитуды. В качестве примера на рис. 2 приведен закон изменения контактных напряжений под полосовым штампом при генерации сдвиговых колебаний в двуслойном полупространстве с асимметрично расположен-

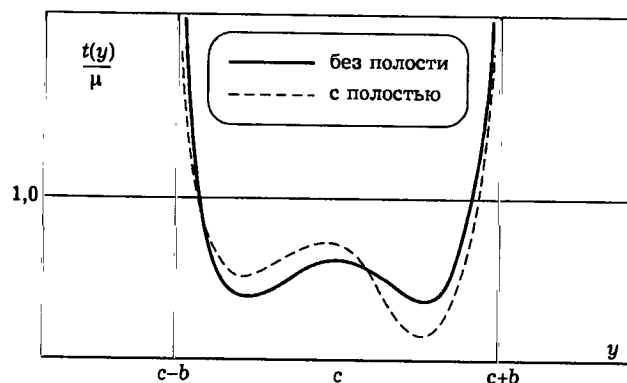


Рис. 2

ной полостью в виде кругового цилиндра. Пунктирной линией нанесен закон распределения напряжений при симметричном расположении полости ($\varepsilon = 0,3$, $\theta = 2$, $\rho_1 = 2000 \text{ кг/м}^3$, $\lambda_1 = 1,4 \cdot 10^9 \text{ Па}$, $\mu_1 = 7,2 \cdot 10^8 \text{ Па}$, $\rho = 1800 \text{ кг/м}^3$, $\lambda = 3,2 \cdot 10^8 \text{ Па}$, $\mu = 1,6 \cdot 10^8 \text{ Па}$).

2. Полость произвольной формы в многослойном полупространстве. В случае полости произвольной формы наиболее эффективным представляется использование метода граничных интегральных уравнений и реализующего его на ЭВМ метода граничных элементов для построения решения динамической контактной задачи.

Имеется достаточно большое количество публикаций, посвященных разработке этого метода применительно к решению задач с однородными граничными условиями, моделирующими процесс возбуждения и распространения колебаний в многосвязных областях типа изолированного слоя или полупространства с полостью произвольной формы, в том числе и выходящей на свободную границу. Значительно меньшее количество публикаций посвящено решению аналогичных задач для многослойных сред. Однако, работ, посвященных использованию этого перспективного метода применительно к решению динамических контактных задач для многослойного полупространства с произвольно расположенной полостью неканонической формы, в доступных литературных источниках найти не удалось.

Использование широко распространенного в настоящее время метода конечного элемента (МКЭ) применительно к решению данного класса задач представляется эффективным только при исследовании задач о нестационарном контактом воздействии на многослойную структуру, при относительно малом времени наблюдения. Увеличение времени наблюдения приводит к существенному увеличению размеров области, подлежащей

разбиению на конечные элементы, что увеличивает время счета, снижает его точность. Исследование задач генерации установившихся гармонических колебаний МКЭ представляется бесперспективным, ввиду неограниченности области, охваченной возмущениями (в отличие от метода ГИУ).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабешко В. А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.
2. *Бабешко В. А., Ворович И. И., Селезнев М. Г.* Вибрация штампа на двуслойном основании // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 1. С. 166–173.
3. *Вайнберг Б. Г.* Принципы излучения, предельного поглощения и предельной амплитуды в общей теории уравнений с частными производными // Успехи математических наук. 1966. Т. 21. № 3. С. 115–194.
4. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
5. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
6. *Ерофеев В. Т.* Связь между основными решениями в цилиндрических и сферических координатах (с одинаковыми началами координат) для некоторых уравнений математической физики // Дифференциальные уравнения. 1973. Т. 9. С. 1310–1317.
7. *Ляпин А. А.* Возбуждение волн в слоистом полупространстве со сферической полостью // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 3. С. 76–81.
8. *Ляпин А. А., Румянцев А. Н., Румянцева Т. Г., Селезнев М. Г.* Особенности нестационарного воздействия массивного штампа на двуслойное полупространство с заглубленной полостью // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 6. С. 165–166.
9. *Ляпин А. А., Румянцев А. Н., Селезнев М. Г.* Динамическая контактная задача для двуслойного полупространства со сферической полостью // ПМТФ. 1991. № 3. С. 125–129.
10. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 344 с.
11. *Рвачев В. Л., Проценко В. С.* Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. Киев: Наукова думка, 1977. 236 с.
12. *Румянцева Т. Г., Селезнев М. Г., Чепиль М. В.* Динамическая контактная задача для двуслойного полупространства с полостью // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 2. С. 348–351.
13. *Сеймов В. М.* Динамические контактные задачи. Киев: Наукова думка, 1976. 283 с.
14. *Селезнев М. Г., Ляпин А. А.* Возбуждение колебаний в слоистом многосвязном полупространстве // Тр. программы ГК РФ по ВО «Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемых сред и конструкций». Нижний Новгород. 1993. № 1. С. 30–35.
15. *Селезнев М. Г., Чепиль М. В.* Динамическая контактная задача для упругого полупространства с цилиндрической полостью // Механика деформируемого твердого тела. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1990. С. 313–317.
16. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.
17. *Янке Э., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. М.: Наука, 1968. 344 с.

§ 5. ИЗОЛИРОВАННЫЕ РЕЗОНАНСЫ ПРИ КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ МАССИВНЫХ ТЕЛ С ПОЛУОГРАНИЧЕННЫМИ СРЕДАМИ

О. Д. Пряхина, Е. И. Ворович, О. М. Тукодова

Резонансные свойства систем «массивное тело — упругая полуограниченная среда», подвергающихся гармоническому воздействию в области низких частот, исследовались в [2–14].

Для рассматриваемых систем характерным является наличие некоторой критической частоты колебаний $\omega_{кр}$, начиная с которой происходит распространение незатухающих волн, уносящих энергию на бесконечность, и возможность существования изолированных резонансных частот в области $(0, \omega_{кр})$, на которых амплитуда колебаний и энергия обращаются в бесконечность. В настоящем параграфе излагаются некоторые результаты исследований, полученные в [5, 9, 10, 14].

Пусть твердое тело жестко сцеплено с полуограниченной анизотропной средой, упругие модули которой $c_{ijkl}(z)$ зависят от поперечной координаты z . Тело имеет плоское основание S , начало системы координат помещено в центре масс тела. На тело действует нагрузка, которая, будучи приведенной к центру масс, дает силу $\mathbf{P}e^{-i\omega t}$ с составляющими $P_k e^{-i\omega t}$ и пару с моментом $\mathbf{M}e^{-i\omega t}$ с составляющими $M_k e^{-i\omega t}$, ω — частота колебаний, t — время. Под воздействием \mathbf{P} , \mathbf{M} центр масс совершает линейные колебания с амплитудой $\mathbf{u}\{u_1, u_2, u_3\}$, а тело — малые угловые колебания, амплитуда которых есть вектор $\varphi\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$. Точки подошвы тела S будут совершать колебания с амплитудой $\mathbf{u}^0\{u_1^0, u_2^0, u_3^0\}$, определяемой соотношением

$$\mathbf{u}^0 = \mathbf{u} + \varphi \times \mathbf{r}, \quad (1)$$

где $\mathbf{r}\{x, y, -s\}$ — радиус-вектор точек плоского основания S , s — расстояние от положения центра масс до поверхности среды.

Движение упругой среды описывается краевой задачей, уравнения которой в случае гармонических колебаний принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(c_{ijkl}e^{kl}) + \rho\omega^2 w_i = 0, \quad 2\varepsilon^{kl} = \frac{\partial w_k}{\partial x_l} + \frac{\partial w_l}{\partial x_k}. \quad (2)$$

где $\mathbf{w}\{w_1, w_2, w_3\}$ — вектор амплитуды перемещений, ρ — плотность среды, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $c_{ijkl}(z)$ и $\rho(z)$ — кусочно-непрерывные функции.

К уравнениям (2) следует добавить условия на границе $z = 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(x, y, 0) &= \mathbf{u}^0(x, y), \quad (x, y) \in S, \\ \mathbf{q}(x, y, 0) &= c_{3jkl}e^{kl} = 0, \quad (x, y) \notin S. \end{aligned}$$

Если упругая среда представляет собой слой или пакет слоев толщины H , жестко сцепленный с недеформируемым основанием, то

$$\mathbf{w}(x, y, -H) = 0.$$

Для слоистой среды необходимо добавить условия стыковки, а именно равенство напряжений и перемещений на границе раздела слоев:

$$z = -2 \sum_{i=1}^m h_i \quad (m = 1, 2, \dots, N-1):$$

$$\mathbf{w}^m = \mathbf{w}^{m+1}, \quad \sigma_{j3}^m = \sigma_{j3}^{m+1}, \quad j = 1, 2, 3;$$

где $2h_i$ — толщина i -го слоя.

Дифференциальные уравнения (2) с учетом граничных условий методом интегральных преобразований сводятся к системе трех интегральных уравнений 1-го рода относительно вектора неизвестных контактных напряжений $\mathbf{q}\{q_1, q_2, q_3\}$

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \iint_S \mathbf{k}(x - \xi, y - \zeta)\mathbf{q}(\xi, \zeta) d\xi d\zeta = \mathbf{u}^0(x, y), \quad (x, y) \in S, \quad (3)$$

$$\mathbf{k}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\sigma_1} \int_{\sigma_2} \mathbf{K}(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta.$$

Для составления уравнений малых колебаний тела сформулируем шесть задач определения напряженно-деформированного состояния среды в предположениях (1) при следующих условиях:

- | | |
|---|---|
| 1) $\mathbf{u}\{1, 0, 0\}$, $\varphi\{0, 0, 0\}$; | 4) $\mathbf{u}\{0, 0, 0\}$, $\varphi\{1, 0, 0\}$; |
| 2) $\mathbf{u}\{0, 1, 0\}$, $\varphi\{0, 0, 0\}$; | 5) $\mathbf{u}\{0, 0, 0\}$, $\varphi\{0, 1, 0\}$; |
| 3) $\mathbf{u}\{0, 0, 1\}$, $\varphi\{0, 0, 0\}$; | 6) $\mathbf{u}\{0, 0, 0\}$, $\varphi\{0, 0, 1\}$. |

Обозначим $\mathbf{q}\{q_1^k, q_2^k, q_3^k\}$, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ — решения системы уравнений (3) для перечисленных выше задач. Соответствующие усилия и моменты, возникающие в области контакта тела и среды, определяются по формулам

$$\begin{aligned} Q_i^k &= \iint_S q_i^k dS, \quad R_1^k = \iint_S (q_3^k y + q_2^k s) dS, \\ R_2^k &= \iint_S (-q_1^k s - q_3^k x) dS, \quad R_3^k = \iint_S (q_2^k x - q_1^k y) dS, \end{aligned} \quad (4)$$

где q_i^k, Q_i^k, R_i^k являются функциями частоты, $i = 1, 2, 3$. С учетом соотношений (4) уравнения малых колебаний примут вид

$$-m\omega^2 u_i = P_i - \sum_{k=1}^3 Q_i^k u_k - \sum_{k=4}^6 Q_i^k \varphi_{k-3}, \quad (5)$$

$$-J_i \omega^2 \varphi_i = M_i - \sum_{k=1}^3 R_i^k u_k - \sum_{k=4}^6 R_i^k \varphi_{k-3}. \quad (6)$$

Система (5)–(6) содержит шесть неизвестных амплитуд u_i, φ_i ($i = 1, 2, 3$), которые и определяют колебания тела. Здесь m — масса тела; J_i — моменты инерции тела относительно осей x, y, z , которые предполагаются главными.

Коэффициенты системы (5)–(6) обладают следующими свойствами:

1) все коэффициенты Q_i^k, R_i^k являются мероморфными функциями частоты ω^2 ;

2) все коэффициенты Q_i^k, R_i^k имеют ближайшую к нулю особую точку $\omega^2 = \omega_{кр}^2, \omega_{кр}^2$ — критическая частота запираия волновода;

3) при $\omega^2 \leq \omega_{кр}^2, Q_i^k, R_i^k$ — вещественнозначны, при этом $Q_i^k(-\omega) = Q_i^k(\omega), Q_i^k(\omega) > 0; R_i^k(-\omega) = R_i^k(\omega), R_i^k(\omega) > 0;$

4) при $\omega^2 > \omega_{кр}^2, Q_i^k, R_i^k$ — комплекснозначны, при этом $Q_i^k(-\omega) = \bar{Q}_i^k(\omega), \text{Im } Q_i^k(\omega) \leq 0, R_i^k(-\omega) = \bar{R}_i^k(\omega), \text{Im } R_i^k(\omega) \leq 0.$

Эти свойства характерны для полуограниченных сред, жестко сцепленных с недеформируемым основанием (слоя, пакета слоев). Важное значение для описания динамических свойств системы (5)–(6) имеет ее определитель D

$$D(\omega) = \begin{vmatrix} \tilde{Q}_1^1 & Q_1^2 & Q_1^3 & Q_1^4 & Q_1^5 & Q_1^6 \\ Q_2^1 & \tilde{Q}_2^2 & Q_2^3 & Q_2^4 & Q_2^5 & Q_2^6 \\ Q_3^1 & Q_3^2 & \tilde{Q}_3^3 & Q_3^4 & Q_3^5 & Q_3^6 \\ R_1^1 & R_1^2 & R_1^3 & \tilde{R}_1^4 & R_1^5 & R_1^6 \\ R_2^1 & R_2^2 & R_2^3 & R_2^4 & \tilde{R}_2^5 & R_2^6 \\ R_3^1 & R_3^2 & R_3^3 & R_3^4 & R_3^5 & \tilde{R}_3^6 \end{vmatrix},$$

$$\tilde{Q}_k^k = m\omega^2 - Q_k^k, \quad \tilde{R}_k^{k+3} = J_k \omega^2 - R_k^{k+3}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Действительные корни уравнения $D(\omega) = 0$, если они существуют, определяют изолированные резонансы системы.

Представим моменты инерции тела в виде $J_k = \rho_k^2 m$, где ρ_k — радиусы инерции тела введем обозначение $m\omega^2 = \lambda$. Тогда

$$D(\omega) = D(\omega, \lambda) = \det(A - \lambda B) = 0 \quad (7)$$

является характеристическим уравнением для «обобщенной» задачи о собственных значениях. Это уравнение представляет собой характеристический многочлен шестой степени относительно λ .

На основании перечисленных свойств функций Q_i^k, R_i^k в [5, 14] установлено:

1) матрица A — симметрична;

2) при $\omega^2 \leq \omega_{кр}^2$ корни λ_p уравнений (7) являются действительными, отличными от нуля;

3) при малых $\omega^2 \leq \omega_{кр}^2$ все λ_p строго положительны и являются монотонно убывающими функциями, т.е. $\lambda_p > c > 0, p = 1, 2, \dots, 6.$

Пусть $\lambda_p(\omega), (p = 1, 2, \dots, 6)$ — корни уравнения (7), являющиеся собственными числами матрицы $A - \lambda B$, тогда

$$D(\omega, \lambda) = \prod_{p=1}^6 (\lambda - \lambda_p(\omega))$$

и уравнение (7) распадается на 6 независимых уравнений

$$m\omega^2 = \lambda_p(\omega), \quad p = 1, 2, \dots, 6. \quad (8)$$

Коэффициенты Q_i^k, R_i^k есть мероморфные функции ω^2 и $\omega^2 = 0$ есть регулярная точка, поэтому имеют место разложения

$$Q_i^k = Q_{i0}^k(0) + Q_{i1}^k(0)\omega^2 + \dots, \quad R_i^k = R_{i0}^k(0) + R_{i1}^k(0)\omega^2 + \dots$$

и, следовательно, для $\lambda_p(\omega)$ получим

$$\lambda_p(\omega) = \lambda_{p0} + \omega^2 \lambda_{p1} + \dots, \quad (9)$$

$$\lambda_{p0} = \lambda_p(0), \quad \lambda_{p1} = \left. \frac{\partial \lambda_p}{\partial \omega^2} \right|_{\omega^2=0}, \quad \dots$$

Уравнения (8) запишутся в виде

$$m\omega^2 = \lambda_{p0} + \omega^2 \lambda_{p1} + \omega^4 \lambda_{p2} + \dots, \quad p = 1, 2, \dots, 6, \quad (10)$$

где ряд в правой части будет сходиться при достаточно малом ω . Таким образом, уравнение (7), в конечном счете, свелось к шести уравнениям (10).

ТЕОРЕМА 1. Каждое из уравнений (8) имеет один вещественный корень ω_B , принадлежащий интервалу $(0, \omega_{кр})$, начиная с некоторого критического значения

$$m \geq m_{p*} = \frac{\lambda_p(\omega_{кр})}{\omega_{кр}^2}.$$

Покажем, что при достаточно больших m каждое из уравнений (10) имеет один действительный корень. Для этого рассмотрим рис. 1, на котором условно изображены графики функций $y = m\omega^2$ (кривая 1) и $y = \lambda_p(\omega)$ (кривая 2). Вид кривой 2 определяется выражением (9), отрезок $OB = \lambda_{p0} > 0$. Очевидно, при достаточно большом m парабола $y = m\omega^2$ пересечет кривую $y = \lambda_p(\omega)$, и мы получим корень уравнения (10) и, соответственно, (8).

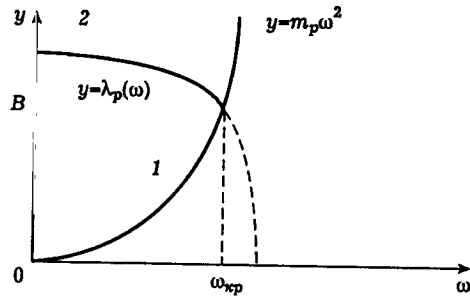


Рис. 1

ТЕОРЕМА 2. При достаточно больших значениях массы

$$m \geq m_0 = \max_p \{m_{p^*}\}$$

и фиксированных радиусах инерции тела, уравнение (7) имеет 6 действительных корней (резонансных частот), принадлежащих интервалу $(0, \omega_{кр})$.

Доказательство следует из теоремы 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Резонансные частоты, принадлежащие интервалу $(0, \omega_{кр})$, на которых амплитуда и энергия установившихся колебаний обращаются в бесконечность, назовем изолированными резонансами системы или *B-резонансами*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Критической массой тела $m_{кр}$ назовем наименьшее значение m , при котором у одного из уравнений (8) появляется действительный корень, меньший $\omega_{кр}$, $m_{кр} = \min_p \{m_{p^*}\}$.

Иными словами, при $m \geq m_{кр}$ в системе существует, по крайней мере, один вещественный *B-резонанс*.

Предположим для определенности $m_{кр} = m_{1^*} < m_{2^*} < \dots < m_{6^*}$.

Тогда в интервале $(0, \omega_{кр})$ имеет место один *B-резонанс* при $m_{1^*} < m < m_{2^*}$. При $m_{2^*} < m < m_{3^*}$ в системе могут существовать уже два изолированных резонанса, при $m_{3^*} < m < m_{4^*}$ в системе возникает третий резонанс и т.д. (рис. 2).

Отыскание изолированных резонансов свелось к определению $\lambda_p(\omega)$ и последующему решению (8). Для этого необходимо найти функционалы Q_i^k, R_i^k , которые связаны с фундаментальными решениями q^k системы интегральных уравнений (3) соотношениями (4). Решения $q^k \{q_1^k, q_2^k, q_3^k\}$ строятся методом фиктивного поглощения [1].

Поскольку $D(\omega)$ аналитична в $|\omega| \leq \omega_{кр}$, то число *B-резонансов* может быть только конечно.

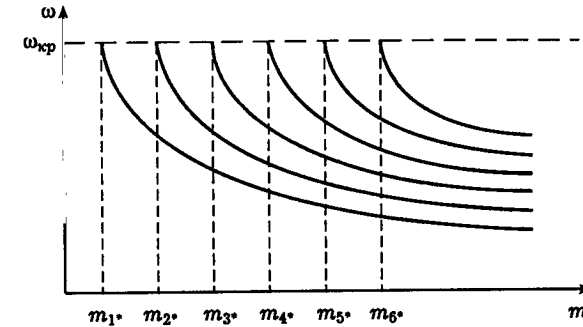


Рис. 2

Из соотношений (10) при достаточно больших массах вытекает асимптотическая формула для определения *B-резонанса*

$$\omega_B^2 = \frac{\lambda_{p0}}{m - \lambda_{p1}}. \quad (11)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Величину $m_s = -\lambda_{p1}$ назовем присоединенной массой среды. Как показывают расчеты, λ_{p1} — отрицательная величина.

Еще более точное выражение для *B-резонанса* можно получить, учитывая три члена разложения в (10). В этом случае

$$\omega_B^2 = \frac{M \pm \sqrt{M^2 - 4\lambda_{p0}\lambda_{p2}}}{2\lambda_{p2}}, \quad M = m + m_s. \quad (12)$$

Из полученных соотношений (11), (12) следуют приближенные оценки для критической массы $m_{кр}$:

$$m_{кр} = \min_p \left\{ \frac{\lambda_{p0}}{\omega_{кр}^2} - m_s \right\}, \quad p = 1, 2, \dots, 6,$$

$$m_{кр} = \min_p \left\{ \lambda_{p2} \omega_{кр}^2 + \frac{\lambda_{p0}}{\omega_{кр}^2} - m_s \right\}.$$

Получим приближенное решение уравнений (8). Для этого перепишем (10) в виде

$$(m + m_s)\omega^2 = \lambda_{p0} + \lambda_{p2}\omega^4 + \lambda_{p3}\omega^6 + \dots$$

Заменой $\omega^2 = \varepsilon \lambda_{p0} / (m + m_s)$ приходим к

$$\lambda_{p0} \varepsilon = \lambda_{p0} + \frac{\lambda_{p2} \lambda_{p0}^2}{M^2} \varepsilon^2 + \frac{\lambda_{p3} \lambda_{p0}^3}{M^3} \varepsilon^3 + \dots,$$

$$\varepsilon = 1 + \frac{\lambda_{p2} \lambda_{p0}}{M^2} \varepsilon^2 + \frac{\lambda_{p3} \lambda_{p0}^2}{M^3} \varepsilon^3 + \dots$$

Отсюда получаем

$$\omega_B^2 = \frac{\lambda_{p0}}{M} \left[1 + \lambda_{p2} \frac{\lambda_{p0}}{M^2} + \lambda_{p3} \frac{\lambda_{p0}^2}{M^3} + \dots \right].$$

Этот метод в [6] иллюстрирован примером задачи об антиплоских колебаниях в направлении оси z массивного полосового штампа ширины $2a$ на поверхности упругого слоя, занимающего область $0 \leq y \leq h$, $-\infty < z$, $x < \infty$ и жестко сцепленного с недеформируемым основанием.

В [5] устанавливается, что число B -резонансов зависит от условий закрепления тела на поверхности упругой среды, а также от массы и моментов инерции тела. Оно будет не больше числа существенных степеней свободы колеблющейся системы при достаточно больших моментах инерции тела и массе.

В качестве примера рассмотрим плоскую задачу. Пусть на жесткий полосовой штамп ширины $2a$ и массы m действует вертикальная нагрузка $P e^{-i\omega t}$, приложенная в некоторой точке на расстоянии l от вертикальной оси, проходящей через центр масс штампа. Штамп контактирует без трения с упругой полуограниченной средой, жестко сцепленной с недеформируемым основанием. В этом случае

$$u_1^0 = 0, \quad u_2^0 = 0, \quad u_3^0 = u_3 - \varphi_2 x.$$

Задача описывается двумя уравнениями

$$\begin{aligned} -m\omega^2 u_3 &= P_3 - u_3 Q_3^3 - \varphi_2 Q_3^5, \\ -J_2 \omega^2 \varphi_2 &= M_2 - u_3 R_2^3 - \varphi_2 R_2^5. \end{aligned}$$

В силу симметрии относительно оси x $Q_3^5 = R_2^3 = 0$ и система (5)–(6) распадается на два независимых уравнения

$$-m\omega^2 u_3 = P_3 - u_3 Q_3^3, \quad -J_2 \omega^2 \varphi_2 = M_2 - \varphi_2 R_2^5.$$

Откуда находим

$$u_3 = \frac{P_3}{-m\omega^2 + Q_3^3}, \quad \varphi_2 = \frac{M_2}{-J_2 \omega^2 + R_2^5},$$

$$P_3 = P, \quad M_2 = Pl, \quad J_2 = J = a^2/3,$$

$$Q_3^3 = \int_{-a}^a q_3^3 dx, \quad R_2^5 = - \int_{-a}^a q_3^5 x dx.$$

$q_3^{3,5}$ — решения уравнений $K_{33} q_3^3 = 1$, $K_{33} q_3^5 = -x$.

Эти решения строятся в [9, 10] методом фиктивного поглощения и имеют простую структуру. Функция K_{33} для различных моделей сред приведена в [1].

Частоты, при которых изолированные резонансы имеют место, определяются из уравнений

$$Q_3^3 - m\omega^2 = 0, \quad R_2^5 - J\omega^2 = 0. \quad (13)$$

Из теоремы 1 следует, что первое уравнение (13) имеет один действительный корень, начиная с некоторого значения массы

$$m \geq m_{кр} = \frac{Q_0(\omega_{кр})}{\omega_{кр}^2}, \quad Q_0 \equiv Q_3^3,$$

который и является резонансной частотой. Значение этой резонансной частоты зависит от массы штампа и его размеров. Второе уравнение (13) также имеет один действительный корень

$$m \geq m_{кр}^1 = \frac{3R_0(\omega_{кр})}{a^2 \omega_{кр}^2}, \quad R_0 \equiv R_2^5.$$

Таким образом, исходная система может иметь два резонанса, при частотах, меньших критической частоты распространения волн в слое, и начиная с некоторого значения массы $m \geq m_{кр}^*$, $m_{кр}^* = \max\{m_{кр}, m_{кр}^1\}$, один резонанс при $m_{кр}^{**} \leq m < m_{кр}^*$, $m_{кр}^{**} = \min\{m_{кр}, m_{кр}^1\}$ и не иметь резонансов в случае $m < m_{кр}^{**}$.

Эта задача детально исследована в [9, 10].

Качественная картина поведения резонансных кривых сохраняется и для пространственных задач: с ростом массы штампа значение резонансной частоты уменьшается.

Многие практические задачи приводят к необходимости учитывать упруго-инерционные свойства системы, через которую передается вибрация на фундамент. Поэтому в [10] изучена задача, когда на упругую полуограниченную среду действует массивный жесткий штамп, соединенный с упругим инерционным элементом, и вся система подвергается вертикальному периодическому воздействию силы $P e^{-i\omega t}$. Считается, что трение между штампом и средой отсутствует. К штампу массы m_2 присоединено посредством упругой связи k тело массой m_1 (рис. 3).

Уравнения движения массивных тел имеют вид

$$-m_1 \omega^2 u_1 = -k(u_1 - u_2) + P, \quad (14)$$

$$-m_2 \omega^2 u_2 = k(u_1 - u_2) - Q_0 u_2, \quad Q_0 = \int_{-a}^a q(x) dx,$$

где $u_{1,2}$ — амплитуды вертикальных смещений тела массы m_1 и штампа массы m_2 , Q_0 — динамическая жесткость среды, $q(x)$ — нормальные напряжения, возникающие в среде при единичной амплитуде колебаний в области контакта.

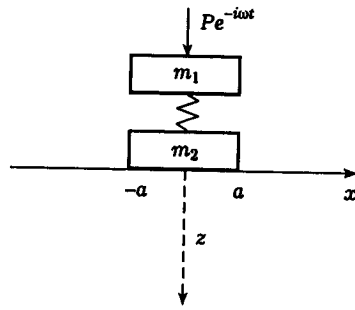


Рис. 3

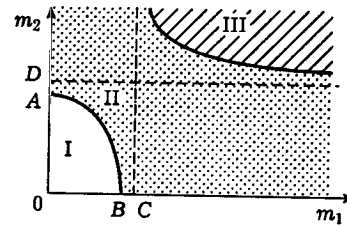


Рис. 4

Функция $q(x)$ определяется из решения соответствующей контактной задачи

$$\int_{-a}^a k_{33}(x-\xi)q(\xi) d\xi = 1, \quad |x| \leq a.$$

Из (14) находим

$$u_1 = \frac{P}{D}(Q_0 + k - m_2\omega^2), \quad u_2 = \frac{kP}{D},$$

$$D = (k - m_1\omega^2)(Q_0 + k - m_2\omega^2) - k^2.$$

Изолированные резонансы ω_B определяются из уравнения $D = 0$ и принадлежат интервалу $(0, \omega_{кр})$.

Рис. 4 схематично отражает результаты исследований [10] в виде диаграммы изолированных резонансов. На этом рисунке построена функция $m_2 = m_{2кр}(m_1)$, определяемая из уравнения $D = 0$.

Здесь I — область, в которой отсутствуют B -резонансы, II — существования только одного резонанса, III — область существования двух изолированных резонансов. При этом отрезки OB и OA принадлежат области I, ось m_1 правее точки B и ось m_2 выше точки A принадлежат области II, включая точки A и B . Часть кривой, расположенная левее точки C , принадлежит области II, а часть, расположенная правее точки C — области III. Точки A, B, C, D имеют координаты: $A(0, m_{кр})$, $B(m_{кр}, m_{1кр}/(m_{кр} + m_{1кр}), 0)$, $C(m_{1кр}, 0)$, $D(0, m_{кр} + m_{1кр})$.

Здесь

$$m_{1кр} = \frac{k}{\omega_{кр}^2}, \quad m_{кр} = \frac{Q_0(\omega_{кр})}{\omega_{кр}^2}, \quad m_{2кр} = m_{кр} + \frac{m_{1кр}}{1 - m_{1кр}/m_1}.$$

Анализ этой задачи показывает, что присоединение упругоинерционного элемента вносит существенные изменения в резонансные свойства системы. При определенных соотношениях масс штампов и жесткости пружины k в области $\omega \leq \omega_{кр}$ появляется дополнительный изолированный

резонанс (рис. 4, область III). Количество изолированных резонансов в подобных системах зависит от масс штампов, жесткости пружины и условий в области контакта тела и среды.

В [11] исследуется влияние системы массивных штампов, колеблющихся на поверхности упругого слоя, на условия возникновения изолированных резонансов и их количество.

В [13] определяются точные границы существования B -резонансов для системы: массивный штамп — упругая полуограниченная среда, представляющая собой пакет из двух слоев, жестко сцепленных между собой и с недеформируемым основанием. Вводятся понятия поверхностей критических масс, критических частот и B -резонансов системы.

Сформулируем общий вывод к исследованным задачам.

Резонансы для полубесконечных тел, взаимодействующих с твердыми (жесткими) массивными телами, характеризуют обращение амплитуды колебаний в бесконечность, что уподобляет полубесконечное тело по своим динамическим свойствам телу ограниченных размеров. С ростом массы значение резонансных частот уменьшается. При изменении количества и размеров штампов, условий контакта поведение резонансных кривых качественно не меняется.

В [7, 8] изучено влияние гибкости плиты на возникновение изолированных резонансных частот. Оказывается, что вещественные резонансы и в случае упругой плиты также имеют место в области $\omega \leq \omega_{кр}$, начиная с некоторого соотношения толщины плиты и слоя. Однако в отличие от абсолютно жесткого штампа количество резонансных частот зависит от условий закрепления краев плиты, от геометрических размеров плиты и параметра жесткости системы — отношения модуля сдвига слоя к модулю Юнга плиты.

Отметим также, что в [4] изучены резонансные явления в упругом стержне, контактирующем с упругим основанием, а в [3, 12] исследованы ограниченные резонансы, возникающие при колебаниях слоя, жестко сцепленного с упругим полупространством, с учетом массы штампа, контактирующего с этой средой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабешко В. А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.
2. Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
3. Боев С. И., Полякова И. Б. Об ограниченных B -резонансах в системе массивный штамп-слоистое основание // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 6. С. 67–71.
4. Ворovich И. И., Белянкова Т. И., Калинин В. В. К проблеме низкочастотных резонансов при взаимодействии упругого тела с полуограниченной средой // Докл. РАН. 1998. Т. 358. № 5. С. 624–626.

5. Ворович И. И., Ворович Е. И., Пряхина О. Д. Изолированные резонансы при контактном взаимодействии // Изв. Вузов. Сев.-Кав. регион. Естеств. науки. 1995. № 2. С. 23–27.
6. Ворович Е. И., Пряхина О. Д. Аналитический метод определения B -резонансов // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 3. С. 101–106.
7. Ворович Е. И., Пряхина О. Д. Динамическая контактная задача для упругой системы балка–слой // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 1. С. 144–148.
8. Ворович Е. И., Пряхина О. Д. Об одном эффективном методе решения задачи о колебании упругой балки на упругом слое // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 4. С. 96–101.
9. Ворович Е. И., Пряхина О. Д., Тукодова О. М. Возбуждение волн массивным штампом на упругом слое. Ростов-на-Дону, 1984. 13 с. – Деп. в ВИНИТИ 3.12.84, № 7641–84.
10. Ворович Е. И., Пряхина О. Д., Тукодова О. М. Динамические свойства упругой полуграниченной среды, контактирующей с упругим инерционным элементом // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 2. С. 128–133.
11. Ворович Е. И., Пряхина О. Д., Тукодова О. М. Динамические свойства упругой полуграниченной среды при наличии двух массивных штампов // ПММ. 1987. Т. 50. Вып. 1. С. 109–116.
12. Пряхина О. Д., Фрейгейт М. Р. О динамических свойствах системы: массивное тело–полуграниченная среда // Докл. РАН. 1998. Т. 358. № 1. С. 48–50.
13. Пряхина О. Д., Фрейгейт М. Р. О связи решений нестационарных контактных задач с резонансными свойствами исследуемых систем // Докл. РАН. 1998. Т. 360. № 3. С. 346–348.
14. Vorovich E. I., Vorovich I. I., Pryakhina O. D. The numerical-analytical method of V -resonance evaluation // Russian Journal of Computational Mechanics. 1994. V. 1. № 4. P. 71–84.

§ 6. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВИЖУЩИХСЯ ШТАМПОВ С УПРУГИМИ И ВЯЗКОУПРУГИМИ ТЕЛАМИ

А. В. Белоконь, А. В. Наседкин

1. Введение. В данном параграфе рассматриваются контактные задачи теории упругости и вязкоупругости со штампами, равномерно перемещающимися вдоль деформируемых тел с постоянной скоростью w . Предполагается, что в подвижных системах координат, связанных со штампами, существуют установившиеся режимы, и следовательно, рассматриваются стационарные задачи без начальных условий. В качестве деформируемых структур будут фигурировать классические двумерные и трехмерные области типа полуплоскости, полупространства, полосы, слоя и волноводов. С другими типами задач с подвижными штампами и источниками возмущений, как например, для одномерных объектов, для пластин и оболочек, с задачами с неравномерным движением и пр., можно ознакомиться по монографиям [20, 23, 35], обзору [31] и др.

Несмешанные задачи с подвижными возмущениями будем классифицировать следующим образом. Случаи, когда источник только перемещается вдоль тела с постоянной скоростью w , будем называть задачами B . Если источник, помимо движения со скоростью w , еще и осциллирует с частотой ω , то такие задачи будем называть задачами B . В частном случае, при $w = 0$ задачи B вырождаются в отдельный класс с только осциллирующими источниками. Эти обычные гармонические задачи здесь назовем задачами A .

Для контактных задач будем использовать аналогичную классификацию, причем для акцентирования на наличие контактных условий будем использовать нижний индекс “ C ” в наименованиях задач: A_C, B_C, V_C .

При анализе контактных задач B_C, V_C с подвижными штампами важное значение имеет тип движения. В зависимости от величины скорости движения штампа соответствующие несмешанные задачи B и V имеют существенно отличающиеся свойства. В связи с этим во втором разделе параграфа отмечаются особенности несмешанных задач, далее приводится обзор работ, посвященных исследованиям собственно контактных задач B_C и V_C для упругих тел, и наконец, последний раздел посвящен контактным задачам B_C и V_C для вязкоупругих тел.

2. Постановка задач A – V . Принципы выделения единственных решений и принципы соответствия. Для задач с подвижными возмущениями удобно вводить две системы координат в R^3 : неподвижную $O_\xi \xi_1 \xi_2 \xi_3$ и подвижную $Ox_1 x_2 x_3$, связанную с источником возмущений. Обозначим время в неподвижной и подвижной системах координат через τ и t соответственно и будем предполагать, что источники возмущений двигаются вправо по оси $O_\xi \xi_1$ со скоростью w . Тогда подвижная и неподвижная си-

стемы координат будут связаны соотношениями

$$x_1 = \xi_1 - w\tau; \quad x_2 = \xi_2; \quad x_3 = \xi_3; \quad t = \tau. \quad (1)$$

Будем рассматривать среды, заполняющие области $\Pi = \Pi_3 \subset R^3$, которые являются бесконечно протяженными, по крайней мере, вдоль координаты ξ_1 (x_1) в обоих направлениях изменения этой координаты.

Все пространственные координаты для удобства разделим на два множества. К первому множеству, помечаемому индексом j , отнесем координаты, по которым область Π_3 является бесконечно протяженной в обоих направлениях. Это множество не пусто, так как оно всегда содержит координату ξ_1 . Второе множество, помечаемое индексом k , составляют координаты, вдоль которых область либо ограничена, либо полуограничена (т.е. ограничена в одном направлении изменения координаты, и неограничена — в другом). Имея в виду приложения исследований несвязанных задач для контактных задач, будем считать множество k также не пустым.

Примем, что граница $O = \partial\Pi_3$ области образована линиями, параллельными оси ξ_1 . В такое семейство областей Π_3 входят следующие области:

— полупространство и слой, для которых примем, что $j = 1, 2; k = 3$, причем $\xi_3 \leq 0$ для полупространства и $0 \leq \xi_3 \leq h$ для слоя;

— волноводы с поперечным сечением S ($j = 1; k = 2, 3; S$ — поперечное сечение по координатам ξ_2, ξ_3).

Пусть область Π_3 заполнена упругой средой, в общем случае анизотропной и неоднородной по координатам ξ_k . Предполагаем, что вектор перемещений $\mathbf{u}(\xi, \tau)$ удовлетворяет в Π_3 системе дифференциальных уравнений движения линейной теории упругости:

$$A_{\Pi}(\partial_{\xi_j}, \partial_{\xi_k}, \xi_k, \partial_{\tau})\mathbf{u} = \mathbf{b}_{\Pi}(\xi, \tau); \quad (2)$$

$$A_{\Pi}\mathbf{u} = L_{\xi}\mathbf{u} + \rho\partial_{\tau}^2\mathbf{u}; \quad L_{\xi}\mathbf{u} = -\nabla_{\xi} \cdot \sigma(\xi, \mathbf{u}); \quad (3)$$

$$\sigma(\xi, \mathbf{u}) = \mathbf{c}(\xi_k) \cdot \varepsilon(\mathbf{u}) = \mathbf{c}(\xi_k) \cdot \nabla_{\xi}\mathbf{u}, \quad (4)$$

где \mathbf{b}_{Π} — вектор плотности массовых сил в Π_3 ; $\rho = \rho(\xi_k)$ — плотность; ∇_{ξ} — набла-оператор дифференцирования по ξ -координатам; σ — тензор напряжений; $\varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla_{\xi}\mathbf{u} + \nabla_{\xi}\mathbf{u}^T)$ — тензор малых деформаций; \mathbf{c} — тензор упругих модулей четвертого ранга с обычными условиями симметрии и положительной определенности.

Следует отметить, что основная система координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ здесь, вообще говоря, не является кристаллографической системой координат для тензора \mathbf{c} .

Граничные условия на O представим в общей форме ($\xi \in O$):

$$G_O\mathbf{u} = \mathbf{b}_O(\xi, \tau); \quad (5)$$

где компоненты векторов $G_O\mathbf{u}$ в ортонормированном базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}$ (\mathbf{e}_1 — вектор оси ξ_1 ; \mathbf{n} — нормаль к O ; $\boldsymbol{\tau} \parallel \mathbf{e}_1 \times \mathbf{n}$) состоят из компонент векторов

главных и естественных граничных условий, связанных с оператором $L_{\xi}\mathbf{u}$ из (3).

Запишем (2), (5) в виде единого дифференциального выражения

$$A(\partial_{\xi_j}, \partial_{\xi_k}, \xi_k, \partial_{\tau})\mathbf{u} = \mathbf{b}(\xi, \tau) \quad (6)$$

где

$$A = \{A_{\Pi}, G_O\}; \quad \mathbf{b} = \{\mathbf{b}_{\Pi}, \mathbf{b}_O\}.$$

Задачи A – B определяются видом внешних воздействий $\mathbf{b}(\xi, \tau)$. Если

$$\mathbf{b}(\xi, \tau) = \mathbf{f}(\xi - w\tau\mathbf{e}_1)\exp(i\omega\tau), \quad (7)$$

то имеем задачи B об установившихся режимах с подвижными осциллирующими воздействиями. При $w = 0; \omega \neq 0$ в (7) имеем задачи A об установившихся колебаниях, а при $w \neq 0; \omega = 0$ имеем стационарные задачи B с подвижными возмущениями. Наконец, при $w = 0; \omega = 0$ имеем статические задачи не зависящие от времени.

В подвижной системе координат (1) внешние воздействия (7) принимают форму

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x})\exp(i\omega t), \quad (8)$$

единую для всех задач A – B . Такие задачи A – B с одинаковыми областями Π , границами O , типами граничных условий и механическими характеристиками будем называть соответствующими.

Для задач A подвижную и неподвижную системы координат будем отождествлять, а частоту пульсации ω будем обозначать также через Ω .

Во всех задачах предполагается, что \mathbf{f} в (8) имеет финитный носитель, такой что

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0, \quad |\mathbf{x}_l| > a; \quad l = 1, 2, 3. \quad (9)$$

Математические постановки задач следует дополнить условиями на классы функций, в которых разыскиваются решения, и на классы функций, задающих условия задач: границы O , модули \mathbf{c} , плотность ρ , внешние воздействия \mathbf{f} . Данные важные вопросы должны являться предметом отдельных исследований для конкретных задач. Ниже будем предполагать, что входные данные задач таковы, что все применяемые далее интегральные преобразования имеют смысл. Классы же функций \mathbf{u} содержат функции, по крайней мере убывающие по направлениям x_k , вдоль которых области полуограничены (вглубь полупространств), и по крайней мере ограничены вдоль осей x_j . Постановки плоских, антиплоских ($\Pi = \Pi_2$) и одномерных ($\Pi = \Pi_1$) задач аналогичны описанному выше общему трехмерному случаю при соответствующих изменениях.

Для задач A и B изучаются установившиеся процессы. Предполагается, что в подвижной системе координат (1) существует периодический режим с единым периодом $T = 2\pi/\omega$:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x})\exp(i\omega t). \quad (10)$$

Используя очевидные из (1) соотношения

$$\partial_l = \partial_{\xi_l}; \quad l = 1, 2, 3; \quad \partial_l \equiv \partial_{x_l}; \quad \partial_\tau = \partial_t - w\partial_1, \quad (11)$$

дифференциальное выражение (6) в подвижной системе координат (1) запишем в виде

$$A(\partial_j, \partial_k, x_k, \partial_t - w\partial_1)\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x})\exp(i\omega t). \quad (12)$$

В задачах *A* и *B* для амплитуды $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ тогда имеем

$$A(\partial_j, \partial_k, x_k, i\omega - w\partial_1)\mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (13)$$

Постановки задач *A–B* следует дополнить принципами, обеспечивающими единственность решений. Эти принципы, известные как принципы излучения, должны обеспечивать физически осмысленный отбор распространяющихся без экспоненциального затухания по x_1 (ξ_1) однородных волн (10) в областях вне источников. Для задач *A* наибольшую популярность завоевали три принципа выделения единственных решений: принцип предельного поглощения, принцип предельной амплитуды и энергетический принцип излучения.

Рассмотрим эти принципы для всего комплекса задач *A–B*.

Принцип предельного поглощения при гармонических колебаниях по закону $\exp(i\omega t)$ с $\omega > 0$ состоит в замене ω на $\omega - i\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$; $\varepsilon \ll 1$ (ε характеризует малое трение), решении задачи (13) для $\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x})$ с $\omega_\varepsilon = \omega - i\varepsilon$ в подходящих классах функций, убывающих на бесконечности, и определении решения исходной задачи *B* (*A*) без трения предельным переходом при $\varepsilon \rightarrow +0$, т.е.

$$A(\partial_j, \partial_k, x_k, i\omega + \varepsilon - w\partial_1)\mathbf{v}_\varepsilon = \mathbf{f}(\mathbf{x}); \quad (14)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x}). \quad (15)$$

Отметим, что избежать неоднозначности в задании добавочного оператора с $\varepsilon\partial_t$, характеризующего трение, можно, формулируя принцип предельного поглощения как *принцип постепенно усиливающегося источника* [24]. В этом принципе трение в среду не вводится, а просто сами источники возмущений задаются формулой

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)\exp[i(\omega - i\varepsilon)t] = \mathbf{f}(\mathbf{x})\exp(\varepsilon t)\exp(i\omega t). \quad (16)$$

Согласно (16) источники с момента времени $t = -\infty$ до текущего значения t постепенно усиливаются по амплитуде от 0 до значения $\mathbf{f}(\mathbf{x})\exp(\varepsilon t)$. Решения ε -задач теперь следует искать в виде $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_\varepsilon \exp[i\omega_\varepsilon t]$. Принцип постепенно усиливающегося источника приводит к тем же формулам (14), (15), и поэтому эквивалентен принципу предельного поглощения.

Очевидно, что принцип предельного поглощения (14), (15) можно применять и для задач *B*, причем для этих задач с $\omega = 0$ естественна формулировка (16).

Принцип предельной амплитуды исходит из замены задач *A–B* (13) соответствующими нестационарными задачами

$$A(\partial_j, \partial_k, x_k, \partial_t - w\partial_1)\mathbf{u} = \mathbf{f}(x_j, x_k)H(t)\exp(i\omega t) \quad (17)$$

с нулевыми начальными условиями

$$\partial_t^m \mathbf{u} = 0; \quad t = +0; \quad m = 0, 1, \quad (18)$$

где $H(t)$ — функция Хевисайда.

После нахождения решения нестационарной задачи (17), (18) решение $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ задачи (13) определяется по формуле

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \exp(-i\omega t) dt \right\}. \quad (19)$$

ТЕОРЕМА 1. Если $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ — ограниченная функция для $\forall \mathbf{x} \in \Pi, t > 0$, и существует хотя бы один из пределов (15) или (19), то существует и другой предел ((19) или (15)), и они равны, т.е. принципы предельного поглощения и предельной амплитуды эквивалентны в нерезонансных ситуациях для всех задач *A–B*.

Доказательство теоремы 1 содержится в [27]. Там же отмечается большая общность формулировки принципа предельной амплитуды в виде (19) по сравнению с более общепринятой формулировкой

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \exp(-i\omega t)\},$$

для которой не существует предельного решения $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ в случае наличия предельной постоянной составляющей.

Перед обсуждением энергетических принципов излучения сформулируем *принцип соответствия* между интегральными формами решений задач *A–B* и отметим некоторые его следствия.

ТЕОРЕМА 2 (ПРИНЦИП СООТВЕТСТВИЯ) [8, 9]. Пусть решение задачи *A* (13) по принципу предельного поглощения (14), (15) получено с использованием преобразования Фурье по координатам x_j и имеет вид

$$v_m(\mathbf{x}) = \int_{V_{x_j}} f_n(\eta_j; x_k) K_{nm}(x_j - \eta_j; x_k) d\eta_j; \quad (20)$$

$$K_{nm}(x_j - \eta_j; x_k) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{(2\pi)^l} \int_{R_{\alpha_j}} \frac{D_{nm}(\alpha_j; x_k; \omega_\varepsilon)}{D(\alpha_j; \omega_\varepsilon)} e^{-i\alpha_j(x_j - \eta_j)} d\alpha_j, \quad (21)$$

где l — количество координат x_j , по которым область Π не ограничена; V_{x_j} и R_{α_j} — вещественные множества изменения переменных x_j и α_j ; соответственно.

Тогда решения задач B и $Б$ определяются теми же формулами (20), (21) с заменой в (21) ω_ϵ на $\Omega_\epsilon(\alpha_1)$, где

$$\Omega_\epsilon(\alpha_1) = \Omega(\alpha_1) - i\epsilon; \quad \Omega(\alpha_1) = \omega + w\alpha_1. \quad (22)$$

Принцип соответствия позволяет проанализировать структуру решений задач B и $Б$, исходя из интегральных форм (20), (21) решения задачи A . Конечно, результаты вычислений интегралов (20), (21) при замене ω_ϵ на $\Omega_\epsilon(\alpha_1)$ для задач B и $Б$ могут существенно отличаться от аналогичных результатов для задач A . Главное значение принципа соответствия состоит в возможности анализа однородных решений задач B и $Б$, исходя из вида дисперсионных зависимостей задачи A .

Дисперсионные соотношения задач A связывают волновые числа α_j и частоты колебаний ω по формуле

$$D(\alpha_j; \omega) = 0; \quad (23)$$

где D — то же функциональное выражение, что и в (21). Множество всех вещественных корней α_j дисперсионного уравнения (23) при фиксированном ω назовем полярным множеством в задаче A .

Согласно принципу соответствия дисперсионное уравнение задачи B имеет вид

$$D_B(\alpha_j; \omega) = D(\alpha_j; \Omega(\alpha_1)) = 0, \quad (24)$$

и соотношение (24) определяет полярные множества задач B и $Б$.

Если в пространстве переменных $\{\alpha_j; \Omega = \omega\}$ построить дисперсионные поверхности $\Omega = \omega_m(\alpha_j)$ решений уравнения (23) для задачи A , то полярные множества задач B и $Б$ при фиксированных ω и w определяются в результате пересечения прямой или плоскости $\Omega = \Omega(\alpha_1) = \omega + w\alpha_1$ с дисперсионными поверхностями $\Omega = \omega_m(\alpha_j)$ задачи A .

Дисперсионные поверхности (или кривые для двумерных задач) $\Omega = \omega_m(\alpha_j)$ для задач A , как правило, известны. Поэтому структуру полярных множеств задач B и $Б$ удастся достаточно просто проанализировать. В качестве примера рассмотрим дисперсионное уравнение

$$D(\alpha; \omega) = ch\sqrt{\alpha^2 - \tilde{\omega}^2} = 0; \quad \tilde{\omega} = \omega h/c_2; \quad \alpha = \alpha_1 h \quad (25)$$

антиплоской двумерной задачи A для упругой изотропной полосы толщины h , жестко заземленной по основанию ($c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ — скорость упругих сдвиговых волн).

Это уравнение определяет счетные наборы действительных дисперсионных кривых: $\tilde{\Omega} = \tilde{\omega}_m(\alpha)$; $\tilde{\omega}_m(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 + C_m^2}$; $m = 1, 2, 3, \dots$; $\tilde{\omega}_m(\alpha) = -\sqrt{\alpha^2 + C_m^2}$; $m = 0, -1, -2, \dots$; $C_m = \pi(2m - 1)/(2h)$; $\tilde{\Omega} = \Omega h/c_2$.

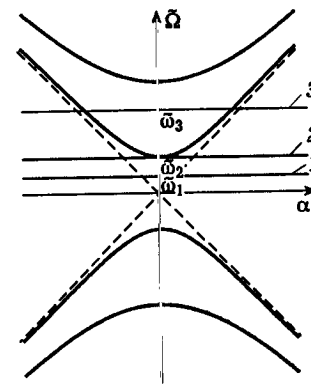


Рис. 1

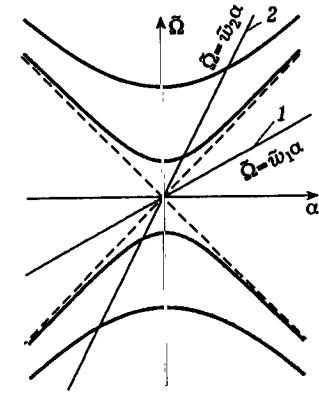


Рис. 2

Основные характерные случаи для данной задачи A иллюстрирует рис. 1, где показаны дисперсионные кривые и три значения безразмерной частоты $\tilde{\omega}_l$; $l = 1, 2, 3$. При $\tilde{\Omega} = \tilde{\omega}_1$ дисперсионное уравнение (25) задачи A не имеет вещественных корней и все отдельные волны являются неоднородными, т.е. экспоненциально убывающими в соответствующих областях x_1 . При $\tilde{\Omega} = \tilde{\omega}_2$ имеем особый случай кратного вещественного корня, при котором возможно отсутствие ограниченного решения. Данный случай будем называть резонансным. При $\tilde{\Omega} = \tilde{\omega}_3$ имеется помимо счетного числа неоднородных волн также и конечное число однородных волн, бегущих вдоль x_1 без затухания.

Для задачи $Б$ основные характерные случаи показаны на рис. 2, где прямые с номерами 1 и 2 есть прямые $\tilde{\Omega} = \tilde{\omega}_1 \alpha$ и $\tilde{\Omega} = \tilde{\omega}_2 \alpha$ при различных значениях безразмерной скорости $\tilde{w} = w/c_2$. При дозвуковой скорости движения ($\tilde{w} < 1$) прямая 1 не пересекает дисперсионного множества задачи A . Получающееся решение имеет много общих черт с решением соответствующей статической задачи. При сверхзвуковом движении ($\tilde{w} > 1$) прямая 2 пересекает дисперсионные кривые задачи A в счетном числе точек $\{\pm(\alpha^{(m)}; \tilde{\Omega}^{(m)})\}$; $\tilde{\Omega}^{(m)} = \tilde{\omega}_2 \alpha^{(m)}$; причем часть множества $\{-(\alpha^{(m)}; \tilde{\Omega}^{(m)})\}$ есть результат пересечения прямой 2 дисперсионных кривых задачи A при отрицательных $\tilde{\Omega}$. Решение в этом случае представляется рядом неубывающих по $(-x_1)$ слагаемых. Существует еще особый резонансный случай звукового движения $\tilde{w} = 1$. Этот и подобные режимы движения здесь рассматриваться не будут.

В задаче B в некотором смысле объединяются возможности задач A и $Б$. На рис. 3 для дозвукового режима движения $\tilde{w} < 1$ показаны три случая 1–3, похожие на рассмотренные выше случаи 1–3 для задачи A . Укажем на характерное для задачи B отсутствие симметрии решения по x_1 (так, например, волновые числа $\alpha^{(m)}$ в случае 3 на рис. 3 не симметричны

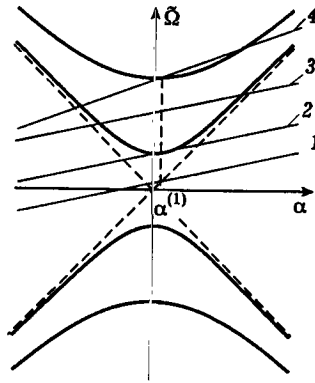


Рис. 3

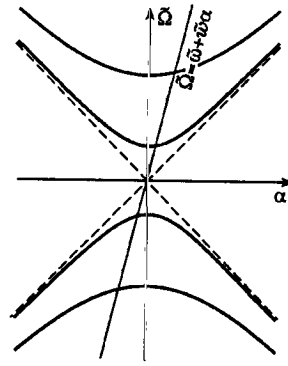


Рис. 4

относительно начала координат). Это фундаментальное свойство решений задач *B* обусловлено движением осциллирующего источника, которое вносит специфическую наведенную анизотропию в свойства задачи по координате x_1 . На рис. 3 добавлен новый по сравнению с рис. 1 случай 4. С одной стороны, он похож на случай 3, но интересен наличием «обратной» волны (что будет показано ниже) в задаче *B* при отсутствии такой волны у соответствующей задачи *A*.

Сверхзвуковой режим движения $\tilde{w} > 1$ в задаче *B* показан на рис. 4. Здесь имеем два счетных набора бегущих однородных волн. Множество $\{\alpha^{(m)}; \tilde{\Omega}(\alpha^{(m)})\}$ с положительными значениями $\tilde{\Omega}(\alpha^{(m)})$ определяет набор быстрых волн, а второе множество с отрицательными значениями $\tilde{\Omega}(\alpha^{(m)})$ — набор медленных волн. Заметим, что фазовые скорости быстрых волн превосходят фазовые скорости медленных волн при соответствующих порядковых номерах.

Принцип предельного поглощения (14), (15) позволяет рассортировать однородные волны по областям вне источников. Этот принцип фактически накладывает ограничение на знаки групповых скоростей однородных волн в нерезонансных ситуациях. Действительно, например, для двумерных задач смещение регулярных корней $\alpha = \alpha_1$ в комплексную плоскость (α_ϵ) при введении малого затухания, как легко установить из (23) разложением функции $D(\alpha_\epsilon, \omega_\epsilon)$ в ряд Тейлора по ϵ в окрестности корня (α, ω) , дается формулой:

$$\alpha_\epsilon = \alpha - \frac{i\epsilon}{c_g^A}; \quad c_g^A = -\frac{\partial D_\alpha}{\partial D_\omega}, \quad (26)$$

где c_g^A — групповая скорость в задаче *A*.

Для задачи *B* аналогичная формула имеет вид [9]

$$\alpha_\epsilon = \alpha - \frac{i\epsilon}{c_g^B}; \quad c_g^B = c_g^A - w, \quad (27)$$

где c_g^B — групповая скорость в задаче *B*, причем как c_g^B , так и c_g^A , в (27) вычисляются в точке $(\alpha, \Omega(\alpha))$ пересечения прямой $\Omega = \Omega(\alpha)$ с дисперсионной кривой задачи *A*.

Отметим, что вторая из формул (27) обобщается и на случай трехмерных задач:

$$c_{gj}^B = c_{gj}^A - w\delta_{1j}; \quad c_{gj}^A = -\frac{\partial D_{\alpha_j}}{\partial D_\omega}. \quad (28)$$

Формулы смещения вещественных волновых чисел в комплексные области в совокупности с методикой вычисления двойных интегралов для функции K_{nm} из (21) при замене (22) для трехмерных задач *B* описаны в [5, 11, 12].

Итак, смещение регулярных вещественных корней α в комплексную плоскость по (26), (27) определяется знаком групповой скорости. Если $c_g^A > w$, то корень α смещается вниз, а если $c_g^A < w$ — то вверх. Используя это правило, можно вместо вычисления предела при $\epsilon \rightarrow +0$ в (21) деформировать множество интегрирования в комплексную область аналогично известной методике для задач *A* [17].

Для наиболее общего случая задачи *B* в результате можно записать

$$K_{nm}(x_j - \eta_j; x_k) = \frac{1}{(2\pi)^l} \int_{\Gamma_{\alpha_j}} \frac{D_{nm}(\alpha_j; x_k; \Omega(\alpha_1))}{D(\alpha_j; \Omega(\alpha_1))} e^{-i\alpha_j(x_j - \eta_j)} d\alpha_j, \quad (29)$$

где Γ_{α_j} — деформированное в комплексную область множество R_{α_j} , при котором после вычисления интегралов в (29) выделяются только волны, удовлетворяющие условию $c_{gj}^B(x_j - \eta_j) > 0$.

Теперь ясно, что для случая 4 на рис. 3, где для положительного волнового числа $\alpha^{(1)}$ выполняется неравенство $c_g^A < w$, выделяется волна вида $A \exp[-i\zeta|\alpha^{(1)}| + i\omega t]$ в области $\zeta < 0$, т.е. обратная волна. Аналогично можно установить, что при сверхзвуковом движении в ситуации, показанной на рис. 4, все волны распространяются только в области за источником возмущений, причем весь счетный набор быстрых волн является набором обратных волн (в подвижной системе координат!).

Изложенное выше позволяет рассматривать принципы выделения единственных решений в задачах *A–B* как методы, определяющие пути интегрирования Γ_{α_j} в представлениях решений в форме (20), (29). Выборы этих путей должны однозначным образом отбирать однородные волны в соответствии с заложенным физическим смыслом.

Энергетические принципы излучения устанавливают принципы отбора однородных волн в соответствии с энергетическими критериями. Для комплекса задач *A–B* можно сформулировать два основных энергетических принципа [13].

Введем в рассмотрение следующие энергетические величины:

$$T^{\xi x} = \frac{1}{2} \rho(u_{i,t} - wu_{i,1})(u_{i,t} - wu_{i,1}); \quad W^{\xi x} = \frac{1}{2} c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}; \quad (30)$$

$$L^{\xi x} = T^{\xi x} - W^{\xi x}; \quad E^{\xi x} = T^{\xi x} + W^{\xi x}. \quad (31)$$

Здесь $T^{\xi x}$, $W^{\xi x}$, $E^{\xi x}$ — плотности кинетической, потенциальной и полной механической энергий, соответственно, а $L^{\xi x}$ — лагранжева плотность. Все эти величины, имеющие указанный смысл в неподвижной системе координат, записаны в (30), (31) в подвижной системе координат (1).

Представим лагранжеву плотность $L^{\xi x}$ также в виде

$$L^x(u_{i,t}; u_{i,j}) = L^{\xi x}(u_{i,t} - wu_{i,1}; u_{i,j}). \quad (32)$$

Как показано в [13], имеется два уравнения неразрывности для энергий, измеряемых неподвижным и подвижным наблюдателями в подвижной системе координат (1).

Первое уравнение есть уравнение неразрывности для энергии $E^{\xi x}$

$$\frac{\partial E^{\xi x}}{\partial t} + \frac{\partial J_j^{\xi x}}{\partial x_j} = 0, \quad (33)$$

где

$$J_j^{\xi x} = (u_{i,t} - wu_{i,1}) \frac{\partial L^x}{\partial u_{i,j}} - wL^x \delta_{j1} \quad (34)$$

и вектор $J^{\xi x}$ из (34) имеет смысл вектора потока энергии $E^{\xi x}$ в подвижной системе координат.

Второе из энергетических уравнений неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial E^x}{\partial t} + \frac{\partial J_j^x}{\partial x_j} = 0; \quad (35)$$

где

$$E^x = u_{i,t} \frac{\partial L^x}{\partial u_{i,t}} - L^x; \quad J_j^x = u_{i,t} \frac{\partial L^x}{\partial u_{i,j}}. \quad (36)$$

Из уравнений задачи в подвижной системе координат для подвижного наблюдателя E^x представляется как бы энергией, а J^x — вектором потока энергии E^x . Таким образом, величину E^x можно условно назвать энергией, измеряемой подвижным наблюдателем.

Как обычно, для гармонических волн перейдем к осредненным по периоду энергетическим величинам. Введем обозначения

$$\langle (\dots)_{(S)} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T (\dots)_{(S)} dt, \quad (\dots)_S = \int_S (\dots) dS, \quad (37)$$

где запись $(\dots)_{(S)}$ означает, что для волн в волноводе, в слое или в полупространстве необходимо применить интегрирование по S согласно второй из формул (37).

Оказывается [13], что для всех основных типов однородных волн в задачах A и B имеют место формулы

$$\langle J_{j(S)}^{\xi x} \rangle = c_{gj}^B \langle E_{(S)}^{\xi x} \rangle, \quad (38)$$

$$\langle J_{j(S)}^x \rangle = c_{gj}^B \langle E_{(S)}^x \rangle, \quad (39)$$

обобщающие известные соотношения для задач A . При этом выполняются также равенства

$$\langle L_{(S)}^x \rangle = 0; \quad \langle E_{(S)}^{\xi x} \rangle = \frac{\Omega(\alpha_1)}{\omega} \langle E_{(S)}^x \rangle. \quad (40)$$

Фундаментальные энергетические законы (38)–(40) справедливы для континуальных лагранжевых систем достаточно общего вида [13, 26], а для задач теории упругости с энергетическими характеристиками (30), (31) можно также получить соотношения

$$\langle T_{(S)}^{\xi x} \rangle = \langle W_{(S)}^{\xi x} \rangle; \quad \langle E_{(S)}^{\xi x} \rangle = 2 \langle T_{(S)}^{\xi x} \rangle; \quad (41)$$

$$\langle E_{(S)}^{\xi x} \rangle = \frac{1}{2} \Omega^2(\alpha_1) (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^*)_{(S)}; \quad (42)$$

$$\langle J_{j(S)}^{\xi x} \rangle = \frac{i\Omega(\alpha_1)}{4} (\mathbf{v}^* \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{v}))_{(S)} - w \langle E_{(S)}^{\xi x} \rangle \mathbf{e}_1; \quad (43)$$

$$\langle E_{(S)}^x \rangle = \frac{1}{2} \omega \Omega(\alpha_1) (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^*)_{(S)}; \quad (44)$$

$$\langle J_{j(S)}^x \rangle = \frac{i\omega}{4} (\mathbf{v}^* \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{v}))_{(S)} - w \langle E_{(S)}^x \rangle \mathbf{e}_1. \quad (45)$$

Согласно (38), (39), групповые скорости c_g^B в задачах B являются и скоростями переноса средних энергий $\langle E_{(S)}^{\xi x} \rangle$ и $\langle E_{(S)}^x \rangle$ в подвижной системе координат (1). Так как по физическому смыслу или по (42) $\langle E_{(S)}^{\xi x} \rangle > 0$, то можно сформулировать энергетический принцип излучения для неподвижного наблюдателя (ЭН) в подвижной системе координат, состоящий в отборе волн, для которых векторы c_g^B и $\langle J_{(S)}^{\xi x} \rangle$ направлены от источника. Ясно, что для нерезонансных ситуаций этот принцип будет согласован с принципом предельного поглощения.

Между тем, энергетический принцип излучения для подвижного наблюдателя (ЭП) должен ставить условие лишь на направление c_g^B , но не на направление вектора $\langle J_{(S)}^x \rangle$. В такой формулировке ЭП будет эквивалентен ЭН и, следовательно, принципу предельного поглощения. Направление же вектора потока энергии $\langle J_{(S)}^x \rangle$ будет противоположно направлению вектора групповой скорости c_g^B , если энергия $\langle E_{(S)}^x \rangle$, измеряемая подвижным наблюдателем, будет отрицательной.

Отметим, что неравенство $\langle E_{(S)}^x \rangle < 0$ обычно для задач B при сверхзвуковых режимах. Так из (44) видно, что средняя энергия $\langle E_{(S)}^x \rangle$ отрицательна, если $\Omega(\alpha_1) < 0$ в соответствующих точках α_1 . В связи с этим в рассмотренном ранее примере для ситуации, показанной на рис. 4, все медленные волны будут иметь отрицательную энергию $\langle E_{(S)}^x \rangle$.

Подводя итог, можно указать на многообразие возможностей в характере решений задач с подвижными источниками возмущений. Наибольшие различия связаны с режимами движения. Это естественно, поскольку

в зависимости от режима движения может меняться и тип исходных краевых задач (от эллиптического до гиперболического). Поэтому, например, в задачах для изотропных упругих сред обычно различают следующие режимы движения: дозвуковой, включающий дорэлеевский и сверхрэлеевский; трансзвуковой и сверхзвуковой. Исследования конкретных задач B и B_C при различных режимах движения представляют собой фактически отдельные задачи.

3. Контактные задачи B_C и V_C с движущимися штампами. При рассмотрении задач со штампами, перемещающимися прямолинейно с постоянной скоростью w вдоль оси $\xi_1(x_1)$, в подвижной системе координат (1) ставятся классические граничные условия. Эти условия полностью идентичны граничным условиям для статических задач или для задач A_C , если в них отсутствуют условия на скорости $u_{,t}$. Данное замечание очевидно, если принять во внимание соотношения (11).

Задача B_C с жестким штампом для упругой изотропной полуплоскости при дозвуковом режиме движения впервые изучалась Л. А. Галиным в [18] и несколько позже Радоком [39]. Данную задачу B_C будем называть задачей Галина. Дальнейшее развитие исследований задачи Галина осуществлялось за счет усложнения моделей контакта и упругих свойств полуплоскости, а также рассмотрения других режимов движения.

Так в [42] изучено движение штампа с учетом сил трения, а в [38] рассматривалась упругая анизотропная полуплоскость. Модели многослойной полуплоскости в задаче Галина использовались в [6, 21, 22]. Задачи B_C для упругой полуплоскости, усиленной накладкой, и для упругой полуплоскости, покрытой тонким слоем идеальной несжимаемой жидкости, рассмотрены в [1].

Движения жесткого и деформируемого штампов с учетом сил трения и тепловыделения изучались в [25, 28, 29]. В [25, 28] рассматривалось движение жесткого штампа с учетом трения и тепловыделения, а в [29] — движение с трением круглого деформируемого диска. Результаты [25, 28] приведены в [16] вместе с решением аналогичной задачи для полосы. В [32] вместо движущегося штампа рассматривалась движущаяся полубесконечная полоса, также с учетом трения. Отметим работы [33, 36], посвященные исследованиям задачи Галина для полуплоскости.

Задачи B_C для упругой изотропной полосы, помимо [25, 28], рассматривались в [37, 43]. Задача B_C для упругой неоднородной по толщине полосы изучалась в [10], а для полосы из среды Коссера — в [40, 41].

Трехмерная задача B_C для полупространства с эллиптическим штампом исследовалась в [30], а с кольцевым штампом — в [44].

В указанных работах скорость движения штампа, в основном, предполагалась дозвуковой. Сверхзвуковые режимы в задачах B_C для полуплоскости, пространства с цилиндрической полостью и полупространства

изучались соответственно в [3, 4, 19].

Результаты проведенных исследований показывают, что решения задач B_C при дозвуковых режимах движения имеют много общих черт с решениями аналогичных статических задач. Так, сохраняются виды интегральных уравнений и особенности у контактных напряжений. Количественные различия, естественно, имеются и зависят от величины скорости движения штампа. Например, для штампов с гладкой границей изменяются зоны контакта и величины контактных напряжений. При приближении скорости движения штампа к скорости рэлеевских волн в задачах B_C для изотропной полуплоскости наблюдаются резонансные явления. Дозвуковое движение штампа со сверхрэлеевской скоростью интересно известным явлением выпучивания границы полуплоскости под давящим штампом.

Сверхзвуковые режимы в задачах B_C уже качественно отличаются от статических задач как по видам интегральных уравнений, так и по особенностям решений.

Проиллюстрируем сказанное на примере решения классической задачи Галина для упругой изотропной полуплоскости. Пусть по границе ξ_2 полуплоскости $O_\xi \xi_1 \xi_2$; $\xi_2 \leq 0$ вправо по оси ξ_1 перемещается без трения с постоянной скоростью w жесткий штамп. Упругий материал полуплоскости характеризуем плотностью ρ и модулями Ламе λ , μ или скоростями $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ и $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ продольных и поперечных волн, соответственно.

Фундаментальные решения задачи B для полуплоскости при действии сосредоточенной в точке $(\zeta, 0)$ нормальной силы $-P\delta(x_1 - \zeta)$ в подвижной системе координат (1) было найдено в [34]. Используя результаты этой работы, приведем формулы для вертикальных смещений $u_2(x_1, 0)$ в зоне $|x_1| \leq a$ под штампом и интегральные уравнения для контактных давлений $p(\zeta)$ при различных режимах движения.

Для дозвукового движения $w < c_2$ имеем

$$u_2(x_1, 0) = -\frac{P}{\pi\theta(w)} [-\ln|\zeta - x_1| + C]; \quad (46)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a p(\zeta) [-\ln|\zeta - x_1| + C] d\zeta = \theta(w) [\delta + \alpha x_1 - \psi(x_1)]; \quad (47)$$

где C — бесконечная постоянная;

$$\theta(w) = \mu \frac{4k_1 k_2 - (1 + k_2^2)^2}{k_1(1 - k_2^2)}; \quad k_j = \sqrt{1 - M_j^2}; \quad M_j = \frac{w}{c_j}; \quad j = 1, 2. \quad (48)$$

Здесь δ — осадка штампа; α — угол наклона; ψ — форма штампа, которые связаны с вертикальными перемещениями $u_2(x_1, 0)$ формулой

$$u_2(x_1, 0) = -\delta - \alpha x_1 + \psi(x_1).$$

Соотношения (46), (47) отличаются от аналогичных для статического случая лишь множителем $\theta(w)$ из (48). При $w \rightarrow 0$ коэффициент $\theta(w)$ стремится к известному статическому значению:

$$\lim_{w \rightarrow 0} \theta(w) = \frac{E}{2(1-\nu^2)} = \frac{\mu}{1-\nu}.$$

Для сверхзвукового режима движения $w > c_1$ имеем совершенно иную картину:

$$u_2(x_1, 0) = -\frac{P}{\theta_s(w)} H(\zeta - x_1); \quad (49)$$

$$\int_{x_1}^a p(\zeta) d\zeta = \theta_s(w) [\delta + \alpha x_1 - \psi(x_1)], \quad (50)$$

где

$$\theta_s(w) = \mu \frac{4m_1 m_2 + (1 - m_2^2)^2}{m_1(1 + m_2^2)}; \quad m_j = \sqrt{M_j^2 - 1}; \quad j = 1, 2.$$

Наконец, при трансзвуковом режиме движения $c_2 < w < c_1$ результирующие формулы по структуре являются в некотором роде комбинацией формул дозвукового и сверхзвукового режимов:

$$u_2(x_1, 0) = -\frac{P}{\theta_t(w)} \left\{ a_\theta(w) H(\zeta - x_1) + \frac{b_\theta(w)}{\pi} [-\ln|\zeta - x_1| + C] \right\}; \quad (51)$$

$$a_\theta(w) \int_{x_1}^a p(\zeta) d\zeta + \frac{b_\theta(w)}{\pi} \int_{-a}^a p(\zeta) [-\ln|\zeta - x_1| + C] d\zeta = \theta_t(w) [\delta + \alpha x_1 - \psi(x_1)], \quad (52)$$

где

$$a_\theta(w) = \frac{4m_2 k_1}{R}; \quad b_\theta(w) = \frac{(1 - m_2^2)^2}{R}; \quad \theta_t(w) = \frac{\mu R}{k_1(1 + m_2^2)};$$

$$R = \sqrt{16k_1^2 m_2^2 + (1 - m_2^2)^4}.$$

Отметим, что вывод формул (46)–(50), а также решение интегральных уравнений (47) и (50) при дозвуковом и сверхзвуковом режимах вместе с анализом результатов приведены в [2]. При трансзвуковом режиме, дифференцируя (52) по x_1 , получаем интегральное уравнение 2-го рода:

$$a_\theta(w) p(x_1) + \frac{b_\theta(w)}{\pi} \int_{-a}^a \frac{p(\zeta)}{\zeta - x_1} d\zeta = \theta_t(w) [\alpha - \psi'(x_1)],$$

структура решений которого описана, например, в [16].

Контактные задачи B_C обладают еще большим многообразием качественно различных решений. При полной постановке контактных задач B_C суммарное решение складывается из статической составляющей, соответствующей решению задачи B_C , и динамической составляющей $v(x) \exp(i\omega t)$. Однако, конкретные задачи B_C остаются еще мало исследованными.

Задача B_C для неоднородной упругой полосы изучалась в [10], где были определены свойства обобщенных решений, в том числе и дифференциальные, и доказаны теоремы единственности решений интегральных уравнений задачи. Отмечено, что решения задач B_C при дорэлеевских режимах движения во многом схожи с решениями соответствующих задач A_C . Существенным отличием является уже отмеченная ранее несимметричность решений задач B и B_C , вызываемая движением.

4. Контактные задачи B_C и B_C для вязкоупругих тел. Контактные задачи B_C и B_C с подвижными штампами, а также соответствующие им несмешанные задачи B и B с подвижными возмущениями для вязкоупругих тел могут быть исследованы совместно с задачами A_C , A и статическими задачами с привлечением принципа соответствия [7]. Этот принцип обобщает теорему 2 на задачи $A-B$ об установившихся режимах для вязкоупругих тел, а также принцип упруго-вязкоупругой аналогии, и может быть сформулирован в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 3 (ПРИНЦИП СООТВЕТСТВИЯ ДЛЯ ЗАДАЧ $A-B$ ВЯЗКОУПРУГОСТИ). Пусть определяющие соотношения вязкоупругой среды характеризуются тензором комплексных модулей $G^*(i\omega)$:

$$\sigma = G^*(x_k; i\omega) \cdot \epsilon(v) \exp(i\omega t);$$

а решение задач $A-B$ для упругой среды, полученное с использованием преобразования Фурье по координатам x_j , дается формулами (20), (29).

Тогда решение задач $A-B$ для вязкоупругой среды определяется теми же формулами (20), (29) при замене упругих модулей c_{ijkl} на комплексные модули $G_{ijkl}^*(x_k; i\Omega(\alpha_1))$.

Теорема 3 позволяет выписать интегральные формы решений задач $A-B$ и вывести интегральные уравнения задач A_C-B_C для вязкоупругой среды, если известна интегральная форма решения соответствующей задачи A для упругой среды.

С использованием данного принципа в работах [14, 15] были проведены исследования ряда задач B_C и B_C для вязкоупругой однородной полосы, а также для вязкоупругой двуслойной полосы при дозвуковых режимах движения. В [14, 15] рассмотрены также задачи B_C в квазистатических постановках, т.е. без учета инерционных членов. Основные результаты исследований контактных задач B_C и B_C , приведенные в [15], здесь повторяться не будут.

В заключение данного параграфа отметим, что наиболее сложные из рассмотренных типов задач — контактные задачи B_C для упругих и вязкоупругих сред — остаются на настоящее время и наименее изученными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В. М., Арутюнян Н. Х. Взаимодействие движущегося упругого штампа с упругой полуплоскостью через накладку или тонкий слой идеальной жидкости // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 3. С. 475–485.
2. Александров В. М., Коваленко Е. В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 336 с.
3. Апилян Ж. Г. Движение жесткого штампа по упругой полуплоскости со сверхзвуковой скоростью // Изв. АН АрмССР. Механика. 1970. Т. 23. № 5. С. 31–36.
4. Апилян Ж. Г. Движение жесткого штампа в цилиндрической полости в упругой среде со сверхзвуковой скоростью // Изв. АН АрмССР. 1973. Т. 26. № 4. С. 39–48.
5. Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
6. Бахрамов Б. М., Филиппов И. Г. О движении жесткого штампа по границе двухкомпонентного полупространства // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. н. 1970. № 6. С. 43–46.
7. Белоконь А. В. Некоторые "принципы соответствия" для динамических задач вязкоупругости // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 6. С. 136–138.
8. Белоконь А. В. К теории динамических задач с подвижными возмущениями для неоднородной упругой полосы // Докл. АН СССР. 1981. Т. 261. № 5. С. 1079–1082.
9. Белоконь А. В. Колебания упругой неоднородной полосы, вызванные движущимися нагрузками // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 2. С. 296–302.
10. Белоконь А. В. Колебания и волны в полуограниченных и ограниченных телах // Автореф. дисс. на соискание учен. степени докт. физ.-мат. наук. Л. 1987. 30 с.
11. Белоконь А. В., Ворович И. И. О некоторых закономерностях образования волновых полей в анизотропном слое при пульсирующей движущейся нагрузке // Механика и научно-технический прогресс. М.: Наука, 1988. Т. 3. С. 215–222.
12. Белоконь А. В., Наседкин А. В. Волны в неоднородном по толщине слое, вызванные движущимися нагрузками // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 2. С. 305–313.
13. Белоконь А. В., Наседкин А. В. Энергетика волн, генерируемых подвижными источниками // Акуст. ж. 1993. Т. 39. № 3. С. 421–427.
14. Белоконь А. В., Шехов В. П. Задача о движении по вязкоупругой полосе штампа, находящегося под действием нагрузки, гармонически изменяющейся во времени. Ростов-на-Дону, РГУ, 1979. 25 с.–Деп. в ВИНТИ 11.12.79, №4303–79Деп.
15. Белоконь А. В., Шехов В. П. Смешанные задачи теории вязкоупругости с движущимися штампами // Статические и динамические смешанные задачи теории упругости. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1983. С. 231–246.
16. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука, 1985. 256 с.
17. Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
18. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1953. 264 с.
19. Глушко А. И. О сверхзвуковом движении штампа по упругому полупространству // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 1. С. 92–97.
20. Горшков А. Г., Пожуев В. И. Пластины и оболочки на инерционном основании при действии подвижных нагрузок. М.: Изд-во МАИ, 1992. 136 с.

21. Ильман В. М. Движение периодической системы штампов по поверхности многослойного тела // Прикл. мех. 1981. Т. 17. № 12. С. 75–81.
22. Ильман В. М., Козларова В. Л. Контакт движущегося штампа с дискретно-неоднородной полуплоскостью. Днепропетровск, Ин-т инж. ж.-д. трансп., 1979. 12 с.–Деп. в ВИНТИ 1.03.79, №777–79Деп.
23. Кохманюк С. С., Янютин Г. Г., Романенко Л. Г. Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках. Киев: Наукова думка, 1980. 232 с.
24. Лайтхилл Дж. Волны в жидкости. М.: Мир, 1981. 598 с.
25. Лифанов И. К., Саакян А. В. Метод численного решения задачи о вдавлении движущегося штампа в упругую полуплоскость с учетом тепловыделения // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 3. С. 494–501.
26. Наседкин А. В. Общие теоремы о переносе энергии однородными волнами // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 5. С. 105–112.
27. Наседкин А. В. Новая улучшенная формулировка принципа предельной амплитуды // Интегро-дифференциальные операторы и их приложения. Ростов-на-Дону: Изд-во ДГТУ, 1998. Вып. 3. С. 71–75.
28. Саакян А. В. Построение функций влияния для упругой полосы от движущихся по ее краям с постоянной скоростью сосредоточенных сил и тепловых источников // Докл. АН АрмССР. 1978. Т. 67. № 2. С. 78–85.
29. Саакян А. В. О вдавлении равномерно движущегося упругого кругового диска в упругую полуплоскость // Шк.-семинар: Теория упругости и вязкоупругости. Мех. деформир. тел и конструкций. Цахкадзор. 1982. Ереван. 1985. С. 386–391.
30. Чурилов В. А. О действии на упругое полупространство эллиптического штампа, движущегося с постоянной скоростью // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 6. С. 1074–1079.
31. Якушев Н. З. Динамика деформируемых систем под воздействием движущейся нагрузки. Ч.3. // Исслед. по теории пластин и оболочек. Казань. 1985. № 19. С. 158–171.
32. Adams G. G., Zeid I. An elastic punch moving across the surface of a semi-infinite solid // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1984. V. 51. № 3. P. 622–629.
33. Artan R. The dynamical problem of a rectangular stamp moving on an elastic half plane // Acta Mech. 1994. V. 104. № 3-4. P. 231–239.
34. Cole J., Huth J. Stresses produced in a half-plane by moving loads // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1958. V. 25. P. 433–436.
35. Fryba L. Vibration of solids and structures under moving loads. Prague, Czechosl. Acad. Sci., 1972. 484 p.
36. Gerstle E. P., Jr. Pearsale G. W. The stress response of an elastic surface to a high-velocity unlubricated punch // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1974. V. E41. № 4. P. 1036–1040.
37. Keer L. M., Sve C. Indentation of an elastic layer by an array of punches moving with steady velocity // Pap. Amer. Soc. Mech. Eng. 1970. № WA/APM-30. 7 p.
38. Lardner R. W., Topholme G. F. An indenter moving on an anisotropic elastic half-space // Acta Mech. 1978. V. 31. № 1-2. P. 117–135.
39. Radok J. R. M. On the solution of problems of dynamic plane elasticity // Quart. J. Appl. Math. 1956. V. 14. P. 289–298.
40. Shouetsu I. Indentations of an elastic Cosserat layer by moving punches // ZAMM. 1972. V. 52. № 2. P. 93–99.
41. Shouetsu I., Atsumi Akira. Indentations of an elastic layer by moving punches // Int. J. Eng. Sci. 1971. V. 9. P. 1209–1217.

42. *Shuhubi E. S.* Moving rough punch on an elastic half-plane // *Letters in Appl. and Eng. Sci.* 1972. V. 1. P. 119–128.
43. *Sve C., Keer L. M.* Indentation of an elastic layer by moving punches // *Int. J. Solids and Struct.* 1969. V. 5. P. 795–816.
44. *Toshikazu Hara, Toshiaki Shibuya, Koizumi Takashi, Nikahara Ichiro.* Несимметричная смешанная граничная задача для упругого полупространства, подверженного действию кольцевого штампа, совершающего поступательное перемещение в плоскости границы // *Trans. JSME.* 1979. V. A45. № 339. P. 1382–1389.

Глава 4

Нестационарные динамические контактные задачи

§ 1. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПРИ ЗАДАННЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ НАГРУЗКАХ

А. Г. Горшков, Д. В. Тарлаковский

В следующих шести параграфах рассматриваются нестационарные динамические задачи о совместном деформировании двух различных тел (одно из них может считаться абсолютно жестким), соприкасающихся по некоторой поверхности (области контакта). Взаимодействующие тела занимают области G_1 , G_2 и ограничены поверхностями Π_1 , Π_2 . Характерной особенностью контактных задач является совпадение области контакта Ω лишь с частью граничных кусков поверхностей ($\Omega \subset \Pi_1$, $\Omega \subset \Pi_2$). На остальных же участках ($\Pi_1 \setminus \Omega$ и $\Pi_2 \setminus \Omega$) контакт не происходит. При этом ограничимся, в основном, нестационарными задачами об ударе абсолютно жестких и деформируемых тел по деформируемому полупространству G_2 (поверхность Π_2 — плоскость). В качестве среды же, заполняющей полупространство G_2 , как правило, будем рассматривать упругие и акустические среды, а также некоторые сплошные среды, моделирующие грунт.

Обязательным первым этапом исследования контактных задач является решение соответствующих вопросов для каждого из контактирующих тел G_1 и G_2 при заданных условиях на их граничных поверхностях Π_1 и Π_2 .

Рассмотрим эти задачи для упругого полупространства G_2 . Поверхность Π_2 — плоскость $z = 0$ (ось Oz направлена в глубь полупространства перпендикулярно к Π_2). В этом параграфе остановимся на задачах с граничными условиями несмещенного характера. Отметим, что эти задачи имеют достаточно обширную библиографию.

1. Сосредоточенные воздействия. Положим, что полупространство G_2 занято однородной изотропной линейно упругой средой. Ее движение описывается уравнениями относительно скалярного Φ и векторного Ψ потенциалов упругих смещений:

$$\ddot{\Phi} = c_1^2 \Delta \Phi, \quad \ddot{\Psi} = c_2^2 \Delta \Psi, \quad \operatorname{div} \Psi = 0, \quad u = u_i e_i = \operatorname{grad} \Phi + \operatorname{rot} \Psi, \quad (1)$$

где u — вектор упругих смещений, e_i — орты прямоугольной декартовой системы координат $Oxyz$ (оси Ox и Oy лежат в плоскости $z = 0$), c_1 и c_2 — скорости распространения волн растяжения-сжатия и сдвига, точками обозначено дифференцирование по времени t .

На плоскости $z = 0$ должны быть заданы соответствующие компоненты вектора перемещений или тензора напряжений σ_{ij} .

Если область G_2 обладает другой геометрией и/или для нее используется модель, отличная от теории упругости, то уравнения (1), граничные и начальные условия должны быть заменены соответствующими.

Большое значение в решении динамических задач для полупространства играют, так называемые, функции влияния, соответствующие сосредоточенным кинематическим или силовым воздействиям. В общем случае их совокупности образуют тензор. Однако для контактных задач в

условиях свободного проскальзывания контактирующих поверхностей достаточно рассмотреть следующие функции. Пусть $u_i = G_{1i}(t, x, y, z)$ и $\sigma_{ij} = \Gamma_{1ij}(t, x, y, z)$ при выполнении граничных условий

$$\sigma_{33}|_{z=0} = f(t) \delta(x, y), \quad \sigma_{13}|_{z=0} = \sigma_{23}|_{z=0} = 0, \quad (2)$$

а $u_i = G_{2i}(t, x, y, z)$ и $\sigma_{ij} = \Gamma_{2ij}(t, x, y, z)$ при граничных условиях

$$u_3|_{z=0} = f(t) \delta(x, y), \quad \sigma_{13}|_{z=0} = \sigma_{23}|_{z=0} = 0. \quad (3)$$

В соотношениях (2) и (3) $\delta(x, y)$ — дельта-функция Дирака. Во многих случаях удобно положить, что закон изменения граничных условий от времени также носит характер дельта-функции $f(t) = \delta(t)$.

Задачу, соответствующую граничным условиям (2), впервые рассмотрел Н. Lamb [113]. В литературе она носит название задачи Лэмба.

Решение для плоской задачи Лэмба (искомые функции не зависят от координаты y) приведено во многих работах. Как правило, используются интегральные преобразования Лапласа по времени и Фурье по координате x . Различными являются методы построения оригиналов. В монографиях Л. И. Слепяна [59], Л. И. Слепяна и Ю. С. Яковлева [61] совместное обращение преобразований Лапласа и Фурье проведено с использованием однородности изображения и аналитического представления обобщенных функций. Л. И. Слепяном [59, 60] оригиналы также найдены приближенно с помощью метода асимптотически эквивалентных функций, получена асимптотика решений в окрестности фронтов упругих волн. В монографиях В. Б. Поручикова [51], В. З. Партон и П. И. Перлина [47] приведен метод вычисления оригиналов с помощью деформаций контура интегрирования в интегралах обращения (метод Каньяра). Аналогичные методы использованы Г. И. Петрашенем, Г. И. Марчуком и К. И. Огурцовым [48], П. В. Крауклисом и Л. А. Крауклисом [37]. В работе В. Б. Поручикова [51] дано также решение с использованием метода функционально инвариантных решений. Плоская задача Лэмба рассмотрена также в монографиях А. Я. Сагомояна [56] и Е. И. Шемякина [72].

Для пространственной задачи Лэмба в случае граничного условия (2) в силу осесимметричного характера деформаций используется преобразование Лапласа по времени и двойное преобразование Фурье по пространственным переменным x и y (или эквивалентное ему преобразование Ханкеля). Этот подход использовали В. Л. Файншмидт и Е. И. Шемякин [67], Л. И. Слепян [59], U. Aulenbacher и К. J. Langenberg [79], а также Р. G. Richards [126]. В монографии В. Б. Поручикова [51] для построения решения использована связь плоской и осесимметричной задачи. D. Kosloff, M. Reshef и D. Loewenthal [112] применили численный метод, основанный на аппроксимации производных по пространственным переменным с помощью быстрого преобразования Фурье. В работах

А. Г. Горшкова и Д. В. Тарлаковского [23], Д. В. Тарлаковского [64] доказано утверждение об интегральном преобразовании, порожденном двумя другими, в случае специальной связи изображений двух последних. На основе этого найдена связь решений плоской и пространственной задач Лэмба на граничной плоскости $z = 0$:

$$G_a(t, r) = G_{13}(t, x, y, 0) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty x (x^2 - r^2)_+^{-3/2} G_f(t, x, 0) dx, \quad (4)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $G_f(t, x, y)$ — решение плоской задачи, а интеграл понимается в смысле регуляризованного значения.

Выражение (4) позволило получить решение осесимметричной задачи в явном виде без обращения преобразований Лапласа и Ханкеля:

$$G_a(t, r) = \frac{t}{2\pi\eta^4} \sum_{k=1}^2 [a_k (r^2 - c_R^2 t^2)_+^{-3/2} + \chi_k(t^2, r^2)] H(t - \eta_k r), \quad (5)$$

$$\eta_1 = 1, \quad \eta_2 = \eta = \frac{c_1}{c_2},$$

где a_k — некоторые коэффициенты, зависящие от параметров среды; c_R — скорость волн Рэлея; $\chi_k(t, r)$ — известные функции; $H(t)$ — функция Хевисайда.

При решении осесимметричных задач может быть полезна специальная функция влияния $G_{1a}(t, r, \rho) = u_3|_{z=0}$, соответствующая граничным условиям вида:

$$\sigma_{33}|_{z=0} = f(t) \delta(r - \rho), \quad \sigma_{13}|_{z=0} = \sigma_{23}|_{z=0} = 0. \quad (6)$$

При ее наличии решение для случая задания напряжений в круговой области на плоскости $z = 0$ может быть найдено с использованием теоремы умножения для преобразования Ханкеля. Такой подход рассмотрен в работах Б. Л. Абрамяна [1], А. Г. Горшкова и Д. В. Тарлаковского [23], Д. В. Тарлаковского [64].

Различные аспекты решения задачи Лэмба, связанные, в основном, с видом функции $f(t)$ в граничных условиях (2) и (3), рассмотрели М. Д. Бородай, В. М. Сеймов и Е. Д. Шевченко [11], Л. М. Brock [88], С. С. Chao, Н. Н. Bleich и J. Sackman [89], J. S. Kim и W. Soedel [110, 111], С. L. Pekeris [125], В. W. Stump [133]. Функции влияния типа Γ_{2ij} найдены в работах Л. И. Слепяна и Ю. С. Яковлева [61], А. Г. Горшкова и Д. В. Тарлаковского [21, 23].

Приближенное решение задачи Лэмба для несжимаемой среды дано в работе Д. Н. Климовой и К. И. Огурцова [35]. Hu De-sui [105] использовал для исследования этой задачи преобразование Унгара, а В. Steinfeld, Н. Takemiya и Н. Antes [132] провели сравнения точного решения с численным, полученным с помощью метода граничных элементов.

С. Е. Носовым [45] рассмотрена задача типа Лэмба с усложненными граничными условиями Винклера. А. С. Благовещенский [10] использовал известное решение этой задачи для восстановления скорости поперечных волн в упругом полупространстве.

Более сложными являются задачи с сосредоточенными подвижными нагрузками. В имеющихся публикациях, как правило, рассматривается силовое возбуждение полупространства, что соответствует заданию на плоскости $z = 0$ нормальных напряжений в случае плоской задачи в виде

$$\sigma_{33}|_{z=0} = f(t) \delta(x - l(t)), \quad \sigma_{13}|_{z=0} = 0, \quad (7)$$

где $l(t)$ — закон движения нагрузки.

Наиболее просто решаются стационарные задачи, в которых нагрузка движется равномерно ($l(t) = Vt$), не учитываются начальные условия задачи и $f(t) = P$. В этом случае имеет место автомодельность, размерность задачи понижается на единицу с помощью перехода к подвижной системе координат. Эти вопросы исследовали, например, А. Барпиев [8], J. Cole и J. Huth [93], J. Mandell и A. Avramesco [115].

Нестационарные задачи при равномерном движении $l(t) = Vt$ сосредоточенной нагрузки исследовали N. Higuchi и К.-И. Hirashima [103], D. D. Ang [77], М. Mitra [119]. При этом удается использовать фактически тот же математический аппарат, что и для неподвижной нагрузки. Отмечается зависимость характера решения от диапазона, в котором лежит скорость движения нагрузки ($0 < V < c_2$ — дозвуковая скорость, $c_2 < V < c_1$ — транзвуковая скорость, $V > c_1$ — сверхзвуковая скорость), и, в том числе, наличие разрывов при $V = c_R$. Р. С. Payton [124] в аналогичной задаче использовал в пространстве преобразований Лапласа теорему взаимности Бетти-Релея.

Ю. Д. Каплуновым [33] для плоской задачи сделана попытка рассмотреть произвольный закон движения нормальной нагрузки $l(t)$. Решение представлено в виде сверток с функцией влияния G_{13} . Основные математические трудности, возникающие здесь, связаны с переходом к подвижной системе координат (соответствующей заменой переменной интегрирования). Автору удалось кроме равномерного закона рассмотреть также и равноускоренное движение $l(t) = Vt + \frac{1}{2}Wt^2$.

G. Eason [95], К. Watanabe [138], D. C. Gakenheimer и J. Miklowitz [101], D. C. Gakenheimer [100] учли трехмерный характер возмущений, вносимых движущейся нагрузкой вида $\sigma_{33}|_{z=0} = -\delta(y) \delta(x - Vt)$. В последней работе показано, что в частном случае $V = 0$ получается решение задачи Лэмба. Л. А. Молотковым [41] решена осесимметричная задача о равномерном расширении окружности, на которой сосредоточены нормальные напряжения $\sigma_{33}|_{z=0} = -f(t) \delta(r - Vt)/r$. Обращение преобразований Лапласа и Ханкеля проведено асимптотическими методами. Выделены основные компоненты поля упругих смещений.

2. **Распределенные нагрузки.** Постановка задачи в этом случае определяется так же, как и в п. 1, уравнениями (1). Однако в граничные условия типа (2) и (3) входят функции, носитель которых не является точечным. Например, вместо условий (2) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{33}|_{z=0} &= T(t, x, y) H(\Omega), \quad \sigma_{13}|_{z=0} = \sigma_{23}|_{z=0} = 0, \\ H(\Omega) &= 1 \quad (x, y) \in \Omega, \quad H(\Omega) = 0 \quad (x, y) \notin \Omega, \end{aligned} \quad (8)$$

где область Ω может быть как ограниченной, так и неограниченной (в том числе $\Omega = \mathbb{R}^2$), может как зависеть от времени t , так и не зависеть.

Естественно, возможно и другое сочетание граничных условий, допускаемое теоремами существования и единственности решения задач линейной теории упругости. Причем только при некоторых вариантах, как указано, например, Л. М. Флитманом [69], начально-краевая задача для полупространства распадается на две независимые.

В случае распределенных на плоскости $z = 0$ возмущений (кинематических или силовых) решение может быть получено с использованием принципа суперпозиции для линейных задач (теорем умножения) и функций влияния. Например, в случае граничных условий (8) компоненты напряженно-деформированного состояния упругой среды можно представить

$$\begin{aligned} u_i(t, x, y, z) &= \int_0^t d\tau \iint_{\Omega} T(\tau, \xi_1, \xi_2) G_{1i}(t-\tau, x-\xi_1, y-\xi_2, z) d\xi_1 d\xi_2, \\ \sigma_{ij}(t, x, y, z) &= \int_0^t d\tau \iint_{\Omega} T(\tau, \xi_1, \xi_2) \Gamma_{1i}(t-\tau, x-\xi_1, y-\xi_2, z) d\xi_1 d\xi_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Использованные здесь функции влияния соответствуют $f(t) = \delta(t)$ в (2).

С другой стороны, в этих задачах для конкретного типа областей и функций $T(t, x, y)$ иногда удобно использовать те же методы, что и для сосредоточенных нагрузок: интегральные преобразования в сочетании с различными методами обращения, численные методы, метод запаздывающих потенциалов. Построение интегральных уравнений для упругого полупространства с помощью последнего метода дано, например, в монографии Г. М. Мюнтца [42].

Трудности решения соответствующих задач во многом определяются их размерностью и видом носителя Ω поверхностных нагрузок.

Простейшими в этом смысле являются *плоские задачи*. В работах А. Г. Багдоева [7], М. А. Белецкого и В. М. Сеймова [9] дано их решение с помощью интегральных преобразований при действии на граничную полуплоскость нормальных напряжений, сосредоточенных на отрезке:

$$\sigma_{33}|_{z=0} = P H(t) H(l-|x|), \quad \sigma_{13}|_{z=0} = 0, \quad (10)$$

Различные варианты зависимости нормальных напряжений в соотношениях (8) от времени и пространственной координаты рассмотрели М. В. Долотов [25] и М. Ziv [141].

Ю. С. Яковлев и В. Л. Лобысев [74] в случае задания смещения точек свободной поверхности полуплоскости находили оригиналы преобразования Лапласа с помощью метода асимптотически эквивалентных функций. Случай периодического изменения перемещений или напряжений в граничных условиях исследован О. Жарием [27]. Вариант гипотетической среды, описываемой одним волновым уравнением, рассмотрен Д. Н. Климовой и К. И. Огурцовым [34], С. Г. Михлиным [40]. В последней работе использована формула Грина.

Численный разностный метод в случае граничных условий типа (10) применен Л. И. Дятловицким, В. М. Сеймовым, А. И. Ермоленко и Н. П. Кукленко [26], Н. Н. Сергеевым-Альбовым [58]. С. А. Vrebbia [82], W. J. Mansug и С. А. Vrebbia [117] использовали метод граничных элементов. Дано сравнение с решениями, полученными конечно-разностными методами.

Для *осесимметричной задачи* в большинстве работ нагрузка на поверхности полупространства задается в виде нормальных напряжений, сосредоточенных в круге $\Omega = \{(x, y) | 0 \leq r \leq a\}$:

$$\sigma_{33}|_{z=0} = T(t, r) H(a-r), \quad \sigma_{13}|_{z=0} = \sigma_{23}|_{z=0} = 0. \quad (11)$$

Решение задачи такого типа при $T(t, r) = f(t)g(r)$ с использованием интегральных преобразований получили Л. Н. Сретенский [63], М. Mitra [120], К. Wang и Y. Wang [137]. G. Eason [97] рассмотрел различные варианты функции $g(r)$ (в том числе, задачу Лэмба: $g(r) = \delta(x, y)$), а А. Roy [128] исследовал решение в окрестности волновых фронтов. В работах К. И. Огурцова и Г. И. Петрашени [46], В. С. Никифоровского [44] в качестве функции $g(r)$ использованы члены дельта-последовательности $g_n(r)$. При $n \rightarrow \infty$ отсюда следует решение задачи Лэмба. F. G. Laturelle [114] провел сравнение решений, полученных методом интегральных преобразований и методом конечных элементов. В работе А. И. Бабичева, Р. С. Кадьрова и У. Саримсакова [5] предложен приближенный метод определения параметров упругих волн в полупространстве. Различные варианты вида функции $T(t, r)$ в (11) рассмотрели также L. F. Bresse и D. Hutchins [83, 84].

Для границы $\partial\Omega$ в виде окружности радиуса $r = a$ решение задачи также может быть определено формулами типа (9). Такой подход для осесимметричной задачи использован А. Г. Горшковым и Д. В. Тарлаковским [23], Д. В. Тарлаковским [64], А. Г. Горшковым, А. А. Коровайцевым, А. Л. Медведским и Д. В. Тарлаковским [20]. Здесь для граничных условий (11) нормальные перемещения на границе полупространства предста-

влены

$$u_3(t, x, y, 0) = w_0(t, r) = \int_0^t d\tau \int_0^a \Lambda(t - \tau, r, \rho) T(\tau, \rho) d\rho, \quad (12)$$

$$\Lambda(t, r, \rho) = 2\rho \int_{-1}^1 \frac{G_a(t, \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho z})}{\sqrt{1 - z^2}} dz.$$

Явный вид (5) решения осесимметричной задачи Лэмба позволяет представить ядро Λ интегрального представления (12) в виде суммы регулярных и сингулярных слагаемых. Первое из них выражается через эллиптические и гиперэллиптические интегралы, а второе при $r \neq \rho$, $r\rho \neq 0$ имеет вид

$$\Lambda_s(t, r, \rho) = Ct \sqrt{\frac{\rho}{r}} \left[\frac{1}{c_R^2 t^2 - (r - \rho)^2} + \frac{1}{16r\rho} \ln |c_R^2 t^2 - (r - \rho)^2| \right], \quad (13)$$

где C — некоторая константа, зависящая от свойств материала упругой среды.

В последней работе для вычисления интеграла (12) при постоянном давлении использованы специальные квадратурные формулы, учитывающие сингулярность ядра.

G. Eason [95] и A. K. Mitra [118] исследовали крутильные колебания полупространства, что соответствует заданию на плоскости $z = 0$ касательных напряжений $\sigma_{r\theta}$ (θ — угол в цилиндрической системе координат).

В случае *трехмерной задачи* нагрузка несимметрична относительно начала координат. Одним из первых эту задачу с помощью интегрального преобразования Фурье по всем переменным исследовал Д. И. Шерман [73]. В работах Л. А. Назарова [43], Т. Jingu и Е. Tsuchida [109] с помощью методов, используемых в осесимметричных задачах, рассмотрен специальный вид граничных условий:

$$\sigma_{33}|_{z=0} = f(t), \quad \sigma_{r\theta}|_{z=0} = f(t)g(r)\sin\theta, \quad \sigma_{z\theta}|_{z=0} = f(t)g(r)\cos\theta. \quad (14)$$

В работе Т. Jingu, Н. Matsumoto и К. Nezu [107] носителем напряжений в граничных условиях является положительная полуось Ox . Нагрузка в виде нормальных напряжений, сосредоточенных на границе в полуплоскости, четвертьплоскости, полуполосе или прямоугольнике, рассмотрена Т. Jingu, Н. Matsumoto и К. Nezu [106, 108], F. R. Norwood [121], F. Guan и М. Novak [102]. Для обращения интегральных преобразований использован трехмерный вариант метода Каньяра. Асимптотическое представление решения в случае задания нормальных перемещений в прямоугольной области получено в работах Н. А. Лаврова и Л. И. Слепяна [39], Н. А. Лаврова [38].

A. Roy [130] построил решения для варианта равномерного распределения нормальных напряжений по эллиптической области Ω . Численное обращение интегральных преобразований использовано в статье

О. Д. Пряхиной и А. В. Смирновой [52]. F. Abramovici, E. R. Kanasewich и P. G. Kelamis [75] исследовали задачу о колебаниях упругого полупространства применительно к вопросам сейсмологии.

Если нагрузка на границе полупространства является *подвижной* (под такими понимаются граничные условия типа (8), где область Ω зависит от времени), то непосредственное применение преобразования Лапласа при произвольном законе изменения во времени границы $\partial\Omega$ затруднено. Поэтому в имеющихся в настоящее время публикациях, в основном, исследованы случаи расширения границы $\partial\Omega$. Р. В. Гольдштейн [19] и J. W. Stagg [94] рассмотрели для плоской задачи вариант задания на границе напряжений в виде $\sigma_{33} = TH(Vt - x)$ при $V = \text{const}$. Показано, что вид решения существенно зависит от величины скорости V движения нагрузки. В первой из этих двух работ решение построено с использованием метода Винера–Хопфа. Проведено сравнение со стационарным решением. Существенное различие заключается, например, в том, что в последнем случае при $V = c_R$ решение не существует. Вариант зависимости амплитуды T нормальных напряжений от пространственной координаты рассмотрен в монографии И. Снеддона [62].

L. M. Brock [85] исследовал плоскую автомодельную задачу при задании нормальных перемещений на равномерно расширяющейся площадке $u_3|_{z=0} = U(t, x)H(Vt - |x|)$. Ее автомодельность достигается не только за счет постоянства скорости V , но и вследствие однородности степени n функции $U(t, x)$. Для примера последняя выбрана в виде однородного многочлена степени n двух переменных.

G. Eason [96], S. K. Singh и J. T. Kuo [131] рассмотрели осесимметричную задачу с граничными условиями вида (11) при равномерном расширении круга $\Omega: a = Vt$. Последнее условие позволяет использовать для решения соответствующие интегральные преобразования. Во второй работе при $V < c_2$ (дозвуковой режим) решение представлено в виде двух слагаемых, выраженных через гипергеометрические функции и являющихся его статической и динамической частями. L. M. Brock [87] исследовал аналогичную задачу для двух случаев: а) $T(t, r) = f(t)$, $a = \text{const}$; б) $T(t, r) = \text{const}$, $a = a(t)$. Такая же задача наряду с заданием на границе вместо нормальных напряжений нормальных перемещений решена С. Atkinson [78]. При произвольном законе $a = a(t)$ A. Roy [129] представил решение в виде повторных интегралов и построил соответствующие асимптотики в окрестности волновых фронтов.

В работе А. С. Быковцева и Д. Б. Крамаровского [16] для пространственной задачи нормальное перемещение задано в четвертьплоскости поверхности полупространства, граница которой равномерно перемещается вдоль оси Ox (так называемый, «дислокационный разрыв»): $u_3|_{z=0} = UH(y)H(Vt - |x|)$. Различные аспекты этого вопроса исследованы также А. С. Быковцевым [13–15], А. С. Быковцевым и Г. П. Черепановым

вым [17, 18], Я. У. Саатовым, А. С. Быковцевым и Л. А. Хамидовым [54]. К. Fujii [99] рассмотрел аналогичную задачу, в которой вместо перемещений задаются нормальные напряжения. В обоих случаях применяются интегральные преобразования Лапласа и Фурье с последующим обращением методом Каньяра.

При произвольном законе изменения границы $\partial\Omega$ решение задачи также может быть определено формулами (9). Такой подход для осесимметричной задачи с применением представления (12) при $a = a(t)$ использован А. Г. Горшковым и Д. В. Тарлаковским [23], Д. В. Тарлаковским [64], а для плоского случая — Амар Абдул Карим Салманом, А. Г. Горшковым и Д. В. Тарлаковским [4], А. Г. Горшковым и Д. В. Тарлаковским [22].

Пространственная задача о воздействии подвижной нагрузки на упругое полупространство рассмотрена также А. К. Кадыровым [32].

3. Упругое полупространство с усложненными свойствами. Учет дополнительных свойств среды, заполняющей полупространство, даже в рамках линейной упругости (вязкость, неоднородность, анизотропия) приводит к существенному увеличению математических трудностей при решении рассмотренных выше задач.

Число публикаций, например, для *вязкоупругих сред* невелико. В работе С. З. Брука [12] исследована плоская задача Лэмба для среды с вольтерровскими соотношениями между напряжениями и деформациями с ядрами релаксации общего вида. Приведено асимптотическое решение. F. Chwalczyk, J. Rafa и E. Wlodarczyk [90] рассмотрели задачу о равномерном движении по поверхности полупространства сосредоточенной силы (дозвуковой случай) для упруговязкой среды Больцмана. Дано сравнение с идеально упругой средой и указано на существенное влияние вязких эффектов.

Задача Лэмба для *магнитоупругой среды* рассмотрена Г. Е. Багдасаряном и З. Н. Данояном [6].

Сравнительно более обширная литература имеется для неоднородных и анизотропных сред.

Сложности задач для *непрерывно неоднородной среды* обусловили тот факт, что решение, как правило, строится для частных случаев неоднородности. К. Ватанабе [142, 143] для двумерных (плоской и осесимметричной) задач рассмотрел упругое полупространство с неоднородностью вида

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{\rho}{\rho_0} = (1 + \varepsilon z)^\nu, \quad (15)$$

где μ и ρ — модуль сдвига и плотность среды. При этом на границе полупространства заданы сдвиговые напряжения, сосредоточенные на отрезке или в круге. Показано, что для такой среды возможно использование преобразований Лапласа и Фурье (Ханкеля). При $\nu = 2n$ ($n \in Z$) интегралы обращения находятся методом Каньяра.

М. Tada, К. Watanabe и Y. Hirano [134] предположили, что функция имеет характер нормального закона Гаусса и неоднородность мала. В решении наряду с интегральными преобразованиями используется метод малого параметра. Последний метод применил также Г. П. Коваленко [36] в задаче с нагрузкой, распределенной по кругу с равномерно расширяющейся границей. В работе А. С. Алексеева [2] получено асимптотическое решение для акустического полупространства со скоростью звука, пропорциональной координате z , и заданным на границе перемещением или его производной по z . Показано, что на фронте волны конечный скачок может переходить в логарифмический разрыв.

В статье А. Г. Аленицына [3] рассмотрена задача Лэмба при условии, что законы изменения скоростей распространения волн в среде таковы, что $c_i^2(z) < 0$ ($i = 1, 2$). Для решения использованы специальные интегральные преобразования. Подынтегральная функция в интегралах обращения задается как решение некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. На основании ее асимптотического анализа получено приближенное решение в окрестности волнового фронта.

Необходимость рассмотрения *кусочно-однородных сред* и, в частности, слоистого упругого полупространства, составленного из конечного или бесконечного числа однородных слоев с границами, параллельными плоскости $z = 0$, вызывается либо структурой реальных объектов, либо соответствующей дискретизацией непрерывно неоднородной среды. Точное решение нестационарных задач в этом случае серьезно осложняется появлением эффектов отражения и преломления волн на границах раздела сред. И чем больше слоев, тем значительнее трудности. Поэтому основные известные результаты для кусочно-однородных полупространств получены либо для малого числа слоев, либо учитываются отражение и преломление лишь первых элементарных волн (что эквивалентно малому числу слоев), либо принимаются специальные гипотезы (периодичность слоев, малое отличие их свойств), либо используются для некоторых слоев модели меньшей размерности, чем в теории упругости.

В работах С. С. Григоряна и Р. А. Чередниченко [24], Р. А. Чередниченко [70] рассмотрена осесимметричная задача о действии на упругий слой, покрывающий однородное полупространство, нормального давления. Последнее определяется из решения автомодельной задачи о сильном взрыве со сферической симметрией в воздухе. Используется конечно-разностный метод второго порядка точности совместно с соотношениями на бихарактеристиках. По сравнению с однородным полупространством обнаружена значительная концентрация напряжений на границе раздела.

Полупространство аналогичной структуры рассмотрено также G. G. Adams [76], S. C. Mandel и M. L. Ghosh [116], В. И. Пожужевым и Н. П. Поляковой [50], а также В. Н. Тищенко [66]. В последней работе решение получено в виде разложения по степеням двух малых па-

раметров: толщины слоя и отношения модулей сдвига упругих сред. В статье Л. М. Brock [86] в случае действия сосредоточенной нормальной силы полагается, что полупространство покрыто инерционным слоем. Эта упрощенная модель позволила так же, как и для однородного полупространства, применить традиционные методы интегральных преобразований. Полупространство с покрытием в виде пластины рассмотрено в работах В. И. Пожуева и Н. П. Поляковой [49], R. J. Hosking [104].

Родственными с указанными выше вопросами являются задачи, которые исследовали В. Е. Bennett и G. Neftmann [80] (упругое полупространство, контактирующее с акустическим полупространством), О. А. Савицкий [55] (упругая полуплоскость, покрытая системой «балка — слой» акустической среды).

М. Х. Ильясовым и Д. И. Исаевым [29, 30], Д. И. Исаевым [31] рассмотрены задачи о нестационарных колебаниях под действием поверхностного давления полупространства, составленного из чередующихся двух однородных слоев, либо имеющего один армирующий слой, либо покрытого тонким упругим слоем. Используется метод малого параметра, который характеризует степень различия свойств материалов сред. Задача о распространении продольных упругих волн в многослойном полупространстве рассмотрена также М. Б. Расуловым [53].

В монографии А. Г. Багдоева [7] дана постановка и решение задачи о действии нормального давления на многослойное полупространство. Изображения искомых функций, найденные с помощью преобразований Лапласа и Фурье, раскладываются в ряды по экспонентам, что соответствует разложению по элементарным волнам в пространстве оригиналов. М. Tada, К. Watanabe и Y. Hirano [135] построили асимптотическое решение задачи типа Лэмба для полупространства, у которого модуль сдвига есть кусочно-постоянная функция координаты z . L. E. Voelker и I. D. Achenbach [136] получили решение аналогичной плоской задачи. Здесь использован алгоритм численного обращения преобразования Фурье, а также построены асимптотики решения при $t \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$. Соответствующие задачи для многослойного полупространства рассмотрены также В. А. Феофановой и В. Г. Яхно [68], G. A. Rodgersson [127].

Для анизотропных сред число публикаций также ограничено. Изображения по Лапласу и Фурье всех возможных поверхностных функций влияния, включая решения, определяемые граничными условиями (2) и (3), для среды с произвольной анизотропией найдены А. Г. Горшковым и Д. В. Тарлаковским [23]. Как правило же, рассматриваются лишь частные случаи анизотропии. Так Д. В. Тарлаковский и С. Н. Федоров [65] нашли оригиналы функций влияния для плоской задачи в случае ортотропного полупространства. Аналогичные вопросы, но уже с учетом слоистости полуплоскости, исследовал Fang Yingguang [98]. Задачу о кручении сосредоточенным моментом для такой же среды рассмотрел В. Bogowski [81].

В. А. Свекло [57] исследовал задачу Лэмба для среды с тремя упругими постоянными. Им показано, что скорость волн Рэлея является функцией всех трех констант. F. Chwalczyk, J. Rafa и E. Wlodarczyk [91, 92] с помощью интегральных преобразований исследовали нестационарную плоскую задачу о равномерном движении по поверхности полупространства сосредоточенной силы. Показано, что аналитическое решение задачи может быть получено лишь для частных случаев упругих констант. P. C. Pal [122] применительно к теории трещин рассмотрел задачу о неравномерном движении сосредоточенной силы по границе, разделяющей упругие анизотропные слой и полуплоскость.

Осесимметричные задачи о действии на трансверсально изотропное упругое полупространство соответственно касательных и нормальных напряжений, сосредоточенных в круге, рассмотрели P. C. Pal [123] и А. С. Зильберглейт, И. Н. Златина и И. Б. Суслова [28]. Найдены перемещения на граничной плоскости. J. R. Willis [139], J. R. Willis и R. J. Bedding [140] построили решение автомобильной осесимметричной задачи при задании на границе нормального напряжения в виде однородной функции двух переменных t и r . А. П. Чугайновой [71] исследована автомобильная задача о действии бегущей нагрузки на границу нелинейно упругого слабо анизотропного полупространства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрамян Б. Л. Об одной задаче распространения упругих волн в полупространстве // Докл. АН АрмССР. 1985. Т. 81. № 3. С. 118–122.
2. Алексеев А. С. Задачи типа Лэмба для волнового уравнения в линейно-неоднородном полупространстве // Уч. зап. ЛГУ. 1958. № 246. Вып. 32. С. 167–227.
3. Аленицын А. Г. О задаче Лэмба для неоднородного упругого полупространства // Проблемы мат. физики. № 2. Л., 1966. С. 5–32.
4. Амар Абдул Карим Салман, Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В. Реакция упругой полуплоскости на действие нестационарной подвижной нагрузки // Матер. IV Междунар. симп. «Динам. и технол. пробл. мех. констр. сплош. сред». М.: Изд-во «ГРАФРОС», 1998. С. 4.
5. Бабичев А. И., Кадыров Р. С., Саримсаков У. Распространение упругих волн в полупространстве // Докл. УзССР. 1983. № 2. С. 12–15.
6. Багдасарян Г. Е., Даноян З. Н. Плоская магнитоупругая задача Лэмба // Механика: Межвуз. сб. научн. тр. № 3. Ереван: Изд-во Ерев. гос. ун-та, 1983. С. 68–76.
7. Багдоев А. Г. Пространственные нестационарные движения сплошной среды с ударными волнами. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1961. 276 с.
8. Баржиев А. Распространение волн в полупространстве, возбужденных подвижной нагрузкой, бегущей по его границе со сверхзвуковой скоростью // Динам. жидкости, газа и плазмы: Сб. научн. тр. Кирг. гос. ун-та. Фрунзе: Изд-во Кирг. гос. ун-та, 1982. С. 30–32.
9. Белецкий М. А., Сеймов В. М. Динамические поля напряжений в упругой полуплоскости при нагружении на части границы // Прикл. мех. 1985. Т. 21. № 12. С. 112–115.

10. *Благовещенский А. С.* Обратная осесимметрическая задача Лэмба // Зап. научн. семин. ЛОМИ. № 203. Л.: Наука, 1992. С. 51–67.
11. *Бородай М. Д., Сеймов В. М., Шевченко Е. Д.* Передаточные функции для прямоугольного штампа на упругом полупространстве при вертикальных и горизонтальных динамических воздействиях // Повыш. надеж. энерг. сооруж. при динам. воздействиях: Матер. конф. и совещ. по гидротехн. Л.: Энергоатомиздат, 1989. С. 203–206.
12. *Брук С. З.* Задача Лэмба в вязкоупругой полуплоскости // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 3. С. 56–63.
13. *Быковцев А. С.* Об особенностях напряжений, получающихся при кинематическом описании разрывов // Докл. АНУзССР. 1983. № 4. С. 12–14.
14. *Быковцев А. С.* О волновых полях, создаваемых распространяющимися дислокационными разрывами // Экспер. сейсмология в Узбекистане. Ташкент: Фан, 1983. С. 171–193.
15. *Быковцев А. С.* Распространение сложных разрывов с кусочно-постоянными и переменными скоростями вдоль криволинейных и ветвящихся траекторий // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 5. С. 804–814.
16. *Быковцев А. С., Крамаровский Д. Б.* О распространении сложной площадки разрушения. Точное трехмерное решение // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 1. С. 117–129.
17. *Быковцев А. С., Черепанов Г. П.* Об одной модели очага тектонического землетрясения // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 3. С. 557–564.
18. *Быковцев А. С., Черепанов Г. П.* О предельной скорости прямолинейного распространения сдвигового дислокационного разрыва // Докл. АНУзССР. 1980. № 3. С. 22–24.
19. *Гольдштейн Р. В.* Волны Рэлея и резонансные явления в упругих телах // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 3. С. 516–525.
20. *Горшков А. Г., Коровайцев А. А., Медведский А. Л., Тарлаковский Д. В.* Отклик упругого изотропного полупространства на нестационарное возбуждение осесимметричным давлением // Матер. IV Междунар. симп. «Динам. и технол. пробл. мех. констр. сплош. сред». М.: Изд-во «ГРАФРОС», 1998. С. 88–95.
21. *Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В.* Динамические контактные задачи для абсолютно жестких тел и упругого полупространства. Препринт. МАИ, 1989. 49 с.
22. *Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В.* Напряжения в упругой полуплоскости в случае подвижных граничных условий // Импульсные процессы в мех. сплош. среды (Тез. докл. I научн. школы. Николаев, сент. 1994 г.). Николаев, 1994. С. 57–58.
23. *Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В.* Динамические контактные задачи с подвижными границами. М.: Наука. Физматлит, 1995. 352 с.
24. *Григорян С. С., Чередниченко Р. А.* Распространение в слоистом полупространстве упругих волн, вызванных поверхностной динамической нагрузкой // Изв. АН. МТТ. 1976. № 1. С. 111–118.
25. *Долотов М. В.* Об асимптотике решения динамической задачи для упругого полупространства // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 2. С. 45–51.
26. *Дятловицкий Л. И., Сеймов В. М., Ермоленко А. И., Кукленко Н. П.* Сопоставление точного и разностного решения плоской задачи о распространении упругих волн // Труды 2-й Всес. конф. по числ. методам решения задач теории упругости и пластичности, 1971 г. Новосибирск, 1971. С. 114–125.
27. *Жарий О.* Закономерности формирования волн Рэлея при нестационарных колебаниях полуплоскости // Акуст. ж. 1988. № 4. С. 633–637.

28. *Зильбергейт А. С., Златина И. Н., Сулова И. Б.* О нестационарной задаче для трансверсально-изотропного полупространства // Новожиловский сб. С.-Пб., 1992. С. 115–122.
29. *Ильясов М. Х., Исаев Д. И.* К распространению нестационарных волн сдвига в слоистом упругом полупространстве // Матер. 5 Респ. конф. молод. ученых по матем. и мех. Баку, 1984 г. Т. 2. Ч. 2. Баку, 1984. С. 45–50.
30. *Ильясов М. Х., Исаев Д. И.* О касательном ударе по упругому полупространству, армированному упругим слоем // Мех. деформир. тверд. тела. № 5. Баку, 1988. С. 121–131.
31. *Исаев Д. И.* Распространение продольных волн в упругом слоистом полупространстве // Матер. 4 Респ. конф. молод. ученых по матем. и мех., посвящ. 60-летию образ. СССР, Баку, 1982 г. Механика. Баку, 1983. С. 137–142.
32. *Кадыров А. К.* Пространственная задача о воздействии подвижной нагрузки на упругое полупространство // Прочн. и надежн. хим. оборуд. М.: Моск. ин-т хим. машиностр., 1989. С. 43–46.
33. *Каплунов Ю. Д.* Нестационарная динамика упругой полуплоскости при действии подвижной нагрузки. Препринт. Ин-т пробл. мех. АН. № 277, 1986. 54 с.
34. *Климова Д. Н., Огуцов К. И.* О поведении упругого поля за фронтом плоской нестационарной волны // Аналит. методы и применение ЭВМ в мех. горн. пород. Новосибирск, 1982. С. 167–169.
35. *Климова Д. Н., Огуцов К. И.* Уточнение модели несжимаемости в некоторых задачах динамики деформируемых сред // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 4. С. 106–110.
36. *Коваленко Г. П.* О колебаниях твердой неоднородной среды, вызванных источником, приложенным к расширяющейся окружности на границе // Динам. системы. № 4. К., 1985. С. 65–72.
37. *Крауклис П. В., Крауклис Л. А.* К вопросу о существовании предвестника в нестационарной задаче Лэмба // Вопр. динам. теории распростр. сейсмич. волн. № 24. Л., 1984. С. 122–128.
38. *Лавров Н. А.* Колебания протяженного сооружения на упругом грунте // Прикл. пробл. прочн. и пластик. № 29. Горький, 1985. С. 55–59.
39. *Лавров Н. А., Слепян Л. И.* Модифицированная плоская задача для упругого полупространства // Докл. АН СССР. 1984. Т. 276. № 1. С. 83–87.
40. *Михлин С. Г.* Некоторые элементарные задачи для волнового уравнения // Тр. сейсмол. ин-та АН. № 101. М., 1940. 18 с.
41. *Молотков Л. А.* О колебаниях однородного упругого полупространства под действием источника, приложенного к равномерно расширяющейся окружности // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 2. С. 211–221.
42. *Мюнц Г. М.* Интегральные уравнения. Ч. 1. Линейные уравнения Вольтерра. Л.; М.: Гостехиздат, 1934. 330 с.
43. *Назаров Л. А.* Исследование поля напряжений в упругом полупространстве при касательной динамической нагрузке на его поверхности // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1982. № 3. С. 41–46.
44. *Никифоровский В. С.* Исследование динамического поля напряжений в окрестности точки приложения нагрузки // ПМТФ. 1962. № 2. С. 85–94.
45. *Носов С. Е.* Задача Лэмба для упругой полуплоскости с граничным условием Винклера // Вестн. МГУ. Сер. 1. 1993. № 3. С. 58–62.
46. *Огуцов К. И., Петрашень Г. И.* Динамические задачи для упругого полупространства в случае осевой симметрии // Уч. зап. ЛГУ. 1951. № 149. Вып. 24. С. 3–117.

47. Партон В. З., Перлин П. И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
48. Петрашень Г. И., Марчук Г. И., Огурцов К. И. О задаче Лэмба в случае полупространства // Уч. зап. ЛГУ. 1950. № 135. Вып. 21. С. 71–118.
49. Пожуев В. И., Полякова Н. П. Нестационарное деформирование двухслойного полупространства под действием расширяющихся поверхностных нагрузок // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 5. С. 68–74.
50. Пожуев В. И., Полякова Н. П. Трехмерное деформирование двухслойного полупространства под действием поверхностной подвижной нагрузки // Прикл. мех. 1996. Т. 32. № 8. С. 48–55.
51. Поручиков В. Б. Методы динамической теории упругости. М.: Наука. 1986. 328 с.
52. Пряхина О. Д., Смирнова А. В. К расчету напряженно-деформированного состояния упругой среды при нестационарном нагружении // Изв. Сев.-Кавказ. науч. центра высш. школы. Сер. естест. наук. 1983. № 1. С. 38–40.
53. Расулов М. Б. Распространение продольных упругих волн в многослойном полупространстве // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и матем. наук. 1983. Т. 4. № 2. С. 43–48.
54. Саатов Я. У., Быковцев А. С., Хамидов Л. А. Сейсмологические задачи механики. Ташкент: Мехнат, 1985. 275 с.
55. Савицкий О. А. Колебания балочной плиты на упругом основании, покрытом слоем жидкости, под действием нестационарной нагрузки // Гидромеханика. № 48. Киев, 1983. С. 33–37.
56. Сагомонян А. Я. Волны напряжений в сплошных средах. М.: МГУ. 1985. 416 с.
57. Свекло В. А. К решению динамических задач плоской теории упругости для анизотропного тела // Прикл. мех. 1961. Т. 25. С. 885–896.
58. Сергеев-Альбов Н. Н. Приближенно-аналитический алгоритм расчега динамических задач теории упругости // Числ. методы и пакеты прогр. для реш. ур-ний матем. физ. Новосибирск, 1985. С. 104–116.
59. Слепян Л. И. Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. 351 с.
60. Слепян Л. И. Механика трещин. Л.: Судостроение. 1981. 296 с.
61. Слепян Л. И., Яковлев Ю. С. Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики. Л.: Судостроение. 1980. 344 с.
62. Снеддон И. Преобразования Фурье. М.: ИЛ, 1955. 668 с.
63. Сретенский Л. Н. Распространение упругих волн от круглого диска, обладающего данным вращением // Вестн. МГУ. Матем., мех. 1985. № 4. С. 63–67.
64. Тарлаковский Д. В. Применение принципа суперпозиции в осесимметричной динамической контактной задаче для упругого полупространства // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 2. С. 76–84.
65. Тарлаковский Д. В., Федоров С. Н. Нестационарные колебания упругой анизотропной полуплоскости // Матер. IV Междунар. симп. «Динам. и технол. пробл. мех. констр. сплош. сред». М.: Изд-во «ГРАФРОС», 1998. С. 24.
66. Тищенко В. Н. О моделях деформирования слоя на упругом полупространстве // Динам. системы. № 5. К., 1986. С. 11–20.
67. Файншмидт В. Л., Шемякин Е. И. Распространение волн в упругом полупространстве, возбуждаемом поверхностной касательной силой // Уч. зап. ЛГУ. 1954. № 177. Вып. 28. С. 148–179.
68. Феофанова В. А., Якино В. Г. О расчетах упругих параметров слоистого массива // Физ.-техн. пробл. разраб. полезн. ископ. 1990. № 6. С. 15–22.
69. Флитман Л. М. Об одной краевой задаче для упругого полупространства // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1958. № 1. С. 105–106.

70. Чередниченко Р. А. Численное исследование процесса формирования волновых фронтов в упругом полупространстве при поверхностном воздействии давления // Матем. исслед. Кишинев, 1980. С. 128–132.
71. Чугайнова А. П. Автомодельная задача о действии бегущей нагрузки на границу нелинейно упругого слабо анизотропного полупространства // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 3. С. 102–111.
72. Шемякин Е. И. Динамические задачи теории упругости и пластичности. Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 1968. 337 с.
73. Шерман Д. И. Колебания упругого полупространства при заданных смещениях или внешних силах на границе // Тр. сейсмол. ин-та АН. № 118. М., 1946. 47 с.
74. Яковлев Ю. С., Лобышев В. Л. Взаимодействие сейсмической волны с сооружением // Тр. Всес. проектно-изыск. и НИИ Гидропроект. 1971. № 20. С. 87–93.
75. Abramovici F., Kanasewich E. R., Kelamis P. G. Seismic waves from a horizontal stress discontinuity in a layered solid // Bull. Seismol. Soc. Amer. 1982. V. 72, No. 5. P. 1483–1498.
76. Adams G. G. An elastic strip pressed against an elastic half plane by a steadily moving force // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1978. V. 45. No. 1. P. 89–94.
77. Ang D. D. Transient motion of a line load on the surface of an elastic half-space // Quart. Appl. Math. 1960, V. 18, No. 3, P. 251–256.
78. Atkinson C. On axially symmetric expanding boundary value problems in classical elasticity // Int. J. Eng. Sci. 1968. V. 6. No. 1. P. 27–37.
79. Aulenbacher U., Langenberg K. J. Transient radiation pattern of ultrasonic transducers on elastic half-space // New Proced. Nondestr. Test. Proc. Germ. U. S. Workshop Fraunhofer. Inst. Saarbrücken, 1982. Berlin e. a., 1983. P. 81–92.
80. Bennett B. E., Herrmann G. The dynamic response of an elastic half-space with an overlying acoustic fluid // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1976. V. 48. No. 1. P. 39–42.
81. Bogowski B. Dynamic torsion of an orthotropic half-space // Mech. teor. i stosow. 1992. R. 30. No. 3. P. 509–517.
82. Brebbia C. A. Applications of boundary elements in transient elastodynamics // Var. Meth. Eng. Proc. 2nd Int. Conf., Southampton, July, 1985. Berlin e. a., 1985. P. 10/39–10/55.
83. Bresse L. F., Hutchins D. A. Transient generation by a wide thermoelastic source at a solid surface // J. Appl. Phys. 1989. V. 65. No. 4. P. 1441–1446.
84. Bresse L. F., Hutchins D. Transient generation of elastic waves in solids by a disk-shaped normal force source // J. Acoust. Soc. Amer. 1989. V. 86. No. 2. P. 810–817.
85. Brock L. M. Symmetrical frictionless indentation over a uniformly expanding contact region. I. Basic analysis // Int. J. Eng. Sci. 1976. V. 14, No. 2, P. 191–199.
86. Brock L. M. The effect of a thin layer surface inhomogeneity on dynamic surface response // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1978. V. 45. No. 1. P. 95–99.
87. Brock L. M. Wave propagation in an elastic half-space due to surface pressure over a non-uniformly changing circular zone // Quart. Appl. Math. 1980. V. 88. No. 1. P. 37–49.
88. Brock L. M. The effect of displacement discontinuity derivatives on wave propagation — III. Body and point forces in elastic half-spaces // Int. J. Eng. Sci. 1981. V. 19. No. 7. P. 949–957.
89. Chao C. C., Bleich H. H., Sackman J. Surface waves in a elastic half-space // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1961. V. 28. No. 2. P. 300–301.

90. Chwalczyk F., Rafa J., Wlodarczyk E. Propagacja dwuwymiarowych niestacjonarnych fal naprezenia w polprzestrzeni sprzysto-lepkiej wywolanych poruszajacym sie po powierzchni z podsejsmiczna predkoscia obciazeniami normalnym // Biul. WAT. J. Dabrowskiego. 1972. R. 21. No. 6. P. 19-35.
91. Chwalczyk F., Rafa J., Wlodarczyk E. Propagacja niestacjonarnych fal sprzysctych w polprzesk rzeni wypelnionej esrodkiem anizotropowym // Biul. WAT. J. Dabrowckiego. 1981. R. 30. No. 3. P. 3-14.
92. Chwalczyk F., Rafa J., Wlodarczyk E. Propagation of non-stationary elastic waves in an anisotropic half-space. Part 1. Analytic solution // J. Techn. Phys. 1984. V. 25. No. 1. P. 23-24.
93. Cole J., Huth J. Stresses produced in a half-plane by moving loads // Paper ASME. NAPM-8, 1958. 4 p.
94. Craggs J. W. On two-dimensional waves in an elastic half-plane // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1960. V. 56. No. 3. P. 269-285.
95. Eason G. On the torsional impulsive loading of an elastic half-space // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1964. V. 17. No. 3. P. 279-292.
96. Eason G. The stresses produced in a semi-infinite solid by a moving surface force // Int. J. Eng. Sci. 1965. V. 2. No. 6. P. 581-609.
97. Eason G. The displacements produced in an elastic half-space by suddenly applied surface force // J. Inst. Math. and Appl. 1966. V. 2. No. 4. P. 299-326.
98. Fang Yingguang. Dynamic singular solution of orthotropic layered elastic half-plane and its application // Comput. Struct. Mech. and Appl. 1995. V. 12. No. 2. P. 231-238.
99. Fujii K. Dynamic response of an elastic half-space to moving pressures loading in a quarter part of free surface // Technol. Repts Kansai Univ. 1982. No. 2. P. 267-276.
100. Gakenheimer D. C. Numerical results for Lamb's point load problem // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1970. V. 37. No. 2. P. 522-524.
101. Gakenheimer D. C., Miklowitz I. Transient excitation of an elastic half-space by a point load traveling on the surface // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1969. V. 36. No. 3. P. 505-515.
102. Guan F., Novak M. Transient response of an elastic homogeneous half-space to suddenly applied rectangular loading // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1994. V. 61. No. 2. P. 256-263.
103. Higuchi N., Hirashima K.-I. Unsteady stress produced in an elastic half-plane by moving loads // Theor. and Appl. Mech. V. 27. Proc. 27th Jap. Nat. Congr. Appl. Mech., Tokyo, 1977. Tokyo, 1979. P. 353-370.
104. Hosking R. J. Moving loads on continuously-supported flexible plates // 19th Int. Congr. Theor. and Appl. Mech., Kyoto, Aug. 25-31, 1996: Abstr. Kyoto, 1996. P. 335.
105. Hu De-sui An application of Ungar's differential transform to elastodynamics // Appl. math. and mech. 1989. V. 10. No. 7. P. 645-648.
106. Jingu T., Matsumoto H., Nezu K. Transient stress of an elastic half-space subjected to a uniform impulse load in a rectangular region of its surface // Bull. JSME. 1985. V. 28. No. 246. P. 2881-2889.
107. Jingu T., Matsumoto H., Nezu K. The transient stress in an elastic half-space subjected to a semi-infinite line load varying as unit step function on its surface // Bull. JSME. 1986. V. 29. No. 247. P. 35-43.
108. Jingu T., Matsumoto H., Nezu K. The transient stress in an elastic half-space excited by impulsive loading over one quarter of its surface // Bull. JSME. 1986. V. 29. No. 247. P. 44-51.

109. Jingu T., Tsuchida E. Transient analysis of shear impact of an elastic half-space // Bull. JSME. 1981. V. 24. No. 194. P. 1346-1353.
110. Kim J. S., Soedel W. On the response of three-dimensional elastic bodies to distributed dynamic pressures. Part I // J. Sound and Vibr. 1988. V. 126. No. 2. P. 279-293.
111. Kim J. S., Soedel W. On the response of three-dimensional elastic bodies to distributed dynamic pressures. Part II // J. Sound and Vibr. 1988. V. 126. No. 2. P. 294-308.
112. Kosloff D., Reshef M., Loewenthal D. Elastic wave calculations by the Fourier method // Bull. Seismol. Soc. Amer. 1984. V. 74. No. 3. P. 875-891.
113. Lamb H. On the propagation of tremors over the surface on an elastic solid // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1904. V. 208. P. 1-42.
114. Laturelle F. G. Finite element analysis of wave propagation in a elastic half-space under step loading // Comput. and Struct. 1989. V. 32. No. 3-4. P. 721-735.
115. Mandel J., Avramesco A. Deplacements produits par une charge mobile a la surface d'un semiespace elastique // C. r. Acad. Sci. 1961. V. 252. No. 24. P. 3730-3732.
116. Mandel S. C., Groch M. L. Forced vertical vibration of two rigid strip on a semi-infinite elastic solid // J. Sound and Vibr. 1992. V. 158. No. 1. P. 169-179.
117. Mansur W. J., Brebbia C. A. Transient elastodynamic using a time-stepping technique // Boundary Elem. Proc. 5th Int. Conf., Hiroshima, 1983. Berlin e. a., 1983. P. 677-698.
118. Mitra A. K. Disturbance produced in a semi-infinite elastic medium by an impulsive twist applied on the plane surface // Proc. Nat. Inst. Sci. India. 1961. V. A27. No. 5. P. 470-475.
119. Mitra M. Note on the disturbance produced in an elastic half-space by transient pressure applied over a portion of the boundary // Proc. Nat. Inst. Sci. India. 1962. V. A28. No. 1. P. 199-205.
120. Mitra M. Disturbance produced in an elastic half-space by impulsive normal pressure // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1964. V. 60. No. 3. P. 683-696.
121. Norwood F. R. Exact transient response of an elastic half-space loaded over a rectangular region of its surface // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1969. V. 86. No. 3. C. 516-522.
122. Pal P. C. Generation of SH-type wave due to non-uniformly moving stress-discontinuity in layered anisotropic elastic half-space // Acta mech. 1983. V. 49. No. 3-4. P. 209-220.
123. Pal P. C. On the disturbance produced by an impulsive torsional motion of a circular ring source in a semi-infinite transversely isotropic medium // Indian J. Pure and Appl. Math. 1985. V. 16. No. 2. P. 179-188.
124. Payton R. C. An application of the dynamic Betti-Rayleigh reciprocal theorem to moving-point loads in elastic media // Quart. Appl. Math. 1964. V. 21. No. 4. P. 299-313.
125. Pekeris C. L. The seismic surface pulse // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1955. V. 41. No. 7. P. 469-480.
126. Richards P. G. Elementary solutions to Lamb's problem for a point source and their relevance to three-dimensional studies of spontaneous crack propagation // Bull. Seismol. Soc. Amer. 1979. V. 69. No. 4. P. 947-956.
127. Rodgerston G. A. Penetration of impact waves in a six-ply fibre composite laminate // J. Sound and Vibr. 1992. V. 158. No. 1. P. 105-120.
128. Roy A. Pulse generation in an elastic half-space by normal pressure // Int. J. Eng. Sci. 1975. V. 13. No. 7-8. P. 641-651.

129. Roy A. Response of an elastic solid to non-uniformly expanding surface loads // *J. Eng. Sci.* 1979. V. 17. No. 9. P. 1023–1038.
130. Roy A. Response of an elastic half-space to normal pressure over an elliptic area // *Int. J. Eng. Sci.* 1981. V. 19. No. 1. P. 129–136.
131. Singh S. K., Kuo J. T. Response of an elastic half-space to uniformly moving circular surface load // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1970. V. 87. No. 1. P. 109–115.
132. Steinfeld B., Takemiya H., Antes H. Analysis of transient 3d wave propagation in an elastic half-space. The classical approach and the direct boundary element method // *Z. angew. Math. und Mech.* 1995. Bd. 75. Suppl. No. 1. S. 283–284.
133. Stump B. W. Stress waves in an elastic half-space: single and multiple surface sources // *J. Sound and Vibr.* 1984. V. 92. No. 2. P. 181–201.
134. Tada M., Watanabe K., Hirano Y. Non-steady response for longitudinal shear force on inhomogeneous elastic half-space. 1st report. Long-time solution // *Trans. Jap. Soc. Mech. Eng.* 1989. V. A54. No. 498. P. 232–236.
135. Tada M., Watanabe K., Hirano Y. Non-steady response for longitudinal shear force on inhomogeneous elastic half-space. 2 report. Short-time solution // *Trans. Jap. Soc. Mech. Eng.* 1989. V. A55. No. 510. P. 246–250.
136. Voelker L. E., Achenbach I. D. Stress waves in a laminated medium generated by transverse forces // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1969. V. 46. No. 5. P. 1213–1222.
137. Wang K., Wang Y. Displacement of the surface of an elastic half-space due to a non-uniformly distributed circular dynamic load // *Acta Mech. Solida Sin.* 1984. No. 4. P. 619–627.
138. Watanabe K. Transient response of an elastic half-space to moving loads // *Bull. JSME.* 1981. V. 24. No. 192. P. 913–919.
139. Willis J. R. Self-similar problems in elastodynamics // *Phil. trans. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1973. V. 274. No. 1240. P. 435–491.
140. Willis J. R., Bedding R. J. Arrivals associated with a class of self-similar problems in elastodynamics // *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* 1975. V. 77. No. 3. P. 591–607.
141. Ziv M. A half-space response to a finite surface source of an impulsive disturbance // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1991. V. 89. No. 4. Pt. 1. P. 1556–1571.
142. Ватанабе К. Нестационарный отклик неоднородного упругого полупространства на импульсную антиплоскую сдвиговую нагрузку (Постоянная скорость SH-волн) // *Нихон кикай гаккай ромбунсю.* (Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. 1981. V. A47. No. 414. P. 203–210.)
143. Ватанабе К. Нестационарный отклик неоднородного упругого полупространства под нагрузкой при кручении. Горизонтально поляризованные волны сдвига постоянной скорости // *Нихон кикай гаккай ромбунсю.* (Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. 1981, V. A47. No. 413. P. 92–100.)

§ 2. КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ С ФИКСИРОВАННЫМИ ГРАНИЦАМИ

А. Г. Горшков, Д. В. Тарлаковский

Под таковыми будем понимать задачи о динамическом контакте абсолютно жесткого тела (ударника, штампа), занимающего область G_1 с граничной поверхностью Π_1 , и упругого полупространства G_2 , ограниченного плоскостью $\Pi_2: z = 0$ (см. обозначения параграфа 1 этой главы). Ограничимся, в основном, случаем выпуклой области G_1 . Для постановки задачи необходимо добавить к уравнениям движения однородного изотропного полупространства (1.1) уравнения движения тела G_1 :

$$\begin{aligned} m\ddot{u}_c &= R_c + R, \quad \dot{L}_c + [\omega, L_c] = M_c + M, \\ \omega &= \omega_i e_i, \quad u_c = u_i e_i, \\ \dot{\varphi} &= \omega_3 - (\omega_1 \sin \varphi + \omega_2 \cos \varphi) \operatorname{ctg} \vartheta, \\ \dot{\psi} &= \frac{\omega_1 \sin \varphi + \omega_2 \cos \varphi}{\sin \vartheta}, \quad \dot{\vartheta} = \omega_1 \cos \varphi - \omega_2 \sin \varphi, \end{aligned} \quad (1)$$

где m — масса тела; u_c , L_c и ω — векторы смещения центра масс, момента количества движения и угловой скорости тела; R_c , M_c , R и M — внешние и контактные результирующие силы и моменты; φ , ψ и ϑ — углы Эйлера.

В частных случаях движения ударника (поступательное, вращательное, плоскопараллельное) уравнения (1) упрощаются. При рассмотрении усложненных сред уравнения (1.1) должны быть заменены соответствующими этим средам соотношениями.

Граница $\partial\Omega$ области контакта Ω должна определяться из условий пересечения возмущенной поверхности Π_{2*} и поверхности Π_1 :

$$\partial\Omega = \Pi_{2*} \cap \Pi_1. \quad (2)$$

В рамках линейной теории упругости область Ω считается плоской ($\Omega \in \Pi_2$), и с целью линеаризации граничных условий в (2) поверхность Π_{2*} обычно заменяется невозмущенной границей полупространства — плоскостью Π_2 .

На границе полупространства могут быть заданы условия контакта с проскальзыванием, сцепления контактирующих поверхностей и другие более сложные условия (контакт с трением и т.д.). Например, при наличии проскальзывания граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{13}|_{z=0} &= \sigma_{23}|_{z=0} = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ \sigma_{33}|_{z=0} &= 0, \quad (x, y) \notin \Omega, \quad u_3 = W(t, x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \end{aligned} \quad (3)$$

где перемещения W определяются по кинематическим параметрам движения ударника.

Контактные усилия R и M связаны с напряжениями в области контакта

$$\begin{aligned} R &= \iint_{\Omega} T \, dx \, dy = -[u_c, R] + \iint_{\Omega} [r_0, T] \, dx \, dy, \\ T &= \sigma_{i3}|_{z=0} e_i, \quad r_0 = x e_1 + y e_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Отметим, что соотношения (4) справедливы при отсутствии расслоения контактирующие поверхности остаются сцепленными и в точках, где напряжения растягивающие). При учете расслоения интегрирование в (4) необходимо вести по области $\Omega_* = \{(x, y) \in \Omega, \sigma_{33}|_{z=0} < 0\}$, что существенно усложняет решение задачи.

Таким образом, соотношения (1.1), (1)–(4) совместно с соответствующими начальными условиями и условиями на бесконечности для упругой среды дают математическую постановку указанной контактной задачи.

Отметим, что граничные условия (3) имеют смешанный тип, что характерно для контактных задач. В некоторых случаях возможно рассмотрение условий несмешанного типа с заменой равенства $\sigma_{33}|_{z=0} = 0$ на $u_3|_{z=0} = 0$ при $(x, y) \in \Omega$ (наличие «жесткой крышки» вне области контакта).

В этом параграфе ограничимся случаем независимости области контакта от времени. Учет подвижности границы $\partial\Omega$ будет рассмотрен в следующих параграфах. Такое разделение связано прежде всего с различными математическими методами решения соответствующих контактных задач.

1. Плоская задача. В этом случае предполагается, что искомые функции зависят только от двух пространственных координат x и z . Областью контакта Ω является отрезок. Методы решения задач существенно зависят от типа граничных условий. Если перемещения штампа заданы, то эта проблема эквивалентна задаче о колебаниях полупространства с известными перемещениями и напряжениями на граничной плоскости.

Одним из первых решение задачи с условиями несмешанного типа построено Х. А. Рахматулиным [30] для акустической среды с помощью метода запаздывающих потенциалов. Аналогичная задача для упругого полупространства («поршень с жестким фланцем») решена В. Л. Лобысевым и Ю. С. Яковлевым [23] и приведена в книге Л. И. Слепяна и Ю. С. Яковлева [43]. Обращение интегральных преобразований Лапласа и Фурье проводится последовательно. Указано на наличие неинтегрируемой особенности на границе поршня. Дано сравнение с соответствующей задачей для акустической среды. Решение этого же вопроса с использованием функций влияния и принципа суперпозиции получено А. Г. Горшковым и Д. В. Тарлаковским [11, 12] как частный случай соответствующей задачи с подвижными граничными условиями (см. § 3 этой главы).

Другим способом перехода к граничным условиям несмешанного характера является рассмотрение деформируемого полупространства, покрытого мембраной или пластиной. Такой подход использован, например, в работе Е. Ф. Афанасьева [3].

Среди задач со смешанными граничными условиями наиболее просто исследуются колебания *полубесконечного штампа*, расположенного на полупространстве. В работе В. А. Свекло [32] рассмотрена задача о движении упругой полуплоскости, на одной половине которой равны нулю нормальные перемещения ($u_3|_{z=0} = 0, x < 0$), а на другой отсутствуют нормальные напряжения ($\sigma_{33}|_{z=0} = 0, x > 0$). Касательные напряжения равны нулю на всей границе ($\sigma_{13}|_{z=0} = 0, x \in \mathbb{R}$). Возмущение задается сосредоточенной в начале координат силой. Решение получено с помощью метода функционально инвариантных решений. Аналогичная задача (при $x < 0$ задана скорость $\dot{u}_3|_{z=0} = V_0$) рассмотрена Г. С. Багатурия [6]. Применительно

к теории трещин в работах Б. В. Кострова [21], Л. И. Слепяна и А. Л. Фишкова [42] исследовано движение по произвольному закону точки раздела типа граничных условий. Отмечена особенность в решении при скорости перемещения, равной скорости волн Релея.

Для штампа *конечных размеров* Л. М. Флитманом [46] решена плоская задача о колебаниях полупространства для граничных условий типа (3) (заданы вертикальные смещения на отрезке $|x| \leq l$). Решение строится как суперпозиция решений для полубесконечных штампов, для которых получено интегральное уравнение в свертках. Аналогичная задача для акустической среды рассмотрена в работе Л. М. Флитмана [45] с использованием запаздывающих потенциалов. В. А. Свекло [34] для этой задачи с помощью метода функционально инвариантных решений построил интегральное уравнение, связывающее перемещения и напряжения на границе полуплоскости. Найдены асимптотические представления для подынтегральных функций.

В работе Ю. С. Яковлева и В. Л. Лобысева [50] задача о штампе сведена к интегральным уравнениям Фредгольма I рода в пространстве изображений по Лапласу. Указана возможность перехода к уравнению II рода. Приведено приближенное выражение для реакции полупространства в пространстве изображений при различных движениях штампа. Использован метод асимптотически эквивалентных функций. Аналогичный подход применен в книге Б. И. Дидука, В. Л. Лобысева, В. М. Ляхтера и др. [13].

Г. В. Ткачевым [44] для гипотетической среды, движение которой описывается одним волновым уравнением, построено интегральное уравнение типа первого соотношения в (1.9) относительно неизвестного касательного напряжения $\sigma_{13}(t, x)$ при $\Omega = [-a, a]$. Интегральное уравнение решается численно с помощью квадратурных формул, учитывающих особенности ядер. Следует отметить, что указанные в работе сдвиговые волны при выбранных граничных условиях не могут существовать без волн растяжения-сжатия. Аналогичный подход использован А. С. Скалиухом [41]. G. G. Adams и I. Zeid [52], Y. Kitamura и Sh. Sakurai [59] свели задачу о штампе к системе уравнений типа Вольтерра с сингулярными ядрами. Решение также строится численно.

Е. В. Коваленко и В. Б. Зеленцов [18] использовали асимптотические методы для решения задач об антиплоском сдвиге жестким штампом упругого полупространства и о вертикальном вдавливании штампа в полуплоскость. В последней задаче У. В. Абдулаев, Ш. К. Кузагенов и Б. М. Мамажанов [1] исследовали влияние условий сцепления контактирующих поверхностей на распределение контактных напряжений. Нестационарную задачу о движении прямоугольного штампа по упругой полуплоскости рассмотрел также R. Artan [53].

В случае *инерционного штампа* необходимо учитывать уравнения (1) движения штампа как абсолютно твердого тела. В имеющихся публи-

кациях, как правило, рассматриваются простейшие движения штампа. Ю. С. Яковлев и В. Л. Лобысев [51] рассмотрели задачу о движении абсолютно жесткого штампа на упругой полуплоскости под действием заданных внешних сил. При этом уравнение движения штампа записано в пространстве преобразований Лапласа. В работах В. М. Сеймова [35, 37–39] с помощью интегральных преобразований Фурье и Лапласа задача сведена к системе парных интегральных уравнений. Их решение строится с помощью разложения искомым контактных напряжений в ряды по многочленам Чебышева. О. А. Рёкау, Р. К. Syamal и V. Batta [60] для решения задачи о штампе использовали метод гранично-временных элементов. Соответствующее интегральное уравнение получено с использованием запаздывающих потенциалов. Конечно-разностный метод применили Г. К. Аннакулова, М. А. Ахмедов, Б. А. Батуров и И. М. Мирзаев [2], М. А. Ахмедов, Б. А. Батуров и И. М. Мирзаев [4]. Здесь также обсуждаются вопросы о переходе от бесконечной полуплоскости к конечной области. В статьях В. М. Фомина [47, 48] рассмотрена задача о движении периодической системы контактов на границе упругой полуплоскости.

В работах И. В. Дорохова, О. Д. Пряжиной и М. Р. Фрейгейт [14, 15], О. Д. Пряжиной и М. Р. Фрейгейт [28, 29], О. Д. Пряжиной, О. М. Туковой и М. Р. Фрейгейт [27] для исследования контактной задачи для слоистого полупространства использован алгоритм, основанный на сочетании метода фиктивного поглощения, метода собственных вектор-функций и численного обращения преобразования Лапласа. Приближенный подход с использованием статического распределения контактных напряжений применен И. Голембиовской [10].

2. Пространственная задача. Для *кругового штампа* при решения задачи о вертикальном движении штампа на границе упругого полупространства в силу осесимметричного характера деформаций, в основном, используются интегральные преобразования Ханкеля и Лапласа. Построенные в пространстве преобразования Лапласа парные интегральные уравнения решаются тем или иным методом, а затем осуществляется численное обращение преобразования Лапласа.

В. Б. Поручиковым [26] для случая заданных вертикальных перемещений с помощью метода Каньяра получено интегральное уравнение, для которого используется метод Винера–Хопфа. Для аналогичной задачи в работах В. Л. Лобысева и Ю. С. Яковлева [24], В. Л. Лобысева, В. И. Сайгиной и Ю. С. Яковлева [22] решение интегрального уравнения Фредгольма в пространстве преобразований Лапласа разыскивается в виде суммы статической части и ряда по полиномам Лежандра $P_n(\sqrt{1-r^2})$. Найдено приближенное выражение для реакции среды. Рассмотрен также вариант задания касательных перемещений.

В работах В. М. Сеймова [36, 38, 39] решение представляется в виде та-

ких же рядов, коэффициенты которых в пространстве преобразований Лапласа находятся из бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Последняя решается методом усечения. Оригиналы коэффициентов вычисляются с помощью вычетов. Аналогичным образом В. М. Сеймовым, Н. П. Ермоленко и Е. А. Зайцевой [40] решена неосесимметричная задача о горизонтально-вращательных колебаниях круглого штампа на упругом полупространстве под действием горизонтальной силы или момента в вертикальной плоскости.

Н. М. Бородачевым и Ю. А. Мамтеевым [7] использован способ сведения парных уравнений к уравнению II рода. Оно решается численно, а затем проводится вычисление оригиналов. Приведен пример расчетов для случая приложения вращательного момента к абсолютно жесткому цилиндру, сцепленному с полупространством. В работе Ю. Д. Колыбихина [20] аналогичная задача обобщена на случай ортотропного неоднородного полупространства с упругими постоянными, являющимися степенными функциями радиуса r и координаты z . Соответствующее уравнение Фредгольма решается с помощью разложения искомым функций в ряды по многочленам Якоби.

М. С. Gutzwiller [57] рассмотрел три различных способа контакта кругового штампа с полупространством: гладкий контакт, учет шероховатости контактирующих поверхностей и наличие трения. R. S. Dhaliwal, В. М. Singh и J. Vrbik [55] исследовали задачу о кручении абсолютно жесткого диска на упругом слое, покрывающем полупространство.

Естественно, более сложными являются задачи для *некругового штампа*. В статье В. А. Бабешко, Ж. Ф. Зинченко и А. В. Смирновой [5] дан алгоритм решения задачи о горизонтальном движении цилиндра с поперечным сечением Ω вдоль полупространства. Интегральное уравнение относительно изображений по Лапласу контактных напряжений совместно с уравнением движения твердого тела решается методом фиктивного поглощения. Обращение преобразования Лапласа проводится численно с использованием метода регуляризации А. Н. Тихонова. Примеры даны для кругового цилиндра. Приближенное решение контактной задачи о вертикальных движениях штампа с использованием функций влияния приведено в работе В. А. Ильичева [16]. Здесь полагается, что контактное давление под штампом распределено равномерно. М. В. Хай и В. В. Михаськив [49] при решении соответствующего интегрального уравнения в пространстве преобразований приближенно заменили ядра рациональной функцией.

М. Д. Бородай и В. М. Сеймов [8] построили решение задачи о вертикальных колебаниях прямоугольного штампа на упругом полупространстве. При этом используются интегральные преобразования Лапласа и Фурье. Контактные напряжения отыскиваются в виде двойного ряда по полиномам Чебышева с неизвестными коэффициентами. В статье А. И. Глушко

[9] исследовано равномерное движение вдоль оси Ox абсолютно жесткого штампа, занимающего четверть граничной плоскости.

В. А. Свекло [33] доказал теоремы существования и единственности для задачи о системах штампов, расположенных на граничной плоскости (область Ω не является линейно связной), при вертикальных движениях штампов. В работе В. А. Ильичева [17] строится приближенное решение задачи о системе двух штампов с квадратными основаниями. Основные допущения здесь следующие: контактное давление распределено равномерно; возмущения, вносимые штампами, не влияют на движения их относительно друг друга. Аналогичную задачу для двух прямоугольных штампов исследовали J. Vrbik, St. Catharines и В. М. Singh [61].

Контактные задачи для усложненных оснований рассматривали А. И. Ковшов [19], А. А. Ляпин, Н. Румянцев, Т. Г. Румянцева и М. Г. Селезнев [25], Deng Xuejun и Sun Lu [54]. В первой работе полупространство — двухслойное с заглубленной полостью, во второй — вязкоупругое, а в третьей — для него принята модель, описывающая разрушение геоматериалов.

Ряд работ (С. А. Рухленко [31], Goo Nam Ho и Kim Hung Jo [56], Kim Chun-Gon [58], J. A. Zukas и В. Gaskill [62]) посвящены нестационарным контактными задачам, в которых основание моделируется пластиной. Причем в последних двух статьях приведены методика и результаты соответствующих экспериментов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдулаев У. В., Кужагенов Ш. К., Мамажанов Б. М. Распределение контактных напряжений при нестационарных вертикальных колебаниях жесткого штампа, сцепленного с упругой полуплоскостью // Изв. АН УзССР. Сер. техн. наук. 1990. № 4. С. 37–40.
2. Аннакулова Г. К., Ахмедов М. А., Батуров Б. А., Мирзаев И. М. Взаимодействие жесткого ударника с упругим полупространством // Мех. сплош. среды. Матер. Всес. конф. по мех. сплош. среды, 1979 г.: Тез. докл. Ташкент, 1982. С. 126–130.
3. Афанасьев Е. Ф. Удар тела о тонкую пластинку, лежащую на поверхности сжимаемой жидкости. ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 5. С. 869–879.
4. Ахмедов М. А., Батуров Б. А., Мирзаев И. М. Исследование взаимодействия жесткого ударника с упругим полупространством // Вопр. вычисл. и прикл. матем. № 60. Ташкент, 1980. С. 141–148.
5. Бабешко В. А., Зинченко Ж. Ф., Смирнова А. В. К задаче о набегании волн нормального давления на штамп // ПМТФ. 1982. № 2. С. 143–146.
6. Багатурия Г. С. Динамическая задача о контакте полубесконечного штампа с упругой полуплоскостью // Сообщ. АН ГССР. 1983. Т. 112. № 1. С. 33–36.
7. Бородачев Н. М., Мамтеев Ю. А. Неустановившиеся крутильные колебания упругого полупространства // Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 1. С. 79–83.
8. Бородай М. Д., Сеймов В. М. Распределение контактных напряжений при вертикальных нестационарных колебаниях прямоугольного штампа на упругом полупространстве // Соврем. пробл. мех. контакт. взаимодействий. Днепропетровск: Изд-во ДГУ, 1990. С. 103.

9. Глушко А. И. О сверхзвуковом движении штампа по упругому полупространству // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 1. С. 92–97.
10. Голембиовская И. Динамическая контактная задача для абсолютно жесткого штампа с присоединенной жесткой плитой на упругом полупространстве // Основания, фундам. и мех. грунтов. 1995. С. 3–9.
11. Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В. Динамические контактные задачи для абсолютно жестких тел и упругого полупространства. Препринт. МАИ, 1989. 49 с.
12. Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В. Динамические контактные задачи с подвижными границами. М.: Наука. Физматлит, 1995. 351 с.
13. Дидух Б. И., Лобысев В. Л., Ляхтер В. М., Милитеев А. Н., Новоселов И. Г., Яковлев Ю. С. Динамика сплошных сред в расчетах гидротехнических сооружений. М.: Энергия, 1976. 391 с.
14. Дорохов И. В., Пряхина О. Д., Фрейгейт М. Р. О действии нестационарной нагрузки на систему, состоящую из массивного штампа и слоистого основания // ПММ. 1992. Т. 46. Вып. 2. С. 306–312.
15. Дорохов И. В., Пряхина О. Д., Фрейгейт М. Р. Задача о нестационарном нагружении массивного жесткого штампа на поверхности многослойного основания // Ростовский ун-т. Ростов-на-Дону, 1992 / Рук. деп. в ВИНТИ 10.07.92. № 2266-B92.
16. Ильичев В. А. Действие импульсной нагрузки на массив, лежащий на упругом инерционном полупространстве // Строит. мех. и расчет сооруж. 1964. № 6. С. 32–37.
17. Ильичев В. А. Вертикальные нестационарные колебания массива под действием волн, возникающих в полупространстве при колебаниях другого массива // Динамика сооружений. М., 1968. С. 106–123.
18. Коваленко Е. В., Зеленцов В. Б. Асимптотические методы в нестационарных динамических контактных задачах для упругого полупространства // ПМТФ. 1997. Т. 38. № 1. С. 111–119.
19. Ковшов А. И. О локализации деформаций в неупругом слое, вызванной движением массивного штампа // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 4. С. 47–53.
20. Колыбихин Ю. Д. Неустановившиеся крутильные колебания неоднородного полупространства // Теория и практика модернизации судов. М., 1981. С. 138–143.
21. Костров Б. В. Динамическое распространение трещин с переменной скоростью // Mechanica zniszczenia. Teoria i zastosowania. Warschawa. 1976. S. 89–122.
22. Лобысев В. Л., Сайгина В. И., Яковлев Ю. С. К решению динамической задачи о круглом штампе на границе с упругим полупространством // Физ.-техн. пробл. разраб. полезн. ископаемых. 1971. № 2. С. 25–32.
23. Лобысев В. Л., Яковлев Ю. С. Поля напряжений при движении поршня с жестким фланцем на границе с идеально упругой средой // Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 4. С. 65–69.
24. Лобысев В. Л., Яковлев Ю. С. Осесимметричная динамическая задача теории упругости со смешанными граничными условиями // Изв. АН СССР. МТТ. 1971. № 4. С. 103–108.
25. Ляпин А. А., Румянцев Н., Румянцева Т. Г., Селезнев М. Г. Особенности нестационарного воздействия массивного штампа на двухслойное полупространство с заглубленной полостью // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 6. С. 165–166.
26. Поручиков В. Б. Осесимметричная задача о штампе на упругом полупространстве // Вестн. МГУ. Матем., мех. 1966. № 6. С. 114–120.

27. *Пряхина О. Д., Тукодова О. М., Фрейгейт М. Р.* Численно-аналитический метод решения нестационарных задач для слоистых тел со сложными свойствами // Совр. пробл. мех. сплош. среды: Междунар. научн. конф., Ростов-на-Дону, 19–21 июня 1995 г. / Тез. докл. Ростов н/Д, 1995. С. 43.
28. *Пряхина О. Д., Фрейгейт М. Р.* О методе расчета динамики массивного штампа на многослойном основании // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 6. С. 114–122.
29. *Пряхина О. Д., Фрейгейт М. Р.* Решение нестационарных контактных задач при наличии сцепления // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 2. С. 129–138.
30. *Рахматулин Х. А.* Решение задачи об отражении звуковых волн от жесткой плоскости, имеющей деформируемую часть // ПММ. 1954. Т. 18. Вып. 5. С. 573–584.
31. *Рухленко С. А.* Поперечный удар массивного тела по равномерно растянутой бесконечной пластине с учетом упругопластического контактного взаимодействия // Числ. методы реш. задач теории упруг. и пластич.: Матер. 11 Всес. конф., Волгоград, 10–12 окт., 1989. Новосибирск, 1990. С. 186–190.
32. *Свекло В. А.* Задача Лэмба при смешанных граничных условиях // Докл. АН. 1954. Т. 95. № 4. С. 737–739.
33. *Свекло В. А.* К решению динамической задачи теории упругости для полуплоскости при смешанных граничных условиях // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 2. С. 266–273.
34. *Свекло В. А.* Некоторые вопросы соударения упругих тел // Контактн. задачи и их инж. прилож.: Докл. конф. М., 1969. С. 182–186.
35. *Сеймов В. М.* Вертикальные неустановившиеся колебания жесткого штампа на упругой полуплоскости // Тр. координац. совещ. по гидротехн. 1972. № 64. С. 53–60.
36. *Сеймов В. М.* Рекомендации по расчету контактных напряжений и перемещений круглого массива на упругом полупространстве при вертикальных неустановившихся колебаниях // Динамика гидротехн. сооруж. М., 1972. С. 52–57.
37. *Сеймов В. М.* Рекомендации по расчету напряжений по контакту массива с упругой полуплоскостью при вертикальных гармонических и неустановившихся колебаниях // Динамика гидротехн. сооруж. М., 1972. С. 58–63.
38. *Сеймов В. М.* Применение метода ортогональных многочленов к динамическим контактными задачам // Прикл. мех. 1972. Т. 8. № 1. С. 69–77.
39. *Сеймов В. М.* Динамические контактные задачи. Киев: Наук. думка. 1976. 283 с.
40. *Сеймов В. М., Ермоленко Н. П., Зайцева Е. А.* Неосесимметричные периодические и нестационарные колебания круглого штампа на упругом полупространстве // Прикл. мех. 1997. Т. 33. № 5. С. 41–48.
41. *Скалух А. С.* О приближенном решении некоторых интегральных уравнений 1-го рода, возникающих в динамических смешанных задачах теории упругости // Изв. Сев.-Кавказ. науч. центра высш. школы. Сер. естеств. наук. 1983. № 4. С. 34–37.
42. *Слепян Л. И., Фишков А. Л.* Смешанная плоская задача при неравномерно движущейся точке раздела граничных условий // Актуальные пробл. мех. сплош. среды. Исслед. по упруг. и пластич. № 13. Ленинград, 1980. С. 172–181.
43. *Слепян Л. И., Яковлев Ю. С.* Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики. Л.: Судостроение. 1980. 344 с.
44. *Ткачев Г. В.* К решению одной неустановившейся задачи теории упругости // ПМТФ. 1988. № 6. С. 144–148.
45. *Флитман Л. М.* Об одной смешанной краевой задаче для волнового уравнения // ПММ. 1958. Т. 22. Вып. 6. С. 829–832.

46. *Флитман Л. М.* Динамическая задача о штампе на упругой полуплоскости // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 4. С. 697–705.
47. *Фомин В. М.* Нестационарная динамическая периодическая контактная задача для однородной упругой полуплоскости // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 2. С. 315–323.
48. *Фомин В. М.* Нестационарная динамическая контактная задача для периодической системы штампов при произвольном нагружении // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 3. С. 461–469.
49. *Хай М. В., Мыхаськив В. В.* Определение динамических коэффициентов интенсивности напряжений в теле с трещиной в виде полуплоскости // Прикл. мех. 1985. Т. 21. № 7. С. 77–83.
50. *Яковлев Ю. С., Лобысев В. Л.* О решении динамических задач теории упругости со смешанными граничными условиями // Тр. Всес. проектно-изыск. и НИИ Гидропроект. 1971. № 20. С. 65–80.
51. *Яковлев Ю. С., Лобысев В. Л.* Плоская задача о движении твердого тела на границе с упругим полупространством под действием заданной системы сил // Тр. Всес. проектно-изыск. и НИИ Гидропроект. 1971. № 20. С. 81–87.
52. *Adams G. G., Zeid I.* An elastic punch moving across the surface of a semi-infinite solid // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1984. V. 51. No. 3. P. 622–639.
53. *Artan R.* The dynamical problem of a rectangular stamp moving on an elastic plane // Acta mech. 1994. V. 104. No. 3–4. P. 231–239.
54. *Deng Xuejun, Sun Lu.* Transient response of infinite plate on viscoelastic foundation by moving load // J. Southeast Univ. 1996. V. 26. No. 4. P. 89–94.
55. *Dhaliwal R. S., Singh B. M., Vrbik J.* Torsional impact of a layer or a cylinder bonded to an elastic half-space // Int. J. Eng. Sci. 1983. V. 21. No. 11. P. 1397–1408.
56. *Goo Nam Ho, Kim Hung Jo.* Dynamic contact analysis of laminated composite plates under low-velocity impact // AIAA Journal. 1997. V. 35. No. 9. P. 1518–1521.
57. *Gutzwiller M. C.* The impact of a rigid circular cylinder on an elastic solid // Phil. Trans. Roy. Soc. London. 1962. V. 255. No. 1053. P. 153–191.
58. *Kim Chun-Gon.* Impact resistance of composite laminated sandwich plates // J. Compos. Mater. 1992. V. 26. No. 15. P. 2247–2261.
59. *Kitamura Y., Sakurai Sh.* Dynamic stiffness under rigid rectangular foundations resting on an elastic two-layered medium // Proc. Jap. Soc. Civ. Eng. 1985. No. 362. P. 391–396.
60. *Pekau O. A., Syamal P. K., Batta V.* Time domain boundary element analysis of two-dimensional elastodynamic foundation problems // Comput. and Struct. 1988. V. 30. No. 1–2. P. 289–296.
61. *Vrbik J., Cathararines St., Singh B.M.* Contact problem of flat rectangular stamps resting on an elastic half-space // Acta Mech. 1995. V. 112. No. 1–4. P. 77–82.
62. *Zukas J. A., Gaskill B.* Ricochet of deforming projectiles from deforming plates // Int. J. Impact Eng. 1996. V. 18. No. 6. P. 601–610.

§ 3. КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

А. Г. Горшков, Д. В. Тарлаковский

Постановка контактной задачи, данная в предыдущем параграфе этой главы и определяемая соотношениями (1.1), (2.1)–(2.4), и в этом случае остается в силе. Необходимо только учитывать, что область контакта Ω зависит от времени, что вносит дополнительные сложности в решение по сравнению с фиксированной областью Ω .

1. Плоская задача. В случае *автомодельных задач* границы области контакта Ω (концы соответствующего отрезка) расширяются с постоянной скоростью. Это соответствует вертикальному внедрению в упругую полуплоскость симметричного клина с постоянной скоростью. Б. В. Костров [37] построил решение этой задачи с помощью метода функционально инвариантных решений. R. J. Bedding и J. R. Willis [71, 72] свели задачу к проблеме Гильберта для функций комплексного переменного. Подобные вопросы рассмотрены также в работах О. Г. Гомана [14], А. R. Robinson и J. C. Thompson [81], L. M. Brock [75], H. G. Georgiadis, L. M. Brock и A. P. Rigatos [77].

Существенно более сложными являются задачи при *произвольном законе изменения области контакта*. В работах Б. В. Кострова [38, 39] применительно к теории трещин рассмотрена задача о движении с переменной скоростью вдоль граничной плоскости двух точек раздела различных типов граничных условий. Решение получено как суперпозиция решений о полубесконечном штампе.

В плоских задачах о внедрении в упругое полупространство цилиндрических тел, как правило, предполагается, что поверхность Π_1 , ограничивающая ударник, является гладкой, а ее направляющая кривая выпукла. Эти вопросы при вертикальном движении ударника и постоянной скорости внедрения рассмотрены в работах В. Д. Кубенко [41], С. Н. Попова [51, 52], В. Д. Кубенко и С. Н. Попова [42]. В первой из них использовано разложение в тригонометрический ряд Фурье по координате x с периодом, равным расстоянию между соседними периодически расположенными на полуплоскости фиктивными штампами. Он выбирается так, чтобы за рассматриваемый промежуток времени соседние штампы не оказывали влияния друг на друга. В трех других работах с помощью интегральных преобразований задача сведена к бесконечной системе интегральных уравнений Вольтерра. Найдены напряжения в центральной точке контакта.

В работах А. Г. Горшкова и Д. В. Тарлаковского [25, 26, 28, 31, 34], А. В. Вестяка и Д. В. Тарлаковского [12] задача об определении контактных напряжений $T(t, x)$ сведена к решению интегрального уравнения, ко-

торое следует из принципа суперпозиции (1.9) и граничных условий (2.3):

$$\int_0^t dt \int_{-a(\tau)}^{a(\tau)} T(\tau, \xi) G_f(t - \tau, x - \xi) d\xi = W(t, x), \quad (1)$$

где G_f — функция влияния для плоской задачи (см. (1.4)), функция $W(t, x)$ определяется погруженной частью ударника.

Интегрирование уравнения (1) совместно с соответствующим уравнением движения твердого тела и геометрическим условием для определения радиуса пятна контакта типа (2.2) предлагается проводить численно с помощью квадратурных формул, учитывающих наличие неинтегрируемых особенностей у функции $G_f(t, x)$ на прямых $c_R t = |x|$. Этот алгоритм реализован в работах А. Г. Горшкова и Д. В. Тарлаковского [34], А. Г. Горшкова, А. Л. Медведского и Д. В. Тарлаковского [18–22], где кроме симметричной задачи рассмотрен более сложный вопрос о наклонном ударе цилиндрического тела по упругой полуплоскости при различных условиях контакта. В этом случае вместо уравнения (1) приходится рассматривать систему из двух интегральных уравнений.

А. Г. Горшковым и Д. В. Тарлаковским [30–34] найдены интегральные представления для контактных напряжений на начальном периоде контакта гладкого цилиндра и упругого полупространства. При этом предполагается, что граничные условия и форма поверхности Π_1 обеспечивают бесконечную скорость расширения области контакта Ω в начальный момент времени: $\dot{a}(0) = +\infty$. Показано, что на границе области контакта при сверхзвуковой скорости расширения ($\dot{a}(0) > c_1$) контактные напряжения имеют конечный разрыв:

$$T(t, a - 0) = -\dot{h} \frac{(2 - \eta^2 \dot{a}^2)^2 + 4 \sqrt{\eta^2 \dot{a}^2 - 1} \sqrt{\dot{a}^2 - 1}}{\eta^4 \dot{a}^3 \sqrt{\dot{a}^2 - 1}}, \quad (2)$$

$$T(t, a + 0) = 0.$$

А при $\dot{a}(t) = c_1$ имеется особенность следующего вида:

$$T(t, \varepsilon) = \begin{cases} -\dot{h} \sigma_0 \varepsilon^{-1/4} + o(1) & \text{при } \varepsilon \rightarrow +0, \\ 0 & \text{при } \varepsilon < 0, \end{cases} \quad (3)$$

где

$$\varepsilon = -a(t) - x, \quad \sigma_0 = \frac{(\eta^2 - 2)^2}{\pi \eta^4} K\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{2}{|a|}\right)^{1/4}.$$

Здесь $K(m)$ — полный эллиптический интеграл первого рода с параметром m , а h — глубина погружения ударника.

Эти результаты использованы А. В. Вестяком, А. Г. Горшковым, А. Л. Медведским и Д. В. Тарлаковским [10] для оценки знака нормальных напряжений на площадке, перпендикулярной к границе полуплоскости, а также А. Г. Горшковым, А. Л. Медведским и Д. В. Тарлаковским [23]

с целью определения возможности использования формул типа (2) при дозвуковой скорости расширения области контакта.

Л. М. Вгоск [74] получил аналитическое решение задачи о вертикальном ударе тонким клином с помощью интегральных преобразований Фурье и Лапласа и с использованием метода Каньяра.

Эффективными методами решения контактных задач с подвижными границами являются численные методы. Задача об ударе клином по упругому однородному или кусочно-однородному упругому слою сеточно-характеристическим методом решена в работах И. К. Навала и В. К. Римского [45, 47], В. К. Римского [54]. Удар гладким цилиндрическим телом по упругой полуплоскости рассмотрел J. Aboudi [67]. В работе Э. В. Ярве [66] исследованы вопросы об ударе гладким цилиндром по кусочно-однородному слою конечной ширины. Численное решение строится на основе вариационного метода с использованием неопределенных множителей Лагранжа для учета условий контакта. Применяется сплайн-аппроксимация по пространственным переменным.

2. Осесимметричная задача. К *автомодельному* случаю приводит задача о вертикальном внедрении в упругое полупространство конуса вращения с постоянной скоростью. Ее исследовали Б. В. Костров [37], R. J. Bedding и J. R. Willis [71, 72], A. R. Robinson и J. C. Thompson [82], О. Г. Гоман [15]. Здесь применяются методы, в основном аналогичные методам, используемым в плоских задачах.

Значительно сложнее задачи при *произвольном законе изменения области контакта*. Учет переменности скорости изменения границы $\partial\Omega$ (окружность) области контакта Ω (круг) необходим в задачах об ударе абсолютно жестким телом G_1 , ограниченным поверхностью вращения Π_1 . Во многих публикациях полагается, что Π_1 — гладкая и выпуклая. Постановка такой задачи дана, например, в монографии А. Г. Багдоева [3].

И. В. Симонов [65] учел тот факт, что в начальные моменты времени скорость расширения круга контакта больше скорости распространения волн растяжения-сжатия в упругой среде ($\dot{a}(t) > c_1$). При этом возмущения не выходят за предел области контакта, и граничные условия смешанного характера (2.3) могут быть заменены несмешанными: $u_3|_{z=0} = 0$, $(x, y) \notin \Omega$. Это позволило получить простое выражение для результирующей контактной силы:

$$R_3 = -\rho c_1 S \dot{U}_{c_3}, \quad R = R_3 e_3, \quad S = \pi a^2, \quad (4)$$

где S — площадь области контакта.

В работах С. Н. Попова [50–53], В. Д. Кубенко и С. Н. Попова [43] задача сведена к бесконечной системе интегральных уравнений Вольтерра. Найдена реакция среды и напряжение в лобовой точке. В первой статье дополнительно учитывается интегро-дифференциальное уравнение движения ударника.

J. Aboudi [69] рассмотрел усложненные условия контакта. Здесь предполагается, что область контакта Ω может быть разбита на две подобласти, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$: в круге Ω_1 осуществляется полное сцепление, а в кольце Ω_2 возможно проскальзывание с трением по закону Кулона. Границы этих областей определяются в процессе решения, которое находится конечно-разностным методом. Для определения границы раздела областей Ω_1 и Ω_2 используется итеративный процесс.

R. J. M. Crozier и S. C. Hunter [76] методом малого параметра получили решение задачи об ударе абсолютно жесткого шара. В качестве малого параметра выбирается амплитуда изменений радиуса круга контакта. В работах А. И. Бабичева [1, 2] в задаче о внедрении шара при сверхзвуковой скорости расширения области контакта напряжения приблизительно определяются из решения задачи о поступательном движении шара в безграничной упругой среде. Ю. А. Россихин [60] строит решение аналогичной задачи на начальном этапе взаимодействия, определяя первые члены разложения контактной силы R_3 и глубины погружения ударника h в ряд Маклорена по времени t . М. Anderson и F. Nilsson [70] при исследовании этого же вопроса находят решение динамической задачи в виде отклонений от соответствующих интегралов для квазистатической задачи (задачи Герца).

В работах А. Г. Горшкова и Д. В. Тарлаковского [28, 34], А. В. Вестяка и Д. В. Тарлаковского [12], А. В. Вестяка, А. Г. Горшкова и Д. В. Тарлаковского [9] показано, что задача об определении контактных напряжений может быть сведена к решению интегрального уравнения типа (1), которое следует из принципа суперпозиции (1.12) и граничных условий (2.3):

$$\int_0^t d\tau \int_0^{a(\tau)} T(\tau, \rho) \Lambda(t - \tau, r, \rho) d\rho = W(t, r). \quad (5)$$

Исследование особенностей ядра этого уравнения и разработка алгоритма его решения приведены в работах А. Г. Горшкова, А. А. Коровайцева, А. Л. Медведского и Д. В. Тарлаковского [17], А. А. Коровайцева, А. Л. Медведского и Д. В. Тарлаковского [36]. Аналогичный подход использован для ударника в виде шара А. И. Родионовым [57].

А. Г. Горшковым и Д. В. Тарлаковским [29, 32] получены интегральные представления для контактных напряжений и показано, что при сверхзвуковой скорости ($\dot{a}(t) > c_1$) расширения пятна контакта и при $\dot{a}(t) = c_1$ так же, как и в плоской задаче, справедливы формулы (2) и (3), характеризующие поведение напряжений в окрестности границы области контакта. Этот же этап соударения жесткой сферы с упругим слоем с помощью последовательных приближений и лучевого метода исследовали Yu. A. Rosskhin и M. V. Shitikova [84].

Численный метод характеристик использован в работах П. Ф. Сабодаша, И. К. Навала и В. К. Римского [62], В. К. Римского и П. Ф. Сабодаша.

даша [55, 56], И. К. Навала и В. К. Римского [46] в задаче о вертикальном ударе абсолютно жестким конусом вращения по однородному или кусочно-однородному упругому слою. Также численный метод использовал J. Aboudi [68] в задаче об ударе по вязкоупругому полупространству.

3. Пространственная задача. В связи с большими сложностями их решения число публикаций по этому вопросу невелико.

В работах А. Г. Горшкова и Д. В. Тарлаковского [27, 30] для начального этапа взаимодействия ударника, ограниченного произвольной гладкой выпуклой поверхностью Π_1 (скорость расширения границы области контакта Ω больше c_1) при условии проскальзывания без трения получены простые формулы, связывающие кинематические параметры ударника и геометрические характеристики области контакта:

$$\begin{aligned} R &= R_3 e_3, \quad M = M_1 e_1 + M_2 e_2, \quad R_3 = -\dot{u}_{c3} S - \omega_1 S_{2x} + \omega_2 S_{2y}, \\ M_1 &= -\dot{u}_{c3} S_{2x} - \omega_1 I_{2x} + \omega_2 I_{2xy}, \quad M_2 = \dot{u}_{c3} S_{2y} + \omega_1 I_{2xy} - \omega_2 I_{2y}, \end{aligned} \quad (6)$$

где S — площадь области контакта Ω ; S_{2x} , S_{2y} , I_{2x} , I_{2y} , I_{2xy} — статические моменты, моменты инерции и центробежный момент области Ω относительно осей $O_2 x_2$ и $O_2 y_2$; прямоугольная декартова система координат $O_2 x_2 y_2$ получена параллельным переносом системы Oxy в плоскости $z = 0$ в точку O_2 — проекцию центра масс тела на плоскость $z = 0$.

С учетом связи геометрических характеристик в (6) с кинематическими параметрами ударника, показано, что система уравнений (2.1) является квазилинейной и может быть проинтегрирована без непосредственного использования начально-краевой задачи для упругой среды. Аналогичный подход для случая вертикального движения ударника применили А. R. Robinson и J. C. Thompson [83], J. C. Thompson и А. R. Robinson [85].

Обобщение результатов (6) на случай однородного произвольно анизотропного полупространства при различных условиях контакта дано в работах А. В. Вестяка и Д. В. Тарлаковского [13], А. Г. Горшкова и Д. В. Тарлаковского [34, 35]. Эти же вопросы в части определения вертикальной составляющей действующей на ударник контактной силы исследованы Ф. М. Бородичем [5–8], Ф. М. Borodich'ем [73] с использованием решения вспомогательной автомодельной плоской задачи. При этом кроме упругого полупространства рассмотрены также вязкоупругие, неоднородные по глубине и предварительно напряженные среды.

Задача о вертикальном ударе по полупространству тонкого циклически симметричного тела рассмотрена Н. А. Остапенко [48, 49]. Аналитическое решение получено для звездообразного тела с четным числом циклов. Удар твердого тела по упругому полупространству с использованием дополнительного вариационного условия рассмотрен в работах А. И. Родионова [58, 59]. Вариационный подход также применен А. С. Кравчуком [40] в задаче об ударе упругим телом по неподвижному полупространству.

Е. R. Kral и К. Nomvopoulos [78] с помощью трехмерных конечных элементов исследовали задачу о внедрении в слоистое полупространство и скольжение по его границе твердой сферы. Специальная методика численного решения трехмерных задач о наклонном ударе абсолютно жесткого тела по деформируемой преграде предложена в работе А. И. Рузанова и А. И. Кибца [61].

И. О. Богульский [4], Matsushita Shinya, Matsui Kenji и Sakata Toshiyuki [80], R. Vaziri, X. Quan и M. D. Olson [86] дали численные решения задачи об ударе по тонкой пластине. При этом во второй работе приведены также соответствующие экспериментальные результаты, а в последней дополнительно рассмотрена цилиндрическая оболочка.

4. Удар упругим телом по недеформируемому основанию. Эта задача является в некотором смысле противоположной рассмотренным выше: ударник G_1 является деформируемым, а основание G_2 — абсолютно жесткое. Идеология построения формул типа (6) использована А. Г. Горшковым, А. Л. Медведским и Д. В. Тарлаковским [24] и А. В. Вестяком, А. Г. Горшковым, А. Л. Медведским и Д. В. Тарлаковским [11] для исследования пространственно двумерных задач о начальном этапе взаимодействия упругих сферы и цилиндра с неподвижным полупространством. При этом используются разложения в ряды соответственно по полиномам Лежандра и тригонометрическим функциям. P. Villaggio [87] рассмотрел аналогичную задачу для сферы на дозвуковом этапе взаимодействия.

Р. А. Садыков и А. Сапурбаев [63, 64] численными методами исследовали подобные задачи в случае ударников в виде сферического полукольца и упругого цилиндра. В работе И. И. Кудиша и М. Я. Пановко [44] дано решение вопроса о нестационарном качении деформируемого цилиндра по жесткому полупространству при контакте со смазкой. Осесимметричная задача об ударе по твердому телу ограниченной торцевыми жесткими днищами ортотропной цилиндрической оболочкой, движение которой описывается геометрически нелинейными уравнениями типа Тимошенко, рассмотрена Е. П. Гордиенко [16]. К. Lee [79] в задаче о контакте без трения упругого тела с жесткой стенкой при удовлетворении граничным условиям использовал метод минимизации векторов ошибок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабичев А. И. Динамическое вдавливание сферического штампа в упругое полупространство // Изв. вузов. Черн. металлургия. 1969. № 1. С. 108–112.
2. Бабичев А. И. Определение реакции при динамическом вдавливании сферического и цилиндрического штампов в упругое полупространство // Контактн. задачи и их инж. прилож.: Докл. конф. М., 1969. С. 178–181.
3. Багдоев А. Г. Пространственные нестационарные движения сплошной среды с ударными волнами. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1961. 276 с.
4. Богульский И. О. Численное моделирование распределенного ударного воздействия на упругую плиту // Динам. сплош. среды. 1991. № 103. С. 30–35.

5. *Бородич Ф. М.* Динамический контакт затупленного тела с анизотропной линейно упругой средой // Докл. АН СССР. 1990. Т. 310. № 1. С. 38–42.
6. *Бородич Ф. М.* Автомодельные решения динамических контактных задач для композитных тел // Расчеты на проч. элементов прибор. устройств. М.: МИРЭА, 1990. С. 26–29.
7. *Бородич Ф. М.* О результирующих усилиях при динамическом вдавливании затупленных тел в вязкоупругие среды // Совр. пробл. мех. контакт. взаимодействий. Днепропетровск: Днепропетр. гос. ун-т, 1990. С. 52–54.
8. *Бородич Ф. М.* Интегральные характеристики решений пространственных задач о динамическом вдавливании твердых тел в сплошные среды // Прикл. матем. и мех. 1991. Т. 55. Вып. 1. С. 133–141.
9. *Вестяк А. В., Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В.* Вертикальный удар абсолютно твердым телом вращения по упругому полупространству // VI Всес. съезд по теор. и прикл. мех., Ташкент, 1986: Аннот. докл. Ташкент, 1986. С. 163–164.
10. *Вестяк А. В., Горшков А. Г., Медведский А. Л., Тарлаковский Д. В.* Оценка компонент тензора напряжений в плоской нестационарной контактной задаче для упругого полупространства // Тез. докл. II Междунар. симп. «Динам. и технол. пробл. мех. констр. и сплош. сред». М., 1996. С. 38–39.
11. *Вестяк А. В., Горшков А. Г., Медведский А. Л., Тарлаковский Д. В.* Определение кинематических параметров упругого цилиндра на начальном этапе взаимодействия с абсолютно жесткой преградой // Тез. докл. III Междунар. симп. «Динам. и технол. пробл. мех. констр. и сплош. сред». М., 1997. С. 33–34.
12. *Вестяк А. В., Тарлаковский Д. В.* Двумерные задачи о вертикальном ударе абсолютно твердых тел по упругому полупространству // II Всес. конф. по теории упругости, Тбилиси, 1984: Тез. докл. Тбилиси, 1984. С. 49–50.
13. *Вестяк А. В., Тарлаковский Д. В.* Результирующие реакции в пространственной динамической контактной задаче для упругого анизотропного полупространства // Тез. докл. III Всес. конф. «Мех. неоднор. структур», Львов, 17–19 сент. 1991 г. Львов, 1991. С. 55.
14. *Гоман О. Г.* Об автомодельной задаче вдавливания плоского штампа в упругое полупространство // Прикл. мех. 1983. Т. 19, № 10. С. 55–60.
15. *Гоман О. Г.* Автомодельная задача вдавливания конического штампа в упругое полупространство для сверхзвукового случая // Гидроаэромех. и теория упругости. 1984, № 32. С. 37–44.
16. *Гордиенко Е. П.* Удар ортотропной цилиндрической оболочки о препятствие // Пробл. прочн. матер. и соорж. на трансп.: Тез. докл. 3 междунар. конф., Санкт-Пб., янв., 1995 г. СПб, 1995. С. 101–102.
17. *Горшков А. Г., Коровайцев А. А., Медведский А. Л., Тарлаковский Д. В.* Анализ особенностей ядер интегральных операторов осесимметричной контактной задачи // Тез. докл. III Междунар. симп. «Динам. и технол. пробл. мех. констр. и сплош. сред». М., 1997. С. 45.
18. *Горшков А. Г., Медведский А. Л., Тарлаковский Д. В.* Влияние граничных условий на параметры нестационарной контактной задачи // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 1. С. 133–143.
19. *Горшков А. Г., Медведский А. Л., Тарлаковский Д. В.* Наклонный удар абсолютно твердого цилиндра по упругому полупространству // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 1. С. 27–37.
20. *Горшков А. Г., Медведский А. Л., Тарлаковский Д. В.* Наклонный удар цилиндрическим телом по упругому полупространству в условиях жесткого сцепления // Имп. проц. в мех. сплош. сред: Тез. докл. I научн. школы, Николаев, сент. 1994 г. Николаев, 1994. С. 59.

21. *Горшков А. Г., Медведский А. Л., Тарлаковский Д. В.* Алгоритм интегрирования системы функциональных уравнений плоской нестационарной контактной задачи // Статика и динам. структурно неоднор. констр. М.: МГАТУ, 1994. С. 26–33.
22. *Горшков А. Г., Медведский А. Л., Тарлаковский Д. В.* Взаимодействие ударника и упругой полуплоскости в условиях жесткого сцепления // Моделир. и исслед. устойч. сттем (прикл. мех.): Тез. докл. конф. Киев, 1995. С. 41.
23. *Горшков А. Г., Медведский А. Л., Тарлаковский Д. В.* О применимости различных моделей движения ударника на дозвуковом участке внедрения // Тез. докл. Всерос. симп. «Динам. и технол. пробл. мех. констр. и сплош. сред». М., 1995. С. 19–20.
24. *Горшков А. Г., Медведский А. Л., Тарлаковский Д. В.* Определение кинематических параметров упругой сферы при ударе о жесткую преграду // Int. Conf. «Modelling and investigation of system stability. Mechanical systems», Kiev, May, 19–23, 1997: Thesis of conf. reports. Kiev, 1997. P. 43.
25. *Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В.* Вертикальный удар цилиндра по упругой полуплоскости // Всес. конф. «Пробл. взаимод. деформ. сред», Горис, 1984: Тез. докл. Ереван, 1984. С. 125–131.
26. *Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В.* Плоская задача об ударе твердым телом по упругому полупространству // Тр. XV Гагаринских научн. чтений по космонавтике и авиации, Москва, 1985. М., 1986. С. 187.
27. *Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В.* Результирующие реакции в пространственной задаче об ударе твердым телом по упругому полупространству // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 95–98.
28. *Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В.* Алгоритм решения интегральных уравнений двумерных динамических контактных задач с подвижными границами // II Всес. конф. «Числен. реализ. физ.-мех. задач прочн.», Горький, 1987: Тез. докл. Горький, 1987. С. 78–79.
29. *Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В.* Напряжения в осесимметричных динамических контактных задачах с подвижными границами // Регион. конф. «Динам. задачи мех. сплош. среды», Краснодар, 1988 г. Тез. докл. Ч. 1. Краснодар, 1988. С. 39–41.
30. *Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В.* Динамические контактные задачи для абсолютно жестких тел и упругого полупространства. Препринт. МАИ, 1989. 49 с.
31. *Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В.* Динамические контактные задачи с подвижными границами для упругого полупространства // Докл. расш. засед. сем. ИПМ им. И.Н.Векуа Тбилис. ун-та. 1989. Т. 4. № 2. С. 61–62.
32. *Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В.* Двумерные контактные задачи с подвижными границами. Препринт. МАИ, 1990. 48 с.
33. *Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В.* Влияние подвижности границ на напряжения в контактных задачах для упругого полупространства // Тез. IV Всес. конф. «Совр. пробл. строит. мех. и прочн. летат. аппар.». Харьков, 1991. С. 51.
34. *Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В.* Динамические контактные задачи с подвижными границами. М.: Наука. Физматлит, 1995. 352 с.
35. *Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В.* Результирующие реакции в нестационарной контактной задаче для упругого анизотропного полупространства // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 5. С. 799–809.
36. *Коровайцев А. А., Медведский А. Л., Тарлаковский Д. В.* Нестационарное кинематическое возбуждение упругого полупространства с расширяющейся

- площадкой контакта // Тез. докл. II Междунар. симп. «Динам. и технол. пробл. мех. констр. и сплош. сред». М., 1997. С. 67–68.
37. Костров Б. В. Автомодельные динамические задачи о вдавливании жесткого штампа в упругое полупространство // Изв. АН СССР. Механ. и машиностр. 1964. Т. 4. С. 53–62.
 38. Костров Б. В. Неустановившееся распространение трещины продольного сдвига // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 6. С. 1042–1049.
 39. Костров Б. В. Распространение трещин с переменной скоростью // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 3. С. 551–560.
 40. Кравчук А. С. Вариационный метод в динамических контактных задачах // Мех. деформ. тел и констр.: Школа-сем. по теор. упруг. и вязкоупр., Цахкадзор, 22–25 нояб., 1982 г. Ереван, 1985. С. 235–241.
 41. Кубенко В. Д. Об одном подходе к исследованию распределения напряжений на поверхности тупого тела, проникающего в упругую среду // Теор. и прикл. мех. 1986. № 17. С. 7–12.
 42. Кубенко В. Д., Попов С. Н. Плоская задача удара жесткого затупленного тела о поверхность упругого полупространства // Прикл. мех. 1988, Т. 24. № 7. С. 69–77.
 43. Кубенко В. Д., Попов С. Н. Осесимметричная задача удара жесткого затупленного тела о поверхность упругого полупространства // Прикл. мех. 1989. Т. 25, № 7. С. 16–24.
 44. Кудин И. И., Пановко М. Я. Колебания деформируемого цилиндра при его качении по жесткому полупространству со смазкой // Трение и износ. 1992. Т. 13. № 5. С. 765–776.
 45. Навал И. К., Римский В. К. Численный анализ распространения упругих волн в кусочно-однородном слое // Матем. исслед. 1980. № 57. С. 69–76.
 46. Навал И. К., Римский В. К. Динамическая реакция слоистой полосы на упругое соударение с жестким штампом // Числ. методы решения задач теории упругости и пластич.: Материалы 6 Всес. конф., Ташкент, 1979. Новосибирск, 1980. С. 126–131.
 47. Навал И. К., Римский В. К. Численное исследование напряженного состояния кусочно-однородного слоя // Мех. деформ. сред. Куйбышев, 1981. С. 77–83.
 48. Остапенко Н. А. Проникание тонкого тела со звездообразным поперечным сечением в упругое полупространство // Докл. АН. 1989. Т. 307. № 1. С. 62–66.
 49. Остапенко Н. А. Проникание тонкого циклически-симметричного пространственного тела в упругое полупространство // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 5. С. 808–818.
 50. Попов С. Н. Проникание жесткого тела вращения в упругое полупространство // Тр. 12 науч. конф. мол. ученых ин-та мех. АН УССР, Киев, 1987. Киев: Ин-т мех. АН УССР, 1987. С. 395–399. (Рук. деп. в ВИНТИ, № 5389-В87. Деп. от 29.7.87).
 51. Попов С. Н. К задаче сверхсейсмического проникновения параболического штампа в упругую полуплоскость // Тр. 14 науч. конф. мол. ученых ин-та мех. АН УССР, Киев, 1989. Ч. 2. Киев: Ин-т мех. АН УССР, 1989. С. 299–303 (Рук. деп. в ВИНТИ, № 5165-В89. Деп. от 2.8.89).
 52. Попов С. Н. Вертикальный удар жесткого кругового цилиндра боковой поверхностью об упругое полупространство // Прикл. мех. 1989. Т. 25, № 12. С. 41–47.
 53. Попов С. Н. Удар жесткого шара о поверхность упругого полупространства // Прикл. мех. 1990. Т. 26, № 3. С. 42–49.

54. Римский В. К. Сравнительная характеристика численных методов решения контактных задач динамической теории упругости // Матем. исслед. 1980. № 57. С. 98–110.
55. Римский В. К., Сабодаш П. Ф. Численное моделирование осесимметричной динамической контактной задачи об ударе по упругому слою тупым конусом // Прикл. мех. 1980. Т. 16. № 8. С. 84–92.
56. Римский В. К., Сабодаш П. Ф. Некоторые модели численного решения динамических контактных задач для упругого слоя // Прикл. мех. 1981. Т. 17. № 7. С. 17–22.
57. Родионов А. И. О системе уравнений, описывающих удар твердого тела по упругому полупространству // Динамика мех. систем. Новосибирск, 1981. С. 159–175.
58. Родионов А. И. К теории удара деформируемых тел, как элементов силовых импульсных систем // Вопр. автоматиз. произв. процессов с использ. сил. импульс. систем. Новосибирск, 1984. С. 75–79.
59. Родионов А. И. К динамической теории удара деформируемых твердых тел // Пробл. динам. мех. систем. Новосибирск, 1985. С. 86–94.
60. Россихин Ю. А. Удар жесткого шара по упругому полупространству // Прикл. мех. 1986. Т. 22. № 5. С. 15–21.
61. Рузанов А. И., Кибец А. И. Методика численного решения трехмерных динамических задач соударения жестких тел с деформируемыми преградами // Прикл. пробл. прочн. и пластич. 1995. № 52. С. 149–154.
62. Сабодаш П. Ф., Навал И. К., Римский В. К. Волны напряжений в пакете упругих слоев при поперечном ударе жестким конусом // Мех. сплош. среды: Материалы Всес. конф., 1979. Ташкент, 1982. С. 24–34.
63. Садыков Р. А., Санурбаев А. Численный анализ решения одной динамической контактной задачи // Изв. АН УзССР. Сер. тех. н. 1984. № 6. С. 64–66.
64. Садыков Р. А., Санурбаев А. Алгоритм расчета напряженного состояния цилиндра при соударении с недеформируемым полупространством // Алгоритмы. 1983. № 50. С. 55–66.
65. Симонов И. В. Динамическая задача о вдавливании осесимметричного штампа в упругое полупространство // Инж. журнал. МТТ. 1967. № 2. С. 163–165.
66. Ярве Э. В. Расчет многослойной ортотропной пластины при поперечном ударе жестким телом // Тр. XI конф. молод. ученых ин-та машиновед. М: Изд-во АН СССР, 1987. С. 55.
67. Aboudi J. The dynamic indentation of an elastic half-space by rigid punch // Int. J. Solids and Struct. 1987. V. 13. No. 10. P. 995–1005.
68. Aboudi J. The dynamic indentation and impact of a viscoelastic half-space by an axisymmetric rigid body // Comput. Meth. Appl. Mech. and Eng. 1979. V. 20. No. 2. P. 135–150.
69. Aboudi J. The dynamic contact with perfect adhesion and frictional slip between a rigid indenter and an elastic half-space // Acta mech. 1980. V. 35. No. 1–2. P. 147–155.
70. Anderson M., Nilsson F. A perturbation method used for static contact and low velocity impact // Int. J. Impact Eng. 1995. V. 16. No. 5–6. P. 759–775.
71. Bedding R. J., Willis J. R. The dynamic indentation of an elastic half-space // J. Elast. 1973. V. 3. No. 4. P. 289–309.
72. Bedding R. J., Willis J. R. High speed indentation of an elastic half-space by conical or wedge-shaped indentors // J. Elast. 1976. V. 6. No. 2. P. 195–207.

73. Borodich F. M. Exact solution for the superseismic stage of dynamic contact between a punch and anisotropic elastic media // *EUROMECH: 1st Eur. Solid Mech. Conf.* München, Sept. 9–13, 1991: Abstr. V. 1. München, 1991. P. 36.
74. Brock L. M. The non-uniform motion of a thin smooth rigid wedge into elastic half-plane // *Quart. Appl. Math.* 1980. V. 38. No. 2. P. 209–223.
75. Brock L. M. Sliding and indentation by a rigid half-wedge with friction and displacement coupling effects // *Int. J. Eng. Sci.* 1981. V. 19. No. 1. P. 31–40.
76. Crozier R. J. M., Hunter S. C. The normal vibrations of a rigid spherical punch on the surface of an elastic half-space // *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 1967. V. 15. No. 4. P. 297–307.
77. Georgiadis H. G., Brock L. M., Rigatos A. P. Dynamic indentation of an elastic half-plane by a rigid wedge: Frictional and tangential-displacement effects // *Int. J. Solids and Struct.* 1995. V. 32. No. 23. P. 3435–3450.
78. Kral E. R., Homvopoulos K. Three-dimensional finite element analysis of surface deformation and stresses in an elastic-plastic layered medium subjected to indentation and sticking contact loading // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1996. V. 63. No. 2. P. 365–375.
79. Lee K. A numerical solution for dynamic contact problems satisfying the velocity and acceleration compatibilities on the contact surface // *Comput. Mech.* 1994. V. 15. No. 3. P. 189–200.
80. Matsushita Shinya, Matsui Kenji, Sakata Toshiyuki. Dynamic response of rectangular plates impulsed by a steel ball // *Trans. JSME.* 1996. V. 62. No. 602. P. 3964–3970.
81. Robinson A. R., Thompson J. C. Transient stresses in an elastic half-space resulting from the frictionless indentation of a rigid wedge-shaped die // *Z. angew. Math. und Mech.* 1974. V. 54. No. 3. P. 139–144.
82. Robinson A. R., Thompson J. C. Transient stresses in an elastic half-space resulting from the frictionless indentation of a rigid symmetric conical die // *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 1974. V. 76. No. 1. P. 369–379.
83. Robinson A. R., Thompson J. C. Transient disturbances in a half-space during the first stage of frictionless indentation of a smooth rigid die of arbitrary shape // *Quart. Appl. Math.* 1975. V. 38. No. 3. P. 215–223.
84. Rosskhin Yu. A., Shitikova M. V. The impact of a rigid sphere with an elastic layer of finite thickness // *Acta Mech.* 1995. V. 112. No. 1. P. 83–93.
85. Thompson J. C., Robinson A. R. An exact solution for the superseismic stage of dynamic contact between a punch and elastic body // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1977. V. 44. No. 4. P. 583–586.
86. Vaziri R., Quan X., Olson M. D. Impact analysis of laminated composite plates and shell by super finite elements // *Int. J. Impact Eng.* 1996. V. 18. No. 7–8. P. 765–782.
87. Villaggio P. The rebound of an elastic sphere against a rigid wall // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1996. V. 63. No. 2. P. 259–263.

§ 4. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УПРУГИХ ТЕЛ С УПРУГИМ ПОЛУПРОСТРАНСТВОМ

А. Г. Горшков, Д. В. Тарлаковский

При учете деформируемости ударника постановка контактной задачи существенно усложняется. Вместо (2.1) необходимо рассматривать уравнения, соответствующие принятой модели ударника (линейная теория упругости, тонкие оболочки и т.д.). Условия (2.2) для определения границы области контакта должны быть записаны в общем случае с учетом деформированной поверхности ударника Π_{1*} :

$$\partial\Omega = \Pi_{2*} \cap \Pi_{1*}. \quad (1)$$

В рамках линейной теории допустимо заменить в (1) деформированные поверхности недеформированными. Более сложным и актуальным в подобных задачах является вопрос о расслоении контактирующих поверхностей.

1. Ударник в виде абсолютно жесткой оболочки, заполненной упругой средой. Это — одна из простейших моделей учета деформируемости ударника. Она позволяет использовать многие результаты, полученные для абсолютно жестких тел. В работах А. Г. Горшкова и Д. В. Тарлаковского [11], Д. В. Тарлаковского [27, 29] рассмотрены осесимметричная и плоская задачи о вертикальном ударе абсолютно жестких сферы и кругового цилиндра с упругим наполнителем. Найдено выражение для реакции наполнителя на поступательное движение ударника:

$$R_x = -m_1 \left[a_1 \dot{h}_1 + a_0 h_1 + \int_0^t \chi(t-\tau) h_1(\tau) d\tau \right], \quad (2)$$

$$h_1 = h = V_0 t, \quad \dot{h}(0) = V_0,$$

где m_1 — масса наполнителя; $h(t)$ — закон движения оболочки; коэффициенты a_0 , a_1 и функция $\chi(t)$ — находятся из решения соответствующей начально-краевой задачи для наполнителя.

Для цилиндра получено асимптотическое выражение для $\chi(t)$, справедливое при $t \rightarrow 0$. В случае сферы методом «обобщенных сферических волн» найдено точное значение реакции. Показано, что использование выражения (2) приводит к интегро-дифференциальному уравнению движения абсолютно жесткой оболочки.

2. Ударник — тонкая оболочка. Эта модель — следующий этап усложнения контактной задачи. В работах А. Г. Горшкова и Д. В. Тарлаковского [9, 10], Д. В. Тарлаковского [26] рассмотрена плоская задача об ударе по упругой полуплоскости тонкой упругой круговой цилиндрической оболочки. Для последней использованы уравнения типа С. П. Тимошенко. С помощью функций влияния для полупространства и оболочки из условий контакта построено интегральное уравнение типа (3.1). Указан алгоритм его численного решения.

Эта же задача рассмотрена Д. В. Тарлаковским и Г. В. Федотенковым [30], А. Г. Горшковым, Д. В. Тарлаковским и Г. В. Федотенковым [13], С. Н. Поповым и В. Р. Богдановым [19], В. Д. Кубенко и В. Р. Богдановым [16]. В первой из этих работ исследован начальный этап взаимодействия с использованием интегральной связи контактного давления и вертикального перемещения, полученного в монографии А. Г. Горшкова и Д. В. Тарлаковского [12], а во второй — с использованием указанного выше интегрального уравнения дано решение для произвольных моментов взаимодействия. Аналогичная осесимметричная задача для ударника в виде сферической оболочки решена В. Р. Богдановым и С. Н. Поповым [2]. В работе Д. В. Тарлаковского [28] дополнительно рассмотрено влияние акустического заполнителя в круговой цилиндрической оболочке.

3. Фиксированная область контакта. Наиболее просто решаются задачи для случая, когда движение тела G_1 описывается одномерными моделями стержня или балки. В. М. Сеймов и Б. Н. Островерх [22], R. K. N. Rajapakse [48], А. И. Гулидов и И. И. Шабалин [14] исследовали задачу о колебаниях вертикального стержня, сцепленного торцом с упругим полупространством. Этот же вопрос для основания в виде тонкой упругой пластины рассмотрели Н. Г. Долматова [15], Peng Xinqian [47], а для вязкоупругого полупространства — Н. Н. Downey и D. В. Bogy [43]. Решение соответствующей задачи при крутильных колебаниях стержня получил Н. Wada [52]. Нестационарные движения балки, расположенной на деформируемом полупространстве, исследованы в работах О. Д. Пряжиной [20] и S. F. Felszeghy [44].

Более сложными являются задачи для ударника в виде двух- или трехмерного упругого тела. Конечноразностные методы использованы в монографии В. М. Сеймова, Б. Н. Островерха и А. И. Ермоленко [23] и статьях М. Д. Бородай [3, 4] в задачах о колебаниях упругих тел на упругом полупространстве. М. Д. Бородай и В. М. Сеймов [5] исследовали плоскую задачу об упругом штампе в виде прямоугольника на упругой полуплоскости. Распределенная нагрузка приложена к торцу штампа. Для полуплоскости использованы интегральные преобразования, а для штампа — метод конечных разностей. Х. Мацумото, И. Накаха и Ю. Мацуока [54] исследовали осесимметричную и плоскую задачи о взаимодействии кругового упругого цилиндра с упругим полупространством. Для решения использованы интегральные преобразования и интегральные уравнения. В статье А. Кудайкулова [17] рассмотрена задача об ударе торцом четырехугольного призматического штампа по упругому четвертьслою. Численный метод для решения осесимметричной задачи о соударении деформируемого цилиндра с многослойной вязкоупругой плитой использован В. К. Римским и П. Ф. Сабодашем [21].

4. Подвижная область контакта. А. И. Бабичевым [1] учтена упругость ударника в виде шара. Контактное давление находится приближенно из решения задачи о поступательном движении шара в бесконечной упругой среде. J. R. Barber и M. Compinou [42] рассмотрели плоскую задачу о качении упругого цилиндра по упругой полуплоскости. В работе А. А. Ванцяна [8] приведены результаты численного решения нестационарной задачи о проникании ударника в виде криволинейного тела, переходящего в цилиндр, в упругую изотропную среду. Показано, что в отличие от одномерной задачи здесь имеют место знакопеременные напряжения. Упрощенная модель основания использована С. Васон [41].

И. В. Симоновым [24] исследованы различные условия контакта двух упругих тел. Ф. М. Бородич [6] для специального типа соударяющихся упругих тел использовал автомодельность задачи. В качестве частного случая рассмотрено взаимодействие упругих ударника и полупространства. Асимптотические методы использованы А. Н. Мартиросяном и Ю. С. Сафаряном [18] в задаче о соударении двух упругих тел, ограниченных двугранными углами. G. J. Muñ и K. В. M. Kwa [46], S. M. Sun, H. S. Tzou и M. C. Natori [49], N. Asano [32–39], а также N. Asano, H. Kamegaya и K. Funatsu [40] для исследования соударения двух упругих тел использовали вариационную постановку задачи в сочетании с методами конечных элементов и штрафных функций. Программные средства для решения задач об ударе предложены R. Asada [31].

Современное состояние проблемы и физико-механические аспекты процесса соударения изложили в монографии J. A. Zukas, T. Nicholas, H. F. Swift, L. B. Greszuk и D. R. Curran [53]. Экспериментальные исследования этого вопроса приведены в работах Tanaka Koichi, Masuda Taisuke и Kodama Hitochi [50, 51]. Специальная трехмерная дискретная модель для учета пластических деформаций и разрушения в соударяющихся телах предложена в работе А. М. Быковских, В. Д. Кошура, С. А. Мартынова и И. В. Филимошенко [7]. Вопросы контактного взаимодействия с трением рассмотрены А. А. Спектором [25]. В работе А. Hocknell, R. Sones и S. Rothberg [45] дано описание измерительной системы для экспериментального исследования процесса высокоскоростного удара с большой упругой деформацией двух легких тел.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабичев А. И. Динамическое вдавливание сферического штампа в упругое полупространство // Изв. вузов. Черн. металлургия. 1969. № 1. С. 108–112.
2. Богданов В. Р., Попов С. Н. Вертикальный удар сферической оболочки об упругое полупространство // Тр. 17 научн. конф. мол. ученых ин-та мех. АН Украины, Киев, 19–22 мая, 1992 г. Киев, 1992. С. 24–30 (Рук. деп. в Укр. ИНТЭИ 07.07.92, № 1022-Ук92).
3. Бородай М. Д. Численно-аналитический метод решения динамических контактных задач // Докл. АН УССР. 1983. Сер. А. № 5. С. 25–28.

4. *Бородай М. Д.* Динамическая задача о контакте упругой области с упругим полупространством // Числ. методы решения задач теории упруг. и пластич.: Материалы 8 Всес. конф., Ужгород, 1983. Новосибирск, 1984. С. 37–41.
5. *Бородай М. Д., Сеймов В. М.* Динамическая контактная задача для прямоугольной области, расположенной на упругой полуплоскости // Прикл. мех. 1983. Т. 19. № 4. С. 64–67.
6. *Бородич Ф. М.* Подобие в задаче контакта упругих тел // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 3. С. 519–521.
7. *Быковских А. М., Кошур В. Д., Мартыанов С. А., Филимошенко И. В.* Моделирование динамических процессов удара и проникания // Числ. методы реш. задач теории упруг. и пластич.: Тр. 13 межресп. конф., Новосибирск, 22–24 июня, 1993 г. Новосибирск, 1995. С. 30–35.
8. *Ванцян А. А.* Проникание произвольного индентора (формы криволинейного тела, переходящего в цилиндр) в упругую изотропную среду // Изв. АН Армении. Мех. 1995. Т. 48. № 4. С. 43–48.
9. *Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В.* Динамическая контактная задача для круговой цилиндрической оболочки и упругого полупространства // Прочность пластин и оболочек при комбинированных воздействиях. М.: МАИ, 1987. С. 16–25.
10. *Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В.* Удар цилиндрической оболочкой по упругому полупространству // Тр. XVI Гагаринских научн. чтений по космонавтике и авиации, Москва, 1986. М., 1987. С. 165.
11. *Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В.* Динамика абсолютно твердой сферической оболочки с заполнителем при ударе по упругому полупространству // II Всес. конф. по мех. неоднор. структур, Львов, 1987 г. Тез. докл. Т. 1. Львов, 1987. С. 74–75.
12. *Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В.* Динамические контактные задачи с подвижными границами. М.: Наука. Физматлит, 1995. 352 с.
13. *Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В.* Вертикальный удар цилиндрической оболочкой по упругой полуплоскости // Акт. пробл. разв. трансп. систем: Тез. докл. междунар. научн.-тех. конф. Гомель: БелГУТ, 1998. С. 194–195.
14. *Гулидов А. И., Шабалин И. И.* Численное моделирование процесса проникания стержней в массивные мишени методом свободных элементов // Числ. мет. реш. задач теории упруг. и пластич.: Тр. 13 межресп. конф., Новосибирск, 22–24 июня, 1993 г. Новосибирск, 1995. С. 68–76.
15. *Долматова Н. Г.* Контактное соударение при осевом соударении упругого стержня с упругой пластиной // Наг. моделир. систем и процессов упр. Самара: Самар. гос. тех. ун-т, 1997. С. 87–95.
16. *Кубенко В. Д., Богданов В. Р.* Плоская задача удара оболочки об упругое полупространство // Прикл. мех. 1995. Т. 31. № 6. С. 78–85.
17. *Кудайкулов А.* Удар деформируемого четырехугольного ударника о деформируемую четверть плоскости постоянной толщины // Докл. АН УзССР. 1984. № 8. С. 13–15.
18. *Мартиросян А. Н., Сафарян Ю. С.* Соударения упругих тел, ограниченных равными двугранными углами и параллельными плоскостями // Изв. АН АрмССР. Мех. 1985. Т. 38. № 1. С. 3–11.
19. *Попов С. Н., Богданов В. Р.* Вертикальный удар цилиндрической оболочки об упругое полупространство // Тр. 16 научн. конф. мол. ученых ин-та мех. АН Украины, Киев, 21–24 мая, 1991 г. Ч. 2. Киев, 1991. С. 332–337 (Рук. деп. в ВИНТИ 12.11.91, № 4260–В91).

20. *Прахина О. Д.* Нестационарные колебания упругой балки на вязкоупругом основании // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 1. С. 164–169.
21. *Римский В. К., Сабодаш П. Ф.* О соударении деформируемого штампа с многослойной вязкоупругой плитой // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 1. С. 78–85.
22. *Сеймов В. М., Островерх Б. Н.* Расчет неустановившихся продольных колебаний пластинки, прикрепленной к границе полупространства // Тр. координац. совещ. по гидротехн. 1972. № 64. С. 61–69.
23. *Сеймов В. М., Островерх Б. Н., Ермоленко А. И.* Динамика и сейсмостойкость гидротехнических сооружений. Киев: Наук. думка, 1983. 318 с.
24. *Симонов И. В.* О дозвуковом движении края сдвиговой подвижки с трением вдоль границы раздела упругих материалов // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 3. С. 497–506.
25. *Спектор А. А.* Динамика движения упругого тела по основанию и режимы их контактного взаимодействия с трением // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 4. С. 133–140.
26. *Тарлаковский Д. В.* Плоская задача об ударе цилиндрической оболочки по упругому полупространству // Тр. 14 Всес. конф. по теории пластин и оболочек, Кутаиси, 20–23 окт., 1987 г. Т. 2. Тбилиси, 1987. С. 471–476.
27. *Тарлаковский Д. В.* Вертикальный удар абсолютно твердой сферы с заполнителем по упругому полупространству // Расчет на прочн. и оптим. проектир. элементов авиац. конструкций. М.: МАИ, 1988. С. 41–46.
28. *Тарлаковский Д. В.* Удар цилиндрической оболочки с акустическим заполнителем по упругому полупространству // Совр. пробл. строит. мех. и прочн. летат. аппаратов: Тез. докл. III Всес. конф., Казань, 1988 г. Казань, 1988. С. 142.
29. *Тарлаковский Д. В.* Удар абсолютно жесткой оболочки с заполнителем по упругому полупространству // Деформир. и разруш. элементов конструкций летат. аппаратов. М.: МАИ, 1989. С. 129–138.
30. *Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В.* Удар цилиндрической оболочки по упругому полупространству // Матер. IV Междунар. симп. «Динам. и технол. пробл. мех. констр. и сплош. сред». М.: Изд-во «ГРАФРОС», 1998. С. 130–134.
31. *Asada R.* Impact problem and its applications. 3. Computer codes for impact problems // J. Soc. Mater. Sci. Jap. 1985. V. 34. No. 385. P. 1228–1234.
32. *Asano N.* A finite element method applicable to elasto-impact contact structures // Mem. Fac. Eng. Tamagawa Univ. 1982. No. 17. P. 39–54.
33. *Asano N.* A new dynamic zooming method for elastoimpact contact stress analysis using finite element method // Mem. Fac. Eng. Tamagawa Univ. 1984. No. 19. P. 51–64.
34. *Asano N.* A study on efficient condensation methods for elastoimpact contact stress analysis using finite element method // Mem. Fac. Eng. Tamagawa Univ. 1984. No. 19. P. 65–79.
35. *Asano N.* Virtual work principles and their subsidiary conditions for two elastoimpact contact bodies // Mem. Fac. Eng. Tamagawa Univ. 1984. No. 19. P. 81–97.
36. *Asano N.* Virtual work principle for two elastoimpact bodies in separate state and formulation of finite element method // Mem. Fac. Eng. Tamagawa Univ. 1984. No. 19. P. 99–114.
37. *Asano N.* A virtual work principle using penalty function method for impact contact problems of two bodies // Trans. JSME. 1985. V. A51. No. 467. P. 1863–1898.
38. *Asano N.* A virtual work principle using penalty function method for impact contact problems of two bodies // Bull. JSME. 1986. V. 29. No. 249. P. 731–736.

39. *Asano N.* A hybrid type of virtual work principle for impact contact problems of two bodies // Bull. JSME. 1986. V. 29. No. 252. P. 1679–1684.
40. *Asano N., Kamegaya H., Funatsu K.* A hybrid type of virtual work principle for impact contact problems of two bodies // Var. meth. eng.: Proc. 2nd Int. conf., Southampton, Juli, 1985. Berlin e. a., 1985. P. 6/41–6/52.
41. *Bacon C.* Longitudinal impact of a shaped projectile on a Hopkinson bar // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1994. V. 61. No. 2. P. 493–495.
42. *Barber J. R., Comminou M.* Rolling of elastic cylinders with friction at supersonic speed // Int. J. Solids and Struct. 1982. V. 18. No. 9. P. 783–789.
43. *Downey H. H., Bogy D. B.* The normal impact of an elastic rod–mass system on a viscoelastic half-space // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1987. V. 54. No. 2. P. 367–372.
44. *Felzseggy S. F.* The Timoshenko beam on an elastic foundation and subject to a moving step load // Trans. ASME. J. Vibr., Acoust. Stress and Rel. Des. J. 1996. V. 118. No. 3. P. 285–291.
45. *Hocknell A., Sones R., Rothberg S.* Experimental analysis of impacts with large elastic deformation. 1. Linear motion // Meas. Sci. and Technol. 1996. V. 7. No. 9. P. 1247–1254.
46. *Muh G. J., Kwa K. B. M.* Constrained variational approach for dynamic analysis of elastic contact problems // Finite Elem. Anal. and Des. 1991. V. 10. No. 2. P. 125–136.
47. *Peng Xinqian* Dynamic analysis for the impact between a finite elastic rod and elastic plate on Winkler's foundation // Chin J. Appl. Mech. 1997. V. 14. No. 4. P. 130–133.
48. *Rajapakse R. K. N.* A note on the elastodynamic load transfer problem // Int. J. Solids and Struct. 1988. V. 24. No. 9. P. 963–972.
49. *Sun S. M., Tzou H. S., Natori M. C.* Parametric quadratic programming method for dynamic contact problems with friction // AIAA Journal. 1994. V. 32. No. 2. P. 371–378.
50. *Tanaka Koichi, Masuda Taisuke, Kodama Hitochi.* High-speed impact of baseball bats and balls. 1st Report. Impact of alloy bats and balls // Trans. JSME. 1992. V. A58. No. 556. P. 2365–2369.
51. *Tanaka Koichi, Masuda Taisuke, Kodama Hitochi.* High-speed impact of baseball bats and balls. 2nd Report. Impact of CFRP cylinders and balls // Trans. JSME. 1992. V. A58. No. 556. P. 2370–2374.
52. *Wada H.* Reflection characteristics of torsional waves in a semi-infinite cylindrical rod connected to an elastic half-space — II // Int. J. Eng. Sci. 1981. V. 19. No. 7. P. 967–977.
53. *Zukas J. A., Nicholas T., Swift H. F., Greszuk L. B., Curran D. R.* Impact dynamics. New York: Wiley. 1982. (Перевод: *Зукас Дж. А., Николас Т., Свифт Х. Ф., Грециук Л. В., Курран Д. Р.* Динамика удара. М.: Мир, 1985. 296 с.)
54. *Мацумото Х., Накахара И., Мацуока Ю.* Удар упругого цилиндра по упругому телу // Нихон кикай гаккай ромбунсю. Trans. JSME. 1977. V. 43. No. 372. P. 2872–2878.

§ 5. УДАР И ПРОНИКАНИЕ ТЕЛ В ЖИДКОСТЬ

А. Г. Горшков, Д. В. Тарлаковский

Вопросы, связанные с ударом и прониканием жестких и деформируемых тел (пластин и оболочек) в полупространство, занятое идеальной жидкостью, нашли отражение в обзорах Э. И. Григолоука и А. Г. Горшкова [33], А. Г. Горшкова [23], А. В. Вестяка, А. Г. Горшкова и Д. В. Тарлаковского [13], опубликованных ранее. Поэтому в данный параграф включены лишь работы, опубликованные после 1983 года.

Задачу о погружении деформируемых тел в жидкость можно условно разбить на две взаимосвязанные части: определение движения жидкости, вызванного погружением деформируемого тела (гидродинамическая составляющая), и исследование динамики конструкции под действием гидродинамических сил (упругая часть). При этом определяющей и наиболее сложной в математическом плане является гидродинамическая часть. Для ее решения широко используются как аналитические, так и численные методы.

Аналитические методы определения гидродинамических сил, действующих на затупленное тело, погружающееся как в сжимаемую, так и в несжимаемую жидкость, в основном, базируются на приближенном приеме, связанном с заменой процесса погружения тела обтеканием плоской расширяющейся пластины или диска (А. Г. Горшков [24], А. В. Вестяк, А. Г. Горшков и Д. В. Тарлаковский [13]). Решения, получаемые с помощью таких подходов, справедливы только для небольших глубин погружения и не всегда позволяют определить величины максимальных реакций погружающегося тела.

Использование численных методов (в основном, конечно-разностных) дает возможность решить задачу в более точной постановке (А. Г. Горшков и Н. И. Дробышевский [26], В. Г. Баженов, А. В. Кочетков и С. В. Крылов [1, 2], С. В. Крылов [41], А. Я. Сагомоян [61]). При этом применяются конечно-разностные методы как на подвижных, так и на неподвижных сетках. Решениям, полученным на неподвижных сетках (А. Я. Сагомоян [61]), вследствие замены погружения тела обтеканием расширяющейся пластины (диска) присущи те же ограничения, что и приближенным аналитическим методам. В случае использования подвижных сеток решение находится в более точной постановке (не требуется замена погружения обтеканием), что позволяет исследовать процесс взаимодействия оболочки с жидкостью до больших глубин погружения. Постановка задачи при применении подвижных сеток может проводиться в лагранжевых, смешанных лагранжево-эйлеровых и эйлеровых переменных. При этом во всех этих постановках используются основные характерные черты лагранжевого описания.

Решения в смешанных лагранжево-эйлеровых и эйлеровых переменных требуют, как правило, дополнительной перестройки сетки на каждом шаге по времени. Поэтому методы, основанные на чисто лагранжевом описании, являются более экономичными (в смысле затрат ресурсов ЭВМ), но при этом накладываются несколько большие ограничения на глубину погружения.

В случае определения поведения жидкости конечно-разностными методами удобно применять эти же методы и для исследования динамики оболочки, что вызвано необходимостью стыковки на каждом шаге по времени решений уравнений движения жидкости и оболочки. Конечно-разностные методы являются также более экономичными по сравнению с методом Рунге–Кутты и, несмотря на то, что имеют меньший порядок аппроксимации по времени, не приводят к существенной потере точности. Это объясняется тем, что наибольшую погрешность в решение

вносит дискретизация самой оболочки и, следовательно, повышение порядка аппроксимации по времени не приводит к уточнению решения.

Развитие метода конечных элементов в применении к задачам о проникании деформируемых конструкций в жидкость дано в работах Н. Ф. Ершова и Г. Г. Шахверди [37] и Г. Г. Шахверди [70, 72]. Здесь конечные элементы используются для описания движения как конструкции, так и жидкости.

Обзор исследований по входу в жидкость жестких и деформируемых тел сферической формы дан в работе А. Г. Горшкова, М. И. Мартиросова и А. Н. Ульяшиной [30].

1. Проникание твердых тел. Задачи об ударе и погружении абсолютно твердых тел в жидкость имеют не только чисто теоретическое значение. Они также представляют интерес с точки зрения оценки точности различных приближенных гидродинамических теорий и численных схем, применяемых в задачах о проникании деформируемых конструкций в жидкость.

Известные в настоящее время аналитические и численные решения задач удара и проникания твердых тел различной формы (клин, конус, диск, пластина, цилиндр, сфера, произвольное тело вращения) в жидкость получены с использованием ряда упрощающих гипотез (Э. И. Григолюк и А. Г. Горшков [32], А. Я. Сагомоян [60, 61], А. А. Когобкин и V. V. Pukhnachov [77]). В книге А. А. Коробкина [38] для решения акустической задачи используется в аналитическом виде метод характеристик, а также рассмотрены нелинейные эффекты взаимодействия, связанные с кавитационными явлениями и образованием брызговых струй. Вопросы глассирования и входа килеватых тел в несжимаемую жидкость отражены в учебном пособии А. Б. Лотова [49].

Дальнейшие исследования по входу твердых тел в несжимаемую жидкость приводят Ф. М. Бородич [9, 10] (произвольные тупые тела), Л. М. Дыхта [35] (плоский круговой контур), Б. С. Чекин [68] (клин — автомодельная задача о косом входе), J.-L. Armand и R. Cointe [75] (цилиндр). В последней работе дан сравнительный анализ известных аналитических, численных и экспериментальных результатов по вертикальному погружению в несжимаемую жидкость жесткого цилиндра (плоская задача). На основании асимптотического подхода получена формула для результирующей гидродинамической силы, расчеты по которой согласуются с экспериментальными данными.

Аналитические исследования плоских и осесимметричных задач проникания затупленных тел в сжимаемую жидкость (акустическую среду) приводятся в работах В. Н. Гавриленко [20, 21], В. В. Гавриленко и В. Д. Кубенко [18], В. Н. Гавриленко и В. Д. Кубенко [22], В. Д. Кубенко и В. В. Гавриленко [43], В. В. Гавриленко [14]. В них анализируется влияние различных формулировок граничных условий на свободной поверхности жидкости на характеристики процесса погружения. Решения стро-

ятся с использованием метода разделения переменных и интегральных преобразований. В результате задача сводится к решению интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно коэффициентов разложения определяющих функций. Аналогичные пространственные задачи для затупленных тел рассмотрены Ф. М. Бородичем [7, 8]. В. В. Гавриленко [17], В. Д. Кубенко и В. В. Гавриленко [45] обобщили ранее использованные методы на задачи для акустического полупространства, покрытого соответственно мембраной и пластиной.

В случае высокоскоростного удара тел о поверхность жидкости, а также при анализе более поздних стадий процесса погружения необходимо принимать во внимание различные нелинейные эффекты. Учесть их можно только путем использования для решения соответствующих задач численных методов. А. Г. Терентьев и А. В. Чечнев [66, 67] для исследования погружения пластины и диска в сжимаемую жидкость предложили алгоритм, основанный на комбинации методов крупных частиц и маркеров в ячейках. Данный метод применим только для анализа ранней стадии процесса погружения.

Развитие новых разностных схем, обладающих более высокой точностью и позволяющих рассчитывать ударный процесс до больших времен, дано в работах А. В. Чечнева [69], В. Г. Баженова, А. В. Кочеткова, С. В. Крылова и А. Г. Угодчикова [3], Н. И. Дробышевского [34], а также в монографии А. Г. Горшкова и Д. В. Тарлаковского [31]. В первой из них схема конструируется на основе лагранжево-эйлерова подхода. В качестве приложения рассмотрена задача об ударе пластины и диска конечной массы о поверхность жидкости. Во второй работе исследовано проникание с постоянной скоростью конечного твердого конуса, а в третьей — погружение цилиндра под углом к свободной поверхности. Развитие метода конечных элементов для исследования проникания твердых тел в сжимаемую жидкость дано в работах Г. Г. Шахверди [71, 73].

Как известно, при плоском ударе тел о поверхность жидкости атмосфера (воздух) оказывают демпфирующее влияние на результирующую (ударную) силу (она нарастает до максимума за конечное время, и снижается ее абсолютная величина). А. В. Плюснин [59] в качестве первого приближения предложил следующую схему учета влияния атмосферы на контактные давления и времена их нарастания при вертикальном ударе торцом цилиндра о поверхность жидкости (цилиндр находится на расстоянии H_0 от свободной поверхности и начинает двигаться вдоль своей оси перпендикулярно к свободной поверхности со скоростью V). Истечение газа из слоя между цилиндром и свободной поверхностью трактуется как его вытекание из сосуда через узкую щель. Сжимаясь, газ вызывает деформацию свободной поверхности жидкости под цилиндром, которая упрощенно рассматривается как диск радиуса R (радиус цилиндра) и толщины $h(t)$. Движение жидкости определяется в линейной постановке за-

дач проникания. Начальная высота H_0 имеет порядок радиуса цилиндра. В результате задача сводится к некоторой системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решается численно. Расчетные результаты согласуются с известными экспериментальными данными.

Различные аспекты проблемы удара и проникания твердых тел в жидкость рассматриваются также в работах Н. А. Веклича и Б. М. Малышева [12], А. Я. Сагомоияна и И. С. Гаевской [62, 63], А. Г. Терентьева [65].

2. Удар и проникание оболочек в сжимаемую жидкость. Несмотря на значительное число публикаций, посвященных задачам погружения оболочек вращения в жидкость (см. отмеченные выше обзоры), эта проблема еще полностью не решена. В последнее время прогресс в этой области связан с применением для решения конкретных задач численных методов.

Методика численного исследования процесса вертикального входа тонкостенных упругих сферических и конических оболочек, связанных с жестким телом массой M_0 , в полупространство, занятое идеальной сжимаемой жидкостью разработана А. Г. Горшковым и Н. И. Дробышевским [27] (см. также книгу А. Г. Горшкова и Д. В. Тарлаковского [31]). Для описания поведения жидкости используются переменные Лагранжа, которые позволяют непосредственно в процессе решения определять перемещения свободной поверхности жидкости и точно поставить граничное условие на смоченной поверхности оболочки.

В неподвижной цилиндрической системе координат $Ox'y'$ (где $y' = 0$ — свободная поверхность, а ось Oy' направлена вниз) уравнения в форме Лагранжа, описывающие осесимметричное движение жидкости, имеют вид (штрихом обозначены размерные величины)

$$\frac{\partial u_1}{\partial \tau} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial \tau} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial y}{\partial \tau} = u_2, \quad (1)$$

где

$$J = \frac{\partial(r, y)}{\partial(r_0, y_0)}, \quad \rho r J = \text{const}, \quad p = \frac{\rho' l - 1}{l}, \quad u_1 = \frac{u'_1}{c_0}, \quad u_2 = \frac{u'_2}{c_0},$$

$$V = \frac{V'}{c_0}, \quad V_0 = \frac{V'_0}{c_0}, \quad r = \frac{r'}{R}, \quad y = \frac{y'}{R}, \quad \tau = \frac{t c_0}{R}, \quad p = \frac{p'}{\rho_0 c_0^2}, \quad \rho = \frac{\rho'}{\rho_0}.$$

Здесь u_1, u_2 — составляющие скорости частиц жидкости в направлениях r', y' ; p' и ρ' — давление и плотность жидкости; c_0 и ρ_0 — скорость звука и плотность невозмущенной жидкости; J — якобиан; r'_0, y'_0 — начальные координаты частиц жидкости; R — радиус кривизны срединной поверхности оболочки (радиус основания для конической оболочки); V' — скорость погружения тела в момент времени t ; $l = 7,15$ — постоянная уравнения состояния воды.

Для описания нестационарных колебаний оболочки используются геометрически нелинейные уравнения теории тонких оболочек, учитывающие сдвиг и инерцию вращения поперечного сечения.

После замены воздействия оболочки на тело эквивалентной системой усилий, распределенных по опорному контуру, получается уравнение для определения скорости движения тела массой M_0 :

$$m_0 = \frac{dV}{dt} = \left(T_1 \Big|_{\alpha=\alpha_0} \sin \beta_0 - Q \Big|_{\alpha=\alpha_0} \cos \beta_0 \right) \frac{2\pi L k^2}{(1-v^2)\zeta}, \quad (2)$$

$$m_0 = \frac{M_0}{\rho_0 R^3}, \quad \zeta = \frac{\rho_0 c_0^2}{E}, \quad k = \frac{h}{R},$$

где β_0 — угол полураствора оболочки; $L = 1$ для конической оболочки и $L = \sin \beta_0$ для сферической оболочки; α_0 — координата точки закрепления (для сферической оболочки $\beta = \alpha$).

Начальные условия имеют вид

$$V \Big|_{\tau=0} = V_0, \quad u_1 \Big|_{\tau=0} = u_2 \Big|_{\tau=0} = p \Big|_{\tau=0} = 0, \quad r \Big|_{\tau=0} = r_0, \quad y \Big|_{\tau=0} = y_0,$$

$$U \Big|_{\tau=0} = W \Big|_{\tau=0} = \psi \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial U}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial W}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0 \quad (3)$$

$$\left(U = \frac{v}{h}, \quad W = \frac{w}{h} \right),$$

где v, w — перемещения срединной поверхности оболочки; ψ — угол поворота нормали.

Граничные условия

$$p \Big|_{\Pi} = 0, \quad u_1 \Big|_{\Pi_\infty} = u_2 \Big|_{\Pi_\infty} = 0, \quad (4)$$

$$(u_1 \sin \beta + u_2 \cos \beta) \Big|_{\Omega} = V \cos \beta + k \frac{\partial W}{\partial \tau},$$

$$U \Big|_{\alpha=\alpha_0} = W \Big|_{\alpha=\alpha_0} = \psi \Big|_{\alpha=\alpha_0} = 0. \quad (5)$$

Здесь Π — свободная поверхность жидкости; Ω — поверхность соприкосновения оболочки и жидкости; Π_∞ — невозмущенная поверхность жидкости.

В полюсе оболочки при $\alpha = 0$ используются условия симметрии. Решение сформулированной задачи гидроупругого взаимодействия проводится конечно-разностным методом. Расчетная область жидкости покрывается сеткой, ячейки которой представляют собой четырехугольные лагранжевы элементы, движущиеся вместе с жидкостью. На основании данного подхода изучены характеристики реакции при внедрении в сжимаемую жидкость сферических, конических, а также цилиндрических (наклонный вход) оболочек (А. Г. Горшков и Н. И. Дробышевский [26, 27]).

Применение метода конечных элементов для решения задач удара и проникания деформируемых (жестких) тел в жидкость, как уже отмечалось, дано в монографии Н. Ф. Ершова и Г. Г. Шахверди [37]. В рамках

данного подхода Г. Г. Шахверди [72] решена задача удара о свободную поверхность жидкости упругих и упругопластических сферических оболочек. Эти вопросы рассматривались также Г. Г. Шахверди [70], Е. А. Максимовой, В. И. Петуховой и Г. Г. Шахверди [50].

При скоростях удара порядка сотен метров в секунду процесс взаимодействия тонкостенных конструкций с жидкостью сопровождается возникновением волн сильного разрыва и зон кавитации в жидкости, появлением и развитием упругопластических деформаций в материале конструкции, существенным формоизменением контактных и свободных поверхностей. Исследованию указанных нелинейных эффектов посвящены работы А. В. Кочеткова и С. В. Крылова [39], В. Г. Баженова, А. В. Кочеткова, С. В. Крылова и А. Г. Угодчикова [3], В. Г. Баженова, А. В. Кочеткова и С. В. Крылова [1, 2], в которых развита численная методика решения осесимметричных задач удара деформируемых тел о поверхность сжимаемой жидкости. В качестве примера рассмотрены задачи о внедрении жестких тел и сферических оболочек с присоединенными массами в идеальную сжимаемую среду.

Предлагаемая методика основана на синтезе двух явных схем: сквозного счета С. К. Годунова на подвижной сетке для жидкости и типа «крест» для интегрирования нелинейных уравнений движения тонких оболочек. Анализ кавитационных явлений при проникании в рамках простейшей модели показал, что они носят локальный характер по времени и пространству и приводят к заметному увеличению прогибов лишь для очень тонких оболочек ($R/h \geq 200$).

Ранний этап процесса проникания тонких упругих сферических оболочек в сжимаемую жидкость исследован также в работах В. В. Гавриленко [15, 16], В. Д. Кубенко [42], В. Д. Кубенко и В. В. Гавриленко [44], В. В. Гавриленко, В. Н. Гавриленко и В. Д. Кубенко [19], А. Я. Сагомояна [60, 61].

3. Удар и проникание оболочек в несжимаемую жидкость. При больших скоростях погружения ($V_0' \leq c_0$) деформируемых тел (оболочек) в жидкость через ее свободную поверхность влияние сжимаемости жидкости сказывается только в самый начальный момент времени (пока волна сжатия не вышла за пределы тела). Для тел вращения, которые не имеют плоских границ, этот период очень мал. В этом случае движение жидкости будет описываться уравнением Лапласа

$$\Delta \Phi = 0, \quad (6)$$

и для гидродинамических нагрузок, действующих на тело (оболочку), можно получить аналитические выражения. Подставляя их в уравнения движения оболочек и интегрируя последние каким-либо методом, находят характеристики реакции. Полученные таким образом результаты в слу-

чае погружения в жидкость сферических и цилиндрических оболочек достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными и численными решениями для сжимаемой жидкости (А. Г. Горшков и Н. И. Дробышевский [27], Э. И. Григолюк и А. Г. Горшков [32], А. Г. Горшков и Д. В. Тарлаковский [31], В. Г. Баженов, А. В. Кочетков и С. В. Крылов [1], А. И. Лобода [46]).

Теоретические результаты для несжимаемой жидкости в большинстве получены с использованием теории погружения Г. Вагнера, в основу которой положены следующие допущения: относительное движение жидкости при очень быстром погружении тела совпадает с ее движением при обтекании непрерывно расширяющегося плоского диска (пластины); скорость расширения диска (пластины) равна скорости увеличения смоченной поверхности тела; скорость обтекания равна скорости погружения. Эти гипотезы, справедливые для тел тупой формы, позволяют определить как силу удара, так и распределение давления по смоченной поверхности тела. Теория Г. Вагнера позволяет учитывать эффект встречного движения вытесняемой погружающимся телом жидкости, которое увеличивает смоченную поверхность и изменяет скорость изменения поверхности удара.

В случае быстрого вертикального погружения упругих цилиндрических, конических и сферических оболочек в жидкость, гидродинамические нагрузки достигают своего максимального значения при небольших глубинах погружения. Поэтому можно воспользоваться теми же вагнеровскими соображениями, что и для жестких тел (Э. И. Григолюк и А. Г. Горшков [32]). При таком подходе после определения гидродинамического давления $p = p_1 + p_2$ (p_1 соответствует давлению на жесткой оболочке, а p_2 учитывает давление, обусловленное деформацией оболочки) используется комбинированный метод. Он основан на преобразовании с помощью процедуры Бубнова или метода прямых систем уравнений в частных производных, описывающих поведение оболочек, к системе обыкновенных дифференциальных уравнений и последующем их решении методом Рунге–Кутты (или каким-либо другим численным методом).

На основании данного подхода решен большой класс задач о вертикальном входе в жидкость оболочек: двухслойных сферических и конических (Г. Н. Вакалов и А. Г. Горшков [11]), двухслойных цилиндрических (А. Г. Горшков и В. Г. Богомолов [25]), ортотропных и слоистых цилиндрических (Ю. В. Кочеулов и А. И. Шуршалов [40], М. И. Мартиросов и А. И. Шуршалов [56], А. И. Шуршалов [74]), трехслойных сферических (М. И. Мартиросов и А. И. Шуршалов [57]).

Описанный выше прием определения гидродинамических нагрузок используется и в случае несимметричного входа упругих цилиндрических оболочек в несжимаемую жидкость (В. Г. Богомолов [5, 6]). В первой из этих работ в случае плоской задачи давление представляется в виде суперпозиций давлений от вертикального проникания и горизонтального дви-

жения меняющейся во времени погруженной части. Во второй же образующая оболочки составляет малый угол со свободной поверхностью, и смоченная поверхность аппроксимируется частью эллипса, полуоси которого есть функции времени, а ширина смоченной поверхности зависит от продольной координаты.

В работах А. Г. Горшкова и М. И. Мартиросова [29], М. И. Мартиросова [51–53] проведен численный анализ динамического поведения упругих сферических оболочек, связанных с твердым телом, при несимметричном входе в полупространство, занятое идеальной несжимаемой жидкостью. Гидродинамические нагрузки, действующие на оболочку со стороны жидкости, определяются как суперпозиция нагрузок от вертикального проникания оболочки и горизонтального движения изменяющейся во времени ее погруженной части. Для исследования напряженно-деформированного состояния тонкой упругой оболочки используется один из вариантов геометрически нелинейных уравнений движения, учитывающих инерцию вращения и деформацию поперечного сдвига. К ним добавляются уравнения движения всей конструкции как твердого тела. Задача решается методом конечных разностей с применением явной схемы типа «крест». Анализируется влияние на динамическое поведение конструкции начальной скорости и угла входа, начальной угловой скорости вращения, сжимаемости жидкости, подъема ее свободной поверхности (эффект Г. Вагнера), толщины оболочки, массы твердого тела и ряда других факторов. Исследуется также влияние гидроупругого взаимодействия между оболочкой и жидкостью на динамику входа. Показано, что при углах тангажа $\vartheta \geq 60^\circ$ задачу о наклонном входе конструкции в жидкость можно заменить задачей о вертикальном входе с начальной скоростью, равной вертикальной составляющей при несимметричном погружении. Кроме того, установлено, что до скоростей $V_0 \leq 100$ м/с сжимаемость жидкости (воды) практически не влияет на напряженно-деформированное состояние сферической оболочки.

Поведение сферических оболочек и оболочек с присоединенными жесткими массами при ударе о жидкость рассматривались также М. И. Мартиросовым и А. И. Шуршаловым [55], М. И. Мартиросовым и Л. Н. Рабинским [54]. Задача о выходе оболочек вращения из жидкости в приближенной постановке решена А. Г. Горшковым, А. В. Коровайцевым и М. И. Мартиросовым [28].

4. Экспериментальные исследования. Описание нескольких типов экспериментальных установок для исследования процесса удара и входа тел в жидкость, а также результаты модельных экспериментов приводятся в работах Ю. К. Бивина, Ю. М. Глухова и Ю. В. Пермякова [4], А. И. Лободы и А. И. Шуршалова [47], В. А. Ерошина, Г. А. Константинова, Н. И. Романенкова и Ю. Л. Якимова [36], В. А. Смелянского [64], Э. В. Па-

рышева, В. В. Воронина и А. Ю. Тормахова [58], S. Hirano, S. Yoshikawa и Y. Himero [76] (см. также обзоры А. Г. Горшкова [24], Э. И. Григолюка и А. Г. Горшкова [33], А. В. Вестяка, А. Г. Горшкова и Д. В. Тарлаковского [13]).

В работе А. Н. Ломакина и А. В. Любомудрова [48] приводится описание прибора, предназначенного для регистрации параметров ударного взаимодействия конструкции с жидкостью. Он измеряет одновременно по девяти каналам деформации, перемещения, скорости перемещений, ускорения и давление в диапазоне частот от 0,1 до 200 кГц. Работа измерительного комплекса проверялась при исследовании удара цилиндрической оболочки о воду (приводятся данные об ускорении центра масс системы).

Экспериментальные данные по определению давления на расширяющейся во времени смоченной поверхности сферического сегмента при его вертикальном погружении в сжимаемую жидкость представлены в работе В. А. Ерошина, Г. А. Константинова, Н. И. Романенкова и Ю. Л. Якимова [36]. В экспериментах бак с жидкостью диаметром 0,4 м, к днищу которого для устойчивости прикреплен тяжелый груз, свободно подвешивался на стальных струнах. Модель с датчиками давления и ускорения под действием силы тяжести разгонялась по направляющим струнам и погружалась в жидкость, находящуюся в баке. Скорость модели изменялась в пределах от 2 до 6 м/с и определялась двумя способами: вычислялась по высоте свободного падения и измерялась контактным способом на базе 0,1 м с выходом на электронный осциллограф (радиус кривизны сферической поверхности $R = 0,11$ м). На поверхности модели было расположено три пьезоэлектрических датчика давления. Регистрация сигналов давления и ускорения модели производилась двухлучевым электронным осциллографом.

В работе Ю. К. Бивина, Ю. М. Глухова и Ю. В. Пермякова [4] приведены результаты экспериментального изучения с помощью скоростной киносъемки вертикального входа в воду стальных и дюралевых сфер диаметром 0,01 м, массой соответственно $4 \cdot 10^{-3}$ и $1,45 \cdot 10^{-3}$ кг. Исследовался диапазон скоростей погружения от 60 до 700 м/с. Экспериментальная установка состояла из пневматического разгонного устройства калибром 10 мм, бака прямоугольной формы (глубиной 0,5 м, шириной 0,46 м, длиной 0,76 м, изготовленного из пластин оргстекла толщиной 0,03 м и заполненного дистиллированной водой), скоростной кинокамеры ЖЛВ-2М, импульсного источника света на лампе ИФК-120, системы автоматики, согласующей работу пневмоустановки, кинокамеры и лампы-вспышки для получения кинограмм в нужный период времени. Скорость входа тела в воду определялась с помощью фотодиодов. Дана оценка значений присоединенной массы и коэффициента сопротивления, проанализировано развитие всплеска, образование и рост каверны, поведение тела в каверне.

S. Hirano, S. Yoshikawa и Y. Himero [76] экспериментальным путем

нашли распределение давления по днищу плоскокилеватого тела, составленного из двух пластин, при ударе о жидкость (задача слемминга). Ими также найдены компоненты результирующей гидродинамической силы и исследовано брызгообразование и струйные явления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баженов В. Г., Кочетков А. В., Крылов С. В.* Исследование нелинейных эффектов при взаимодействии оболочечных конструкций с жидкостью и газом // Взаимодействие тел с границами раздела сплошной среды. Чебоксары, 1985. С. 11–15.
2. *Баженов В. Г., Кочетков А. В., Крылов С. В.* Анализ нелинейных эффектов при высокоскоростном проникновении тел в сжимаемую жидкость // Прикл. мех. 1986. Т. 22. № 2. С. 125–127.
3. *Баженов В. Г., Кочетков А. В., Крылов С. В., Угодчиков А. Г.* Высокоскоростной удар упругопластических тонкостенных конструкций о поверхность сжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 5. С. 161–169.
4. *Бивин Ю. К., Глухов Ю. М., Пермяков Ю. В.* Вертикальный вход твердых тел в воду // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 6. С. 3–9.
5. *Богомолов В. Г.* Наклонный вход цилиндрической оболочки в жидкость // Взаимодействие пластин и оболочек с жидкостью и газом. М., 1984. С. 83–91.
6. *Богомолов В. Г.* Об одном случае несимметричного погружения цилиндрической оболочки в несжимаемую жидкость // Прикл. мех. 1987. Т. 23. № 4. С. 99–103.
7. *Бородич Ф. М.* О задачах взаимодействия затупленных тел с акустической средой // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 4. С. 610–616.
8. *Бородич Ф. М.* Пространственные автомодельные задачи проникания затупленных тел в идеальную сжимаемую жидкость (сверхзвуковой случай) // ПМТФ. 1988. № 3. С. 110–114.
9. *Бородич Ф. М.* Подobie в пространственной задаче проникания твердых тел в идеальную несжимаемую жидкость // ПМТФ. 1988. № 5. С. 127–132.
10. *Бородич Ф. М.* Погружение тупых тел в идеальную несжимаемую жидкость // Прикл. мех. 1989. Т. 25. № 8. С. 82–90.
11. *Вакалов Г. Н., Горшков А. Г.* Проникание двухслойных оболочек вращения в несжимаемую жидкость // Взаимодействие пластин и оболочек с жидкостью и газом. М., 1984. С. 73–82.
12. *Веклич Н. А., Малышев Б. М.* Плоская задача об ударе по жидкой полосе // Взаимодействие пластин и оболочек с жидкостью и газом. М., 1984. С. 99–121.
13. *Вестяк А. В., Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В.* Нестационарное взаимодействие деформируемых тел с окружающей средой // Итоги науки и техн. ВИНТИ. Мех. деформ. тверд. тела. 1983. Т. 15. С. 69–148.
14. *Гавриленко В. В.* Нестационарные нагрузки при проникании эллипсоида вращения в сжимаемую жидкость // Прикл. мех. 1986. Т. 22. № 8. С. 113–117.
15. *Гавриленко В. В.* Определение напряженно-деформированного состояния проникающих в сжимаемую жидкость тонких упругих сферических оболочек // Прикл. мех. 1988. Т. 24. № 9. С. 30–37.
16. *Гавриленко В. В.* Удар тонкой упругой цилиндрической оболочки о поверхность жидкости // Гидромеханика. 1990. № 62. С. 34–39.
17. *Гавриленко В. В.* Ударное взаимодействие цилиндрического твердого тела с тонкой мембраной, лежащей на полупространстве сжимаемой жидкости // Прикл. пробл. прочн. и пластич. 1991. № 49. С. 94–96.

18. *Гавриленко В. В., Кубенко В. Д.* Проникание осесимметричного твердого тела в сжимаемую жидкость // Прикл. мех. 1986. Т. 22. № 1. С. 93–99.
19. *Гавриленко В. В., Гавриленко В. Н., Кубенко В. Д.* Численная реализация решения линейной задачи проникания тонких упругих оболочек в сжимаемую жидкость // Эффект. числ. методы реш. краев. задач мех. тверд. деформ. тела: Тез. докл. респ. научн.-техн. конф., 27–29 сент., 1989 г. Ч. 1. Харьков, 1989. С. 62–64.
20. *Гавриленко В. Н.* Учет подъема поверхности жидкости при исследовании перегрузок, испытываемых проникающими в жидкость телами // Динам. и вибродиагност. мех. систем. Иваново, 1983. С. 144–151.
21. *Гавриленко В. Н.* Проникание параболического цилиндра в сжимаемую жидкость // Прикл. мех. 1984. Т. 20. № 2. С. 65–71.
22. *Гавриленко В. Н., Кубенко В. Д.* Плоская задача проникания жестких тел в сжимаемую жидкость // Прикл. мех. 1985. Т. 21. № 4. С. 41–49.
23. *Горшков А. Г.* Взаимодействие ударных волн с деформируемыми преградами // Итоги науки и техн. ВИНТИ. Мех. деформир. тверд. тела. 1979. Т. 13. С. 105–186.
24. *Горшков А. Г.* Нестационарное взаимодействие пластин и оболочек со сплошными средами // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 4. С. 177–189.
25. *Горшков А. Г., Богомолов В. Г.* Взаимодействие двухслойных цилиндрических оболочек с жидкостью // Задачи мех. тверд. деформир. тела. М., 1985. С. 55–63.
26. *Горшков А. Г., Дробышевский Н. И.* Наклонный вход цилиндрических оболочек в жидкость // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 2. С. 164–170.
27. *Горшков А. Г., Дробышевский Н. И.* Численное исследование процесса входа оболочек вращения в жидкость // Прикл. мех. 1988. Т. 24. № 12. С. 39–44.
28. *Горшков А. Г., Коровайцев А. В., Мартиросов М. И.* Расчет оболочек вращения при нестационарном взаимодействии с жидкостью // Динам. и прочн. элементов машин. М., 1987. С. 57–64.
29. *Горшков А. Г., Мартиросов М. И.* Динамика и прочность элементов тонкостенных конструкций при нестационарном взаимодействии с жидкостью // Современ. пробл. строит. мех. и прочности ЛА: Тр. 11 Всес. конф., Куйбышев, 1986 / Тез. докл. Куйбышев, 1986. С. 37.
30. *Горшков А. Г., Мартиросов М. И., Ульяшина А. Н.* Вход в жидкость твердых и деформируемых тел сферической формы // М.: МАИ, 1987. 34 с. (Рук. деп. в ВИНТИ, № 7893-В87. Деп. от 11.11.87).
31. *Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В.* Нестационарная аэрогидроупругость тел сферической формы. М.: Наука, 1990. 264 с.
32. *Григолюк Э. И., Горшков А. Г.* Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью. Удар и погружение. Л.: Судостроение, 1976. 200 с.
33. *Григолюк Э. И., Горшков А. Г.* Погружение упругих оболочек вращения в жидкость // Итоги науки и техн. ВИНТИ. Мех. деформир. тверд. тела. 1977. Т. 10. С. 63–113.
34. *Дробышевский Н. И.* Наклонный вход цилиндрических тел в жидкость // Взаимодействие пластин и оболочек с жидкостью и газом. М., 1984. С. 92–98.
35. *Дыхта Л. М.* Гидродинамическая задача о погружении кругового контура, пересекающего свободную поверхность жидкости // Гидродинам. корабля. Николаев, 1988. С. 22–28.
36. *Ерошин В. А., Константинов Г. А., Романенков Н. И., Якимов Ю. Л.* Распределение давления по поверхности сферического сегмента при погружении в сжимаемую жидкость // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 2. С. 9–14.

37. *Ериов Н. Ф., Шахверди Г. Г.* Метод конечных элементов в задачах гидродинамики и гидроупругости. Л.: Судостроение, 1984. 240 с.
38. *Коробкин А. А.* Соударение жидких и твердых масс. Новосибирск: из-во Сиб. отд. РАН, 1997. 200 с.
39. *Кочетков А. В., Крылов С. В.* О влиянии нелинейных эффектов в задаче удара сферической оболочки о поверхность жидкости // Колебания упруг. конструкций с жидкостью: Сб. науч. докл. 5 Всес. симп., Новосибирск, 1992. М., 1984. С. 150–155.
40. *Кочулов Ю. В., Шуриалов А. И.* Удар цилиндрических оболочек о жидкость // Расчет на прочн. и оптим. проектир. элем. авиац. констр. М., 1988. С. 46–51.
41. *Крылов С. В.* Численное моделирование процессов проникания деформируемых конструкций в сжимаемые среды // Прикл. пробл. прочн. и пластич. 1986. № 34. С. 46–52.
42. *Кубенко В. Д.* Проникание упругих оболочек в сжимаемую жидкость. Киев: Наук. думка, 1981. 160 с.
43. *Кубенко В. Д., Гавриленко В. В.* Осесимметричная задача проникания жестких тел в сжимаемую жидкость // Прикл. мех. 1987. Т. 23. № 2. С. 53–60.
44. *Кубенко В. Д., Гавриленко В. В.* Осесимметричная задача проникания тонких упругих сферических оболочек в сжимаемую жидкость // Прикл. мех. 1988. Т. 24. № 4. С. 63–74.
45. *Кубенко В. Д., Гавриленко В. В.* Плоская задача об ударе жесткого тела по лежащей на поверхности сжимаемой жидкости тонкой упругой пластине // Прикл. мех. 1991. Т. 27. № 9. С. 59–66.
46. *Лобода А. И.* Проникание в жидкость оболочек вращения // Динам. упруг. и тверд. тел, взаимодейств. с жидкостью. Томск, 1984. С. 83–87.
47. *Лобода А. И., Шуриалов А. И.* Экспериментально-теоретическое исследование напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки при погружении в жидкость // Тр. 14 Всес. конф. по теории пластин и оболочек, Кутаиси, 1987. Т. 2. Тбилиси, 1987. С. 145–150.
48. *Ломакин А. Н., Любомудров А. В.* Измерение параметров ударного взаимодействия конструкций с жидкостью // Динам. упруг. и тверд. тел, взаимодейств. с жидкостью. Томск, 1984. С. 88–90.
49. *Лотов А. Б.* Глиссирование и быстрый вход тел в воду. М.: изд-во МФТИ, 1984. 108 с.
50. *Максимова Е. А., Петухова В. И., Шахверди Г. Г.* Численное моделирование погружения тел и конструкций в жидкость // X Дальневосточ. научно-техн. конф., Владивосток, 1987: Тез. докл. Владивосток, 1987. С. 89–90.
51. *Мартыросов М. И.* Динамика деформируемых систем при несимметричном входе в жидкость // Прочн. пластин и оболочек при комбинир. воздействиях. М., 1987. С. 41–49.
52. *Мартыросов М. И.* Динамическое поведение оболочечных конструкций при нестационарном взаимодействии с границей раздела двух сред // II Всес. конф. по механике неоднород. структур, Львов, 1987: Тез. докл. Т. 1. Львов, 1987. С. 168.
53. *Мартыросов М. И.* Численное исследование динамического поведения сферической оболочки, связанной с твердым телом, при наклонном погружении в жидкость // Тр. XVI Гагаринских научн. чтений по космон. и авиации, Москва, 1986. М., 1987. С. 175.

54. *Мартыросов М. И., Рабинский Л. Н.* Численное исследование нелинейных эффектов при проникании в жидкость тонкостенных оболочечных конструкций с внутренними массами // Температур. задачи и устойч. пластин и оболочек. Саратов, 1988. С. 66–67.
55. *Мартыросов М. И., Шуриалов А. И.* Поведение сферических оболочек при ударе о жидкость // Эксплуатац. и конструктивная прочн. судовых констр.: VIII Бубновские чтения, Горький, 1988: Тез. докл. Горький, 1988. С. 71.
56. *Мартыросов М. И., Шуриалов А. И.* Погружение в жидкость цилиндрических оболочек из композиционных материалов // Деформир. и разруш. элем. констр. летат. аппаратов. М., 1989. С. 81–88.
57. *Мартыросов М. И., Шуриалов А. И.* Ударное взаимодействие трехслойной сферической оболочки с жидкостью // Вопр. прочн. тонкостен. констр. М., 1989. С. 16–20.
58. *Парышев Э. В., Воронин В. В., Тормахов А. Ю.* Устройство для исследования процесса удара о поверхность жидкости // Авт. с-во СССР. 01 № 13/00, № 1242765. Заявл. 3.01.85, опубл. 7.07.86.
59. *Плюснин А. В.* Демпфирующее действие атмосферы при плоском ударе цилиндра о поверхность жидкости // Мат. методы мех. жидк. и газа. Днепрпетровск, 1984. С. 71–77.
60. *Сагомонян А. Я.* Проникание (проникание твердых тел в сжимаемые сплошные среды). М.: МГУ, 1974. 299 с.
61. *Сагомонян А. Я.* Удар и проникание тел в жидкость. М.: МГУ, 1986. 172 с.
62. *Сагомонян А. Я., Гаевская И. С.* Вход тела в воду через слой льда // Изв. АН АрмССР. Мех. 1983. Т. 36. № 4. С. 26–34.
63. *Сагомонян А. Я., Гаевская И. С.* Проникание конуса в сжимаемую жидкость // Вестн. МГУ. Матем., мех. 1985. № 4. С. 48–51.
64. *Смелянский В. А.* Методика и экспериментальное исследование взаимодействия оболочечных конструкций с различными средами и полями // VI Всес. съезд по теор. и прикл. мех., Ташкент, 1986: Аннот. докл. Ташкент, 1986. С. 572–573.
65. *Терентьев А. Г.* Об импульсе кинетической энергии жидкости при ударе и погружении твердого тела // Взаимод. тел в жидк. со свобод. границами. Чебоксары, 1987. С. 106–114.
66. *Терентьев А. Г., Чечнев А. В.* Численное исследование входа пластины и диска в сжимаемую жидкость // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 2. С. 104–107.
67. *Терентьев А. Г., Чечнев А. В.* Погружение пластины и диска конечной массы в сжимаемую жидкость // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 3. С. 177–179.
68. *Чекин Б. С.* Вход клина в несжимаемую жидкость // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 3. С. 396–404.
69. *Чечнев А. В.* Лагранжево-эйлерова разностная схема расщепления для решения задач ударного взаимодействия твердых тел с жидкостью // Гидродинам. огранич. потоков. Чебоксары, 1988. С. 119–131.
70. *Шахверди Г. Г.* Исследование по МКЭ проникания твердых и деформируемых тел в сжимаемую жидкость // Соверш. и оптимиз. констр., изготовл. с примен. мягк. оболочек: Дальневост. конф. по мягк. оболочкам / Тез. докл. Владивосток, 1983. С. 89–91.
71. *Шахверди Г. Г.* Исследование проникания твердых тел в сжимаемую жидкость консервативным методом конечных элементов // Динам. упруг. и тверд. тел, взаимодейств. с жидк. Томск, 1984. С. 170–179.

72. Шахверди Г. Г. Исследование проникания деформируемых тел в жидкость методом конечных элементов // Всес. конф. Пробл. динам. взаимод. деформ. сред, Горис (АрмССР), 1984: Тез. докл. Ереван, 1984. С. 312–314.
73. Шахверди Г. Г. Исследование ударного взаимодействия твердых тел с жидкостью потенциальным методом конечных элементов // Исслед. по теории пластин и оболочек. 1985. № 18. Ч. 1. С. 110–118.
74. Шуриалов А. И. Поведение ортотропных цилиндрических оболочек при нестационарном нагружении // Взаимод. пластин и оболочек с жидк. и газом. М., 1984. С. 60–72.
75. Armand J.-L., Cointe R. Hydrodynamic impact analysis of a cylinder // Proc. 5th Int. Offshore Mech. and Arct. Eng. (OMAE) Symp., Tokyo. 1986. V. 1. N. Y., 1986. P. 250–256.
76. Hirano S., Yoshikawa S., Himeno Y. Pressure measurement on the bottom of a wedge-form planing plate // J. Kansai Soc. Nav. Archit. Jap. 1988. No. 208. P. 45–52.
77. Korobkin A. A., Pukhnachov V. V. Initial stage of water impact // Ann. Rev. Fluid Mech. 1988. No. 20. P. 159–185.

§ 6. УДАР О ГРУНТ

А. Г. Горшков, Д. В. Тарлаковский

Как известно, грунты различаются по структуре, форме и укладке твердых частиц, содержанию воды и воздуха. Это приводит к многообразию их физико-химических свойств и существенно усложняет решение задач об ударе и проникании. В настоящее время для описания движения грунтов предложены различные модели, которые учитывают упругопластические, вязкоупругие, вязкопластические и другие свойства грунтов. Обзор исследований в этом направлении, а также описание некоторых моделей грунта приводятся в работах И. В. Ананьева [1], С. С. Григоряна [30], В. Н. Николаевского [47] и А. Я. Сагомояна [50, 51], М. К. Сукача [55], Д. З. Yankelevsky [65].

Адекватное описание физики процессов, протекающих в грунте в результате динамического деформирования, приводит к существенно нелинейной постановке задачи и предполагает применение численных методов решения указанной проблемы. В работах В. И. Кондаурова и В. Н. Кукуджанова [39], В. И. Кондаурова и И. Б. Петрова [40], В. И. Кондаурова, И. Б. Петрова и А. С. Холодова [41], И. Б. Петрова [48] применительно к задаче об ударе жесткого тела по упругопластической преграде построены численные модели описания процесса деформирования на различных подвижных сетках. Как уже отмечалось в предыдущем параграфе, в случае упругих и акустических сред некоторые преимущества в решении связаны с использованием лагранжевых координат, наиболее точно отражающих геометрию деформируемой поверхности. Однако применение подвижных эйлеровых сеток позволяет проводить расчеты для существенно больших моментов времени.

Вопросы численного решения задачи о проникании твердого тела в деформируемую среду обсуждаются также в работах В. В. Башурова и В. А. Свадинского [8], В. В. Башурова и Н. А. Скоркина [9].

1. Проникание твердых тел. Самые простые решения задачи ударного взаимодействия тел с преградами и грунтами связаны с применением простейших механических аналогов (А. В. Бобров [13], А. П. Ковревский [37, 38], Л. Я. Любин и А. С. Повицкий [45], Р. Г. Юркин [60], С. С. Григорян [31], Э. И. Хачиян и В. А. Амбарцумян [59]). При этом предполагается, что скорость перемещения границы контактной области существенно меньше скорости распространения звука в среде (грунте). В этом случае результирующая сила сопротивления $F(t)$ представляется в виде явных функциональных зависимостей от геометрических и кинематических параметров внедряющегося тела. А. В. Бобров [13] исследовал волновые процессы в стержне с жестким полусферическим наконечником при его ударе о деформируемое полупространство. При этом для среды использовались различные модельные представления.

Для *идеально упругой среды (теория Герца)* сила взаимодействия определяется из решения статической задачи о вдавлении жесткого штампа в упругое полупространство в рамках теории Герца:

$$F(t) = kw^{3/2}, \quad (1)$$

где k — коэффициент, зависящий от упругих характеристик преграды и геометрии внедряющегося тела (такое представление допустимо при малых скоростях соударения); $w(t)$ — перемещение наконечника.

В случае *упругого основания Винклера*

$$F(t) = kw, \quad (2)$$

где k — коэффициент упругости основания (коэффициент «постели»).

Если тело сферической формы сферы внедряется в *жесткопластическую преграду*, то

$$F(t) = kw H(\dot{w}), \quad (3)$$

где k — коэффициент жесткости основания, определяемый пределом прочности материала преграды и радиусом внедряющейся сферы.

Для *основания в виде льда* согласно теоретико-экспериментальным исследованиям при ударе сферы о лед (В. А. Курдюмов и Д. Е. Хейсин [44])

$$F(t) = kw^{5/4} \dot{w}^{1/4}, \quad (4)$$

где k — коэффициент, зависящий от радиуса внедряющейся сферы и характеристик льда.

Реакцию грунта в случае *одномерной модели* при ударе жесткой сферы приближенно можно выразить (Л. Я. Любин и А. С. Повицкий [45])

$$F(t) = \sigma(t) S(t). \quad (5)$$

Здесь $\sigma(t)$ — среднее давление под сферой, $S(t)$ — проекция площади контакта на горизонтальную плоскость. Отметим очевидную аналогию этого выражения с соответствующей формулой (3.4).

При проникании с относительно большой начальной скоростью (более 200 м/с) твердых тел в грунт в ряде случаев для описания движения грунта малой и средней влажности используется модель пластически сжимаемой жидкости (А. Я. Сагомоян [50]). В рамках данной модели получены как аналитические (Ф. М. Бородич [15, 16], А. Я. Сагомоян [50, 51]), так и численные решения (Г. А. Кириленко и А. Я. Сагомоян [36]) для проникающих в грунт тел различной формы (тонкое тело, конус, цилиндр, сфера, параболоид вращения). Случай внедрения по нормали в однородное упругопластическое полупространство абсолютно жесткого удлиненного тела рассмотрен Ю. К. Бивиним и И. В. Симоновым [12]. Здесь дана оценка глубин проникания.

Наклонный вход симметричных тел в грунт изучался Д. Б. Куксенко [43], А. Я. Сагомояном и В. А. Филимоновым [54].

Приближенное решение о низкоскоростном соударении жесткого конического ударника с мерзлым грунтом получено Э. А. Кошелевым [42]. Грунт моделируется пластической средой с внутренним трением, объемная деформация которой на фронте ударной волны зависит от амплитуды

давления. Аналогичная задача рассмотрена в работе А. И. Федулова и Р. А. Иванова [56].

И. П. Власовой [22] в рамках модели упругопластической среды, предложенной С. С. Григоряном [30], разработан алгоритм численного исследования процесса проникания жесткого тела вращения в грунт. Движение последнего представляется в переменных Лагранжа. Для интегрирования соответствующих уравнений используется метод Уилкинса. В качестве тестового примера рассмотрен вертикальный удар жесткого шара об упругое полупространство.

Удар жестких штампов по упругопластическому полупространству изучали И. Г. Кадомцев [34] (конический штамп), Х. Ф. Кангур и И. Р. Клейс [35], В. А. Велданов и Ю. М. Путилин [19], В. А. Велданов, А. А. Исаев и Ю. М. Путилин [18]. Причем в последней публикации учитывается возможность образования каверны. Работы В. А. Бабакова и И. М. Каримова [3], Л. Ф. Власова [21] и А. В. Фонарева [58] посвящены исследованию проникания различных инденторов в деформируемые среды. Реакцию грунта на нормальный удар изучали W. Mayne Paul, J. S. Jr. Jones, J. C. Dumas [62].

Вход тонкого конуса в жидкость через слой льда рассмотрен А. Я. Сагомояном [50], А. Я. Сагомояном и И. С. Гаевской [52]. Задача решается в приближенной постановке: лед моделируется сплошной средой, обладающей свойствами хрупкого разрушения (для расчета движения тела во льду используется гипотеза плоских сечений). Определены сила сопротивления и глубина проникания. Вспомогательная задача о воздействии подвижной нагрузки на ледяной покров рассмотрена В. И. Пожуховым и Н. П. Поляковой [49]. Решение построено с помощью преобразований Фурье по пространственной координате и Лапласа по времени с последующим численным их обращением.

Задача о нормальном ударе быстро летящих твердых частиц по поверхности хрупкого упругого полупространства исследована Н. Ф. Морозовым, Ю. В. Петровым и В. Н. Семеновым [46]. Вопросы разрушения горных пород при высокоскоростном ударе рассмотрены в работе Л. В. Гордилова, Э. А. Кошелева и П. А. Мартынюка [24]. Модель основания в виде сыпучей среды использовали М. Г. Алишаев и М. М. Багдалов [2], С. J. Pogan и J. A. Rodriguer [63].

2. Удар и проникание оболочек. Вопросы нестационарного взаимодействия тонкостенных конструкций, в частности, оболочек с грунтами, изучены недостаточно. В имеющихся решениях по удару сферических оболочек, связанных с жестким телом заданной массы, о поверхность грунта (А. В. Бобров [14], И. П. Власова [23]) реакция грунта заменяется распределенным по пятну контакта давлением, величина которого в каждой точке определяется на основе приближенной одноосной модели

грунта (Л. Я. Любин и А. С. Повицкий [45]). В этом случае контактное давление однозначно определяется вертикальной составляющей скорости движения точки оболочки, находящейся в зоне пятна. Найдены характеристики реакции.

Аналогичная задача рассмотрена В. Г. Баженовым, А. В. Кочетковым, С. В. Крыловым и В. Р. Фельдгуном [4]. При этом грунт рассматривался как идеальная сплошная пластически сжимаемая среда. Задача решается конечноразностным методом.

А. Я. Сагомоян и М. Н. Моргунов [53] исследовали задачу о высокоскоростном ударном входе упругой цилиндрической оболочки с жестким передним срезом в пластически сжимаемую среду (удар торцом). Здесь взаимодействие с грунтом осуществляется через жесткий диск.

3. Экспериментальные исследования. Существенное значение для решения проблемы ударного взаимодействия тел и элементов конструкций с грунтом имеют экспериментальные исследования. В работе Ю. К. Бивина, В. В. Викторова и Б. Я. Коваленко [11] с помощью пенетрации при проникании с постоянной скоростью цилиндрического тела с коническим наконечником определены физико-механические характеристики глинистого грунта (опыты проводились на пневмоустановке в диапазоне скоростей входа от 1 до 20 м/с). Результаты эксперимента по косому входу группы тел в упругопластическое полупространство приведены Ю. К. Бивиним [10].

Обширные экспериментальные данные о внедрении жесткого шара в ледяной и снежный покров представлены В. П. Епифановым [32], В. П. Епифановым и В. П. Кузьменко [33].

Различные методики экспериментов по взаимодействию твердых ударников с грунтом и их результаты привели в своих работах В. В. Баландин и А. М. Брагов [7], Ю. Н. Бухарев, А. Е. Кораблев и М. И. Хаймова [17], А. Б. Филяков, В. В. Коган и В. Н. Выходцев [57], V. I. Bateman, T. G. Came, D. M. McCau [61], Watanabe Shouhei [64].

В. Н. Бакулин, П. Н. Овчаров и В. А. Потопахин [5, 6] на экспериментальной установке, состоящей из пневмопушки с пультом управления подачей сжатого газа, мишени и измерительно-регистрирующей аппаратуры с блоком автоматического управления, провели серию опытов по исследованию деформирования тонких конических оболочек с жесткими наконечниками при их вертикальном проникании в грунт. Метание моделей осуществлялось при скоростях от 60 до 120 м/с. Короб мишени заполнялся глиной. Измерения относительных деформаций проводились тензорезисторами с базой 5 мм.

Экспериментальные исследования поведения оболочек при их ударе боковой поверхностью о песок описаны в работах А. Г. Горшкова и А. И. Лободы [26, 27] (цилиндрические оболочки) и А. Г. Горшкова,

А. И. Лободы и С. В. Смелянского [28, 29], А. Г. Горшкова и В. А. Колодяжного [25] (конические оболочки). Испытания проводились на специальном экспериментальном комплексе, в состав которого входит стенд для воспроизведения ударного нагружения, измерительный комплекс и емкости для жидких и сыпучих сред. Описание данного комплекса и его возможностей изложены в обзоре А. В. Вестяка, А. Г. Горшкова и Д. В. Тарлаковского [20]. Построены эпюры деформаций и напряжений по характерным сечениям оболочек в зависимости от определяющих физических и геометрических параметров и времени.

Результаты этих исследований могут служить основой для построения и обоснования различных приближенных моделей грунтов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ананьев И. В.* О поведении грунтового основания под действием ударных нагрузок // Исслед. по расчету пластин и оболочек. Ростов н/Д, 1986. С. 68–79.
2. *Алишаев М. Г., Багдалов М. М.* Проникание жесткого шара в неупругую среду при непрямом ударе // Вопр. мех. и разрушения. Махачкала, 1990. С. 28–35.
3. *Бабаков В. А., Каримов И. М.* О верхней оценке анализа процесса проникания ударника в деформируемую среду // Физ.-техн. пробл. разраб. полезн. ископаемых. 1987. № 2. С. 46–51.
4. *Баженов В. Г., Кочетков А. В., Крылов С. В., Фельдгун В. Р.* Численное решение двумерных нестационарных задач взаимодействия тонкостенных конструкций с грунтовыми средами // Прикл. пробл. прочн и пластич. Методы реш. задач упруг. и пластич. Горький, 1984. С. 52–59.
5. *Бакулин В. Н., Овчаров П. Н., Потопахин В. А.* Экспериментальное исследование деформаций тонких конических оболочек в процессе проникания в грунт // Тр. 14 Всес. конф. по теории пластин и оболочек, Кутаиси, 1987 г. Т. 1. Тбилиси, 1987. С. 164–169.
6. *Бакулин В. Н., Овчаров П. Н., Потопахин В. А.* Экспериментальное исследование деформаций тонких конических оболочек в процессе проникания в грунт // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 4. С. 188–191.
7. *Баландин В. В., Брагов А. М.* Экспериментальная методика измерения сил сопротивления при взаимодействии ударника с грунтовой средой // Прикл. пробл. прочн. и пластич.: методы реш. Н.-Новгород, 1991. С. 101–104.
8. *Башуров В. В., Свадинский В. А.* О корректности разностной аппроксимации граничного условия в задачах проникания // Ж. вычисл. матем. и физ. 1982. Т. 22. № 4. С. 943–949.
9. *Башуров В. В., Скоркин Н. А.* Математическое моделирование проникания осесимметричного тела в преграду // Числ. методы мех. сплош. среды. 1982. Т. 13. № 2, С. 30–39.
10. *Бивин Ю. К.* Косой вход группы тел в упругопластическую среду // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 4. С. 170–173.
11. *Бивин Ю. К., Викторов В. В., Коваленко Б. Я.* Определенные динамических характеристик грунтов методом пенетрации // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 3. С. 105–110.
12. *Бивин Ю. К., Симонов И. В.* Оценка глубины проникания жестких тел в грунтовые среды при сверхзвуковых скоростях входа // Докл. РАН. 1993. Т. 328. № 4. С. 447–450.

13. *Бобров А. В.* Ударное взаимодействие упругих оболочек и стержней с преградами // Статика и динамика тонкостенных конструкций. М., 1980. С. 113–135.
14. *Бобров А. В.* Удар сферической оболочки о грунт // Взаимод. пластин и оболочек с жидкостью и газом. М., 1984. С. 122–127.
15. *Бородич Ф. М.* Подобие в задаче контакта упругих тел // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 3. С. 519–521.
16. *Бородич Ф. М.* Динамическое взаимодействие затупленных осесимметричных твердых тел с грунтом // Прикл. мех. 1988. Т. 24. № 11. С. 117–121.
17. *Бухарев Ю. Н., Кораблев А. Е., Хаймова М. И.* Экспериментальное определение касательных напряжений на поверхности ударника при динамическом внедрении в грунт // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 2. С. 186–188.
18. *Велданов В. А., Исаев А. А., Путилин Ю. М.* Влияние объемной разгрузки грунта на образование каверны при проникании ударника // Числ. методы реш. задач теории упруг. и пластич.: Тр. 13 межресп. конф., Новосибирск, 22–24 июня, 1993 г. Новосибирск, 1995. С. 36–40.
19. *Велданов В. А., Путилин Ю. М.* Сравнение моделей объемной разгрузки грунта при численном решении задачи проникания недеформируемого ударника // Тр. МГТУ. 1992. № 557. С. 73–83.
20. *Вестяк А. В., Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В.* Нестационарное взаимодействие деформируемых тел с окружающей средой // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Мех. деформ. тверд. тела. 1983. Т. 15. С. 69–148.
21. *Власов Л. Ф.* Проникание конусообразного тела с большой скоростью в грунт // Исслед. по интегро-диффер. ур-ям. 1985. № 18. С. 347–352.
22. *Власова И. П.* Удар жесткого тела о грунт // Расчет на прочн. и оптим. проектир. элементов авиац. констр. М., 1988. С. 36–41.
23. *Власова И. П.* Взаимодействие пологой сферической оболочки с преградами // Прочн., устойч. и колеб. элементов констр. летат. аппаратов. М., 1986. С. 4–10.
24. *Городилов Л. В., Кошелев Э. А., Мартынюк П. А.* Разрушение горных пород при высокоскоростном ударе // Физ.-техн. пробл. разраб. полезн. ископаемых. 1991. № 1. С. 49–56.
25. *Горшков А. Г., Колодяжный В. А.* Нормальный удар конических оболочек о грунт // Тр. 16 междунар. конф. по теории пластин и оболочек, Н-Новгород, 21–23 сент., 1993 г. Т. 1. Н-Новгород, 1994. С. 72–76.
26. *Горшков А. Г., Лобода А. И.* Удар цилиндрических оболочек о деформируемые преграды // 13 Всес. конф. по теории пластин и оболочек, Таллинн, 1983 г. Ч. 2. Таллинн, 1983. С. 18–22.
27. *Горшков А. Г., Лобода А. И.* Вертикальный удар цилиндрической оболочки о грунт // Взаимод. пластин и оболочек с жидк. и газом. М., 1984. С. 128–135.
28. *Горшков А. Г., Лобода А. И., Смелянский С. В.* Динамическое поведение оболочек вращения при взаимодействии со сплошной средой // Колеб. упруг. констр. с жидк.: Сб. науч. докл. 5 Всес. симп., Новосибирск, 1982 г. М., 1984. С. 90–94.
29. *Горшков А. Г., Лобода А. И., Смелянский С. В.* Поведение конических оболочек при ударе о грунт // Взаимод. пластин и оболочек с жидк. и газом. М., 1984. С. 136–144.
30. *Григорян С. С.* Об основных представлениях динамики грунтов // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 6. С. 1057–1072.
31. *Григорян С. С.* Приближенное решение задачи о проникании тела в грунт // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 4. С. 18–24.
32. *Епифанов В. П.* Разрушение льда при контактных взаимодействиях // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 6. С. 177–185.
33. *Епифанов В. П., Кузьменко В. П.* Механика разрушения снега // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 4. С. 190–197.
34. *Кадамцев И. Г.* Удар конического штампа по упругопластическому полупространству // VI Всес. съезд по теор. и прикл. мех., Ташкент, 1986 г.: Аннот. докл. Ташкент, 1986. С. 319.
35. *Кангур Х. Ф., Клейс И. Р.* Расчет глубины ударных повреждений на основе энергетических концепций // VI Всес. съезд по теор. и прикл. мех., Ташкент, 1986 г.: Аннот. докл. Ташкент, 1986. С. 326.
36. *Кириленко Г. А., Сагомонян А. Я.* Численная модель проникания в грунт // Изв. АН АрмССР. Мех. 1986. Т. 39. № 1. С. 47–51.
37. *Ковревский А. П.* Об одной модели процесса погружения твердого тела в среду с нелинейным сопротивлением // Пробл. машиностр. 1986. № 25. С. 69–73.
38. *Ковревский А. П.* Квазистатическая модель внедрения конуса в грунт // Динам. и проч. машин. 1986. № 43. С. 40–43.
39. *Кондауров В. И., Кукуджанов В. Н.* Соударение жесткого цилиндра со слоистой упругопластической преградой // Числ. методы реш. задач упруг. и пластич.: Матер. 6 Всес. конф., Ташкент, 1979 г. Новосибирск, 1980. С. 84–90.
40. *Кондауров В. И., Петров И. Б.* Численное исследование процесса внедрения жесткого цилиндра в упругопластическую преграду // Числ. методы в мех. тверд. деформир. тела. М., 1984. С. 115–132.
41. *Кондауров В. И., Петров И. Б., Холодов А. С.* Численное моделирование процесса внедрения жесткого тела вращения в упругопластическую преграду // ПМТФ. 1984. № 4. С. 132–139.
42. *Кошелев Э. А.* К задаче о проникании осесимметричного конического ударника в мерзлый грунт // Физ.-техн. пробл. разраб. полезн. ископаемых. 1987. № 3. С. 52–57.
43. *Куксенко Д. Б.* О наклонном проникновении тела в грунт. Двумерная задача. М.: Отд. теор. пробл. АН, 1988, 13 с. (Рук. деп. в ВИНТИ. № 1902-В88. Деп. от 09.03.88).
44. *Курдюмов В. А., Хейсин Д. Е.* Гидродинамическая модель удара твердого тела о лед // Прикл. мех. 1976. Т. 12. № 10. С. 103–109.
45. *Любин Л. Я., Повицкий А. С.* Косой удар твердого тела о грунт // ПМТФ. 1966. № 1. С. 83–92.
46. *Морозов Н. Ф., Петров Ю. В., Семенов В. Н.* О динамическом контактировании упругих тел // Тез. докл. Всерос. симп. «Динам. и технол. пробл. мех. констр. и сплош. сред». М., 1995. С. 35.
47. *Николаевский В. Н.* Механические свойства грунтов и теория пластичности: Итоги науки и техн. Мех. деформ. тверд. тела. Т. 6. М.: ВИНТИ, 1972. 86 с.
48. *Петров И. Б.* Численное исследование волновых процессов в слоистой преграде при соударении с жестким телом вращения // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 4. С. 125–129.
49. *Пожуев В. И., Полякова Н. П.* Нестационарная задача о воздействии подвижной нагрузки на ледяной покров // Строит. мех. и расчет сооруж. 1990. № 6. С. 46–50.
50. *Сагомонян А. Я.* Проникание (проникание твердых тел в сжимаемые сплошные среды). М.: МГУ, 1974. 299 с.
51. *Сагомонян А. Я.* Удар и проникание тел в жидкость. М.: МГУ, 1986. 172 с.
52. *Сагомонян А. Я., Гаевская И. С.* Вход тела в воду через слой льда // Изв. АН АрмССР. Мех. 1983. Т. 36. № 4. С. 26–34.
53. *Сагомонян А. Я., Моргунов М. Н.* Проникание упругой цилиндрической оболочки с жестким срезом в грунт // Газ. и волнов. динам. 1979. № 3. С. 138–141.

54. Сагомонян А. Я., Филимонов В. А. К проблеме наклонного проникания осесимметричного тела в грунт // Вестн. МГУ. Матем., мех. 1984. № 6. С. 90–93.
55. Сукач М. К. Методы динамического исследования грунтов в особых условиях. Днепропетровск: Всес. науч.-иссл. и проект.-констр. ин-т машиностр. для добычи тверд. полез. ископаемых мирового океана, 1991. (Рук. деп. в ЦНИИ-ТЭПтяжмаша 24.09.91, 790-тм91).
56. Федулов А. И., Иванов Р. А. К расчету величин внедрения ударного инструмента в мерзлый грунт // Физ.-техн. пробл. разраб. полезн. ископаемых. 1996. № 2. С. 54–60.
57. Филяков А. Б., Коган В. В., Выходцев В. Н. Распределение давлений на поверхностях деформатора при его внедрении в сыпучую среду // Горн., строит. дор. машины. 1991. № 44. С. 13–24.
58. Фонарев А. В. Влияние размеров цилиндрического бойка на напряженно-деформированное состояние преграды при высокоскоростном ударе // Моделирование процессов деформир. и разруш. тверд. тел. Свердловск, 1987. С. 55–59.
59. Хачиян Э. Е., Амбарцумян В. А. Динамические модели сооружений в теории сейсмостойкости. М.: Наука, 1981. 204 с.
60. Юркин Р. Г. Уплотнение грунта ударом плоского круглого штампа // Соверш. констр.-технолог. реш. земл. полотна автом. дорог. М., 1987. С. 33–43.
61. Bateman V. I., Caine T. G., McCau D. M. Force reconstruction for impact tests of an energyabsorbing nose // Int. J. Anal. and Exp. Modal Anal. 1992. V. 7. No. 1. P. 41–50.
62. Mayne Paul W., Jones J. S. Jr., Dumas J. C. Ground response to dynamic compaction // J. Geotechn. Eng. 1984. V. 110. No. 6. P. 757–774.
63. Pogan C. J., Rodriguer J. A. Numerical analysis of large deformation impacts in sand // 18th Int. Congr. Theor. and Appl. Mech., Haifa, Aug., 22–28, 1992. Haifa, 1992. P. 121.
64. Watanabe Shouhei Modulus of deformation and Poisson's ratio of soils obtained by plate loading tests using two cylindrical pits // Trans. JSIDRE. 1996. No. 184. P. 641–648.
65. Yankelevsky D. Z. Analysis of impact and penetration to geomaterials using engineering models // Impact: Eff. Fast Transient Loadings: Proc. 1st Int. Conf. Eff. Fast Transient Loadings, Lausanne, 26–27 Aug, 1987. Rotterdam: Brookfield, 1988. P. 67–83.

Глава 5

Контактные задачи в трибологии

§ 1. МЕХАНИКА ДИСКРЕТНОГО КОНТАКТА

И. Г. Горячева, О. Г. Чекина

1. Постановка задачи множественного контакта. Контактная задача в классической постановке предполагает идеальную гладкость поверхностей и сплошность области контактного взаимодействия.

Однако на практике область контактного взаимодействия, как правило, дискретна, то есть состоит из совокупности пятен контакта. Самой распространенной причиной возникновения дискретности контакта является шероховатость контактирующих поверхностей. Совокупность пятен контакта составляет область *фактического контакта*. Площадь этой области для реальных сопряжений может составлять десятки или сотые доли *номинальной области контакта*, которая, как правило, является односвязной и включает в себя все пятна фактического контакта. Размеры и положение пятен фактического контакта зависят от условий контактного взаимодействия, механических характеристик, а также макро- и микрогеометрии взаимодействующих поверхностей.

Микрорельеф поверхностей может быть весьма различен как по способу возникновения, так и по масштабу, он может получаться в результате различных видов обработки поверхностей или наноситься искусственно. Для изучения влияния микрорельефа поверхности на напряженно-деформированное состояние приповерхностных слоев тел, находящихся в условиях контактного взаимодействия, необходимо решать задачу *множественного контакта*, т.е. смешанную задачу механики деформируемого твердого тела для системы пятен контакта.

Следует отметить, что задача множественного контакта возникает также при исследовании контактного взаимодействия неоднородных тел, имеющих различного рода включения [20], композиционных материалов, тел сложной конфигурации, системы тел, близко расположенных друг к другу (например, роликовые и шариковые подшипники, система резцов в инструменте [16]) и т. д.

В достаточно общем виде задача множественного контакта может быть сформулирована в следующем виде. Рассмотрим контактное взаимодействие двух тел (рис. 1), одно из которых описывается функцией $z = -F(x, y)$ в системе координат, связанной с полупространством (плоскость Oxy совпадает с границей полупространства, а ось Oz направлена вглубь полупространства). Функция $F(x, y)$ такова, что при сближении тел на величину D номинальная область контактного взаимодействия Ω включает в себя конечное N или бесконечное число пятен контакта ω_i .

В пределах каждого пятна контакта действует фактическое давление $p_i(x, y)$ ($x, y \in \omega_i$). Тангенциальные напряжения в областях контакта будем считать пренебрежимо малыми. Под действием давлений $p_i(x, y)$ граница полупространства деформируется, при этом перемещения $u_z(x, y)$

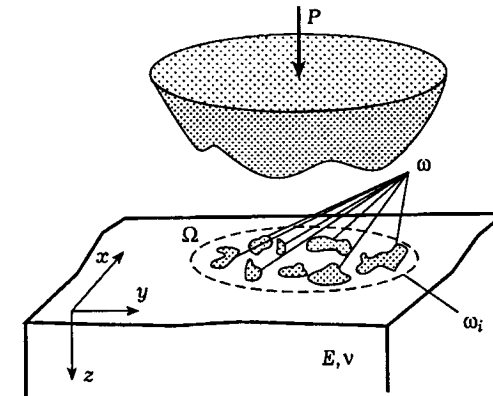


Рис. 1

границы в направлении оси Oz связаны с контактными давлениями $p_i(x, y)$ соотношением

$$u_z = A[p_1, p_2, \dots, p_N, \dots]. \quad (1)$$

Оператор A зависит от выбранной модели деформируемого тела. Так, для упругого полупространства соотношение (1) принимает вид

$$u_z(x, y) = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \sum_{i=1}^N \iint_{\omega_i} \frac{p_i(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}}. \quad (2)$$

В каждой области ω_i должно выполняться условие контакта

$$u_z(x, y) = D - F(x, y). \quad (3)$$

Если величина сближения D неизвестна, а задана суммарная нагрузка P , действующая вдоль оси Oz , к уравнениям (2) и (3) следует добавить уравнение равновесия

$$\sum_{i=1}^N \iint_{\omega_i} p_i(x, y) dx dy = P. \quad (4)$$

Система уравнений (2), (3) и (4) может быть использована для определения неизвестных функций распределения фактических давлений $p_i(x, y)$ внутри единичных пятен контакта ω_i .

При заданной области контакта (какой бы сложной она ни была) и заданном внедрении D задача определения контактного давления сводится к однократному решению интегрального уравнения (2); при заданной нагрузке P уравнение (2) решается совместно с соотношением (4). Если же область контакта неизвестна, для ее определения необходимо осуществлять итерационную процедуру и решать интегральное уравнение (2)

многократно. В случае гладкой функции $F(x, y)$ для определения областей ω_i используется условие равенства нулю фактических давлений на их границе. Задача с неизвестной площадкой контакта является нелинейной, что не позволяет применять для ее решения принцип суперпозиции.

2. Сведение задачи дискретного контакта к задаче полного контакта. В некоторых случаях при решении задач дискретного контакта в качестве вспомогательных могут быть использованы задачи полного контакта в области простой формы Ω . При этом задача с неизвестной областью контакта сводится к задаче с известной областью контакта и становится линейной. Кроме того, при решении используются области простой формы, для которых известны обращения интегральных операторов типа (1) и (2). Использование обратных соотношений позволяет заменить решение интегрального уравнения прямым интегрированием. Поскольку предполагается, что все точки области Ω находятся в контакте, давление может быть как положительным, так и отрицательным в этой области; вне области Ω давление равно нулю.

Рассмотрим указанный подход на примере плоской задачи. Обратные соотношения, связывающие форму тела $f(x)$ (функция $f'(x)$ удовлетворяет на $[a, b]$ условию Гельдера) и контактное давление $p(x)$, для плоской задачи могут быть записаны следующим образом [6]:

$$p(x) = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \int_a^b \frac{f'(t)\sqrt{(t-a)(b-t)} dt}{t-x} - \frac{\bar{c}}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}.$$

Здесь полный контакт имеет место в области $\Omega = [a, b]$. Значение \bar{c} определяется из условия равновесия

$$\int_a^b p(x) dx = P,$$

P — нагрузка на единицу длины в направлении оси y . Известны обратные соотношения для периодической задачи (см. например, [42, 55]).

Метод, позволяющий использовать соотношения для полного контакта при решении задач дискретного контакта для шероховатых тел, предложен в работе [45]. Алгоритм расчета при этом основывается на пошаговой модификации формы в области, в которой на данном шаге итерации давление оказалось отрицательным. Формы на i -м и $(i+1)$ -м шаге связаны соотношением

$$f_{i+1}(x) = f_i(x) + \delta_i(x) \quad (\delta_i(x) > 0), \quad p_i(x) < 0,$$

$$f_{i+1}(x) = f_i(x), \quad p_i(x) \geq 0.$$

Здесь функция $\delta_i(x)$ выбирается так, что давление во всех точках, где оно было отрицательным на предыдущем шаге, не может оказаться положительным на следующем шаге.

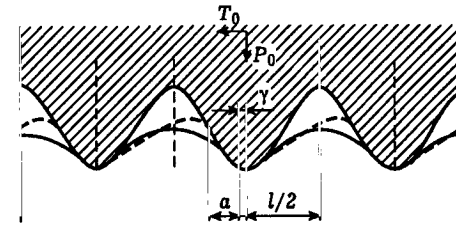


Рис. 2

При рассмотрении пространственных задач в качестве области полного контакта выбирается круг. Для получения обратного соотношения используется результат, полученный Л.А.Галиным [6], рассмотревшим задачу о внедрении в упругое полупространство кругового в плане штампа с произвольной формой основания.

В работе [45] соотношения Л.А.Галина преобразованы к форме, удобной для численной реализации. Описана разработанная авторами численная процедура и результаты расчетов для задачи дискретного контакта.

3. Периодические контактные задачи. Строгое решение сформулированной выше задачи множественного контакта возможно лишь численными методами, при этом погрешность определения напряженно-деформированного состояния тел определяется точностью задания функции $F(x, y)$, описывающей геометрию поверхностей контактирующих тел, и точностью применяемых вычислительных методов.

Для поверхностей с регулярным рельефом (например, волнистая поверхность) для исследования системы уравнений (2), (3) и (4) могут быть применены методы решения периодических контактных задач. В плоской постановке периодические контактные задачи для упругих тел при отсутствии сил трения рассматривались Вестергардом [67] и Штаерманом [42]. Кузнецовым и Гороховским [24–26] дано решение плоской периодической контактной задачи с учетом сил трения, полученное с помощью общих формул Колосова–Мухелишвили и аппарата автоморфных функций. Для периодического штампа, профиль которого описывается функцией (рис. 2)

$$f(x) = \frac{l^2}{2R\pi^2} \sin^2 \frac{\pi}{l}(x - \gamma),$$

где l — период, R — радиус кривизны в точке касания, γ — расстояние между осью симметрии выступа и серединой площадки контакта, выражение для давления на площадке контакта $(-a - \gamma, a - \gamma)$ имеет вид [25]:

$$p(x) = \frac{4Gl \cos \pi \alpha}{\pi R(\kappa + 1)} \cos \left[\frac{\pi}{l}(x + 2\alpha a - a\gamma) \right] \sin^{1/2-\alpha} \left[\frac{\pi}{l}(a+x) \right] \sin^{1/2+\alpha} \left[\frac{\pi}{l}(a-x) \right],$$

где a — полуширина площадки контакта, G и κ — упругие постоянные материала основания (G — модуль сдвига, κ — постоянная Мухелишвили),

α — параметр, определяемый из соотношения:

$$\operatorname{tg}(\pi\alpha) = \mu \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}.$$

μ — коэффициент трения.

Смещение площадки контакта γ (см. рис. 2) определяется следующим выражением

$$\gamma = \frac{l}{2\pi} \operatorname{arctg} \left[\left(\sin \frac{4\pi a \alpha}{l} + 2\alpha \sin \frac{2\pi a}{l} \right) / \left(\cos \frac{4\pi a \alpha}{l} + \cos \frac{2\pi a}{l} \right) \right].$$

Авторами проведен анализ совместного влияния коэффициента трения μ и параметра плотности контакта $\frac{a}{l}$ на распределение давления под штампом и размер и положение контактных зон [25], а также исследовано напряженно-деформированное состояние поверхностных слоев при различных параметрах микрорельефа поверхности [26].

Исследование влияния жидкости, заполняющей объем между поверхностью синусоидального индентора и упругого полупространства, на контактные характеристики проведено Кузнецовым [55], рассмотревшим плоскую периодическую задачу для упругих тел при наличии между ними сжимаемой жидкости.

В [17, 49] рассмотрены задачи о движении периодического упругого индентора по границе упругого основания при наличии на его поверхности тонкого вязкоупругого слоя (в плоской постановке). В качестве модели слоя взяты тело Максвелла [49] и тело Кельвина [17]. Изучено влияние относительных характеристик слоя, плотности расположения контактных зон, а также скорости движения индентора на размер и относительное смещение площадок контакта. Показано, что несимметрия расположения площадок контакта и давлений на них приводит к возникновению деформационной составляющей силы трения, величина которой существенно зависит от скорости движения индентора. Характер этой зависимости определяется свойствами поверхностного слоя.

Пространственная периодическая контактная задача для поверхности, имеющей синусоидальную волнистость в двух взаимно-перпендикулярных направлениях, рассматривалась Джонсоном и др. [54]. На основе принципа суперпозиции в работе показано, что для регулярного рельефа, описываемого функцией

$$f(x, y) = \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_1 \cos \frac{2\pi x}{l_1} - \Delta_2 \cos \frac{2\pi y}{l_2},$$

давление при полном контакте такой волнистой поверхности с упругим полупространством определяется выражением

$$p(x, y) = \bar{p} + p_x^* \cos \frac{2\pi x}{l_1} + p_y^* \cos \frac{2\pi y}{l_2},$$

где $p_x^* = \pi E^* \Delta_1 / l_1$ и $p_y^* = \pi E^* \Delta_2 / l_2$, E^* — эквивалентный модуль упругости. Для осуществления полного контакта необходимо выполнение неравенства $\bar{p} \geq p_x^* + p_y^*$. При меньших значениях средних давлений \bar{p} имеет место неполный контакт. В [54] предложены асимптотические решения задачи в случае малых значений \bar{p} , основанные на теории Герца, и для значений \bar{p} , близких к $p_x^* + p_y^*$, но не превышающих эту величину. В последнем случае малые области раздела моделировались эллиптической трещиной. Для промежуточных значений \bar{p} решение строилось численно.

В [10] предложен метод решения периодической контактной задачи для упругого полупространства и системы инденторов, форма контактирующих поверхностей которых описывается гладкой функцией $f(r)$. Оси инденторов перпендикулярны к границе полупространства $z = 0$, а точки их пересечения с границей равномерно распределены в плоскости $z = 0$ и имеют координаты (r_i, θ_{ij}) ($i = 1, 2, \dots$; $j = 1, 2, \dots, m_i$, где m_i — количество инденторов, расположенных на окружности радиуса r_i , $r_i < r_{i+1}$).

В основу метода положено решение, данное Л.А.Галиным [6], задачи о влиянии действующей вне штампа пригрузки на распределение контактных давлений. Получено следующее интегральное уравнение для определения контактного давления $p(r, \theta)$, действующего внутри круговой площадки контакта радиуса a :

$$p(r, \theta) - \int_0^a \int_0^{2\pi} K(r, \theta, r', \theta') p(r', \theta') r' d\theta' dr' = G(r), \quad (5)$$

где

$$G(r) = \frac{E^*}{4\pi^2} \int_0^a \Delta f(r') H_1(r, r') dr', \quad (6)$$

$$H_1(r, r') = \int_0^{2\pi} \frac{2r'}{\sqrt{r^2 - 2rr' \cos \theta' + r'^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 - r'^2} \sqrt{a^2 - r'^2}}{a\sqrt{r^2 - 2rr' \cos \theta' + r'^2}} d\theta'. \quad (7)$$

Ядро $K(r, \theta, r', \theta')$ интегрального уравнения (5) представлено в виде сходящегося ряда

$$K(r, \theta, r', \theta') = \sum_{i=1}^{\infty} K_i(r, \theta, r', \theta'), \quad (8)$$

где

$$K_i(r, \theta, r', \theta') = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{a^2 - r'^2}} \sum_{j=1}^{m_i} [K_{ij}(a, \theta, r', \theta') - K_{ij}(r, \theta, r', \theta')],$$

$$K_{ij}(r, \theta, r', \theta') = L(r_i, r', \theta_{ij} - \theta') \lambda(r, \theta, r', \theta', r_i, \theta_{ij}),$$

$$L(r_i, r', \phi) = \sqrt{r_i^2 + r'^2 + 2r_i r' \cos \phi - a^2},$$

$$\lambda(r, \theta, r', \theta', x, \phi) = [(r \cos \theta - r' \cos \theta' - x \cos \phi)^2 + (r \sin \theta - r' \sin \theta' - x \sin \phi)^2]^{-1/2}$$

После замены в (8) суммирования при $i > n$ интегрированием по области $(\Omega_n : r_i \geq A_n, 0 \leq \theta_{ij} \leq 2\pi)$ с учетом того, что центры контактных зон (r_i, θ_{ij}) равномерно распределены в Ω_n , уравнение (5) приведено к виду

$$p(r, \theta) - \int_0^a \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^n K_i(r, \theta, r', \theta') p(r', \theta') r' d\theta' dr' = G(r) + \bar{N} P Q(r, A_n), \quad (9)$$

$$P = \int_0^a \int_0^{2\pi} p(r, \theta) r d\theta dr, \quad Q(r, A_n) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{\sqrt{A_n^2 - a^2}},$$

где \bar{N} — среднее количество контактных зон на единице площади, P — нагрузка, действующая на каждое пятно контакта, A_n — радиус круга, в котором расположено $m_1 + m_2 + \dots + m_n + 1$ центральных инденторов.

Показано, что за счет выбора n решение уравнения (9) можно сколь угодно приблизить к решению исходного уравнения (5). Интегральный член в левой части уравнения (9) учитывает влияние на распределение давления на фиксированном пятне контакта фактических давлений на близлежащих к нему пятнах контакта (эффект близкодействия). Влияние же нагрузки, распределенной по удаленным пятнам контакта, учитывается вторым членом правой части, описывающим дополнительное давление, возникающее в круговой области ($r \leq a$), при действии вне ее (в области $r > A_n$) номинального давления $\bar{p} = P\bar{N}$.

Исследование структуры уравнения (9) позволило предложить общий подход к решению задач множественного контакта (*метод локализации*), который сформулирован в виде следующего утверждения: в условиях множественного контакта напряженно-деформированное состояние взаимодействующих тел вблизи отдельного пятна контакта с достаточной степенью точности может быть определено путем учета реальных условий контактирования на рассматриваемом и близлежащих к нему пятнах контакта (в локальной окрестности пятна) и осредненного по поверхности (номинального) давления на остальной части поверхности взаимодействия. Справедливость этого утверждения подтверждена при изучении задачи множественного контакта с ограниченной номинальной областью взаимодействия [15].

В [10, 47] построена система уравнений для исследования контактного взаимодействия периодической системы инденторов, имеющих различную высоту. Проведены расчеты контактных характеристик при разных значениях параметров контактного взаимодействия и дан анализ влияния

параметров микрогеометрии на фактическую область контакта и напряженное состояние тел, обладающих регулярным микрорельефом, при их контактном взаимодействии. Полученные результаты использованы для оценки границ применимости упрощенных методов расчета контактных характеристик, основанных на использовании теории Герца при определении зависимости нагрузки от внедрения на отдельном пятне контакта.

Исследование подповерхностных напряжений показало [10, 47], что возрастание плотности контакта приводит к возникновению на некоторой глубине напряженного слоя. Концентрация напряжений в этом слое может привести к развитию в нем пластических деформаций и зарождению микротрещин. Полученные результаты качественно совпадают с выводами, сделанными [26, 27] при исследовании контактного взаимодействия синусоидального штампа с упругой полуплоскостью.

В [18, 19] рассмотрены периодические задачи о нагружении двухслойного упругого полупространства внутри круговых областей. Решение этих задач основано на применении принципа локализации. Изучено влияние относительных механических и геометрических характеристик поверхностного слоя, а также параметра плотности расположения контактных зон на распределение контактного давления [19] и напряжений внутри слоя, внутри основания и на границе их раздела [18, 19]. Показано, что для относительно твердых и тонких покрытий параметр, характеризующий плотность расположения контактных зон в случае дискретного контакта, играет определяющую роль при прогнозировании типа разрушения покрытий.

4. Внедрение ограниченной системы штампов. В случае действия на упругое полупространство конечного числа инденторов, связанных между собой (системы инденторов), области фактического и номинального давления являются ограниченными. Имеющееся при этом неравномерное распределение нагрузок между отдельными пятнами контакта определяется как высотными характеристиками контактирующих инденторов, так и местом расположения пятна контакта в пределах номинальной области контактирования.

В работах Горячевой и Добычина [12, 13, 15, 48] предложен метод решения задачи о внедрении ограниченной системы N штампов в упругое полупространство и изучена зависимость контактных характеристик от пространственного расположения штампов в системе. Пространственное расположение штампов характеризуется координатами точек пересечения осей симметрии штампов с границей полупространства и относительной высотой каждого штампа h_i ($i = 1, 2, \dots, N$).

Для системы N цилиндрических штампов с плоским основанием радиуса a_i ($f(r) = 0$) в предположении полного контакта каждого штампа с упругим телом по круговым областям ($r \leq a_i$) получено следующее

соотношение между внедрением произвольного i -го штампа и нагрузками P_j , действующими на штампы системы [15]:

$$D_i = \frac{P_i(1-\nu^2)}{2a_i E} + \frac{1-\nu^2}{\pi a_i E} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N P_j \arcsin \frac{a_i}{l_{ij}}, \quad (10)$$

где l_{ij} — расстояние между i -м и j -м штампами.

Уравнение (10) вместе с условием контакта и уравнением равновесия используется для расчета распределения усилий P_i между штампами.

В [12, 15] приведены результаты расчетов, показывающие влияние параметра плотности расположения N цилиндрических штампов одинаковой высоты на распределение усилий между ними при их равномерном распределении внутри области заданной геометрии (круг, эллипс и т.д.), а также получено соотношение между внедрением D такой системы штампов и действующей на нее нагрузкой P в виде

$$P = j_0 \beta D, \quad (11)$$

где $j_0 = 2aE/(1-\nu^2)$ — жесткость уединенного цилиндрического штампа. Параметр β может быть аппроксимирован функцией

$$\beta = kN^\alpha, \quad 0.5 \leq \alpha \leq 1, \quad (12)$$

где значения k и α зависят от плотности расположения штампов в системе.

Проведенное в [15] исследование влияния формы номинальной области контакта, занимаемой системой штампов, на жесткость такой системы позволило сделать вывод, что для моделей, рассчитанных при одинаковой плотности контакта и одинаковом числе штампов, но при разных формах областей, занимаемых штампами (рассматривались формы в виде эллипсов с разными эксцентриситетами), жесткость контакта примерно одинакова. Интересно отметить, что аналогичный вывод был сделан Л.А.Галиным [6] для штампов с плоским основанием эллиптической формы в плане.

Численный анализ решения задачи для системы цилиндрических штампов показал существенное влияние параметра плотности контактов на распределение усилий между штампами, жесткость системы штампов, а также на зависимость фактической площади контакта от нагрузки при заданной функции распределения штампов по высоте [15]. Результаты дают возможность оценить ошибку, возникающую при расчете фактической площади контакта по упрощенным инженерным формулам, не учитывающим параметр плотности расположения штампов.

Для системы сферических штампов радиуса R ($f(r) = \frac{r^2}{2R}$) при заданном их пространственном расположении система уравнений для определения распределения усилий P_i между штампами и радиусов a_i контактных

площадок имеет вид [48]:

$$h_i - D = \frac{a_i^2}{R} + \frac{1-\nu^2}{\pi E} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{P_j}{l_{ij} \sqrt{1 - \left(\frac{a_i}{l_{ij}}\right)^2}},$$

$$P_i = \frac{4Ea_i^3}{3R(1-\nu^2)} + \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N P_j \left[\frac{a_i}{l_{ij} \sqrt{1 - \left(\frac{a_i}{l_{ij}}\right)^2}} - \arcsin \frac{a_i}{l_{ij}} \right], \quad (13)$$

$$P = \sum_{i=1}^N P_i, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

где P — общая нагрузка, действующая на систему штампов.

В [48] получены зависимости полной фактической площади контакта $A_r = \pi \sum_{i=1}^N a_i^2$ и сближения системы штампов D от действующей на нее нагрузки P для системы сферических штампов, расположенных на одном уровне с разной плотностью.

Пластическая деформация системы клиновидных неровностей жестким плоским телом рассмотрена в [46] в плоской постановке.

5. Изнашивание ограниченной системы штампов. Дискретный характер контактного взаимодействия играет большую роль при изнашивании поверхностей. Математическая модель изнашивания дискретного контакта рассмотрена в работах [9, 15, 47, 48].

В [9] сформулирована и решена задача об изнашивании системы N штампов, движущихся по границе упругого полупространства. Зависимость скорости изнашивания каждого штампа от действующей на него нагрузки P_j и скорости скольжения V_j взята в виде степенной функции

$$\frac{dw_j}{dt} = K_w \left(\frac{P_j}{P^*} \right)^\alpha \left(\frac{V_j}{V^*} \right)^\beta, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (14)$$

где w_j — линейный износ j -го штампа в центре контактной зоны, P^* и V^* — характерные значения нагрузки и скорости скольжения, соответственно, K_w — коэффициент, характеризующий линейную скорость изнашивания при $P_j = P^*$, $V_j = V^*$, α и β — параметры.

Из условия контакта j -го штампа системы с упругим полупространством следует

$$u_j(t) = h_j - w_j(t) - D(t), \quad (15)$$

где $u_j(t)$ — внедрение j -го штампа в произвольный момент времени t , h_j — начальная высота j -го штампа и $D(t)$ — сближение тел под нагрузкой ($D(0) \neq 0$).

Для системы цилиндрических штампов с плоским основанием задача сведена к исследованию системы нелинейных дифференциальных уравнений эволюционного типа для определения перераспределения усилий между штампами $P_j(t)$ [9]. Доказана асимптотическая устойчивость стационарного решения системы для случаев постоянной скорости сближения и постоянной нагрузки, действующей на систему штампов. Показано, что установившееся решение характеризуется одинаковой скоростью изнашивания каждого штампа, из чего следует существование установившейся формы изношенной поверхности системы штампов (соотношения между высотами штампов в установившемся режиме изнашивания).

Исследование процесса изнашивания системы цилиндрических штампов одинаковой высоты при разных значениях параметров системы проведено в работах [9, 15, 47]. В частности, показано, что время неустановившегося режима изнашивания (приработки) тем меньше, чем меньше плотность контакта. При этом полагалось, что приработка заканчивается в момент времени T , если выполняется условие

$$\left| \frac{P_{\min}(T)}{P_{\max}(T)} - 1 \right| < \varepsilon,$$

где P_{\min} и P_{\max} — минимальная и максимальная нагрузки, действующие на штампы, ε — некоторая заданная малая величина ($\varepsilon \ll 1$).

Стационарное решение задачи исследовано в [15, 20]. Получено следующее выражение для определения соотношения между высотами $h_{i\infty}$ штампов в установившемся режиме изнашивания:

$$h_{i\infty} = \frac{(1-\nu^2)P^*}{2aE} [\delta V^{*\beta}]^{1/\alpha} \left[\frac{1}{V_i^{\beta/\alpha}} + \frac{2}{\pi} \sum_{j=1, i \neq j}^N \frac{1}{V_j^{\beta/\alpha}} \arcsin \frac{a}{l_{ij}} \right], \quad (16)$$

где постоянная δ определяется либо известной величиной скорости смещения системы штампов в направлении, перпендикулярном к поверхности трения, либо известной нагрузкой P_{∞} , действующей на систему штампов.

Из (16) следует, что установившееся распределение $h_{i\infty}$ штампов по высоте зависит от расположения штампов внутри номинальной области Ω и от характера движения системы штампов и не зависит от начального распределения штампов по высоте. В [15] проведен анализ влияния плотности расположения штампов на установившуюся форму их изношенной поверхности при разных видах движения системы штампов. Результаты использованы в [14] для объяснения процесса формирования равновесной шероховатости поверхностей при изнашивании. Проведено сравнение известных экспериментальных результатов по исследованию формы равновесной шероховатости поверхностей с результатами исследований, полученных из предложенной теоретической модели.

Описанная здесь модель изнашивания дискретного контакта использована в [20] для исследования формоизменения рабочей поверхности абразивного инструмента и выбора оптимальной плотности расположения абразивных включений по рабочей поверхности с целью сохранения ее плоскостности в процессе обработки поверхности.

Другие модели изнашивания дискретного контакта, включающие также механизм разрушения элементарных контактов за счет накопления усталости в подповерхностных слоях взаимодействующих тел, сформулированы и исследованы в [2, 41, 47].

6. Контактные задачи для шероховатых тел. Перейдем непосредственно к задачам, в которых дискретность контакта обусловлена шероховатостью контактирующих поверхностей. В отличие от модельных ситуаций, рассмотренных выше, при контактировании шероховатых поверхностей расположение и форма пятен фактического контакта являются нерегулярными, а их количество может быть весьма велико. Размеры пятен фактического контакта могут находиться в диапазоне от долей миллиметра до долей нанометра.

Данные о топографии поверхностей, необходимые для проведения расчетов контактных характеристик, определяются экспериментально. Развитие измерительной техники приводит к изменению представлений о топографии, что стимулирует возникновение новых математических моделей, используемых для описания топографии и решения контактных задач. При создании приборов для исследования топографии в конструкцию и программное обеспечение закладывается возможность измерения и расчета характеристик, наиболее широко используемых при моделировании. Обзор экспериментальных методов исследования топографии поверхностей содержится в [21, 64].

Первоначально измерение характеристик шероховатости осуществлялось щуповыми профилометрами, измеряющими профиль поверхности. Для количественного описания поверхности использовались такие характеристики как среднеквадратичное отклонение профиля, среднеквадратичный наклон, средняя кривизна вершины. Модели контактного взаимодействия при этом основывались на понятии единичной неровности. Самой известной из моделей такого рода явилась модель, построенная Гринвудом и Вильямсоном [51] (см. также [23, 50]). Шероховатость в ней моделируется системой сферических сегментов одинакового радиуса, а их высота принимается случайной величиной, подчиняющейся некоторому закону распределения. Предполагается, что каждая неровность деформируется упруго в соответствии с теорией Герца. Влияние же других неровностей оценивается осредненным (номинальным) давлением. Были разработаны многочисленные модификации данной модели, анализу которых посвящена работа [60]

В модели Гринвуда–Вильямсона статистическая природа поверхностей учитывается введением функции распределения неровностей по высоте. Более общая статистическая модель поверхности основана на теории случайного поля, первоначально разработанной для описания поверхности моря [28]. Эта теория применима для поверхностей с гауссовым распределением высот. Весьма актуальной оказалась разработка методов, позволяющих связать параметры трехмерной топографии с характеристиками профиля поверхности [31], а также выразить расчетные характеристики анизотропных поверхностей через параметры случайного поля [35–38]. Использование теории случайного поля при решении контактных задач и статистические вопросы, связанные с описанием топографии поверхностей, обсуждаются в работах [33, 52, 53].

Теория случайного поля, как и некоторые другие методы описания шероховатых поверхностей, позволяет получить спектральные характеристики поверхности. Как упоминалось выше, известно решение плоской периодической задачи для синусоидального штампа. В случае полного контакта непосредственное применение этого решения и принципа суперпозиции может быть использовано для определения контактных характеристик. В [40] проведено определение контактных характеристик полного контакта на основе теории случайного поля. Полученные соотношения дали возможность провести оценки зависимости площади фактического контакта от номинального давления для неполного контакта при относительной фактической площади контакта, близкой к единице. Непосредственное использование спектральных характеристик для расчета контактных параметров дискретного контакта в общем случае не представляется возможным в силу нелинейности контактных задач с неизвестной площадкой контакта и неприменимости принципа суперпозиции для их решения.

В [62] показано, что многие поверхности могут описываться с помощью нестационарных случайных процессов. Результаты исследования топографии в широком интервале масштабов дали основание сформулировать гипотезу о применимости методов фрактальной геометрии к описанию поверхностей, полученных в результате естественных процессов и различных видов механической обработки. Был проведен ряд исследований [3, 58, 64], в которых эта гипотеза была подтверждена для многих видов поверхностей.

Следующим шагом в этом направлении стало построение математических моделей поверхностей, обладающих фрактальными свойствами, и определение для них стандартных характеристик, которые применимы для расчета поведения поверхностей, в том числе при контактном взаимодействии. Главным образом, моделирование было основано на использовании функции Вейерштрасса–Мандельброта [30] и искусственно созданных рельефов, основанных на идее Канторова множества. В плоском случае та-

кие модели рассмотрены в [3], в пространственном — в работе [66].

Использование фрактальных моделей для определения контактных характеристик наталкивается на ряд трудностей. В частности, при контактировании со сплошной средой тела с самоподобным профилем расположение пятен контакта не является самоподобным и, следовательно, к описанию геометрии области фактического контакта методы фрактальной геометрии в общем случае не могут быть применены.

Судя по всему, именно по этой причине авторы [3, 66] для деформируемой среды использовали модель Винклера или модель локально пластически деформируемого тела (решение Хилла). В этом случае определение геометрических характеристик области контакта (например, площади контакта) сводится к анализу геометрических характеристик самого контактирующего тела. Для моделей такого рода удалось получить зависимости, связывающие параметры построенной модели с используемой инженерной характеристикой — опорной кривой, а также провести расчеты зависимости внедрения от нагрузки.

Маджумдар и Бхушан [30] предложили метод определения контактных характеристик для поверхности, микрогеометрия которой задается с помощью функции Вейерштрасса–Мандельброта, взяв за основу решение Герца для отдельных гармоник этой функции. Однако, следует отметить, что использование принципа суперпозиции, положенного в основу этого метода, не является строгим.

В последнее время высказывается предположение о том, что, возможно, более адекватным, чем чисто фрактальное, окажется описание реальных поверхностей с помощью дифференцируемых самоподобных функций, а также с помощью префракталов [43]. В этой связи уместно вспомнить полученный на основе экспериментов вывод о том, что начиная с некоторого уровня топография поверхностей, обработанных различными способами, не зависит от метода обработки [57].

В последнее время наблюдается тенденция к проведению расчетов контактных характеристик шероховатых тел на основании прямого численного моделирования. При этом отпадает необходимость модельного описания поверхностей — определения их статистических характеристик, введения понятия неровности и так далее. Такие подходы стали реальностью в связи с возможностью получения данных о трехмерной топографии поверхностей, в частности, с помощью сканирующего атомно-силового микроскопа, и развитием вычислительной техники.

Увеличение точности описания поверхности требует разработки специальных численных методов при решении контактных задач, позволяющих работать с большими массивами данных. В большинстве случаев определение контактных характеристик сводится к решению интегрального уравнения (2). Значительное продвижение в направлении увеличения скорости счета и размеров массивов данных произошло в связи с со-

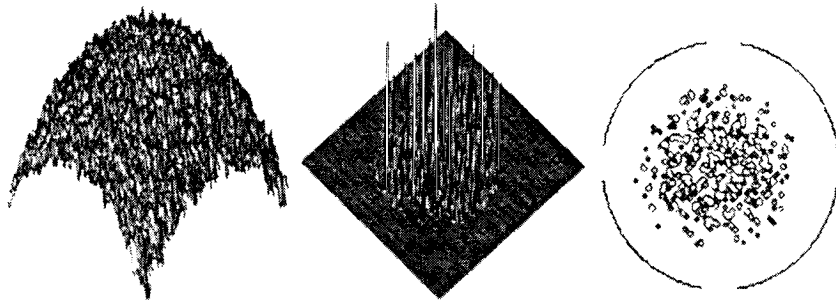


Рис. 3

зданием новых методов численного интегрирования и решения линейных систем [44, 56, 65].

Алгоритм расчета контактных характеристик, непосредственно использующих данные о топографии шероховатой поверхности, основанный на обратных соотношениях, описан в [45]. В этом случае ускорение счета достигается за счет быстрого убывания возникающего ядра обратного оператора, что позволяет использовать неравномерные сетки и аппроксимировать форму шероховатого тела на больших расстояниях от рассматриваемой точки. Сравнение предложенного в [45] метода расчета с алгоритмами, основанными на прямых соотношениях, показало, что он может оказаться предпочтительным при достаточно большой относительной площади контакта и номинальной области контакта, близкой к круговой. Результаты расчетов контактных характеристик (давления и площади контакта) при внедрении шероховатой сферы в упругое полупространство представлены на рис. 3.

Перспективным при численном решении задач дискретного контакта является использование методов, основанных на быстром преобразовании Фурье. Использование этих методов практически позволяет нивелировать различия при проведении расчетов для однородных тел и тел с покрытиями [59, 61, 63].

7. Сведение задачи дискретного контакта к континуальной модели. Наличие микрорельефа на поверхностях взаимодействующих тел изменяет их контактные характеристики на макроуровне, к которым относятся номинальные давления, номинальная область контакта, зависимость внедрения от приложенной нагрузки. Для их определения И.Я.Штаерманом [42] была предложена модель комбинированного основания, при нагружении которого помимо упругих деформаций принимались во внимание дополнительные смещения его границы за счет смятия микронеровностей. Эта работа заложила основы континуальной модели деформирования шероховатого тела и стимулировала появление ряда ис-

следований в этом направлении [1, 4, 7, 8, 29, 32, 34]. В этих работах для определения номинального давления $p(x, y)$ и номинальной области контакта Ω использовалось интегральное уравнение вида

$$D - f(x, y) = C[p](x, y) + \iint_{\Omega} K(x, y, x', y') p(x', y') dx' dy', \quad (x, y) \in \Omega, \quad (17)$$

где $f(x, y)$ — функция, описывающая макроформу взаимодействующих поверхностей, $K(x, y, x', y')$ — ядро интегрального уравнения соответствующей контактной задачи без учета шероховатого слоя, D — сближение тел под нагрузкой, $C[p]$ — дополнительное смещение за счет смятия шероховатости.

Экспериментальные исследования закономерностей деформирования шероховатого тела показали [22], что дополнительные смещения удовлетворительно описываются степенной функцией номинального давления

$$C[p] = Kp^{\alpha}. \quad (18)$$

Исследованию и разработке методов решения уравнения (17) при степенной функции $C[p]$ вида (18) и типичных для контактных задач видах ядер $K(x, y, x', y')$ интегральных операторов посвящены работы [1, 4, 5, 8, 29].

Функция $C[p]$ может быть построена также, исходя из модельных описаний взаимодействия шероховатых поверхностей. Метод построения функции дополнительного смещения, предложенный в [11, 47], основан на принципе локализации (см. п. 3), позволившем представить функцию $C[p]$ в виде

$$C[p](x, y) = -h(x, y) + \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \left(\sum_{i=0}^k \iint_{\omega_i} \frac{p_i(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}} - 2\pi R_0 p(x, y) \right), \quad (19)$$

где R_0 — радиус подобласти Ω_0 с центром в точке $(x, y) \in \omega_0$, включающей пятна контакта ω_i ($i = 0, 1, \dots, k$), внутри которых принимаются во внимание фактические давления $p_i(x, y)$ (локальный эффект), $h(x, y)$ — функция, описывающая форму неровности при $(x, y) \in \omega_0$. В [11] показана возможность использования для определения функции дополнительного смещения (19) решений периодических контактных задач, в которых пространственное расположение инденторов моделирует параметры микрогеометрии поверхности в окрестности рассматриваемой точки (x, y) , а номинальное давление определяется величиной $p(x, y)$. Проведены расчеты функции $C[p]$ для разных модельных описаний микрогеометрии поверхности, которые показали, что с ростом номинального давления величина дополнительной податливости контакта dC/dp , связанная с наличием микрорельефа, постепенно уменьшается и стремится к нулю при переходе от дискретного контакта к непрерывному.

Следует отметить, что степенная функция вида (18) не описывает этот процесс, поэтому ее можно использовать только при невысоких значениях номинального давления, когда полный контакт не наступает.

Изучению зависимости характеристик контактного взаимодействия на макроуровне от параметров микрогеометрии их поверхностей в разного рода сопряжениях посвящены работы [1, 4, 7, 39] и т.д. В этих работах, в частности, показано, что увеличение шероховатости поверхности приводит к снижению максимальных номинальных давлений в области контакта и увеличению ее размеров. Кроме того, исчезает особенность давлений, имеющая место в угловых точках площадки контакта для идеально гладких поверхностей [8, 29].

Номинальные давления, полученные из решения уравнения (17), используются затем для определения характеристик дискретного контакта (максимальных значений фактических давлений на разных участках номинальной области контакта, фактической площади контакта, величины зазора и т.д.), которые необходимы для изучения процессов трения и изнашивания при фрикционном взаимодействии, электрического и теплового сопротивления в контакте и т.д. Алгоритм определения характеристик дискретного контакта, использующий функцию распределения номинальных давлений при заданных параметрах микрогеометрии, изложен в [11, 47]. Метод основан на решении периодической контактной задачи, которая моделирует условия взаимодействия поверхностей в рассматриваемой точке номинальной области контакта. Предложенный метод дает возможность рассчитать характеристики номинального и дискретного контакта при взаимодействии упругих тел с учетом их макро- и микрогеометрии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В. М., Кудиш И. И. Асимптотический анализ плоской и осесимметричной контактной задачи при учете поверхностной структуры взаимодействующих тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 1. С. 58–70.
2. Алексеев Н. М., Горячева И. Г., Чекина О. Г. Контактное взаимодействие шероховатых тел с учетом процессов фрикционного разрушения // Трение и износ. 1987. Т. 8. № 6. С. 977–984.
3. Бородич Ф. М., Мосолов А. Б. Фрактальная шероховатость в контактных задачах // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 5. С. 786–795.
4. Галанов Б. А. Пространственные контактные задачи для упругих шероховатых тел при упруго-пластических деформациях неровностей // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 6. С. 1020–1029.
5. Галанов Б. А. О нелинейных граничных уравнениях механики контакта упругих шероховатых тел // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 3. С. 470–474.
6. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 304 с.
7. Галин Л. А., Горячева И. Г. Контактные задачи и их приложения к теории трения и износа // Трение и износ. 1980. Т. 1. № 1. С. 105–119.

8. Горячева И. Г. Плоские и осесимметричные контактные задачи для шероховатых упругих тел // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 1. С. 99–105.
9. Горячева И. Г. Контактные задачи теории упругости для системы изнашиваемых штампов // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 6. С. 62–68.
10. Горячева И. Г. Периодическая контактная задача для упругого полупространства // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 6. С. 1036–1044.
11. Горячева И. Г. Расчет контактных характеристик с учетом параметров макро- и микрогеометрии поверхности // Трение и износ. 1999. Т. 20. № 3. С. 239–248.
12. Горячева И. Г., Добычин М. Н. Теоретические основы метода расчета жесткости стыка шероховатых тел с учетом взаимного влияния микроконтактов // Машиноведение. 1979. № 6. С. 66–71.
13. Горячева И. Г., Добычин М. Н. Оценка точности метода расчета жесткости стыка шероховатых тел с учетом взаимного влияния микроконтактов // Машиноведение. 1980. № 1. С. 70–77.
14. Горячева И. Г., Добычин М. Н. Механизм формирования шероховатости в процессе приработки // Трение и износ. 1982. Т. 3. № 4. С. 632–642.
15. Горячева И. Г., Добычин М. Н. Контактные задачи в трибологии. М.: Машиностроение, 1988. 254 с.
16. Горячева И. Г., Красник В. Г., Чекина О. Г. Сопротивление породы проникновению штампа вблизи стенки скважины // Физ.-тех. проблемы разработки полезн. ископаемых. 1992. № 1. С. 39–44.
17. Горячева И. Г., Маховская Ю. Ю. Влияние несовершенной упругости поверхностного слоя на контактные характеристики при скольжении шероховатых упругих тел // Трение и износ. 1997. Т. 18. № 1. С. 5–12.
18. Горячева И. Г., Торская Е. В. Анализ напряженного состояния тел с покрытиями при множественном характере нагружения // Трение и износ. 1994. Т. 16. № 3. С. 349–357.
19. Горячева И. Г., Торская Е. В. Периодическая контактная задача для системы штампов и упругого слоя, сцепленного с упругим основанием // Трение и износ. 1995. Т. 17. № 4. С. 642–652.
20. Горячева И. Г., Чекина О. Г. Управление формоизменением поверхностей при изнашивании // Трение и износ. 1989. Т. 10. № 1. С. 5–12.
21. Григорьев А. Я., Мышкин Н. К., Холодилов О. В. Методы анализа микрогеометрии поверхностей // Трение и износ. 1989. Т. 10. № 1. С. 138–155.
22. Демкин Н. Б. Контактное взаимодействие шероховатых поверхностей. М.: Наука, 1970. 228 с.
23. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
24. Кузнецов Е. А. Периодическая контактная задача для полуплоскости с учетом сил трения // Прикл. мех. 1976. Т. 12. № 10. С. 37–44.
25. Кузнецов Е. А., Гороховский Г. А. О фактическом контактном давлении // Проблемы трения и изнашивания. 1977. Вып. 12. С. 10–13.
26. Кузнецов Е. А., Гороховский Г. А. Влияние шероховатости на напряженное состояние тел при фрикционном взаимодействии // Прикл. мех. 1978. Т. 14. № 9. С. 62–68.
27. Кузнецов Е. А., Гороховский Г. А. Фрикционное взаимодействие шероховатых тел с позиции механики твердого тела // Трение и износ. 1980. Т. 1. № 4. С. 638–649.
28. Лонге-Хиггинс М. С. Статистическая геометрия случайных поверхностей // Гидродинамическая неустойчивость. М.: Мир, 1964. С. 124–167.
29. Мхитарян С. М., Шекян Л. А. Плоская контактная задача для двух шероховатых упругих тел // Изв. АН АрмССР. Механика. 1977. № 3. С. 15–32.

30. Маджумдар, Бхушан Фрактальная модель упругопластического контакта шероховатых поверхностей // Современное машиностроение. Сер.Б. 1991. № 6. С.12–24.
31. Найак П. Р. Применение модели случайного поля для исследования случайных поверхностей // Проблемы трения и смазки. 1971, С. 85–95.
32. Попов Г. Я., Савчук В. В. Контактная задача теории упругости при наличии круговой области контакта с учетом поверхностной структуры контактирующих тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1971. № 3. С. 80–87.
33. Свириденко А. И., Чижик С. А., Петроковец М. И. Механика дискретного фрикционного контакта. Минск: Наука і Тэхніка, 1990. 272 с.
34. Рабинович А. С. О решении контактных задач для шероховатых тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 1. С. 52–57.
35. Семенюк Н. Ф., Сиренко Г. А. Описание топографии анизотропных шероховатых поверхностей с помощью модели случайного поля. Ч.1 // Трение и износ. 1980. № 3. С. 465–471.
36. Семенюк Н. Ф., Сиренко Г. А. Описание топографии анизотропных шероховатых поверхностей с помощью модели случайного поля. Ч.2 // Трение и износ. 1980. № 5. С.815–823.
37. Семенюк Н. Ф., Сиренко Г. А. Описание топографии анизотропных шероховатых поверхностей трения с помощью модели случайного поля. Ч.3 // Трение и износ. 1980. № 6. С. 1010–1020.
38. Семенюк Н. Ф. Средняя высота микровыступов шероховатой поверхности и плотность пятен контакта при контактировании шероховатой поверхности с гладкой. // Трение и износ. 1986. № 1. С.85–91.
39. Теплый М. И. Контактные задачи для областей с круговыми границами. Львов: Вища школа, 1983. 176 с.
40. Чекина О. Г. Анализ контактирования поверхностей на основе рассмотрения полного контакта // Трение и износ. 1995. № 2. С. 205–212.
41. Чекина О. Г. Моделирование разрушения приповерхностных слоев при контактировании шероховатых тел // Прочность и пластичность. Т.1. М.: РАН, 1996. С. 186–191.
42. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М.: Гостехиздат, 1949. 270 с.
43. Borodich F. M., Onishchenko D. A. Similarity and fractality in the modeling of roughness by a multilevel profile with hierarchical structure // Int. J. Solids and Structures. 1999. V. 36. P. 2585–2612.
44. Brandt A., Lubrecht A. A. Multilevel matrix multiplication and fast solution of integral equations // J. Computational Physics. 1990. P. 348–370.
45. Chekina O. G., Keer L. M. A new approach to calculation of contact characteristics // Trans. of the ASME, J. Tribology. 1999. V. 121. P. 20–27.
46. Childs T. H. C. The persistence of asperities in indentation experiments // Wear. 1973. V. 25. P. 3–16.
47. Goryacheva I. G. Contact mechanics in tribology. Kluwer Academic Publishers, 1998. 360 p.
48. Goryacheva I. G., Dobychin M. N. Multiple contact model in the problems of tribomechanics // Tribology International. 1991. V. 24. No. 1. P. 29–35.
49. Goryacheva I. G., Sadeghi F., Nickel D. Internal stresses in contact of a rough body and a viscoelastic layered semi-infinite plane // ASME. J. Tribology. 1996. V. 118. No 1. P. 131–136.
50. Greenwood J. A., Tripp J. H. The elastic contact of rough spheres // ASME. J. Appl. Mech. Ser. E. 1967. V. 34. No 1. P. 153–159.

51. Greenwood J. A., Williamson J. B. P. Contact of nominally flat surfaces // Proc. Roy. Soc., A. 1966. V. 295. No 1442. P. 300–319.
52. Greenwood J. A. Contact of rough surfaces / Singer I. L., Pollok H. M. (eds.) Fundamentals of friction: Macroscopic and Microscopic Processes. Kluwer Academic Publishers. 1992. P. 37–56.
53. Greenwood J. A. Problems with surface roughness / Singer I. L., Pollok H. M. (eds.) Fundamentals of friction: Macroscopic and Microscopic Processes. Kluwer Academic Publishers. 1992. P. 57–76.
54. Johnson K. L., Greenwood J. A., Higginson J. G. The contact of elastic wavy surfaces // Int. J. Mech. Sci. 1985. V. 27. No 6. P. 383–396.
55. Kuznetsov Ye. A. Effect of fluid lubricant on the contact characteristics of rough elastic bodies in compression // Wear. 1985. V. 102. P. 177–194.
56. Lubrecht A. A. Ioannides E. A fast solution of dry contact problem and the associated subsurface stress field, using multilevel techniques // Trans. of the ASME. J. Tribology. 1991. V. 113. P. 128–133.
57. Majumdar A., Tien C. L. Fractal characterization and simulation of rough surfaces // Wear. 1990. V. 136. P. 313–327.
58. Mandelbrot B. B. The fractal geometry of nature. San-Fransisco: Freeman, 1982. 461 p.
59. Mao K., Bell T., Sun Y. Effect of sliding friction on contact stresses for multi-layered elastic bodies with rough surfaces // Trans. of the ASME. J. Tribology. 1997. V. 119. P. 476–480.
60. McCool J. I. Comparison of models for the contact of rough surfaces // Wear. 1986. V. 107. P. 37–60.
61. Nogi T., Kato T. Influence of a hard surface layer on the limit of elastic contact. Part 1. Analysis using a real surface model // Trans. of the ASME. J. Tribology. 1997. V. 119. P. 493–500.
62. Sayles R. C., Thomas T. R. Surface topography as a nonstationary random process // Nature. 1978. V. 271. P. 431–434.
63. Stanley H. M., Kato T. An FFT-based method for rough surface contact // Trans. of the ASME. J. Tribology. 1997. V. 119. P. 481–485.
64. Thomas T. Rough surfaces (2nd Ed.). Imperial College Press, 1999. 296 p.
65. Venner C. H., Lubrecht A. A. Numerical analysis of the influence of waviness on the flat thickness of a circular EHL contact // Trans. of the ASME. J. Tribology. 1996. V. 118. P. 153–161.
66. Warren T. L., Krajcinovic D. Random Cantor set models for the elastic-perfectly plastic contact of rough surfaces // Wear. 1996. V. 196. P. 1–15.
67. Westergaard H. M. Bearing pressure and cracks // ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1939. V. 6. No 1. P. 49–53.

§ 2. КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ С УЧЕТОМ ИЗНОСА

И. Г. Горячева, И. А. Солдатенков

Изнашивание есть удаление материала с поверхности трения вследствие ее разрушения, проявляющееся в постепенном изменении формы и размеров взаимодействующих тел. Учет изнашивания при математической постановке контактных задач позволяет определить кинетику изменения формы изношенной поверхности, распределения давлений на площадке контакта, взаимного положения контактирующих тел, а также установить продолжительность стадии приработки, когда происходит интенсивное изменение макрогеометрии контакта, т.е. ответить на ряд основных вопросов, возникающих при расчете на износ подвижных сопряжений машин.

Впервые задача о расчете износа сопряжений была поставлена и решена А.С.Прониковым в предположении абсолютной жесткости контактирующих тел [56], а затем — в предположении степенной зависимости деформационной осадки поверхностей тел от контактного давления [57]. Первая же постановка и решение контактной задачи при наличии износа для упругих тел принадлежит М. В. Коровчинскому [53].

1. При математической постановке контактных задач с износом принимают во внимание необратимое изменение формы контактирующих тел в направлении, перпендикулярном к поверхности трения. Это изменение оценивается величиной линейного износа w . В общем случае износ распределяется по поверхности трения неравномерно и является функцией координат точек поверхности (x, y) и времени t , т.е. $w = w(x, y, t)$.

Закон изнашивания, т.е. зависимость скорости изнашивания $\partial w / \partial t$ от контактного давления, скорости скольжения, микрогеометрических характеристик изнашиваемой поверхности, фрикционных параметров сопряжения, температуры и т.п., определяется прежде всего видом изнашивания (усталостное, абразивное и т.д.). В общем виде это соотношение представимо как

$$\frac{\partial w}{\partial t} = F(p, V). \quad (1)$$

Для многих видов изнашивания имеет место степенная зависимость скорости изнашивания от давления p и скорости скольжения V [55]:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = K_w p^\alpha V^\beta. \quad (2)$$

где K_w — коэффициент износа, зависящий от фрикционных и микрогеометрических характеристик изнашиваемой пары, температуры тел и т.д.

Возможны также следующие записи закона изнашивания [24, 25, 46]:

$$w = \int_0^t K_1(\tau) K_2(t - \tau) p(\tau) d\tau, \quad w = \alpha \left\{ \left[\int_0^t F(p, V) d\tau + 1 \right]^m - 1 \right\}. \quad (3)$$

Часто при постановке контактных задач с учетом формоизменения поверхностей при изнашивании является допустимым предположение о малости необратимых перемещений поверхности за счет износа $w(x, y, t)$ и

их соизмеримости с нормальными упругими перемещениями $u_z(x, y, t)$ контактирующих тел. В связи с этим при определении напряженно-деформированного состояния тела в таких случаях граничные условия относят к неизношенной поверхности, так что контактное давление $p(x, y, t)$ оказывается связанным с упругими перемещениями $u_z(x, y, t)$ в произвольный момент времени с помощью оператора A , который аналогичен оператору, связывающему контактное давление с упругими перемещениями в соответствующей контактной задаче без учета изнашивания поверхностей:

$$u_z(x, y, t) = A [p(x, y, t)]. \quad (4)$$

Так, в случае контакта без трения осесимметричного штампа с упругим полупространством оператор A имеет вид

$$A [p(r, t)] = \frac{4(1-\nu^2)}{\pi E} \int_0^{a(t)} \frac{s}{(r+s)} K \left(\frac{2\sqrt{rs}}{r+s} \right) p(s, t) ds, \quad 0 \leq r \leq a(t), \quad (5)$$

где $K(\rho)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

Как это в частности видно из (5), оператор A зависит от формы и размера области контакта Ω . В случае, когда при изнашивании область контакта изменяется, появляется соответствующая зависимость оператора A от времени t , и для определения границы Γ области контакта используются дополнительные условия, например, условие непрерывности контактного давления вида

$$p(x, y, t) \Big|_{(x, y) \in \Gamma} = 0.$$

В некоторых случаях изменение геометрии контактирующих поверхностей за счет изнашивания соизмеримо с характерным размером тел. Тогда при определении упругих перемещений уже нельзя пользоваться оператором соответствующей контактной задачи без учета изнашивания. Так обстоит дело, например, при исследовании изнашивания тонкого упругого покрытия, когда перемещения за счет износа могут оказаться соизмеримыми с толщиной покрытия. В этом случае соотношение между упругими перемещениями и контактным давлением становится нелинейным и зависит от геометрии изношенного контакта [35, 60].

Уравнения (1) и (4) дополняются условием контакта, связывающим упругие перемещения и износ с геометрическими параметрами задачи. В общем случае это условие имеет вид

$$u_z(x, y, t) + w(x, y, t) = \Phi(x, y, t), \quad (6)$$

причем функция $\Phi(x, y, t)$ зависит от формы контактирующих тел и характера их относительного перемещения. Например, при изнашивании плоского основания скользящим цилиндрическим штампом формы $g(x)$

функция $\Phi(x, t)$ имеет вид $\Phi(x, t) = D(t) - g(x)$ — при движении контртела вдоль своей образующей; $\Phi(x, t) = D(t) - g(x - Vt)$ — при движении контртела перпендикулярно к своей образующей [34, 91].

Для замыкания системы уравнений износоконтактной задачи используется условие равновесия, связывающее контактные напряжения с внешними нагрузками на взаимодействующие тела. В случае, когда трение отсутствует и единственным контактным напряжением является контактное давление, условие равновесия имеет вид

$$\iint_{\Omega(t)} p(x, y, t) \phi(x, y) dx dy = Q(t), \quad (7)$$

где Q — нагрузка, действующая по нормали к области контакта, $\phi(x, y)$ — геометрический фактор. Например, $\phi(x, y) = 1$ — для плоского контакта, $\phi(x, y) = \cos x$ — для цилиндрического контакта [60].

Решение полученной системы уравнений позволяет определить неизвестные контактные давления $p(x, y, t)$, упругие перемещения $u_z(x, y, t)$, форму изношенной поверхности, определяемую функцией $w(x, y, t)$, и сближение $D(t)$ тел за счет их деформирования и изнашивания.

2. Контактные задачи с учетом формоизменения поверхностей сводятся к системе уравнений — интегральных, дифференциальных или интегро-дифференциальных — в зависимости от моделей, используемых при постановке задачи. Система уравнений износоконтактной задачи может быть как линейной, так и нелинейной.

Линейная система получается в случае, когда имеет место линейный закон изнашивания ($\alpha = 1$ и $\beta = 1$ в соотношении (2)) и оператор A является линейным и не зависящим от времени. Это, как правило, накладывает ограничения на форму взаимодействующих тел и характер их относительных перемещений, при которых обеспечивается постоянство во времени области контакта. Заметим, что при условии $V(x, y) = \text{const}$ не требуется накладывать ограничения на значение показателя β .

Наиболее простые математические постановки возникают при использовании упрощенных моделей для описания податливости взаимодействующих тел (например, модели Винклера). При линейном законе износа задачи сводятся к задачам Коши и Гурса для линейных уравнений в частных производных. Методы решения задач этого класса изложены в монографии М. А. Галахова и П. П. Усова [18]. Одним из наиболее распространенных методов их решения является метод характеристик.

Методы решения линейных износоконтактных задач для упругих тел изложены в монографиях Л. А. Галина [20], И. Г. Горячевой и М. Н. Добычина [34], И. Г. Горячевой [91], а также в работах В. М. Александрова [1], В. М. Александрова и Е. В. Коваленко [8, 11], Е. В. Коваленко [47, 48], М. В. Коровчинского [53, 54].

Одним из наиболее распространенных методов является использование спектральных свойств интегральных операторов соответствующих контактных задач. В случае существования установившегося режима изнашивания (см. п.5) решение может быть представлено в виде

$$p(x, y, t) = p_\infty(x, y) + \varphi(x, y, t), \quad (8)$$

где $p_\infty(x, y)$ — решение системы уравнений (2), (4), (6) и (7) при $t \rightarrow \infty$. Для иллюстрации метода приведем здесь алгоритм решения при $D(t) = D_\infty t$. Неизвестная функция $\varphi(x, y, t)$ ищется методом разделения переменных

$$\varphi(x, y, t) = \psi(x, y)T(t). \quad (9)$$

Из уравнений (2), (4), (6), (7) и (8) тогда следует

$$\dot{T}(t)A[\psi(x, y)] = -K_w(x, y)V_\infty(x, y)\psi(x, y)T(t)$$

или

$$\dot{T}(t) + \lambda T(t) = 0, \quad (10)$$

$$q(x, y) - \lambda A_1[q(x, y)] = 0, \quad (11)$$

где

$$q(x, y) = K_w(x, y)V_\infty(x, y)\psi(x, y), \quad (12)$$

$$A_1[q(x, y)] = A \left[\frac{q(x, y)}{K_w(x, y)V_\infty(x, y)} \right].$$

Если A_1 — непрерывный, самосопряженный, положительно-определенный оператор, все его собственные значения λ_n положительны, а собственные функции $U_n(x, y)$ образуют полную ортонормированную систему в пространстве непрерывных функций.

Тогда, как следует из соотношений (8), (9) и (10), выражение для контактных давлений в произвольный момент времени может быть представлено в виде ряда

$$p(x, y, t) = p_\infty(x, y) + \frac{1}{K_w(x, y)V_\infty(x, y)} \sum_{n=1}^{\infty} A_n U_n(x, y) \exp(-\lambda_n t), \quad (13)$$

$$p_\infty(x, y) = \frac{D_\infty}{K_w(x, y)V_\infty(x, y)}.$$

Коэффициенты A_n находятся из разложения известной функции давления в начальный момент времени $t = 0$ в ряд по полной ортонормированной системе собственных функций $U_n(x, y)$:

$$p(x, y, 0) = p_\infty(x, y) + \frac{1}{K_w(x, y)V_\infty(x, y)} \sum_{n=1}^{\infty} A_n U_n(x, y). \quad (14)$$

Форма изношенной поверхности в произвольный момент времени находится из уравнения, полученного из (2) для $\alpha = 1$ и выражения (13):

$$w(x, y, t) = D_{\infty} t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\lambda_n} U_n(x, y) (1 - \exp(-\lambda_n t)). \quad (15)$$

Подобным методом рассмотрены задачи об изнашивании полуплоскости изогнутой балкой [19] и упругого разрезного кольца, вложенного в цилиндр [27, 28, 66, 70]. Решение последней задачи было использовано для анализа закономерностей изнашивания поршневых колец. Оператор A в этих задачах является дифференциальным. Удалось получить в явном виде выражения для собственных функций оператора и исследовать кинетику изменения контактных давлений и формы тел.

Исследованию свойств ядер интегральных операторов, возникающих в плоских контактных задачах, посвящены работы [6, 8, 11, 13, 52]. В этих работах рассмотрен контакт цилиндрического штампа, совершающего возвратно-поступательные движения вдоль своей образующей, с упругим слоем большой толщины. В [6, 8] показано, что оператор

$$A[\phi] = \int_{-1}^1 (-\ln|\xi - x| + C) \phi(\xi) d\xi,$$

соответствующий плоской контактной задаче, является самосопряженным, вполне непрерывным и положительно определенным, действующим из полного гильбертова пространства $L_2(-1, 1)$ в $L_2(-1, 1)$. Выражения для контактных давлений представлены в виде равномерно сходящихся рядов. Изучены различные случаи постановки задачи — заданных функций изменения во времени смещения штампа или приложенной к нему нагрузки, с учетом шероховатости слоя, тепловыделения при трении и т.д. Решения задач применимы к исследованию характера изнашивания плоских направляющих скольжения.

В [7, 21, 22, 26, 48] рассмотрены осесимметричные износоконтактные задачи в различных постановках для кольцевого штампа, вращающегося на границе упругого полупространства. Показано, что интегральный оператор A_1 для осесимметричных задач

$$A_1[\phi] = \frac{4(1-\nu^2)}{\pi E} \int_a^b K \left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho} \right) \frac{\phi(\rho) d\rho}{r+\rho}$$

является самосопряженным, вполне непрерывным и положительным, что позволяет представлять решение в виде разложения по ортонормированной системе собственных функций оператора A_1 . Асимптотическое выражение для контактных давлений при $t \rightarrow \infty$ имеет вид

$$p_{\infty}(r) = \frac{Q_{\infty}}{2\pi(b-a)r},$$

где Q_{∞} — асимптотическое значение нагрузки, приложенной к штампу.

В работе [87] исследована осесимметричная контактная задача для упругого полупространства, подвергнутого действию однородного осесимметричного поля начальных напряжений. Дан анализ влияния начальных напряжений на скорость изменения контактных давлений во времени.

Предложенный М. В. Коровчинским [53] метод решения линейных износоконтактных задач путем применения к основному уравнению задачи интегрального преобразования Лапласа по времени, был использован в ряде последующих работ.

В. М. Александровым [2, 3] предложена модель износа, связанного с локальным оплавлением поверхности одного из взаимодействующих и движущихся друг относительно друга упругих тел. Количество тепла, выделяемого в единицу времени в области контакта, считалось пропорциональным мощности работы сил трения. Это тепло шло на расплавление поверхностного слоя, который выжимался из-под штампа. Изучены плоская [2] и осесимметричная [3] постановки задачи. Получены линейные интегральные уравнения, для решения которых используется метод преобразования Лапласа и метод срачиваемых асимптотических разложений. В [3] для определения контактных давлений получено асимптотическое выражение, справедливое для малых времен t .

Метод срачиваемых асимптотических разложений был использован также в [47] для исследования плоской контактной задачи и анализа кинетики перераспределения давлений под штампом при $t \rightarrow 0$. В работе получено решение интегрального уравнения износоконтактной задачи на полубесконечном интервале по времени в классе непрерывных функций.

Некоторые приближенные подходы к исследованию изнашивания тел сложной формы, имеющих вытянутую область контакта, предложены в работе [16]. Задача сведена к исследованию линейных интегральных уравнений для нагрузок в различных сечениях.

Особое место среди исследований характера изнашивания контактирующих тел занимают работы, посвященные изучению изнашивания дискретного контакта [29, 30, 32, 34, 37, 91], имеющего место при трении неоднородных тел (например, композиционных материалов), тел с поверхностным микрорельефом и т.д. Обзор исследований в этом направлении, включающий как линейные, так и нелинейные постановки задач, содержится в параграфе 3 этой главы.

3. Нелинейность постановки контактной задачи с износом может быть вызвана рядом факторов, таких как изменение области контакта в результате изнашивания, нелинейность самого закона изнашивания, дополнительные условия взаимодействия — фрикционный разогрев, наличие покрытия и др. Ниже рассматриваются типичные постановки подобных нелинейных задач и описываются распространенные подходы к их решению.

При решении нелинейных износоконтактных задач широко используются численные подходы как основанные на традиционных методах, так и использующие специфические процедуры. Укажем некоторые из них.

Левая часть закона изнашивания (1) представляет собой дифференциальный или интегральный оператор по времени, тогда как правая зависит от решения контактной задачи в соответствующий момент времени. Одним из традиционных подходов к приближенному решению подобных эволюционных задач является пошаговый метод, в основе которого лежит дискретизация времени и использование конечно-разностного представления дифференциального или интегрального оператора [43]. Применительно к износоконтактным задачам пошаговый метод использовался в [24, 25, 31, 35, 39–41, 44, 49, 50, 60, 62, 72, 81–83, 86].

Один из подходов к решению износоконтактных задач с изменяющейся областью контакта состоит в отображении последней на область фиксированного размера [44, 60, 62, 85]. А именно, если x — координата, $[-a(t), a(t)]$ — область контакта, $v = da/dt$ — скорость возрастания области контакта, то определяя безразмерную координату $X = x/a$ и соответствующие распределения износа $W(X, t) = w(x, t)$ и контактного давления $P(X, t) = p(x, t)$, закон изнашивания (1) можно представить в виде

$$\frac{\partial W(X, t)}{\partial t} - v(t) \frac{X}{a(t)} \frac{\partial W(X, t)}{\partial X} = F(P(X, t)). \quad (16)$$

Левая часть (16), в отличие от исходного равенства (1), содержит дополнительную производную по X . Однако, несмотря на это, переход к фиксированной области контакта упрощает процедуру численного решения износоконтактной задачи, так как при этом можно использовать неизменяемую координатную сетку узлов и отпадает необходимость в разработке алгоритма учета новых точек, входящих в контакт.

Еще один прием, позволяющий упростить решение задач с износом при растущей области контакта, заключается в использовании в качестве временного параметра размера a области контакта [12, 39, 42, 49, 60, 62, 86]. При подобной замене $t \rightarrow a$ закон изнашивания (1) принимает вид $\partial W(X, a)/\partial a = v^{-1}(a)F(P(X, a))$. Несмотря на появление в правой части последнего равенства дополнительного множителя $v^{-1}(a)$, переход от t к a позволяет избавиться в уравнениях износоконтактной задачи от неизвестных пределов интегрирования $a(t)$, что упрощает их решение. Так, например, при замене $t \rightarrow a$ равенство (16) преобразуется в равенство

$$\frac{\partial W(X, a)}{\partial a} - \frac{X}{a} \frac{\partial W(X, a)}{\partial X} = \frac{1}{v(a)} F(P(X, t)),$$

интегрирование которого достаточно просто осуществляется по известным характеристикам дифференциального оператора в левой части [60].

В [80] решение задачи об изнашивании тонкой полосы, связанной с упругой полуплоскостью при растущей области контакта строилось с по-

мощью метода последовательных приближений. Данный метод использовался как для определения контактного давления из линейного уравнения, так и для решения нелинейного уравнения относительно скорости роста области контакта.

При решении износоконтактных задач для цилиндрических сопряжений эффективным оказывается приближенное представление контактного давления в виде тригонометрического полинома [81–83, 85, 86]. Например,

$$p(x, t) = \sum_{k=1}^N \lambda_k(t) \sin kx.$$

Подстановка подобного выражения в систему интегро-дифференциальных уравнений (1), (4), (6), (7) приводит к более простой системе обыкновенного дифференциального и нелинейного алгебраического уравнений. Данный подход позволяет достаточно просто учесть такие факторы, как нелинейность закона изнашивания, наличие трения, одновременное изнашивание контртел.

4. Для решения нелинейных износоконтактных задач оказывается возможным использование асимптотических подходов.

Описанный в [9, 10, 46] подход к решению износоконтактных задач с нелинейным законом изнашивания и растущей областью контакта использует для контактного давления асимптотическое разложение вида

$$p(x, t) = p_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} p_k(x, t). \quad (17)$$

Для нахождения неизвестных величин в разложении (17) предлагается рекуррентная процедура, в результате которой для p_k получается последовательность уравнений, линейных относительно p_k , но нелинейных относительно уже найденных функций p_i , $i < k$. В [46] с помощью разложения типа (17) получено следующее приближенное решение износоконтактной задачи для подшипника скольжения при $t \rightarrow 0$:

$$q(x, t) = q_0(x) + (A_0 \epsilon)^{-1} \{ [q_0(x)]^m - 4\delta_1 \cos x \} t^m, \\ q_0(x) = \frac{4\Delta}{A_0 \epsilon} \left[1 - \frac{\cos x}{\cos a} \right],$$

где A_0 , λ_1 , δ_1 , ϵ , Δ — известные параметры сопряжения, m — показатель нелинейности в законе изнашивания (3).

Подобным образом в [42] искомое контактное давление представлялось суммой вырожденного решения и решения типа погранслоя. Для получения уравнений, которым должны удовлетворять эти слагаемые, используется прием, обобщающий на случай нелинейных уравнений известную процедуру Вишика–Люстерника.

Замена контактного давления его средним значением $Q/(2a)$ в слагаемых, содержащих малую величину p/E , позволяет произвести линеаризацию исходных уравнений с нелинейным законом изнашивания (1) [12, 42].

Асимптотический анализ задачи об изнашивании полуплоскости при $t \rightarrow 0$ выполнен в [67] на основе представления контактного давления в виде суммы начального распределения и относительно малой поправки, вызванной износом. В результате установлено наличие особенности в скорости роста области контакта в начальный момент изнашивания.

5. Ряд подходов к расчету изнашивания подвижных сопряжений основывается на асимптотических свойствах решения соответствующих износоконтактных задач.

По мере изнашивания упругие перемещения контактирующих поверхностей обычно остаются ограниченными, тогда как износ монотонно растет. Это обстоятельство позволяет при достаточно развитом износе пренебречь в условии контакта (6) упругими перемещениями и тем самым перейти к модели изнашивания жестких тел А. С. Проникова [56, 58, 59]. Использование такого приближения позволяет рассчитать форму изношенных поверхностей [89] и получить ряд аналитических зависимостей, характеризующих процесс изнашивания. Например, в [86] получена следующая зависимость суммарного износа I радиального подшипника скольжения от половины угла контакта a :

$$I = 2R\Delta(\operatorname{tg} a - a),$$

где R и Δ — радиус и зазор подшипника.

Другое свойство решения износоконтактной задачи, позволяющее строить приближенные аналитические зависимости, состоит в том, что распределение по области контакта скорости изнашивания в направлении сближения тел при определенных условиях стремится по мере изнашивания принять постоянное значение. Соответственно, распределение контактного давления также стремится принять определенное установившееся распределение p_∞ , зависящее от геометрии сопряжения, характера относительных перемещений взаимодействующих тел и закона изнашивания [29, 34–37, 60–62, 72, 88, 91, 92]. На рис. 1, а приведена схема контакта цилиндрического штампа с плоским основанием ширины $2a$ и упругого покрытия начальной толщины h_0 , сцепленного с упругой полуплоскостью и изнашиваемого при возвратно-поступательных перемещениях штампа вдоль своей образующей. Рис. 1, б иллюстрирует характер распределения безразмерных давлений \bar{p} и изменения безразмерной толщины покрытия h/a в различные моменты безразмерного времени: $\tau = 0$ (кривые 1), $\tau = 0,15$ (кривые 2) и $\tau = 0,64$ (кривые 3) [35]. В процессе изнашивания контактные давления выравниваются и стабилизируется форма изношенной поверхности, т.е. реализуется установившийся режим изнашивания. Однако, следует отметить, что для очень тонких покрытий установившийся

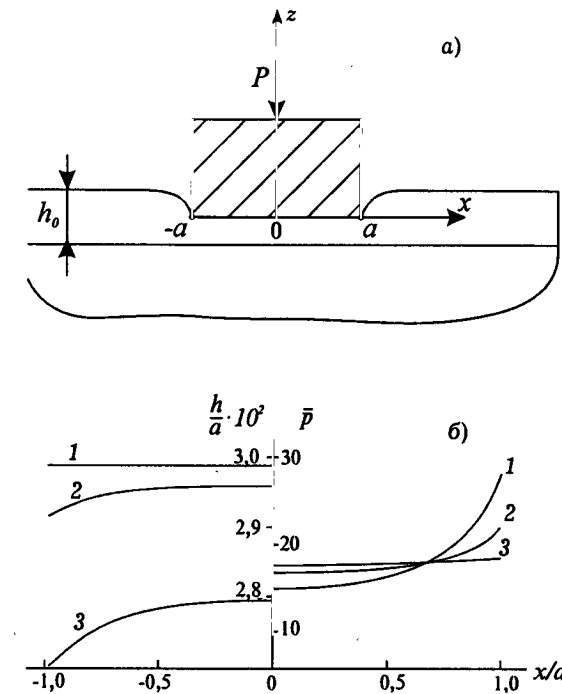


Рис. 1

режим в рассматриваемом сопряжении может и не наступить вследствие полного износа покрытия [35].

Для подшипника скольжения при постоянной внешней нагрузке и степенном законе изнашивания (2) имеет место выражение [61]

$$p_\infty(x, a) = Q (RC_\alpha(a)) \cos^{1/\alpha} x, \quad C_\alpha(a) = 2 \int_0^a \cos^{1/\alpha} x \, dx.$$

Необходимым условием существования установившегося режима изнашивания является стабилизация во времени внешних параметров задачи (скорости сближения $\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{D}(t) = D_\infty$ взаимодействующих тел или нормальной нагрузки $\lim_{t \rightarrow +\infty} Q(t) = Q_\infty$, скорости относительного скольжения тел $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(x, y, t) = V_\infty(x, y)$, области контактного взаимодействия $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Omega(t) = \Omega_\infty$ и т.д.). При этих условиях и в предположении независимости от времени оператора A (4) в [29, 37, 91] сформулированы достаточные условия существования асимптотически устойчивого распределения

давления $p_\infty(x, y) = \lim_{t \rightarrow +\infty} p(x, y, t)$

$$p_\infty(x, y) = \left[\frac{D_\infty}{K_w(x, y)V^\beta(x, y)} \right]^{1/\alpha}$$

как для линейного, так и для нелинейного закона изнашивания (2). Если $Q_\infty = 0$ или $D_\infty = 0$, контактное давление стремится к нулю, т.е. $p_\infty(x, y) = 0$.

Замена контактного давления известным распределением p_∞ в равенствах (4), (6), (7) определяет асимптотику величин u_z , w , Q и, тем самым, позволяет рассчитать форму изношенной поверхности тел и скорость изнашивания в установившемся режиме.

Работа сопряжения в установившемся режиме изнашивания является наиболее благоприятной, поскольку она характеризуется стабилизацией давления и, следовательно, всех характеристик сопряжения (давление в данном случае является управляющим параметром). Поэтому часто ставится задача оптимизации процесса износа за счет приближения его начальных характеристик к стационарным. Некоторые задачи оптимизации изнашивания поверхностей рассмотрены в [37, 91].

Следует отметить, что упомянутое выше для упругой износостойкой задачи свойство распределения скорости изнашивания в направлении сближения тел становится постоянным представляет собой основное соотношение для расчета изнашивания жестких тел [56], поэтому соответствующая асимптотика решения упругой износостойкой задачи совпадает с решением задачи об изнашивании жестких тел той же геометрии.

В работе [64] на основе указанного выше свойства контактного давления принимать распределение p_∞ установлена возможность использования более простой модели Винклера упругих свойств покрытия с неизменным коэффициентом податливости.

6. Одна из распространенных постановок износостойкой задачи касается расчета изнашивания при наличии поверхностного слоя — тонкое покрытие, шероховатость. Упругие свойства такого слоя обычно описываются моделью Винклера, согласно которой его упругая осадка \hat{u}_z пропорциональна некоторой степени контактного давления: $\hat{u}_z = kp^\lambda$. Условие контакта (6) в этом случае содержит дополнительное слагаемое \hat{u}_z в левой части [1, 9, 10, 17, 35, 46, 51, 60, 84]. Задача об изнашивании поверхности с шероховатостью, податливость которой линейно связана с контактным давлением, рассматривалась в [1, 23].

В случае, когда слой представляет собой тонкое покрытие постоянной толщины h_0 , его осадка в плоской постановке задачи определяется [14] выражением

$$\hat{u}_z = Bh_0p, \quad B = (1 - 2\nu)(1 + \nu)/(1 - \nu)/E. \quad (18)$$

Это выражение для изнашиваемого покрытия может использоваться только на начальной стадии изнашивания, когда изменением его толщины можно пренебречь. Для сильно изношенного покрытия более корректным является использование выражения [12, 35, 60, 88]

$$\hat{u}_z = Bh_p, \quad h = h_0 - w, \quad (19)$$

обоснование которому дано в [73, 77]. Подобное выражение для \hat{u}_z содержит произведение неизвестных величин h и p , и поэтому его использование делает систему уравнений износостойкой задачи нелинейной, решение которой может быть найдено приближенно.

В [63, 69] предложен метод качественного анализа процесса изнашивания покрытия, осадка которого нелинейным образом связана с контактным давлением: $\hat{u}_z = h\Pi(p)$. Для скорости изменения контактного давления было получено выражение

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{h(x, y)\Pi'(p(x, t))} [\bar{\varphi}(t) - \varphi(p(x, t))],$$

где $\varphi(p) = F(p)(1 - \Pi(p))$, $\bar{\varphi} = \varphi(p(\bar{x}, t))$, \bar{x} — некоторая точка области контакта, $F(p)$ — функция закона изнашивания. Это выражение позволяет предсказывать эволюцию контактного давления. В частности, можно показать, что, в зависимости от вида функции $\varphi(p)$ и начального распределения контактного давления, последнее может при изнашивании как выравниваться по области контакта, так и постепенно возрастать, приводя к катастрофическому износу на некоторых участках области контакта.

7. Дополнительную нелинейность в уравнения износостойкой задачи вносят различные усложнения свойств изнашиваемых тел. В [88] рассматривается износ двуслойного покрытия в подшипнике скольжения, упругая осадка которого представляется суммой осадок винклеровского типа составляющих слоев. С помощью функции

$$\psi(x, t) = |h_1 - w(x, t)|/(h_1 - w(x, t))$$

учитывается момент полного изнашивания в точке x верхнего слоя толщины h_1 , в результате чего уравнения задачи удается представить формально в том же виде, что и для однородного покрытия, и использовать для их решения соответствующие методы. Аналогичный результат был получен в [71] для покрытия с переменными по глубине y упругими и износостойкими свойствами, путем использования интегрального коэффициента податливости из (19):

$$\hat{u}_z(x, t) = \bar{B}(x, t)h(x, t)p(x, t), \quad \bar{B}(x, t) = \frac{1}{h(x, t)} \int_0^{h(x, t)} B(y) dy.$$

Анализ процесса изнашивания пористо-упругого покрытия приводит к необходимости рассмотрения нелинейной зависимости осадки покрытия от давления [45, 50]:

$$\hat{u}_z(x, t) = A_1 p(x, t) + A_2 \int_{t^*(x)}^t k(t - \tau) p(x, \tau) d\tau,$$

где $t^*(x)$ — время достижения границей области контакта точки x . Решение уравнений задачи с подобной зависимостью строится численно пошаговым методом.

В [39, 49] износ тонкого покрытия увязывается с его оплавлением в результате фрикционного разогрева. А именно, считается, что $\partial w / \partial t = k q_0$, где q_0 — избыточное количество тепла, определяемое, в частности, контактным давлением и размером $a(t)$ области контакта. В результате в уравнениях задачи появляется дополнительный интегральный оператор, зависящий от функции $a(t)$. Решение таких уравнений строится численно пошаговым методом.

Износоконтактная задача с учетом дополнительных тепловых перемещений границ трущихся тел рассматривается в [41]. Полученные уравнения включают в себя интегральные члены наследственного типа, обусловленные износом и фрикционным разогревом. Нелинейное интегральное уравнение наследственного типа относительно контактного давления было также получено в [5] для контактной задачи с фрикционным разогревом покрытий при достаточно общих предположениях о трибосвойствах сопряжения.

Учет пластического деформирования поверхности при ее изнашивании вращающимся осесимметричным контртелом в точке его первоначального касания произведен в [44] с помощью пошагового метода. Расчет изнашивания контртела средой со сложными деформационными свойствами, обусловленными ее неупругостью и разрушением, представлен в [38, 90].

8. Существует ряд постановок нелинейных износоконтактных задач, допускающих решение в квадратурах.

При изнашивании поверхности с растущей областью контакта разные точки этой поверхности приходят в контакт с контртелом в разное время. Это приводит к тому, что нижний предел интегрирования равенства (1) по времени следует полагать зависящим от координаты изнашиваемой поверхности. С учетом данного обстоятельства в [12, 17, 34, 84] были получены точные решения задачи об изнашивании в предположении, что упругие свойства контактирующих тел описываются моделью Винклера (18), а закон изнашивания (1) является линейным по контактному давлению p . При использовании более сложной классической модели упругих тел решение износоконтактной задачи с изменяющейся областью контакта возможно только в приближенном виде [24, 62, 85, 86].

Еще один класс износоконтактных задач с нелинейными уравнениями связан с рассмотрением изнашивания поверхности движущимся по ней контртелом в предположении, что распределение контактного давления в связанной с контртелом системе координат постоянно во времени [65, 78, 79]. Контактное давление p в подобных постановках определяется из линейного уравнения типа (6) различными способами. Так в [65] используется метод Н. И. Мухелишвили обращения сингулярного интегрального уравнения, и для p получается выражение

$$p(x) = C(a + x)^{1/2-\theta} (b - x)^{1/2+\theta},$$

где C и $\theta \in (-1/2, 1/2)$ — параметры задачи, тогда как в [79] — контактное давление находится с помощью метода последовательных приближений. Полученное тем или иным образом выражение для контактного давления затем подставляется в условие равновесия, в результате чего получается нелинейное алгебраическое уравнение для неизвестного размера области контакта.

9. В трибологии давно известно явление неравномерного изнашивания материалов, которым в той или иной мере присуща структурная неоднородность. Такими свойствами обладают композиционные и неоднородные материалы, а также материалы, поверхности которых подвергнуты локальному упрочнению (лазерная обработка, ионная имплантация и т. д.). Коэффициент износостойкости таких поверхностей является функцией координат точки поверхности. При изнашивании этих материалов наиболее интенсивному разрушению подвергается менее прочная (чаще всего более мягкая) структура, в результате чего первоначально ровная рабочая поверхность становится волнистой. Образование такой эксплуатационной волнистости при некоторых условиях трения способствует повышению триботехнических свойств сопряжений.

Для исследования изнашивания неоднородных поверхностей применимы те же математические постановки и методы решения контактных задач, что и для однородных поверхностей.

Рассмотрим задачу изнашивания упругого полупространства бесконечным штампом с плоским основанием. Уравнение износа имеет вид (2), в котором коэффициент износа является функцией координат точки поверхности, т. е. $K_w = K_w(x, y)$. Система уравнений для анализа изменения контактных давлений во времени и формоизменения поверхности полупространства имеет вид (2), (4), (6), (7).

При выполнении условий существования установившегося режима изнашивания, сформулированных в п. 5, установившаяся форма $f_\infty(x, y)$ изношенной поверхности упругого полупространства определяется [91]

выражением

$$f_{\infty}(x, y) = A[p_{\infty}(x, y)] = A \left[\left(\frac{(p^*)^{\alpha} (V^*)^{\beta} D_{\infty}}{K_w(x, y) V^{\beta}(x, y)} \right)^{1/\alpha} \right], \quad (20)$$

где p^* , V^* — характерные значения давления и скорости, а оператор A имеет вид

$$A[p(x, y, t)] = \frac{(1-\nu^2)}{\pi E} \int_{\Omega} \int p(x', y', t) \varphi(x', y', x, y) dx' dy', \quad (21)$$

$$\varphi(x', y', x, y) = \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2]^{1/2}}. \quad (22)$$

Таким образом, установившаяся форма зависит от коэффициента износа $K_w(x, y)$ и характера движения штампа, т. е. функции $V(x, y)$.

В [4] предложен метод решения плоской контактной задачи для упругой полуплоскости, коэффициент износа которой является периодической функцией, который основан на представлении искомым функций в виде степенных рядов по малому временному параметру.

В [33, 34, 36, 91] изучен характер изнашивания полупространства при различных видах функции $K_w(x, y)$. Отметим, что для неоднородных и неоднородно упрочненных поверхностей, как правило, функция $K_w(x, y)$ принадлежит к классу кусочно-постоянных функций и имеет вид

$$K_w(x, y) = \begin{cases} K_{w1}, & (x, y) \in \Omega - \omega, \\ K_{w2}, & (x, y) \in \omega, \end{cases} \quad (23)$$

где ω — совокупность упрочненных зон (поверхность полупространства, характеризуемая коэффициентом износа K_{w2}), $\Omega \setminus \omega$ — неупрочненная поверхность полупространства (характеризуемая коэффициентом износа K_{w1} , $K_{w1} > K_{w2}$).

Анализ решения периодических задач для упругого полупространства, поверхность которого упрочнена внутри полос или круговых зон, задающих область ω , показал [33, 34, 36], что при изнашивании поверхность становится волнистой. На рис. 2 показана схема упрочнения и форма изношенной поверхности полупространства внутри одного периода в случае его упрочнения внутри круговых зон радиуса a . Исходная форма поверхности изнашиваемого тела плоская. При изнашивании давление стремится к кусочно-постоянной функции, а на поверхности образуются впадины. Геометрические характеристики изношенной поверхности зависят от соотношения коэффициентов износа отдельных ее участков и их характерных размеров. Скорость изнашивания такой поверхности также зависит от параметров упрочнения.

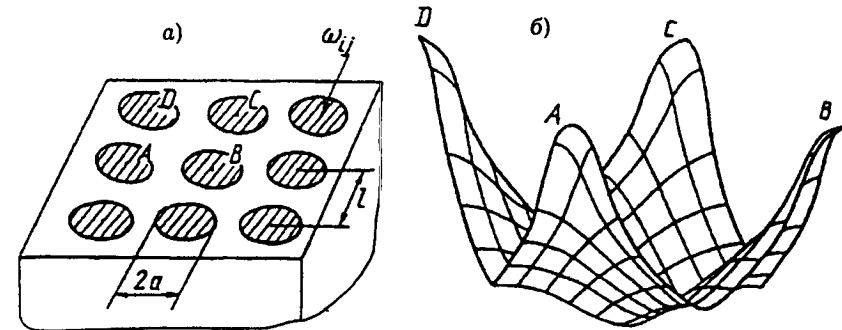


Рис. 2

Изложенный выше подход применим к анализу формоизменения при изнашивании ограниченного упругого тела, поверхность которого подвергнута локальному упрочнению внутри областей различной конфигурации [36, 91], а также при изучении процесса полирования однородных и неоднородных поверхностей [92].

10. Рассмотренные выше постановки износоконтактных задач предполагали детерминированное задание условий взаимодействия. В [15, 68, 74–76] рассматривается методика расчета изнашивания подвижных сопряжений в условиях стохастического взаимодействия, т. е. когда набор ω параметров взаимодействия является случайным с функцией плотности вероятности ρ . При локальном законе изнашивания вида (1) скорость среднего износа определяется равенством

$$\frac{\partial \bar{w}(x, t)}{\partial t} = \int_{\{\omega\}} F(p(x, t; \omega), V(x, t; \omega)) \rho(\omega, t) d\omega, \quad (24)$$

в котором функции $p(x, t; \omega)$, $V(x, t; \omega)$ находятся из решения соответствующих контактной и кинематической задач.

При достаточно большой дисперсии набора ω область изношенной поверхности, определяемая из (24), намного превосходит возможные размеры области контакта. Это позволяет для определения контактного давления $p(x, t; \omega)$ использовать известные решения контактной задачи для тел канонической формы [74, 76].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В. М. О постановке плоских контактных задач теории упругости при износе взаимодействующих тел // Докл. АН СССР. 1983. Т. 271. № 4. С. 827–831.
2. Александров В. М. Контактная задача с учетом износа, вызванного локальным оплавлением // Физико-химическая механика материалов. 1986. № 1. С. 116–124.

3. Александров В. М. Осесимметричная контактная задача об износе оплавлением // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 6. С. 36–42.
4. Александров В. М. Периодическая контактная задача для упругого слоя с учетом трения и износа // Современные проблемы механики сплошной среды. Ростов-на-Дону: Изд-во МП Книга, 1995. С. 14–18.
5. Александров В. М. О термосиловом взаимодействии деформируемых покрытий тел с учетом износа // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1995. № 5. С. 70–75.
6. Александров В. М., Галин Л. А., Пириев Н. П. Плоская контактная задача при наличии износа для упругого слоя большой толщины // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 4. С. 60–67.
7. Александров В. М., Коваленко Е. В. Осесимметричная контактная задача для линейно-деформируемого основания общего типа при наличии износа // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 5. С. 58–66.
8. Александров В. М., Коваленко Е. В. Плоские контактные задачи теории упругости для неклассических областей при наличии износа // ПМТФ. 1980. № 3. С. 163–172.
9. Александров В. М., Коваленко Е. В. К теории контактных задач при наличии нелинейного износа // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 4. С. 98–108.
10. Александров В. М., Коваленко Е. В. К вопросу об изнашивании сопряжения вал-втулка // Трение и износ. 1982. Т. 3. № 6. С. 1016–1025.
11. Александров В. М., Коваленко Е. В. Математические методы в контактных задачах с износом // Нелинейные модели и задачи механики деформируемого твердого тела. М.: Наука. 1984. С. 77–89.
12. Александров В. М., Коваленко Е. В. Аналитическое решение контактной задачи об изнашивании сопряжения вал-втулка // Трение и износ. 1987. Т. 8. № 6. С. 985–995.
13. Александров В. М., Манжиров А. В. О двумерных интегральных уравнениях в прикладной механике деформируемых твердых тел // ПМТФ. 1987. № 5. С. 146–152.
14. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.
15. Богданов В. М., Горячев А. П., Горячева И. Г., Добычин М. Н., Захаров С. М., Кривоногов В. Г., Солдатенков И. А., Чекина О. Г. Моделирование процессов контактирования, изнашивания и накопления повреждений в сопряжении колеса-рельс // Трение и износ. 1996. Т. 1. № 1. С. 12–26.
16. Бурмистров А. Н. Контактные задачи теории упругости для узких областей с учетом износа // ПМТФ. 1990. № 4. С. 68–76.
17. Галахов М. А., Усов П. П. О расчете износа и толщины смазочного слоя в подшипниках скольжения с тонким вкладышем // Трение и износ. 1984. Т. 5. № 2. С. 239–250.
18. Галахов М. А., Усов П. П. Дифференциальные и интегральные уравнения математической теории трения. М.: Наука, 1990. 278 с.
19. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости при наличии износа // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 6. С. 981–989.
20. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
21. Галин Л. А., Горячева И. Г. Осесимметричная контактная задача теории упругости при наличии износа // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 5. С. 807–812.

22. Галин Л. А., Горячева И. Г. Контактные задачи теории упругости при наличии износа // Теория трения, износа и проблемы стандартизации. Брянск: Приокское изд-во. 1978. С. 251–265.
23. Гавриков М. В. Решение плоской контактной задачи для тел с тонкими и мягкими покрытиями с использованием наследственно-стареющей модели изнашивания // Трение и износ. 1990. Т. 11. № 5. С. 818–823.
24. Гавриков М. В., Мазинг Р. И. Наследственно-стареющая модель изнашивания и ее применение к задачам с монотонно растущей зоной контакта // Трение и износ. 1988. Т. 9. № 2. С. 274–279.
25. Гавриков М. В., Мазинг Р. И. Применение наследственно-стареющей модели изнашивания к осесимметричной задаче // Трение и износ. 1989. Т. 10. № 6. С. 981–986.
26. Горячева И. Г. Об одном методе решения контактных задач теории упругости при наличии износа // Актуальные проблемы механики деформируемых сред. Днепропетровск: Изд-во ДГУ, 1979. С. 79–84.
27. Горячева И. Г. Контактная задача при наличии износа для кольца, вложенного в цилиндр // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 2. С. 363–367.
28. Горячева И. Г. Расчетная оценка износа поршневых колец двигателей внутреннего сгорания // Теория и практика расчетов деталей машин на износ. М.: Наука, 1983. С. 123–128.
29. Горячева И. Г. Контактные задачи теории упругости для системы изнашиваемых штампов // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 6. С. 62–68.
30. Горячева И. Г., Добычин М. Н. Механизм формирования шероховатости в процессе приработки // Трение и износ. 1982. Т. 3. № 4. С. 632–642.
31. Горячева И. Г., Добычин М. Н. Кинетика изнашивания ТСП цапфы подшипника скольжения // Трение и износ. 1984. Т. 5. № 4. С. 581–588.
32. Горячева И. Г., Добычин М. Н. Приработка рабочих поверхностей на микро- и макроуровне // Трение, износ и смазочные материалы. М.: Изд-во АН СССР, 1985. С. 210–214.
33. Горячева И. Г., Добычин М. Н. Изнашивание неоднородно упрочненных поверхностей // Трение и износ. 1986. Т. 7. № 6. С. 985–992.
34. Горячева И. Г., Добычин М. Н. Контактные задачи в трибологии. М.: Машиностроение, 1988. 256 с.
35. Горячева И. Г., Солдатенков И. А. Теоретическое исследование приработки и установившегося режима изнашивания твердых смазочных покрытий // Трение и износ. 1983. Т. 4. № 3. С. 420–431.
36. Горячева И. Г., Торская Е. В. Контактные задачи при наличии износа для тел с переменным по поверхности коэффициентом износостойкости // Трение и износ. 1992. Т. 13. № 1. С. 185–194.
37. Горячева И. Г., Чекина О. Г. Управление формоизменением поверхностей при изнашивании // Трение и износ. 1989. Т. 10. № 1. С. 5–12.
38. Горячева И. Г., Чекина О. Г. Моделирование изнашивания бурового инструмента // Энергодиагностика. М.: РАО Газпром, 1995. Т. 3. С. 195–207.
39. Евтушенко А. А., Коваленко Е. В. Контактная задача об износе оплавлением вкладыша подшипника скольжения // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 1. С. 148–156.
40. Евтушенко А. А., Кульчицкий-Жигайло Р. Д. Учет изнашивания при взаимном скольжении тел // Трение и износ. 1995. Т. 16. № 2. С. 213–217.
41. Евтушенко А. А., Паук В. И. Взаимодействие фрикционного разогрева и износа на нестационарном контакте скольжения // Трение и износ. 1994. Т. 15. № 2. С. 186–195.

42. *Иваночкин П. Г., Коваленко Е. В.* Расчет изнашивания двухслойного вкладыша радиального подшипника скольжения // Трение и износ. 1990. Т. 11. № 4. С. 622–629.
43. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
44. *Качалкин А. Ю., Мазинг Р. И.* Контактная задача для цилиндрического тела с учетом износа // Машиноведение. 1988. № 3. С. 49–51.
45. *Коваленко Е. В.* Расчет износа подшипника скольжения с тонким пористо-упругим вкладышем // ПМТФ. 1991. № 5. С. 163–168.
46. *Коваленко Е. В.* К расчету изнашивания сопряжения вал-втулка // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 6. С. 66–72.
47. *Коваленко Е. В.* Об интегральном уравнении контактных задач теории упругости при наличии абразивного износа // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 5. С. 868–873.
48. *Коваленко Е. В.* Исследование осесимметричных контактных задач об изнашивании пары кольцевой штамп - упругое шероховатое полупространство // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 5. С. 836–843.
49. *Коваленко Е. В., Евтушенко А. А.* Износ подшипника скольжения с учетом тепловыделения от трения // Трение и износ. 1993. Т. 14. № 2. С. 259–269.
50. *Коваленко Е. В.* Контактная задача об износе сферического подшипника скольжения с тонким пористо-упругим вкладышем // Трение и износ. 1994. Т. 15. № 4. С. 549–557.
51. *Коваленко Е. В., Теплый М. И.* Контактные задачи при нелинейном законе изнашивания для тел с покрытиями // Трение и износ. 1983. Т. 4. № 3. С. 440–448 (часть 1); № 4. С. 676–682 (часть 2).
52. *Комогорцев В. Ф.* Контакт движущегося штампа с упругой полуплоскостью при наличии ее износа // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 2. С. 321–325.
53. *Коровчинский М. В.* Локальный контакт упругих тел при изнашивании их поверхностей // Контактное взаимодействие твердых тел и расчет сил трения и износа. М.: Наука. 1971. С. 130–140.
54. *Коровчинский М. В.* Теория эксперимента на изнашивание при локальном линейном контакте // Машиноведение. 1985. № 1. С. 98–105.
55. *Крагельский И. В., Добычин М. Н., Камбалов В. С.* Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977. 576 с.
56. *Проников А. С.* Классификация и расчет сопряжений деталей машин на изнашивание // Трение и износ в машинах. М.: Изд-во АН СССР. 1956. Вып. 11. С. 121–181.
57. *Проников А. С.* Контактная задача для сопряженных поверхностей деталей машин // Трение и износ в машинах. М.: Изд-во АН СССР. 1962. Вып. 15. С. 375–391.
58. *Проников А. С.* Надежность машин. М.: Машиностроение, 1978. 592 с.
59. *Проников А. С.* Макротрибология и ее задачи // Трение и износ. 1998. Т. 19. № 2. С. 155–164.
60. *Солдатенков И. А.* Изнашивание тонкого упругого покрытия при изменяющейся площадке контакта // Трение и износ. 1985. Т. 6. № 2. С. 247–254.
61. *Солдатенков И. А.* Установившийся режим при изнашивании тонкого упругого покрытия в радиальном подшипнике скольжения // Трение и износ. 1986. Т. 7. № 4. С. 452–459.
62. *Солдатенков И. А.* Изнашивание покрытий в упругих сопряжениях при изменяющейся площадке контакта // Трение и износ. 1987. Т. 8. № 2. С. 206–213.
63. *Солдатенков И. А.* О неустойчивом режиме при изнашивании тонкого покрытия // Трение и износ. 1988. Т. 9, № 1. С. 106–110.

64. *Солдатенков И. А.* Об одном следствии установившегося режима для изнашиваемых покрытий // Трение и износ. 1988. Т. 9. № 4. С. 636–641.
65. *Солдатенков И. А.* Задача об изнашивании полуплоскости дисковым контртелом // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 6. С. 107–110.
66. *Солдатенков И. А.* Контактная задача при наличии износа для поршневого кольца в условиях нестационарного нагружения // Трение и износ. 1989. Т. 10. № 3. С. 422–427.
67. *Солдатенков И. А.* Об особенности скорости изменения размера области контакта при изнашивании контактирующих тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 4. С. 44–49.
68. *Солдатенков И. А.* Расчет изнашивания покрытия в подшипнике скольжения при случайном нагружении // Трение и износ. 1990. Т. 11. № 4. С. 615–621.
69. *Солдатенков И. А.* Об особенностях поведения контактного давления при изнашивании покрытия // Трение и износ. 1990. Т. 11. № 6. С. 973–978.
70. *Солдатенков И. А.* Задача об изнашивании поршневого кольца с расширителем при действии внешнего давления // Трение и износ. 1991. Т. 12. № 1. С. 39–45.
71. *Солдатенков И. А.* К анализу процесса изнашивания многослойного покрытия // Трение и износ. 1991. Т. 12. № 2. С. 204–209.
72. *Солдатенков И. А.* Теоретическое исследование процесса изнашивания покрытия скользящим индентором // Трение и износ. 1991. Т. 12. № 4. С. 645–652.
73. *Солдатенков И. А.* Приближенное решение задачи теории упругости для полосы переменной ширины // Изв. АН СССР. МТТ. 1992. № 2. С. 48–57.
74. *Солдатенков И. А.* К расчету на износ сферического шарнира при случайном нагружении // Трение и износ. 1992. Т. 13. № 2. С. 265–270.
75. *Солдатенков И. А.* К расчету износа нитепроводника при случайном взаимодействии с ним нити // Трение и износ. 1992. Т. 13. № 4. С. 601–610.
76. *Солдатенков И. А.* Расчет износа плоской поверхности при случайном взаимодействии с ней сферического индентора // Трение и износ. 1992. Т. 13. № 6. С. 965–972.
77. *Солдатенков И. А.* Асимптотический анализ решения задачи теории упругости для полосы переменной ширины // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 6. С. 57–73.
78. *Солдатенков И. А.* Теоретический анализ изнашивания вязкоупругого покрытия винклеровского типа // Трение и износ. 1996. Т. 17. № 3. С. 331–339.
79. *Солдатенков И. А.* Приближенное решение задачи об изнашивании тонкой полосы связанной с упругой полуплоскостью // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 1. С. 48–55.
80. *Солдатенков И. А.* Решение контактной задачи для композиции полоса-полуплоскость при наличии изнашивания с изменяющейся областью контакта // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 2. С. 78–88.
81. *Теплый М. И.* Определение износа в паре трения вал-втулка // Трение и износ. 1983. Т. 4. № 2. С. 249–257.
82. *Теплый М. И.* Контактная задача для упругих тел с круговыми границами при наличии износа // Докл. АН УССР. 1983. А. № 9. С. 37–41.
83. *Теплый М. И.* Контактная задача теории упругости для цилиндрических тел при наличии износа // Прикл. мех. (Киев). 1983. Т. 19. № 12. С. 92–97.
84. *Теплый М. И.* Определение контактных параметров и износа в цилиндрических опорах скольжения // Трение и износ. 1987. Т. 8. № 5. С. 895–902.
85. *Усов П. П., Дроздов Ю. Н., Николашев Ю. Н.* Теоретическое исследование напряженного состояния пары вал-втулка с учетом износа // Машиноведение. 1979. № 2. С. 80–87.

86. Усов П. П. Внутренний контакт цилиндрических тел близких радиусов при изнашивании их поверхностей // Трение и износ. 1985. Т. 6. № 3. С. 404–414.
87. Филиппова Л. М. Осесимметричная контактная задача для предварительно напряженного упругого тела при наличии износа // Изв. Сев-Кавк. научного центра высшей школы. Естеств. науки. 1992. № 1. С. 31–35.
88. Черский И. Н., Богатин О. Б., Сокольникова Л. Г. Расчет эксплуатационных характеристик антифрикционных втулок и покрытий при сильном износе // Трение и износ. 1986. Т. 7. № 1. С. 99–107.
89. Шульц В. В. Форма естественного износа деталей машин и инструмента. Л.: Машиностроение, 1990. 206 с.
90. Checkina O. G., Goryacheva I. G., Krasnik V. G. The model for tool wear in rock cutting // Wear. 1996. V. 198. P. 33–38.
91. Goryacheva I. G. Contact Mechanics in Tribology. Dordrecht-Boston-London.: Kluwer Academic Publishers, 1998. 360 p.
92. Chekina O. G., Keer L. M. Wear-contact problems and modeling of chemical mechanical polishing // J. of the electrochemical society. 1998. V. 145. No. 6. P. 2100–2106.

§3. КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЕЛ С ПОКРЫТИЯМИ

Е. В. Коваленко

Дается обзор работ, посвященных решению смешанных задач механики сплошных сред для тел с покрытиями. Такие исследования актуальны при создании методов расчета фундаментов и оснований, дорожных и аэродромных покрытий, ледовых переправ, гидротехнических сооружений, клеевых соединений, композиционных материалов, в связи с задачами тензометрии, в инженерной практике, при изучении вопросов трения и износа и т.д. Обсуждаются проблемы: 1) моделирования физико-механических свойств покрытий; 2) контакта жестких или упругих тел с линейно-деформируемыми основаниями, армированными тонкими покрытиями; 3) износа и долговечности покрытий.

1. На практике обычно проблема о передаче нагрузки на массивные тела через тонкостенные элементы (покрытия) сводится к исследованию деформации плит (пластин), лежащих на линейно-деформируемом основании [23, 45, 57, 74, 76, 80]. Следует отметить, что выбор механической модели для описания свойств покрытия играет большое значение. Так, например, в случае, когда сдвиговая жесткость покрытия меньше жесткости основания, классические теории Кирхгофа–Лява и Рейсснера–Тимошенко не дают удовлетворительных результатов даже при рассмотрении несмешанных задач. В связи с этим, т.е. в связи с неадекватностью классических прикладных теорий при описании практических явлений, встала проблема их уточнения, а также создания новых теорий, удобных при решении смешанных задач. Многочисленные исследования в этом направлении можно подразделить на три основные группы.

1°. Прикладные теории, опирающиеся на феноменологические упрощающие предположения, менее жесткие, чем гипотезы Кирхгофа–Лява. Здесь наиболее известны теории С. А. Амбарцумяна, Б. Ф. Власова, Х. М. Муштари, Э. Рейсснера, С. П. Тимошенко и др. [82], которые в отличие от теории Кирхгофа–Лява определенным образом учитывают поперечные сдвиги и, тем самым, более точно описывают напряженно-деформированное состояние пластинки. Однако, несмотря на то, что уравнения, учитывающие поперечные сдвиги, уточняют решения соответствующих смешанных задач (в случае гладкого штампа устраняют математические некорректности на линиях смены граничных условий), контактные напряжения на границе, как это должно быть по теории Герца, в нуль не обращаются, что искажает истинную картину взаимодействия штампа с покрытием.

Стремление исследователей уточнить характер особенности в контактных напряжениях на краях штампа без модификации самой теории осуществляется введением некоторого поверхностного слоя, подверженного смятию [26, 43, 69, 79, 82]. Физически это может быть оправдано шероховатостью поверхностей взаимодействующих тел, реальным обжатием

материала под штампом и т.д. Кроме того, поперечное обжатие можно учесть также в рамках классической теории Кирхгофа–Лява, выводя закон изменения смещений по толщине путем интегрирования соотношений закона Гука [45, 51]. Аналогичным образом уточняется и теория Рейсснера [44]. Это позволяет повысить порядок разрешающих уравнений покрытий и дает возможность выполнить для штампов с гладким основанием естественное условие равенства нулю контактных напряжений на границе.

Однако просто учет поперечного обжатия еще не гарантирует получения физически корректного решения соответствующей контактной задачи. Так, в варианте теории плит П. Нагди эффект поперечного обжатия учитывается постулированием закона изменения перемещений по толщине, что не дает возможности повысить порядок уравнений деформирования пластин [45].

2°. Теории пластин, получаемые путем аппроксимации решений основных уравнений теории упругости отрезками рядов вида

$$u_i(x, y, z) = \sum_{j=1}^N u_{ij}(x, y) P_j(z) \quad (i = 1, 2, 3),$$

где $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$ — вектор перемещений, z — поперечная координата, а $\{P_j(z)\}$ — некоторая полная система функций, в частности, система полиномов Лежандра. Для этой группы наиболее характерны подходы И. Н. Векуа, Б. Л. Пелеха, В. В. Понятовского и др. [29, 76]. Такая процедура, в общем случае, приводит к достаточно громоздким формулам, однако возможны разумные компромиссные решения [77].

3°. Теории, построенные путем интегрирования основных уравнений теории упругости. Здесь, прежде всего, следует отметить основополагающие идеи И. И. Воровича, А. Л. Гольденвейзера, А. И. Лурье, Г. И. Петрашени [6, 30, 35, 72, 78], развитые затем в работах их учеников и последователей [1, 2, 5, 22, 23, 36, 49, 50, 58, 65, 83, 94, 97].

Разрешающие уравнения данной группы выводятся на основании асимптотического подхода. Сущность его заключается в определении напряженно-деформированного состояния пластины посредством разложения решений основных уравнений теории упругости в ряды по толщине с использованием итерационных процессов для определения коэффициентов разложений. Причем тот факт, что в полученные уравнения входят производные от усилий, приложенных к краям покрытия, позволяет эффективно использовать эти уравнения при изучении соответствующих контактных задач, а также исследовать асимптотический характер классических теорий.

Отправляясь от сделанного выше обзора, приведем уточненные уравнения, описывающие напряженно-деформированное состояние упругих покрытий, которые одновременно учитывают как их продольные и по-

перечные деформации растяжения и сдвига, так и деформации поперечного изгиба и сжатия. Такие уравнения получены в работах Е. В. Коваленко [57, 58, 64] путем асимптотического анализа точного решения первой основной задачи теории упругости для слоя и имеют вид¹

$$\frac{4}{3} \vartheta h^2 \Delta^2 u_{\pm} = A_{1,x}^{\pm}(\sigma) + A_{2,xx}^{\pm}(\tau_1) + A_{3,yy}^{\pm}(\tau_1) + A_{4,xy}^{\pm}(\tau_2), \quad (1)$$

$$\frac{4}{3} \vartheta h^2 \Delta^2 v_{\pm} = A_{1,y}^{\pm}(\sigma) + A_{2,yy}^{\pm}(\tau_2) + A_{3,xx}^{\pm}(\tau_2) + A_{4,xy}^{\pm}(\tau_1), \quad (2)$$

$$\frac{4}{3} \vartheta h^3 \Delta^2 w_{\pm} = B_1^{\pm}(\sigma) + B_{2,x}^{\pm}(\tau_1) + B_{2,y}^{\pm}(\tau_2), \quad (3)$$

$$\{u_{\pm}, v_{\pm}, w_{\pm}\} = \{u(x, y, \pm h), v(x, y, \pm h), w(x, y, \pm h)\},$$

$$\sigma = \{\sigma^-, \sigma^+\}, \quad \tau_j = \{\tau_j^-, \tau_j^+\}, \quad a = \{a^-, a^+\},$$

$$\sigma^{\pm} = \sigma_1 \pm \sigma_2, \quad \tau_j^{\pm} = \tau_{1j} \pm \tau_{2j} \quad (j = 1, 2),$$

$$A_1^{\pm}(a) = \mp a^- \pm \frac{2-7\nu}{15(1-\nu)} h^2 \Delta a^- - \frac{\nu}{3(1-\nu)} h^2 \Delta a^+,$$

$$A_2^{\pm}(a) = \frac{1}{3} h \left(-a^- \mp 3a^+ + \frac{2}{3} h^2 \Delta a^- \pm \frac{2}{5} h^2 \Delta a^+ \right),$$

$$A_3^{\pm}(a) = \frac{2h}{3(1-\nu)} \left(-a^- + \frac{1}{3} h^2 \Delta a^- \pm h^2 \Delta a^+ \right),$$

$$A_4^{\pm}(a) = h \left[\frac{1+\nu}{3(1-\nu)} a^- \mp a^+ - \frac{2\nu}{9(1-\nu)} h^2 \Delta a^- \mp \frac{2(4+\nu)}{15(1-\nu)} h^2 \Delta a^+ \right],$$

$$B_1^{\pm}(a) = a^- - \frac{4}{5} h^2 \Delta a^- + \frac{27}{175} h^4 \Delta^2 a^- \pm \frac{1}{3} h^4 \Delta^2 a^+,$$

$$B_2^{\pm}(a) = h \left[a^+ - \frac{2-7\nu}{15(1-\nu)} h^2 \Delta a^+ \pm \frac{\nu}{3(1-\nu)} h^2 \Delta a^- \right].$$

Здесь $\vartheta = G(1-\nu)^{-1}$, где G, ν — упругие постоянные материала покрытия толщины $2h$; $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{1j}$ и τ_{2j} ($j = 1, 2$) — внешние усилия, приложенные к краям пластины; u, v, w — компоненты вектора перемещений.

Если при выводе уточненных уравнений деформирования тонких пластин произвести усреднения перемещений по толщине, то полученные [64] уравнения, в отличие от (1)–(3), будут учитывать лишь продольные деформации растяжения–сжатия и изгиба. Эти уравнения в сочетании с приведенными выше (1)–(3) содержат в себе как частный случай уравнения всех классических теорий деформирования тонкостенных упругих элементов — Кирхгофа–Лява, Рейсснера–Тимошенко, накладки Мелана, основания Фусса–Винклера. Для получения последних достаточно пренебречь в правых частях выведенных уравнений членами соответствующего порядка по h .

Использование уточненных уравнений деформирования пластин при решении смешанных задач для тел с покрытиями [1, 2, 4, 12, 23, 57, 64] позволило: 1) устранить большую часть математических некорректностей,

¹ Исправлены неточности в правых частях уравнений, приведенных в [57, 58]

возникающих в контактных напряжениях на линиях смены граничных условий; 2) провести систематизацию уравнений деформирования тонкостенных упругих элементов и установить их качественное и количественное соответствие уравнениям теории упругости в контактных задачах; 3) сформулировать критерий выбора приближенных моделей для описания свойств покрытий в зависимости от геометрических и механических характеристик покрытия и основания, а также от степени их адгезии.

2. Рассмотрим некоторые смешанные задачи механики сплошных сред для тел с покрытиями, нашедшие практические приложения.

В работах В. М. Александрова, Н. Х. Арутюняна [8] и Е. В. Коваленко [52] изучаются плоские контактные задачи соответственно для упругой полуплоскости, усиленной по всей границе накладкой Мелана, или покрытой тонким слоем идеальной несжимаемой жидкости, и для слоя идеальной жидкости бесконечной глубины, покрытого тонкой пластинкой, растянутой постоянным по ее длине усилием. Предполагается, что упругий штамп вдавливается в верхнюю границу основания и скользит вдоль нее с постоянной докритической скоростью V . Силы трения в области контакта считаются отсутствующими, течение в жидкости установившимся, потенциальным.

Задачи приведены к сингулярным интегральным уравнениям первого рода относительно контактного давления $p(x)$. Для построения их приближенных решений использованы асимптотические методы и метод ортогональных многочленов.

В работе В. И. Авилкина, Е. В. Коваленко [3] рассматривается двумерная (случай плоской деформации) задача о взаимодействии движущегося ($V = \text{const}$) недеформируемого штампа со слоем идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины. Давление от штампа на гидравлическое основание передается через тонкое покрытие, моделируемое, как и выше, преднапряженной пластинкой Кирхгофа–Лява.

Методами операционного исчисления в подвижной системе координат задача сводится к нахождению функции $p(x)$ из интегрального уравнения первого рода с разностным ядром. Трансформанта Фурье последнего имеет особенности на действительной оси, зависящие от скорости скольжения V , которые определяют рельеф поверхности покрытия вне штампа. Обсуждаются различные формы оснований штампов и в связи с этим изучаются характерные особенности решения полученного интегрального уравнения в классе обобщенных функций медленного роста. Выявлены условия полного прилегания штампа к основанию, а также изучены виды отрывов штампа от поверхности покрытия. Приводится численный анализ задачи для различных форм оснований штампа.

Наиболее близко к изложенному исследованию примыкает работа [14], в которой свойства тонкого покрытия описываются уравнениями

мембраны, и работа [9], где покрытие моделируется упругим слоем. Рассматривается докритический режим движения штампа, а глубина слоя жидкости предполагается бесконечной. Кроме того, здесь следует также отметить работу [13], в которой решена контактная задача о движении штампа с постоянной дорелевской скоростью по поверхности упругого полупространства, армированного пластинкой Кирхгофа–Лява — накладкой Мелана.

Контактная задача о колебаниях штампа на стержневом основании, подстилаемом упругим слоем большой толщины, изучена В. М. Александровым, Е. В. Коваленко, С. М. Марченко [16]. Предполагается, что вдавливающая штамп сила изменяется во времени по закону

$$P(t) = P_0 + P_1 e^{i\omega t}, \quad (4)$$

где $P_1 \ll P_0$, в силу чего динамические эффекты локализованы только лишь в покрытии. Относительно неизвестного контактного давления получено интегральное уравнение второго рода, решение которого построено методом ортогональных функций.

В. М. Александровым, Ю. Н. Пошовкиным [24] и Н. В. Генераловой, Е. В. Коваленко [32] решены соответственно плоская и пространственная контактные задачи о вдавливании без трения полосового в плане штампа в поверхность линейно-деформируемого основания, армированную тонким упругим покрытием переменной толщины, жесткость которого соизмерима или меньше жесткости основного упругого тела. Обе задачи сведены к исследованию интегрального уравнения Фредгольма второго рода с коэффициентом при старшем члене, являющимся достаточно произвольной функцией поперечной координаты. Для его решения в первом случае использовался метод сплайн-функций в сочетании с методом ортогональных многочленов, когда толщина покрытия постоянна. Во втором варианте применялся проекционный метод Бубнова–Галеркина с выбором в качестве координатных элементов систем ортогональных полиномов или дельтаобразных функций (вариационно-разностный метод), а также алгоритм сращиваемых асимптотических разложений, когда упомянутый выше коэффициент мал. Доказано, что неравномерность толщины покрытия существенно влияет на закон распределения контактных давлений.

Изучению вдавливания штампов различных конфигураций в поверхность линейно-деформируемого основания, усиленную тонким покрытием, посвящены работы [7, 11, 33, 34, 75]. Считается, что жесткость покрытия много больше жесткости подложки, в силу чего его напряженно-деформированное состояние моделируется уравнениями накладки Мелана. Проведенные исследования дали возможность оценить степень влияния поверхностной неоднородности на контактную жесткость материала

основного тела, а изменение в широком диапазоне геометрического параметра основания $\lambda = Ha^{-1}$ позволило прийти к изучению явления масштабного фактора.

И. Г. Горячевой, Е. В. Торской [40] рассмотрена задача об осесимметричном нагружении двухслойного упругого основания при задании на границе раздела слоя и основания условий, допускающих относительное проскальзывание граничных точек вследствие неполного сцепления слоев. В предельных случаях сформулированные условия совпадают со случаями полного сцепления или проскальзывания слоя и основания. Изучено влияние параметра, характеризующего степень сцепления покрытия с основанием, на характер распределения напряжений внутри двухслойного основания при различных относительных значениях механических и геометрических характеристик покрытия.

В работах [41, 42] предложен метод решения периодической контактной задачи для системы штампов и упругого слоя, сцепленного с упругим полупространством, основанный на построении осесимметричного приближения вблизи единичного штампа. В результате исследования влияния механических и геометрических свойств упругого слоя, а также параметров нагружения на контактные характеристики и на характер распределения напряжений внутри слоя и основания и на границе их раздела показано, что наряду с параметрами относительной толщины и относительного модуля упругости слоя на места концентрации напряжений и их величину существенно влияет плотность контакта.

В работах В. М. Александрова, Н. Х. Арутюняна [10] и В. М. Александрова, Е. В. Коваленко [15] рассматривается относительно тонкий слой льда, лежащий на гидравлическом, стержневом или двухслойном упругом основании. Двухслойный пакет представляет собой упругий слой, покрытый стержневым слоем. Физико-механические свойства льда описываются уравнениями нелинейной теории ползучести со степенной связью между интенсивностью девиатора скоростей деформаций и интенсивностью девиатора напряжений. Коэффициент Пуассона для льда принимается постоянной величиной. Исследуется процесс квазистатического нагружения нормальными усилиями поверхности слоя льда или квазистатического вдавливания в поверхность жесткого штампа. При этом гидравлическое основание описывается соотношением основания Фусса-Винклера, а стержневое и двухслойное — уравнениями линейной теории упругости. Рассматриваемые плоские контактные задачи сведены к нелинейным уравнениям, которые содержат интегральные операторы по координате и дифференциальные по времени. Найдены асимптотические решения этих уравнений для относительно малого и большого времени.

Объектом исследования С. И. Боева, Е. В. Коваленко [27] является акустическая система, состоящая из вязкоупругой пластинки Кирхгофа-Лява (линейный закон наследственности), покрывающей слой идеальной сжи-

маемой жидкости, и упругого стержня, жестко сцепленного с пластинкой и возбуждаемого периодически меняющейся во времени силой. Течение в жидкости предполагается установившимся, потенциальным. С помощью интегрального преобразования Фурье по продольной координате задача приведена к определению амплитуды давления под стержнем из интегрального уравнения первого рода типа свертки на конечном интервале с гладким ядром, корректно разрешимым лишь в пространстве обобщенных функций медленного роста. Построены графики характерных виброакустических величин.

И. Г. Горячевой, Ю. Ю. Маховской [39] рассмотрена плоская периодическая контактная задача о скольжении упругого шероховатого индентора по вязкоупругому слою, сцепленному с упругой полуплоскостью. Для описания механических свойств слоя использовалась модель Кельвина. Получено линейное интегро-дифференциальное уравнение, в результате численного решения которого найдены распределение контактных давлений, размеры и положение области контакта. Полученные результаты использовались для анализа влияния механических и геометрических свойств тонких покрытий, а также параметров шероховатости взаимодействующих тел на контактные характеристики и деформационную составляющую коэффициента трения.

Аналитические методы решения контактной задачи о качении упругого цилиндра по вязкоупругому слою, сцепленному с упругим основанием, развиты в [37]. Для описания механических свойств использована модель Максвелла. Задача рассмотрена в предположении частичного проскальзывания на площадке контакта, что позволило исследовать сопротивление перекатыванию как суммарный результат проявления несовершенной упругости поверхностных слоев взаимодействующих тел и трения скольжения на площадке контакта. В качестве частного случая получено решение задачи о полном скольжении цилиндра по упругому основанию, покрытому тонким вязкоупругим слоем.

В работах [17, 55, 66, 73] приводятся решения некоторых плоских и осесимметричных контактных задач о вдавливании без трения жесткого штампа в двухслойное стареющее вязкоупругое основание. Предполагается, что верхний слой тонкий относительно области контакта, неоднородно-стареющий; реологические свойства нижнего слоя описываются уравнениями линейной теории ползучести стареющих материалов; слои жестко сцеплены между собой; область контакта не изменяется с течением времени. В зависимости от соотношений между модулями упругомгновенных деформаций слоев смешанные задачи сводятся к интегральным уравнениям первого или второго рода, содержащим операторы Фредгольма и Вольтерра. Используемый для их решения аналитический метод (см. § 9, гл. 1) позволил построить разложения для основных характеристик контактного взаимодействия при произвольным образом меня-

ющейся во времени силе, действующей на штамп. Исследуются варианты искусственного и естественного старения двухслойного основания.

В работе В. М. Александрова, Е. В. Коваленко, В. В. Фурина [21] на примере решения плоской контактной задачи о действии параболического штампа на тонкий стареющий слой предложен алгоритм расчета вязкоупругих покрытий, когда граница смены краевых условий монотонно увеличивается с течением времени. Получены явные формулы для осадки основания под штампом, области контакта и контактного давления. Обсуждается случай вязкоупругого слоя большой толщины.

Опыт создания и применения антифрикционных покрытий в современной технике приводит к необходимости управления их структурой и функциональными свойствами. К таким покрытиям прежде всего следует отнести пористо-упругие, поверхность которых антифрикционна в силу способности впитывать смазку и затем выделять ее при нагружении. Е. В. Коваленко [59, 60], используя для описания реологических свойств пористо-упругих покрытий уравнения модели Био и полагая, что движение вязкой сжимаемой жидкости в порах подчиняется закону фильтрации Дарси, исследовал контактную задачу для тонкого слоя, лежащего на жестком непроницаемом основании. Было установлено, что физико-механические свойства такого антифрикционного слоя можно моделировать уравнениями основания Фусса–Винклера с операторным коэффициентом постели (аналог уравнений наследственной упругости).

Опираясь на этот факт, автор рассмотрел осесимметричную задачу о передаче давления от жесткого круглого в плане штампа на линейно-деформируемое основание, армированное пористо-упругим покрытием [62]. Задача сведена к решению интегрального уравнения второго рода эволюционного типа. Для его решения использован алгоритм разделения переменных (см. § 9, гл. 1) в сочетании с асимптотическими методами "большого" и "малого" времени в случае задачи с заданной областью контакта и пошаговый метод, когда граница площадки контакта заранее не известна.

3. Остановимся теперь на обзоре наиболее важных теоретических исследований, касающихся износа тонких покрытий. Отметим вначале, что ключевым моментом при создании методов расчета деталей на износ является формулировка математической модели, характеризующей процесс изнашивания. Такие уравнения построены [70] на синтезе теоретических представлений (фундаментальных уравнений), описывающих природу процесса, а также экспериментальных исследований и имеют вид

$$I_h = K(\Phi_1)^{\alpha_1}(\Phi_2)^{\alpha_2} \dots (\Phi_n)^{\alpha_n}, \quad (5)$$

где I_h — безразмерная интенсивность изнашивания, K — безразмерный интегральный коэффициент, Φ_i ($i = 1, \dots, n$) — безразмерные комплексы

(инварианты), учитывающие механотермохимические процессы изнашивания в контакте.

Однако, несмотря на то, что формула (5) представляет собой физически информативную зависимость, характеризующую процесс изнашивания, применение ее при постановках износоконтактных задач не всегда удобно, поскольку среди инвариантов Φ_i ($i = 1, \dots, n$) могут быть зависящие. Поэтому в таких случаях процесс износа целесообразно моделировать [93] типичным выражением

$$I_h = kV^l p^m. \quad (6)$$

Здесь k — коэффициент износа, V — средняя скорость скольжения, p — контактное давление. Ниже, как правило, будет использоваться зависимость (6).

В работе В. М. Александрова, Е. В. Коваленко [18] рассматривается плоская задача о взаимодействии линейно-деформируемого основания общего типа, армированного по границе покрытием, с бесконечным цилиндрическим штампом, движущимся вдоль своей образующей. В результате этого происходит износ покрытия, носящий абразивный характер (в формуле (6) $m = 1$). Считается, что область контакта совпадает с шириной штампа и не меняется с течением времени; поверхность штампа не изнашивается; силами трения при определении упругих деформаций покрытия, а также инерционными эффектами, возникающими от движения штампа, можно пренебречь; физико-механические свойства покрытия моделируются уравнениями (1)–(3) (плоский аналог).

Поставленная задача описывается системой уравнений типа (1.9.19) — (1.9.21), для решения которой использован алгоритм, изложенный в § 9, гл. 1. В то же время, когда относительная жесткость тонкого покрытия становится достаточно большой, возникает проблема исследования указанной системы в окрестности $t = 0$. Авторы показали, что в этом случае четный вариант задачи эквивалентен интегральному уравнению

$$(\varepsilon I + A)p(x, \varepsilon) = \delta(\varepsilon) - f(x) \quad (|x| \leq 1, \varepsilon \ll 1) \quad (7)$$

и первому условию (1.9.21).

Здесь I — тождественный оператор, оператор $A\varphi$ имеет вид (1.9.20), а символ его ядра обладает свойствами (1.9.14).

Главный член асимптотики решения уравнения (7) построен методом сращиваемых асимптотических разложений в форме

$$p(x, \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left[\omega(x) - \frac{\omega(1)}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \right) \right] + \frac{\omega(1)}{\sqrt{2\varepsilon}} \left[q \left(\frac{1+x}{\varepsilon} \right) + q \left(\frac{1-x}{\varepsilon} \right) \right], \quad (8)$$

где $p(x, 0) = \omega(x)(1-x^2)^{-1/2}$ — внутреннее решение задачи, определяемое из вырожденного уравнения (7) при $\varepsilon = 0$, а $q(s)$ — погранслои в окрестности точки $x = 1$, удовлетворяющий уравнению

$$q(s) - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty q(\tau) \ln \left| 1 - \frac{s}{\tau} \right| d\tau = 1 \quad (0 \leq s < \infty), \quad (9)$$

причем значение постоянной $\omega(1)$ связывается с P при помощи первого соотношения (1.9.21).

Точное решение интегрального уравнения (9) найдено в [19, 54] и имеет вид

$$q(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_L X(\tau) s^{-\tau} d\tau, \quad X(\tau) = \frac{1}{\tau} \Gamma^2(1+\tau) S(\tau), \quad (10)$$

$$S(\tau) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{2\tau+1} \frac{\Gamma(-n-\tau+1/2)\Gamma(-n+\tau+1)}{\Gamma(-n-\tau)\Gamma(-n+\tau+3/2)},$$

где контур L — прямая $\operatorname{Re} \tau = \kappa$ ($0 < \kappa < 1/2$).

Обзор некоторых постановок смешанных задач с износом, происходящим по существенно нелинейному закону (6), учитывающих микрогеометрию (шероховатость) взаимодействующих тел или наличие между ними тонких промежуточных слоев (покрытий), дан Е. В. Коваленко, М. И. Теплым [67, 68]. Обсуждаются алгоритмы решения этих задач — асимптотические методы в сочетании с методом ортогональных функций и методом коллокаций, позволяющие исследовать влияние различных механических и геометрических факторов на основные характеристики контакта.

В настоящее время во многих отраслях машиностроения находят применение подшипники скольжения. В большинстве случаев износ таких деталей можно моделировать при помощи решения контактной задачи об изнашивании недеформируемым валом тонкого винклеровского кольца, зажатого в жесткую обойму (рис. 1) [20, 28, 31, 53, 56, 60, 71, 88, 89]. Такая задача, в случае монотонно растущей зоны контакта и малого износа, описываемого формулой (6), сводится к следующей системе уравнений, записанной в безразмерном виде

$$\varepsilon p(\varphi, t) + \mu \int_{\vartheta(\varphi)}^t p^m(\varphi, \tau) d\tau = [\Delta + \delta(t)] \cos \varphi - \Delta \quad (11)$$

$$(0 \leq \varphi \leq \alpha(t), \quad \vartheta(\varphi) \leq t \leq T < \infty),$$

$$P(t) = 2 \int_0^{\alpha(t)} p(\varphi, t) \cos \varphi d\varphi, \quad p[\alpha(t), t] = 0, \quad (12)$$

где $\vartheta(\varphi) = 0$ при $0 \leq \varphi \leq \alpha(0)$ и $\vartheta(\varphi) = \psi(\varphi)$, когда $\alpha(0) < \varphi \leq \alpha(t)$, $t = \psi(\alpha)$ — обратная к $\alpha = \alpha(t)$ функция.

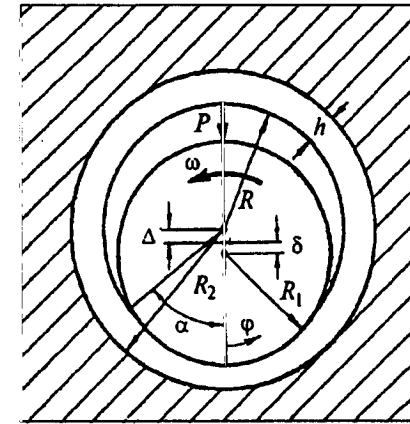


Рис. 1

Точное решение системы (10), (11) при $m = 1$ найдено [20, 31] в форме

$$p(\varphi, t) = \frac{\Delta}{\varepsilon} \left\{ \frac{\cos \varphi - \cos \alpha(t)}{\cos \alpha(t)} - \frac{\mu}{\varepsilon} \int_{\vartheta(\varphi)}^t \frac{\cos \varphi - \cos \alpha(\tau)}{\cos \alpha(\tau)} \exp \left[\frac{\mu}{\varepsilon} (t - \tau) \right] d\tau \right\}, \quad (13)$$

$$\delta(t) = \Delta \frac{1 - \cos \alpha(t)}{\cos \alpha(t)},$$

$$\varepsilon P(t) + \mu \int_0^t P(\tau) d\tau = \Delta \frac{\alpha(t) - \frac{1}{2} \sin 2\alpha(t)}{\cos \alpha(t)},$$

причем из последнего соотношения (13) следует необходимое и достаточное условие осуществления режима монотонного увеличения угла контакта с течением времени $\varepsilon P(t) + \mu P(t) > 0$.

Асимптотическое при $\varepsilon \rightarrow 0$ решение системы (11), (12) в случае $m \neq 1$ построил Е. В. Коваленко [60], а ее численное исследование при различных значениях безразмерных параметров m , ε , μ дано в монографиях [28, 31]. Кроме того, здесь также применим аналитический метод, предложенный В. М. Алексаидровым, Е. В. Коваленко [20] для решения нелинейной задачи о сильном износе покрытия, когда величина его соизмерима с толщиной кольца h .

И. А. Солдатенков доказал [88, 89] наличие установившегося режима, составляющего, в некоторых случаях, не менее 95% общего ресурса работы покрытия. Это означает, что контактное давление, удовлетворяющее интегральному уравнению (11), с достаточной для инженерной практики

точностью можно аппроксимировать выражением ($\beta = 1/m$)

$$p(\varphi, t) = \begin{cases} p(0, t) \cos^\beta \varphi & \text{при } 0 \leq \varphi < \alpha(t), \\ 0 & \text{при } \varphi \geq \alpha(t), \end{cases} \quad (14)$$

справедливым всюду за исключением окрестностей концов площадки контакта. Величина $p(0, t)$ определяется при помощи первого условия (12) и имеет вид

$$p(0, t) = P(t) \begin{cases} (\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha)^{-1} & \text{при } \beta = 1, \\ (2 \sin \alpha - \frac{\beta}{3} \sin^3 \alpha + \frac{\beta(\beta-2)}{20} \sin^5 \alpha + \dots)^{-1} & \text{при } \beta \neq 1. \end{cases} \quad (15)$$

Соотношения (14), (15) остаются справедливыми даже в том случае, если учитывается изменение толщины покрытия по длине области контакта в процессе его изнашивания [90]. Основываясь на этом факте, Ю. Н. Дроздов, Е. В. Коваленко [46, 47] развили алгоритм расчета долговечности радиальных подшипников скольжения. Метод базируется на асимптотическом решении износоконтактной задачи (14), (15), при помощи которого находятся значения комплексов Φ_i ($i = 1, \dots, n$), построении безразмерных функций (5) и применении [70] формулы

$$T = \frac{[h] - \Delta}{\omega R_1 \{I_{h1} + \alpha(T) R (\pi R_1)^{-1} I_{h2}\}} \quad (16)$$

для определения ресурса исследуемого узла трения. В выражении (16) I_{h1}, I_{h2} — средние значения интенсивностей изнашивания материалов втулки и вала, $[h]$ — предельно допустимый износ вкладыша.

Такая процедура хорошо реализуется на ПЭВМ и позволяет проследить влияние различных параметров на конечный результат. В качестве примера приведен расчет ресурса работы подшипника скольжения с вкладышем из ПТФЭ.

Срок службы многих узлов трения увеличивается при установке в них двухслойных противовибрационных подшипников. Внутренний слой вкладыша подшипника выполняет антифрикционные функции, внешний — противовибрационные. В работах [48, 95] изучен процесс износа втулки такого подшипника, представляющей собой двухслойное винклеровское кольцо, посаженное с преднатягом в жесткую обойму.

Алгоритмам расчета на износ цилиндрических и сферических подшипников скольжения с вкладышами, работающими по типу пористо-упругих покрытий (см. разд. 2 настоящего параграфа), посвящены исследования Е. В. Коваленко [60, 61, 63]. Разработанные автором методы позволили получить разложения для основных характеристик контактного взаимодействия, справедливые во всем диапазоне времени их эксплуатации.

В заключение отметим, что ряд интересных подходов к решению смешанных задач для тел с покрытиями содержится в монографиях [25, 38, 81, 84–87, 91, 92, 96], не вошедших в данный обзор.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авилкин В. И., Александров В. М., Коваленко Е. В. О выводе уточненных уравнений тонких покрытий и приложении их к контактными задачам теории упругости // Динамика и прочность тяжелых машин. Днепропетровск: ДГУ, 1983. Вып. 7. С. 81–93.
2. Авилкин В. И., Александров В. М., Коваленко Е. В. Об использовании уточненных уравнений тонких покрытий в теории осесимметричных контактных задач для составных оснований // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 6. С. 1010–1018.
3. Авилкин В. И., Коваленко Е. В. Об одной динамической контактной задаче для составного основания // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 5. С. 847–856.
4. Авилкин В. И., Коваленко Е. В. Асимптотический анализ плоской контактной задачи теории упругости для двухслойного основания // ПМТФ. 1985. № 1. С. 133–138.
5. Агаловян Л. А., Геворкян Р. С. Об асимптотическом решении смешанных трехмерных задач для двухслойных анизотропных пластинок // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 2. С. 271–278.
6. Аксентян О. К., Ворovich И. И. Напряженное состояние плиты малой толщины // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 6. С. 1057–1074.
7. Александров В. М., Александрова Г. П., Степаненко Ю. П. К вопросу об учете масштабного фактора в механике твердого деформируемого тела // ПМТФ. 1981. № 1. С. 151–157.
8. Александров В. М., Арутюнян Н. Х. Взаимодействие движущегося упругого штампа с упругой полуплоскостью через накладку или тонкий слой идеальной жидкости // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 3. С. 475–485.
9. Александров В. М., Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы механики ледяного покрова // Современные проблемы механики и авиации. М.: Машиностроение, 1982. С. 11–20.
10. Александров В. М., Арутюнян Н. Х. О воздействии нагрузки и штампов на ледяной покров // Механика и физика льда. М.: Наука, 1983. С. 14–21.
11. Александров В. М., Броневец М. А., Коваленко Е. В. Плоские контактные задачи для линейно-деформируемого основания с тонким усиливающим покрытием // Прикл. механика. 1988. Т. 24. № 8. С. 60–67.
12. Александров В. М., Гришин С. А., Коваленко Е. В. Контактное взаимодействие толстой плиты с упругим слоем большой толщины // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 5. С. 64–69.
13. Александров В. М., Коваленко Е. В. Движение штампа по границе упругой полуплоскости с тонким усиливающим покрытием // Механика сплошной среды. Ростов-на-Дону: РГУ, 1981. С. 13–27.
14. Александров В. М., Коваленко Е. В. Движение штампа по поверхности тонкого покрытия, лежащего на гидравлическом основании // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 4. С. 735–744.
15. Александров В. М., Коваленко Е. В. Некоторые контактные задачи установившейся нелинейной ползучести при наличии тонких покрытий // ПМТФ. 1983. № 2. С. 121–130.
16. Александров В. М., Коваленко Е. В., Марченко С. М. О двух контактных задачах теории упругости для слоя с покрытием винклеровского типа // Прикл. механика. 1983. Т. 19. № 10. С. 47–54.
17. Александров В. М., Коваленко Е. В., Манжиров А. В. Некоторые смешанные задачи теории ползучести неоднородно-старееющих сред // Изв. АН АрмССР. Механика. 1984. Т. 37. № 2. С. 12–25.

18. Александров В. М., Коваленко Е. В. О контактном взаимодействии тел с покрытиями при наличии износа // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275. № 4. С. 827–830.
19. Александров В. М., Коваленко Е. В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 336 с.
20. Александров В. М., Коваленко Е. В. Аналитическое решение контактной задачи об изнашивании сопряжения вал-втулка // Трение и износ. 1987. Т. 8. № 6. С. 985–995.
21. Александров В. М., Коваленко Е. В., Фурин В. В. Контактная задача теории ползучести для стареющего слоя // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 3. С. 105–110.
22. Александров В. М., Коваленко Е. В. Уточненные уравнения теории тонких пластин для динамических задач // Прикл. механика. 1994. Т. 30. № 6. С. 80–87.
23. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.
24. Александров В. М., Пошовкин Ю. Н. Контактная задача для полуплоскости с покрытием переменной толщины // Трение и износ. 1989. Т. 10. № 6. С. 973–980.
25. Арутюнян Н. Х., Манжиров А. В., Наумов В. Э. Контактные задачи механики растущих тел. М.: Наука, 1991. 176 с.
26. Блох М. В. К выбору модели в задачах о контакте тонкостенных тел // Прикл. механика. 1977. Т. 13. № 5. С. 34–42.
27. Боев С. И., Коваленко Е. В. Исследование характеристик излучения вибрирующего упругого стержня, контактирующего с платиной, покрывающей слой жидкости // Изв. АН АрмССР. Механика. 1982. Т. 35. № 4. С. 41–55.
28. Бозатин О. Б., Мороз В. А., Черский И. Н. Основы расчета полимерных узлов трения. Новосибирск: Наука, 1983. 213 с.
29. Векуа И. Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М.: Наука, 1982. 288 с.
30. Ворovich И. И. Некоторые результаты и проблемы асимптотической теории пластин и оболочек // Материалы 1-й Всес. школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин. Тбилиси, 1975. С. 51–149.
31. Галахов М. А., Усов П. П. Дифференциальные и интегральные уравнения математической теории трения. М.: Наука, 1990. 280 с.
32. Генералова Н. В., Коваленко Е. В. О контактном взаимодействии полосового штампа с линейно-деформируемым основанием через покрытие переменной толщины // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 6. С. 126–135.
33. Генералова Н. В., Коваленко Е. В. О действии полосового штампа на линейно-деформируемое основание, усиленное тонким покрытием // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 5. С. 819–826.
34. Генералова Н. В., Коваленко Е. В. О вдавливании кольцевого в плане штампа в упругий слой с тонким усиливающим покрытием // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 3. С. 27–33.
35. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
36. Гольденвейзер А. Л., Каплунов Ю. Д., Нольде Е. В. Асимптотический анализ и уточнение теорий пластин и оболочек типа Тимошенко–Рейсснера // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 6. С. 124–138.
37. Горячева И. Г., Горячев А. П., Садеги Ф. Контактное взаимодействие упругих тел с тонкими вязкоупругими покрытиями в условиях трения качения или скольжения // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 4. С. 634–641.
38. Горячева И. Г., Добычин М. Н. Контактные задачи в трибологии. М.: Машиностроение, 1988. 256 с.

39. Горячева И. Г., Маховская Ю. Ю. Влияние несовершенной упругости поверхностного слоя на контактные характеристики при скольжении шероховатых упругих тел // Трение и износ. 1997. Т. 18. № 1. С. 5–12.
40. Горячева И. Г., Торская Е. В. Напряженное состояние двухслойного упругого основания при неполном сцеплении слоев // Трение и износ. 1998. Т. 19. № 3. С. 289–296.
41. Горячева И. Г., Торская Е. В. Анализ напряженного состояния тел с покрытиями при множественном характере нагружения // Трение и износ. 1994. Т. 15. № 3. С. 349–357.
42. Горячева И. Г., Торская Е. В. Периодическая контактная задача для системы штампов и упругого слоя, сцепленного с упругим основанием // Трение и износ. 1995. Т. 16. № 4. С. 642–652.
43. Григолоук Э. И., Толкачев В. М. Цилиндрический изгиб пластины жесткими штампами // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 5. С. 876–883.
44. Григолоук Э. И., Толкачев В. М. Модификация уточненной теории пластин для контактных задач // Изв. АН АрмССР. Механика. 1977. Т. 30. № 3. С. 33–45.
45. Григолоук Э. И., Толкачев В. М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение, 1980. 411 с.
46. Дроздов Ю. Н., Коваленко Е. В. О расчете долговечности цилиндрических опор скольжения // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1998. № 4. С. 55–60.
47. Дроздов Ю. Н., Коваленко Е. В. Теоретическое исследование ресурса подшипника скольжения с вкладышем // Трение и износ. 1998. Т. 19. № 5. С. 565–570.
48. Ивановкин П. Г., Коваленко Е. В. Расчет изнашивания двухслойного вкладыша радиального подшипника скольжения // Трение и износ. 1990. Т. 11. № 4. С. 622–629.
49. Каплунов Ю. Д., Нольде Е. В. Двухпараметрический асимптотический анализ динамических уравнений теории упругости для случая изгиба пластин // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 5. С. 750–755.
50. Каплунов Ю. Д., Нольде Е. В. О роли поперечного обжатия в динамике оболочек // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 4. С. 644–650.
51. Карасев С. И., Артюхин Ю. П. Влияние поперечного сдвига и обжатия на распределение контактных напряжений // Исследования по теории пластин и оболочек. Казань: КГУ, 1976. Вып. 12. С. 68–76.
52. Коваленко Е. В. Динамическая задача о взаимодействии упругого штампа с жидкостью через тонкое покрытие // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 2. С. 338–347.
53. Коваленко Е. В. К расчету изнашивания сопряжения вал-втулка // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 6. С. 66–72.
54. Коваленко Е. В. Об интегральном уравнении контактных задач теории упругости при наличии абразивного износа // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 5. С. 868–873.
55. Коваленко Е. В. К вопросу решения контактных задач теории ползучести для комбинированных стареющих оснований // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 6. С. 1006–1014.
56. Коваленко Е. В. Контактная задача для кольцевого слоя малой толщины при наличии нелинейного износа // Механика деформируемых тел и конструкций. Ереван: АН Арм.ССР, 1985. С. 199–204.
57. Коваленко Е. В. Контактные задачи для тел с покрытиями (постановки и методы решения) // Изв. АН АрмССР. Механика. 1988. Т. 41. № 1. С. 40–50.
58. Коваленко Е. В. Об уточненных уравнениях деформирования упругих пластин // Прикл. механика. 1989. Т. 25. № 10. С. 111–116.

59. Коваленко Е. В. О расчете тонких пористых покрытий // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 3. С. 469–473.
60. Коваленко Е. В. Некоторые контактные задачи для тел с тонкими пористоупругими покрытиями. Препринт № 458. М.: ИПМ АН СССР, 1990. 32 с.
61. Коваленко Е. В. Расчет износа подшипника скольжения с тонким пористоупругим вкладышем // ПМТФ. 1991. № 5. С. 163–168.
62. Коваленко Е. В. Моделирование контактного взаимодействия шероховатых тел при наличии смазки // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 1. С. 116–123.
63. Коваленко Е. В. Контактная задача об износе сферического подшипника скольжения с тонким пористоупругим вкладышем // Трение и износ. 1994. Т. 15. № 4. С. 549–557.
64. Коваленко Е. В. О контакте твердого тела с упругим полупространством через тонкое покрытие // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 1. С. 119–127.
65. Коваленко Е. В., Дулякин И. А. Об уточненных уравнениях динамического деформирования тонких пластин // Гидроаэромеханика и теория упругости. Математические методы в теории упругости и гидроаэромеханике. Днепропетровск: ДГУ, 1988. С. 74–80.
66. Коваленко Е. В., Манжиров А. В. Контактная задача для двухслойного стареющего вязкоупругого основания // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 674–682.
67. Коваленко Е. В., Теплый М. И. Контактные задачи при нелинейном законе изнашивания для тел с покрытиями. 1 // Трение и износ. 1983. Т. 4. № 3. С. 440–448.
68. Коваленко Е. В., Теплый М. И. Контактные задачи при нелинейном законе изнашивания для тел с покрытиями. 2 // Трение и износ. 1983. Т. 4. № 4. С. 676–682.
69. Ковнеристов Г. Б. Взаимодействие штампа и балочной плиты // Сопротивление материалов и теория сооружений. Киев: Будівельник, 1975. Вып. 25. С. 119–124.
70. Когаев В. П., Дроздов Ю. Н. Прочность и износостойкость деталей машин. М.: Высшая школа, 1991. 319 с.
71. Кузьменко А. Г. Контактные задачи с учетом износа для цилиндрических опор скольжения // Трение и износ. 1981. Т. 2. № 3. С. 502–512.
72. Лурье А. И. К теории толстых плит // ПММ. 1942. Т. 6. Вып. 2–3. С. 151–168.
73. Манжиров А. В. Осесимметричные контактные задачи для неоднородно-стареющих вязкоупругих слоистых оснований // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 4. С. 684–693.
74. Моссаковский В. И., Гудрамович В. С., Макеев Е. М. Контактные взаимодействия элементов оболочечных конструкций. Киев: Наукова думка, 1988. 288 с.
75. Мхитарян С. М., Торосян Ф. С. О контактном взаимодействии кругового диска и бесконечной пластины с круговым отверстием, подкрепленным тонким кольцевым покрытием // Изв. АН АрмССР. Механика. 1978. Т. 31. № 5. С. 3–19.
76. Пелех Б. Л., Максимук А. В., Коровайчук И. М. Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями. Киев: Наукова думка, 1988. 280 с.
77. Пелех Б. Л., Сухорольский М. А. Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек. Киев: Наукова думка, 1980. 216 с.
78. Петрашень Г. И. К теории колебаний тонких пластин // Ученые записки ЛГУ. Сер. матем. наук. 1951. № 149. Вып. 24. С. 172–249.
79. Попов Г. Я. Об интегральных уравнениях контактных задач для тонкостенных элементов // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 4. С. 662–673.
80. Попов Г. Я. Контактные задачи для линейно-деформируемого основания. Киев–Одесса: Вища школа, 1982. 168 с.

81. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
82. Попов Г. Я., Толкачев В. М. Проблема контакта жестких тел с тонкостенными элементами // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 4. С. 192–206.
83. Прокопишин И. А., Хлебников Д. Г. Плоская деформация пластины с односторонней или двухсторонней накладкой // Мат. методы и физ.-мех. поля. 1988. Вып. 27. С. 99–102.
84. Рвачев В. Л., Проценко В. С. Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. Киев: Наукова думка, 1977. 235 с.
85. Саркисян В. С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. Ереван: ЕрГУ, 1983. 255 с.
86. Свириденко А. И., Чижик С. А., Петроковец М. И. Механика дискретного фрикционного контакта. Минск: Навука і тэхніка, 1990. 272 с.
87. Сеймов В. М., Трофимчук А. Н., Савицкий О. А. Колебания и волны в слоистых средах. Киев: Наукова думка, 1990. 224 с.
88. Солдатенков И. А. Изнашивание тонкого упругого покрытия при изменяющейся площадке контакта // Трение и износ. 1985. Т. 6. № 2. С. 247–254.
89. Солдатенков И. А. Установившийся режим при изнашивании тонкого упругого покрытия в радиальном подшипнике скольжения // Трение и износ. 1986. Т. 7. № 3. С. 452–459.
90. Солдатенков И. А. Об одном следствии установившегося режима для изнашиваемых покрытий // Трение и износ. 1988. Т. 9. № 4. С. 636–641.
91. Сысоев П. В., Богданович П. Н., Лизарев А. Д. Деформация и износ полимеров при трении. Минск: Наука и техника, 1985. 239 с.
92. Теплый М. И. Контактные задачи для областей с круговыми границами. Львов: Вища школа, 1983. 176 с.
93. Трение, изнашивание и смазка: Справочник / Под ред. Крагельского И. В., Алисина В. В. М.: Машиностроение, 1978. Т. 1. 400 с.
94. Устинов Ю. А., Шленев М. А. О некоторых направлениях развития асимптотического метода в теории плит и оболочек // Расчет оболочек и пластин. Ростов-на-Дону: РИСИ, 1978. С. 3–27.
95. Черский И. Н., Богатин О. Б., Сокольников Л. Г. Расчет эксплуатационных характеристик цилиндрических сопряжений при "сильном износе" // Трение и износ. 1986. Т. 7. № 1. С. 99–107.
96. Шевляков Ю. А. Матричные алгоритмы в теории упругости неоднородных сред. Киев–Одесса: Вища школа, 1977. 215 с.
97. Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Nolde E. V. Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies. San Diego: Academic Press, 1998. 226 p.

§ 4. КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ С УЧЕТОМ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЯ ОТ ТРЕНИЯ

Е. В. Коваленко

Приведен обзор работ по плоским и пространственным контактным задачам термоупругости при учете тепловыделения от трения и износа. Предложена следующая структура изложения материала:

- 1 — стационарные задачи с фрикционным теплообразованием.
- 2 — нестационарное взаимодействие упругих тел при наличии тепловыделения от трения.
- 3 — износостатические задачи термоупругости с учетом фрикционного разогрева.

Основными положениями в теории контактных задач с учетом тепловыделения от трения следует, по-видимому, считать работы М. В. Коровчинского [43–48]. Перечислим наиболее важные положения, содержащиеся в них.

1°. Сформулирована и поставлена физически нелинейная контактная задача термоупругости с учетом тепловыделения от трения при линейной зависимости упругих и термических постоянных от температуры (для температуры до 300–350°С).

2°. Показана возможность приведения такой нелинейной задачи для уравнений термоупругости и теплопроводности со смешанными граничными условиями к рекуррентной последовательности линейных краевых задач, сводящихся к интегро-дифференциальным или интегральным уравнениям.

3°. Точно поставлена, сформулирована и для частных случаев решена тепловая задача трения. Установлено, что при малых ($Pe < 0,5$) и больших ($Pe > 10$) числах Пекле вычисление температур трения приводится к квадратурам, а при промежуточных значениях чисел Пекле ($0,5 < Pe < 10$) — к решению интегральных уравнений первого рода.

4°. Изучено влияние тепловыделения от трения на упругий контакт и доказано, что оно существенно при малых числах Пекле, падая с их увеличением. Мерой связности тепловых и термоупругих явлений при тепловыделении от трения является безразмерный критерий, названный автором "термоконтактным". Такой критерий, например, в осесимметричном случае имеет вид

$$\epsilon = \frac{\pi f \omega R^2 p_0}{4JE} \frac{(1 + \nu_1)\alpha_1 + (1 + \nu_2)\alpha_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad \frac{1}{E} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}, \quad (1)$$

где E_i, ν_i ($i = 1, 2$) — упругие постоянные материалов взаимодействующих тел; α_i, λ_i — их коэффициенты линейного температурного расширения и теплопроводности, соответственно; p_0 — максимальное контактное давление по Герцу; ω — относительная угловая скорость вращения тел; R — приведенный радиус кривизны их поверхностей; f — коэффициент трения; J — механический эквивалент тепла.

При больших числах Пекле, когда основная часть тепла, образующегося от трения, концентрируется в тонком поверхностном слое, силовое и температурное воздействия почти не связаны и перераспределение напряжений, обусловленное температурой трения, проявляется лишь в тонком поверхностном слое. Мерой этого перераспределения сравнительно с изотермическим случаем по-прежнему является термоконтактный критерий (1).

Результаты 1°–4° были позже учтены многими авторами при постановке и исследовании соответствующих смешанных задач [11, 19, 57, 59].

1. В работе И. К. Лифанова, А. В. Саакяна [52] рассматривается плоская задача о вдавлении равномерно движущегося штампа в упругую полуплоскость с учетом тепловыделения от трения в зоне их контакта. Предполагается, что заданы размеры области соприкосновения, между взаимодействующими телами осуществляется условие идеального теплового контакта, свободные поверхности штампа и основания теплоизолированы, сила трения связана с контактным давлением законом Амонтона–Кулона с постоянным коэффициентом, а скорость скольжения штампа настолько мала, что можно пренебречь инерционными эффектами в упругой полуплоскости.

Поставленная задача в подвижной системе координат, связанной со штампом, сводится к системе сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестного контактного давления и теплового потока, для решения которой развит численный метод.

Более общая постановка этой задачи в случае неидеальности теплового контакта [17, 56], т.е. наличия между взаимодействующими телами тонкого промежуточного слоя с отличными от них теплофизическими свойствами, дана А. А. Евтушенко, О. М. Уханской [38]. Ими установлено, что когда коэффициенты термического искажения материалов пары трения примерно равны, то в окрестности одного из краев штампа наблюдается его отрыв от основания.

Другим обобщением задачи И. К. Лифанова, А. В. Саакяна явилась постановка, предложенная И. И. Ворвичем, Д. А. Пожарским, М. И. Чебаковым [15]. Они заменили упругую полуплоскость слоем относительно большой толщины, жестко защемленным по основанию, и предположили, что коэффициент трения линейным образом зависит от температуры в области контакта

$$f(T) = f_1 + f_2 T. \quad (2)$$

Основное внимание было уделено вопросу о возможности теплового взрыва [3, 5, 6, 8, 40, 55] или резкого изменения (бифуркации) контактной температуры. Показано, что потеря режима квазистационарной теплопроводности системы происходит на возрастающем участке диаграммы зависимости коэффициента трения от температуры, т.е. при $f_2 > 0$ в формуле (2).

Предлагаемая модель, по словам авторов, в первом приближении может объяснять лавинообразный износ различных движущихся деталей, например, тонких поршневых колец, вызванный их перегревом.

В работе Д. В. Грилицкого, В. И. Паука [25] рассматривается плоская стационарная контактная задача термоупругости при наличии тепловыделения от трения, возникающего при движении бесконечного цилиндрического штампа по поверхности упругого полупространства вдоль своей образующей. Предполагается, что теплообмен между свободной границей

полупространства и окружающей средой подчиняется закону Ньютона, а в области взаимодействия тел ставится условие идеального теплового контакта. Кроме того, скорость скольжения штампа считается достаточно малой величиной, $\tau_{yz} = -f\sigma_y$ ($f = \text{const}$), а размеры площадки контакта изменяются с течением времени.

Задача сводится к системе трех интегральных уравнений относительно тепловых потоков и температуры. Численно изучается влияние тепло-механических свойств цилиндра и полупространства на основные характеристики контакта.

В коллективной публикации [39] излагаются результаты исследований процесса контактного взаимодействия сопряженных цилиндров близких радиусов с учетом температурных деформаций (подшипниковый узел трения). Для определения температурных перемещений методом конечных элементов сначала решается задача теплопроводности, а затем задача термоупругости. Определение контактного давления с учетом найденных температурных деформаций производится численно по методу дискретных вихрей [10], а для определения границы области контакта строится итерационный процесс алгоритма секущих. Исследован критический случай "заклинивания", когда в результате температурных деформаций в верхней точке подшипника возникает соприкосновение с валом и затем образуется новая зона контакта.

М. Б. Генералов, Б. А. Кудрявцев, В. З. Партон [16] решили осесимметричную контактную задачу термоупругости для двух полубесконечных тел, одно из которых вращается вокруг оси симметрии с постоянной угловой скоростью ω . Предполагается, что радиусы кривизны этих тел велики по сравнению с размерами площадки контакта, в связи с чем каждое из них рассматривается как полупространство с прямолинейной границей. Тепловой контакт взаимодействующих тел считается идеальным, их свободные поверхности теплоизолированными, а радиус сопряжения постоянным.

Разрешающая система парных интегральных уравнений задачи позволила определить напряженное состояние контактирующих элементов и температурное поле. Построены графики этих величин.

Д. В. Грилицкий, Р. Д. Кульчицкий-Жигайло приняли [22], что в условиях предыдущей задачи вне площадки контакта между поверхностями соприкасающихся тел и внешней средой осуществляется теплообмен по закону Ньютона, а тепловой контакт между телами является неидеальным. Последнее предположение привело к качественно новому результату. Именно, если тела, составляющие пару трения, изготовлены из материалов с различными физико-механическими свойствами, то в области контакта имеет место скачок температуры, который уменьшается с ростом коэффициента контактной теплопроводности. Кроме того, при неограниченном увеличении прижимающей силы P установлено существование предельной (критической) величины радиуса зоны контакта, определяе-

мой угловой скоростью ω .

Динамика этого явления была изучена в работе [34] на примере двух осесимметричных контактных задач для упругого кольцевого в плане штампа ($a \leq r \leq b$) и деформируемого полупространства. Рассматривается два варианта движения штампа: 1) равномерное скольжение с малой скоростью V ; 2) вращение вокруг оси симметрии с постоянной угловой скоростью ω . Силы трения, связанные с давлением законом Амонтона-Кулона с коэффициентом трения $f = \text{const}$, приводят к возникновению тепловых потоков, распределенных по области контакта. Предполагается, что теплоотдача со свободных поверхностей тел отсутствует и все тепло, генерируемое на площадке контакта, в случае задачи 1 поглощается штампом, а в случае задачи 2 — обоими соприкасаемыми телами (при условии равенства температуры в области взаимодействия).

Предложен подход, позволяющий достаточно просто получить приближенные решения таких задач и найти значение критического радиуса области контакта. Так, если подошва штампа имеет форму параболоида вращения $g(r) = r^2(2R)^{-1}$ ($a = 0$), то предельная величина радиуса площадки контакта имеет вид

$$\begin{aligned} 1) \quad b^* &= \beta(0,5fVE\delta_1)^{-1}, \quad \beta = 2,01; \\ 2) \quad b^* &= \beta^{1/2}(0,5f\omega E\delta)^{-1/2}, \quad \beta = 3,84; \\ \delta &= \frac{\delta_1\lambda_1 + \delta_2\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad \delta_i = \frac{(1 + \nu_i)\alpha_i}{\lambda_i} \quad (i = 1, 2), \end{aligned} \quad (3)$$

где теплофизические и механические постоянные в формулах (3) те же, что и в соотношении (1).

В случае кольцевого штампа для задачи 2 с увеличением силы P внутренний радиус области контакта a убывает и при определенном значении P кольцевая площадка контакта становится круговой. Величина внешнего радиуса b стремится к критическому значению b^* , даваемому вторым выражением (3).

В работе Д. В. Грилицкого, Б. С. Окрепкого [23] исследуется осесимметричный термоупругий контакт вращающегося жесткого цилиндра конечной длины (штампа) и упругого слоя толщины H , покоящегося на недеформируемом основании. Штамп имеет плоскую подошву, радиус которой постоянен и равен a . Предполагается, что на площадке контакта выделяется тепло, количество которого пропорционально коэффициенту трения, скорости вращения и нормальному контактному напряжению. Между свободными поверхностями изучаемой системы тел и окружающей средой происходит теплообмен по закону Ньютона. Предложен способ определения контактного напряжения и температурных полей в соприкасаемых телах. Установлена сильная зависимость этих характеристик от коэффициента термической проводимости и термоконтактного критерия (1), что коррелирует с результатами М. В. Коровчинского, изложенными выше.

Несколько другие предположения при постановке этой задачи сделали В. П. Левицкий и его ученики [50, 51]. Они приняли, что боковая поверхность цилиндра теплоизолирована, теплообмен между верхним торцом цилиндра и окружающей средой осуществляется по закону Ньютона с коэффициентом γ_0 , через незагруженную поверхность полупространства ($H \rightarrow \infty$) происходит конвективный теплообмен с внешней средой с коэффициентом γ_1 , а края штампа слегка закруглены. Рассматривая в качестве материалов пары трения сталь и алюминий, авторы численно доказали существование зоны отрыва штампа от основания при $0 < r_0 \leq r \leq a$, что, по их мнению, должно вести к корректировке граничных условий исследуемой задачи.

В коллективной публикации [20] в предположении неидеальности теплового контакта и теплообмена между взаимодействующими поверхностями и внешней средой по закону Ньютона, изучается влияние процесса теплообразования на распределение контактного давления и температуры в случае плоско-параллельного движения упругого тела вдоль плоской поверхности жесткого теплопроводного основания. Исследования показали, что при отсутствии поступательного перемещения и одинаковых теплофизических свойствах тел поля температуры и тепловых потоков в них совпадают. Наличие поступательного движения приводит к существенному перераспределению потоков тепла, что находит свое отражение в поведении контактного давления и температуры.

Во всех рассмотренных выше смешанных задачах с неидеальным тепловым контактом коэффициент термической проводимости считался постоянной величиной, что не всегда подтверждается экспериментально [60]. В связи с этим А. А. Евтушенко, Е. В. Коваленко [32] изучена плоская задача о взаимодействии двух полубесконечных нагретых тел, когда термосопротивление в области их касания обратно пропорционально контактному давлению

$$\rho(p) = Ap^{-\alpha} \quad (A, \alpha = \text{const}, \alpha \approx 1). \quad (4)$$

Задача приведена к системе нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, для решения которой применяется модификация метода ортогональных функций. Последняя позволила исследовать влияние величины прижимающей силы, теплофизических и механических параметров соприкасающихся тел на давление, тепловой поток и ширину участка взаимодействия.

К исследованиям [32] примыкает по физическому смыслу работа [49]. Авторы рассмотрели вначале осесимметричную термоупругую задачу для слоя конечной толщины, одна из границ которого подвергается воздействию нормального давления и теплового потока, и нашли взаимосвязь между вертикальными перемещениями точек слоя, температурой и возмущающими факторами. Далее, на основании полученных формул, была

решена осесимметричная контактная задача для жесткого теплопроводного основания, армированного тонким упругим покрытием, с учетом тепловыделения от трения.

В работе [33] дана постановка осесимметричной контактной задачи стационарной термоупругости для двух полуограниченных тел с коэффициентами теплопроводности и линейного расширения, зависящими от температуры. Построено ее приближенное решение, согласующееся, в частном случае постоянных теплофизических свойств материалов, с известными результатами. Приведен числовой расчет основных характеристик контакта, когда параметры одного из взаимодействующих тел не зависят от температуры, а второе тело изготовлено из термочувствительного материала — графита $AXF - Q1$.

2. В статье Д. В. Грилицкого, П. П. Краснюка [21] рассматривается динамическая контактная задача по определению стационарных вертикальных термоупругих колебаний и температурных полей в системе двух весомых плоскопараллельных слоев, находящихся под действием гармонической нормальной нагрузки $P(t)$ ($P_1 < P_0$) вида (2.4). Предполагается, что верхний слой совершает антиплоское движение по поверхности нижнего с постоянной малой скоростью, за счет чего в плоскости контакта происходит тепловыделение от трения (коэффициент трения $f = \text{const}$). Считается, что тепловой контакт тел неидеален, а между внешними поверхностями слоев и окружающей средой с нулевой температурой происходит теплообмен по закону Ньютона.

Анализ полученных результатов показывает, что теплообразование, распределение температуры и теплового потока в двухслойном пакете изменяются во времени по закону гармонических колебаний, которые затухают с удалением от плоскости контакта. Подсчитаны сдвиги фаз между различными характеристиками и прослежена их эволюция в зависимости от частоты ω .

В работах [18, 35] изучается плоская нестационарная задача о взаимодействии деформируемого полупространства и упругого бесконечного цилиндрического штампа при наличии тепловыделения за счет трения. Штмп имеет в плане форму параболы, вдавливаясь в основание силой $P = \text{const}$, приложенной с эксцентриситетом e (в варианте [18] $e = 0$), и в момент времени $t = 0$ начинает скользить вдоль своей образующей с постоянной скоростью. Касательные и нормальные напряжения на неизвестной заранее площадке соприкасания теплопроводящих тел связаны зависимостью $\tau_{yz} = -f\sigma_y$ ($f = \text{const}$), а в области их взаимодействия имеет место неидеальный тепловой контакт.

Задача сводится к системе интегральных уравнений относительно контактного давления и тепловых потоков, индуцируемых во взаимодействующие тела, для решения которой разработан численный алгоритм. Рас-

смотрены следующие частные случаи: одно из контактирующих тел теплоизолировано; материалы полупространства и цилиндра имеют одинаковые теплофизические характеристики; контактирующие тела обладают различными теплофизическими свойствами.

Н. П. Старостиним, А. С. Кондаковым, В. А. Морovým [58] на основе модели термоупругого основания Фусса–Винклера предложен метод решения нестационарной термоконтактной задачи для оперативного выбора рациональных триботехнических параметров работоспособности подшипника скольжения (рис. 1, § 3, гл. 5). Разработка алгоритма производится в два этапа. На первом — строится численная схема нахождения нестационарного температурного поля в подшипнике. Предлагаются формулы расчета контактного давления и смещения вала, а также трансцендентное уравнение для определения области контакта при заданном распределении температуры. На втором этапе развивается численный алгоритм решения термоконтактной задачи.

В работах [12, 13] приведен численный метод исследования теплового режима и контактных параметров радиального подшипника скольжения при колебательном движении вала. Температурное поле определялось для всех элементов подшипника введением на дуге контакта локальных граничных условий, вид которых корректировался при помощи решения соответствующей термоупругой задачи. Приведенные расчеты показали значительные различия в основных эксплуатационных характеристиках подшипника при вращательном и осциллирующем движении его вала.

Известно, что торможение представляет собой специфический нестационарный процесс, сопровождающийся значительным тепловыделением и высокими температурами на фрикционном контакте. Анализ работ в этом направлении позволил наметить, на наш взгляд, два пути решения задач о расчете термохарактеристик тормозных устройств.

Первый подход базируется на использовании системы уравнений тепловой динамики трения [14] и предполагает заданным заранее закон распределения давлений на фиксированной площадке контакта

$$p(t) = p_0[1 - \exp(-t/T)](1 + A \sin \omega t). \quad (5)$$

Далее, с учетом формулы (5), решается нестационарная смешанная задача теплопроводности при наличии теплообразования от трения, определяются поля температур во взаимодействующих телах, при помощи которых находятся соответствующие неизвестные величины.

Такой алгоритм позволил, например, провести теоретический анализ температуры разогрева элементов системы тормозного диска [41]; определить максимальную контактную температуру при работе в различных режимах фрикционных муфт и тормозов [28]; установить, что непосредственно после выхода поверхности колеса из-под колодки возникает при-

поверхностный максимум температуры, постепенно удаляющийся от поверхности катания [42].

Второй путь основан либо на нахождении контактного давления и характерных размеров области контакта из соответствующих изотермических смешанных задач, либо на аппроксимации их выражениями, содержащими неизвестные функции, с последующим определением этих величин из задачи теплопроводности. По известным контактным характеристикам восстанавливается затем нестационарное поле температур во фрикционном узле трения, что дает возможность исследовать термонапряженное состояние системы.

Предложенный метод позволил определить максимальную фрикционную температуру во время торможения, а также время ее достижения [26]; оценить уровень температурного поля и термонапряженного состояния в зависимости от параметров микрогеометрии поверхностей контактирующих тел и времени их взаимодействия [29]; проследить влияние конвективного охлаждения на температуру и напряженное состояние пары трения при торможении [27]; разработать методику контроля пластических деформаций, связанных с износом тормозов [37].

3. В работах В. М. Александрова, Е. В. Коваленко [8] и В. М. Александрова [3] рассматриваются плоская и осесимметричная задачи теории упругости для шероховатого слоя большой толщины H (во втором случае $H \rightarrow \infty$) с учетом изнашивания его поверхности и тепловыделения от трения в области контакта, имеющих место, соответственно, при движении бесконечного цилиндрического штампа вдоль своей образующей и от вращения кольцевого в плане штампа вокруг оси симметрии. Предполагается, что 1) область контакта остается неизменной в течение всего времени работы сопряжения и штамп не изнашивается; 2) инерционными силами, возникающими от движения штампа, можно пренебречь; 3) сила трения и контактное давление p связаны законом Амонтона–Кулона с коэффициентом вида (2); 4) износ поверхности основания носит абразивный характер; 5) тепловой контакт между взаимодействующими телами идеальный, а температурное поле в них стационарно.

Поставленные задачи являются нелинейными и сводятся к совместному решению некоторого интегрального уравнения и уравнения теплопроводности. Однако, при помощи введения авторами коэффициента разделения потоков тепла в области контакта (оригинальные исследования по определению этой величины для различных видов сопряжений приведены в [9]), а также разумного усреднения некоторых механических характеристик задач, последние удалось существенно упростить — разбить на износостатические задачи и смешанные задачи теплопроводности для соприкасающихся тел. Получены аналитические формулы для основных характеристик явления. Показано, что существует счетный набор скоро-

стей движения штампа и установлены условия его реализации, при котором происходит потеря режима квазистационарной теплопроводности соответствующей системы (явление теплового взрыва).

В. М. Александров [1, 2] в условиях этих задач предположил, что $f = \text{const}$, а от действия сил трения в области контакта происходит такое интенсивное тепловыделение, когда начинается расплавление тонкого поверхностного слоя материала. Вследствие такого износа идет медленное заглубление штампа, а расплавленный материал выжимается из области контакта. Получены формулы для критической скорости движения штампа, при достижении которой начинается процесс плавления. Выведено интегральное уравнение относительно функции распределения контактного давления; показано, что последнее эволюционирует во времени, стремясь к равномерному.

Обобщению постановки задачи, данной В. М. Александровым и Е. В. Коваленко [8] в случае зависимости коэффициента трения от давления, температуры и скорости скольжения, неидеальности теплового контакта, степенного закона деформирования шероховатостей и износа от $p(x, t)$, посвящена работа [24]. Задача сведена к системе нелинейных интегральных уравнений, решение которой строится методом последовательных приближений. Получен ряд новых результатов по сравнению с [8].

В работе В. М. Александрова, Г. К. Аннакуловой [5] рассматривается задача об истирании (износе) упругого слоя материала (покрытия), нанесенного на жесткое основание, скользящим по поверхности покрытия и давящим на него бесконечным жестким штампом (плитой). При этом на основе решения несвязанной квазистационарной задачи термоупругости для слоя учитывается тепловыделение от трения в области контакта, неоднородность твердости по глубине покрытия, зависимость коэффициента трения и износостойкости от температуры. Определяется ресурс трибосоприжения при абразивном режиме изнашивания.

В статье [6] тех же авторов изучено термосиловое взаимодействие деформируемых покрытий тел с учетом износа. Упругие шероховатые слои (покрытия), имеющие различные толщины, а также различные механические и теплофизические характеристики, нанесены на недеформируемые подложки. Такие два тела сжимаются медленно меняющимися усилиями и одно из них в момент времени $t = 0$ начинает совершать относительно другого антишпоское движение со скоростью V . На границе раздела слоев возникают силы трения $\tau = f(p)p$ ($p(t)$ — контактное давление), вызывающие изнашивание их поверхностей. Эти же силы совершают в единицу времени работу $Q = V\tau$, которая практически вся переходит в тепло.

При весьма общей зависимости коэффициента трения $f(p)$, интенсивности изнашивания и закона смятия шероховатостей от $p(t)$, определены закономерности изменения во времени контактного давления и темпера-

туры взаимодействующих слоев $T_i(t)$ ($i = 1, 2$). Исследовано явление термосилового неустойчивости (ТУН), т.е. найдено ограничение на скорость скольжения $V < V^*$, чтобы функции $p(t)$ и $T_i(t)$ ($i = 1, 2$) убывали с течением времени.

Отметим, что при постановке задачи теплопроводности для покрытий в [6] учитывалась как идеальность теплового контакта, так и его неидеальность, причем термосопротивление $\rho = \text{const}$. В работах [4, 7] для этой величины была принята зависимость (4). Полученное авторами относительно $p(t)$ нелинейное интегральное уравнение Вольтерра решалось при помощи асимптотических методов "большого" и "малого" времени. Дано обобщение этой контактной задачи для варианта, когда покрытия имеют форму концентрических колец.

А. А. Евтушенко, Ю. А. Пырьевым [36] в явном виде построено и проанализировано решение одномерной задачи фрикционного контакта с учетом разогрева от действия сил трения при наличии износа. Для рассматриваемой модели определены условия возникновения ТУН (результаты работ [5, 6] получены здесь как частные случаи). Показано, что учет изнашивания приводит к увеличению критического значения V^* , а когда износ превалирует над термоупругим расширением, ТУН вовсе исчезает. Таким образом, изнашивание выступает стабилизирующим фактором в работе узлов трения.

В. А. Мороз [53] исследовал устойчивость термоупругого фрикционного контакта в трибосистемах типа торцевых и радиальных уплотнений в случае, когда возмущение номинального режима однородно по поверхности контакта. Установлено, что ТУН может быть обусловлена не только перераспределением контактных параметров, но и наличием в конструкции поджимающих элементов достаточно большой жесткости. Трибосистемы типа радиальных уплотнений цилиндра более подвержены опасности возникновения ТУН, нежели уплотнения вала, причем для последних существует диапазон жесткостей систем поджатия, при котором ТУН не возникает ни при какой скорости скольжения. Доказано, что изнашивание элементов узла трения приводит к тому, что его реакция на возмущение может иметь осциллирующий характер даже в случае сохранения однородности поля контактных параметров по области взаимодействия.

В работе [54] проведен анализ ТУН фрикционного контакта при скольжении упругой лопасти по жесткому основанию в случае, когда скорость изнашивания нелинейно зависит от контактного давления или температуры трения. Показано, что при этом величина V^* существенно зависит от нагрузки на лопасть. Предлагается дополнить диаграммы $p - V$, по которым традиционно оценивается возможность применения материалов в узлах трения, зависимостью $V^*(p)$, построенной на основе анализа ТУН.

Е. В. Коваленко, А. А. Евтушенко [40] построили аналитическое ре-

шение контактной задачи термоупругости об износе тонкого вкладыша подшипника скольжения (см. рис. 1, § 3, гл. 5) с учетом тепловыделения от трения. Авторы предположили, что коэффициент трения скольжения является линейной функцией температуры (2), а в процессе работы фрикционного узла область контакта вала и втулки описывается монотонно возрастающей функцией. Это накладывает определенные ограничения на скорость вращения вала, режим охлаждения корпуса подшипника и условия отвода тепла через вал, что согласовано в статье с потерей режимов квазистационарной теплопроводности и термосиловой устойчивости работы подшипника. Исследована эволюция во времени размеров области контакта и контактного давления; установлена точность асимптотического решения задачи.

Те же авторы [30] в условиях предыдущей задачи изучили случай износа оплавлением полимерного вкладыша рассматриваемого трибосопряжения. Найдена зависимость критической скорости вращения вала, при которой начинается процесс плавления, а также, на основании разработанного пошагового по времени метода решения разрешающего нелинейного интегрального уравнения, получены формулы для основных эксплуатационных характеристик подшипника: осадки точек кольца, угла контакта и контактного давления.

В работе А. А. Евтушенко, Е. В. Коваленко [31] в предположении квадратичного изменения нормальных перемещений по радиальной координате получено решение осесимметричной контактной задачи для полупространства при учете нестационарного тепловыделения от трения и износа. Задача сведена к нелинейному интегральному уравнению Вольтерра относительно безразмерного радиуса площадки контакта

$$0,783 \left[\frac{1}{a^3(t)} - \frac{1}{a^3(0)} \right] = \int_0^t [B(t, \tau) - 0,783] \frac{d\tau}{a^4(\tau)} \quad (t \geq 0). \quad (6)$$

Построены асимптотические решения уравнения (6) при относительно малых и больших значениях времени, а также разработан численный алгоритм его исследования в общем случае. Предложенные математические методы позволили изучить влияние на размеры области контакта двух противоположных по характеру процессов — фрикционного теплообразования и износа. Кроме того, установлено, что относительная погрешность при вычислении радиуса площадки контакта в установившемся и нестационарном режимах тепловыделения может составить 21,7%.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В. М. Контактная задача с учетом износа, вызванного локальным оплавлением // Физико-хим. механика материалов. 1986. № 1. С. 116–124.

2. Александров В. М. Осесимметричная контактная задача об износе оплавлением // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 6. С. 36–42.
3. Александров В. М. Осесимметричная контактная задача термоупругости с учетом износа // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 5. С. 73–80.
4. Александров В. М. О термосиловом взаимодействии деформируемых покрытий тел с учетом износа // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1995. № 5. С. 70–75.
5. Александров В. М., Аннакулова Г. К. Контактная задача термоупругости с учетом износа и тепловыделения от трения // Трение и износ. 1990. Т. 11. № 1. С. 24–28.
6. Александров В. М., Аннакулова Г. К. Взаимодействие покрытий тел с учетом деформируемости, износа и тепловыделения от трения // Трение и износ. 1992. Т. 13. № 1. С. 154–160.
7. Alexandrov V., Gavdzinski V. Contact interaction of deformed coverings of solids with regard for wear and friction heating // Proc. of the Second Intern. Symp. on Thermal Stresses and Related Topics, 1997. New York, Rochester, 1997. P. 371–373.
8. Александров В. М., Коваленко Е. В. Методы решения контактных задач термоупругости с учетом износа взаимодействующих поверхностей // ПМТФ. 1985. № 3. С. 129–131.
9. Балакин В. А., Сергиенко В. П., Камков О. Ю. Теплоперенос в зоне фрикционного контакта при включении дисковых муфт сцепления и тормозов // Трение и износ. 1997. Т. 18. № 4. С. 450–455.
10. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 253 с.
11. Богатин О. Б., Мороз В. А., Черский И. Н. Основы расчета полимерных узлов трения. Новосибирск: Наука, 1983. 213 с.
12. Богатин О. Б., Тихонов А. Г. Исследование температурных эффектов в подшипниках колебательного движения // Исследование триботехнических систем в условиях холодного климата. Якутск: ЯФ СО АН СССР. 1985. С. 34–44.
13. Богатин О. Б., Черский И. Н., Тихонов А. Г. Особенности температурного поля при трении опор возвратно-вращательного движения // Трение и износ. 1987. Т. 8. № 3. С. 437–444.
14. Браун Э. Д., Евдокимов Ю. А., Чичинадзе А. В. Моделирование трения и изнашивания в машинах. М.: Машиностроение, 1982. 191 с.
15. Ворovich И. И., Пожарский Д. А., Чебаков М. И. Задача термоупругости о движущемся штампе при учете тепловыделения от трения // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 3. С. 161–166.
16. Генералов М. Б., Кудрявцев Б. А., Партон В. З. Контактная задача термоупругости для вращающихся тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 3. С. 46–52.
17. Грилицкий Д. В., Баран В. П. О постановке контактных задач термоупругости с учетом теплообразования при неидеальном тепловом контакте тел // Вестник Львовского ун-та. Сер. мех.-мат. 1987. Вып. 27. С. 10–14.
18. Грилицкий Д. В., Евтушенко А. А., Паук В. И. Плоская контактная задача нестационарной термоупругости с учетом теплообразования от трения // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 5. С. 62–68.
19. Грилицкий Д. В., Кизыма Я. М. Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости. Львов: Вища школа, 1981. 136 с.

20. Грилицкий Д. В., Колесов В. С., Кульчицкий-Жигайло Р. Д. Поступательно-вращательное движение упругого тела вращения по плоской поверхности жесткого теплоизолированного основания // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 2. С. 85–92.
21. Грилицкий Д. В., Краснюк П. П. Установившиеся вертикальные термоупругие колебания системы двух плоскопараллельных слоев с теплообразованием от трения // ИФЖ. 1997. Т. 70. № 4. С. 695–698.
22. Грилицкий Д. В., Кульчицкий-Жигайло Р. Д. Осесимметричная контактная задача термоупругости для вращающихся тел // Физико-хим. механика материалов. 1991. № 3. С. 93–97.
23. Грилицкий Д. В., Окренкий Б. С. Осесимметричная контактная задача термоупругости о давлении вращающегося штампа на слой // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 1. С. 22–30.
24. Грилицкий Д. В., Паук В. И. Контактная задача для толстого шероховатого слоя с учетом износа и теплообразования // Физико-хим. механика материалов. 1989. Т. 25. № 3. С. 78–83.
25. Грилицкий Д. В., Паук В. И. Плоская контактная задача стационарной термоупругости при учете тепловыделения // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 6. С. 1043–1048.
26. Евтушенко А. А., Иваник Е. Г. Исследование тепловых режимов при фрикционном торможении // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 6. С. 73–81.
27. Евтушенко А. А., Иваник Е. Г., Горбачева Н. В. Влияние конвективного охлаждения на температуру и напряженное состояние при торможении // Трение и износ. 1997. Т. 18. № 5. С. 578–587.
28. Евтушенко А. А., Иваник Е. Г. К определению максимальной контактной температуры фрикционных муфт и тормозов // Трение и износ. 1997. Т. 18. № 6. С. 766–771.
29. Евтушенко А. А., Иваник Е. Г., Коваленко Е. В. Нестационарный фрикционный разогрев упругого шероховатого тела // Трение и износ. 1998. Т. 19. № 1. С. 17–25.
30. Евтушенко А. А., Коваленко Е. В. Контактная задача об износе оплавлением вкладыша подшипника скольжения // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 1. С. 148–156.
31. Евтушенко А. А., Коваленко Е. В. О взаимодействии фрикционного теплообразования и износа на нестационарном контакте скольжения // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 3. С. 485–492.
32. Евтушенко А. А., Коваленко Е. В. Влияние термосопротивления на основные характеристики контакта в условиях плоской задачи // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 4. С. 56–62.
33. Евтушенко А. А., Коваленко Е. В., Кульчицкий-Жигайло Р. Д. Осесимметричный контакт между термочувствительными телами с различными температурами // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 1. С. 70–77.
34. Евтушенко А. А., Кульчицкий-Жигайло Р. Д. Об одном способе решения осесимметричных контактных задач стационарной термоупругости с учетом фрикционного теплообразования // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 4. С. 54–61.
35. Евтушенко А. А., Паук В. И. Нестационарная контактная задача для шероховатых тел при учете теплообразования от трения // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 4. С. 691–696.
36. Евтушенко А. А., Пырьев Ю. А. Влияние изнашивания на развитие термоупругой неустойчивости фрикционного контакта // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 1. С. 114–121.

37. Евтушенко А. А., Уханская О. М. Нестационарный фрикционный разогрев при скольжении упругих сжимаемых тел // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 1. С. 111–117.
38. Евтушенко А. А., Уханская О. М. Плоская контактная задача термоупругости при квазистационарном теплообразовании от трения // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 5. С. 37–45.
39. Ефимов А. Б., Дроздов Ю. Н., Наумова Н. М., Гасанов А. И., Пучков В. Н. Контактные взаимодействия в цилиндрической опоре скольжения с учетом температурных деформаций // Трение и износ. 1989. Т. 10. № 3. С. 389–394.
40. Коваленко Е. В., Евтушенко А. А. Износ подшипника скольжения с учетом тепловыделения от трения // Трение и износ. 1993. Т. 14. № 2. С. 259–269.
41. Коваленко Е. В., Евтушенко А. А., Иваник Е. Г. К расчету температуры при торможении // Трение и износ. 1996. Т. 17. № 4. С. 435–441.
42. Колесников В. И., Задорожный А. И., Ковальчук В. Е. Асимптотический расчет периодического температурного поля, возникающего в трибосистемах // Вестник машиностроения. 1986. № 12. С. 23–24.
43. Коровчинский М. В. Плоская контактная задача термоупругости при стационарном тепловыделении на поверхностях соприкосновения // Контактная прочность машиностроительных материалов. М.: Наука, 1964. С. 5–24.
44. Коровчинский М. В. Локальный термический контакт при квазистационарном тепловыделении в процессе трения // Теория трения и износа. М.: Наука, 1965. С. 73–81.
45. Коровчинский М. В. Основы теории термического контакта при локальном трении. Ч. 1. // Новое в теории трения. М.: Наука, 1966. С. 98–145.
46. Коровчинский М. В. Основы теории термического контакта при локальном трении. Ч. 2. // Вопросы трения и проблемы смазки. М.: Наука, 1968. С. 5–72.
47. Коровчинский М. В. Локальный контакт упругих тел при изнашивании их поверхностей // Контактное взаимодействие твердых тел и расчет сил трения и износа. М.: Наука, 1971. С. 130–140.
48. Коровчинский М. В. Осесимметричный термоупругий контакт при тепловыделении от трения // Задачи нестационарного трения в машинах, приборах и аппаратах. М.: Наука, 1978. С. 68–92.
49. Кульчицкий-Жигайло Р. Д., Евтушенко А. А. Влияние тонкого покрытия на распределение давления в контактных задачах с учетом фрикционного теплообразования // ПМТФ. 1998. Т. 39. № 1. С. 110–118.
50. Левицкий В. П., Новосад В. П., Онышкевич В. М. Взаимодействие жесткого цилиндра с упругим полупространством при теплообразовании на площадке контакта // Прикл. механика. 1994. Т. 30. № 11. С. 26–31.
51. Левицкий В. П., Яськевич И. Т., Онышкевич В. М. Тепловые эффекты в контактных задачах термоупругости // Трение и износ. 1994. Т. 15. № 3. С. 358–365.
52. Лифанов И. К., Саакян А. В. Метод численного решения задачи о вдавлении движущегося штампа в упругую полуплоскость с учетом тепловыделения // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 3. С. 494–501.
53. Мороз В. А. Анализ термоупругой неустойчивости в трибосистемах типа подвижных уплотнений при осесимметричном возмущении // Исследование триботехнических систем в условиях холодного климата. Якутск: ЯФ СО АН СССР, 1985. С. 21–33.
54. Мороз В. А. Влияние нагрузки на термоупругую неустойчивость фрикционного контакта // Исследование триботехнических систем в условиях холодного климата. Якутск: ЯФ СО АН СССР, 1985. С. 52–59.

55. Морев В. А., Черский И. Н. Термоупругая неустойчивость фрикционного контакта штампов с полупространством // Трение и износ. 1985. Т. 6. № 1. С. 27–38.
56. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Обобщенная термомеханика. Киев: Наукова думка, 1976. 311 с.
57. Развитие теории контактных задач в СССР / Под ред. Галина Л. А. М.: Наука, 1976. 493 с.
58. Старостин Н. П., Кондаков А. С., Морев В. А. Анализ нестационарного термоконтактного взаимодействия в цилиндрических опорах скольжения с тонкими покрытиями // Трение и износ. 1997. Т. 18. № 6. С. 772–781.
59. Трение и износ фрикционных материалов / Под ред. Чичинадзе А. В. М.: Наука, 1977. 136 с.
60. Шлыков Ю. П., Ганин Е. А., Царевский С. Н. Контактное термическое сопротивление. М.: Энергия, 1977. 328 с.

§ 5. КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ С ОДНОСТОРОННИМИ СВЯЗЯМИ И УЧЕТОМ СИЛ ТРЕНИЯ

А. С. Кравчук

1. Законы трения, используемые в контактных задачах. Поверхности соприкасающихся деталей машин всегда, при сколь угодно тщательной обработке, содержат начальные несовершенства, которые в процессе работы могут меняться, и даже при наличии хорошей смазки (если только это не жидкий гелий в состоянии сверхтекучести) силы трения не равны нулю. Количественной характеристикой сил трения является касательная компонента σ_T вектора поверхностных усилий на границе тела. Законы, управляющие изменением σ_T при нагружении системы, будем называть законами трения. Силы трения зависят от относительной скорости v_T скольжения контактирующих тел в точке x их общей границы Σ_c и от величины нормального давления σ_N , причем в общем случае эта зависимость нелинейная. Граничное трение твердых деформируемых тел, в отличие от жидкого трения (трения слоев жидкости друг по другу), имеет пороговый характер, т.е. существует некоторое предельное значение величины σ_T , ниже которого относительная скорость скольжения v_T равна нулю. Следовательно, для нахождения сил трения в таких ситуациях надо разрабатывать специальные методы, о чем и идет речь в настоящем параграфе

Исторически первой корректной математической формулировкой закона трения была формулировка Амонтона, которую (не совсем точно) обычно называют законом Кулона.

Рассмотрим для упрощения рассуждений задачу о контакте одного деформируемого твердого тела с абсолютно жестким неподвижным штампом; обозначая производную по времени штрихом, запишем закон трения Амонтона (или Амонтона–Кулона) в следующем виде:

$$|\sigma_T| < f|\sigma_N| \implies \mathbf{u}' = \mathbf{0}, \quad (1)$$

$$|\sigma_T| = f|\sigma_N| \implies \frac{\sigma_T}{|\sigma_T|} = -\frac{u'_T}{|u'_T|}, \quad (2)$$

где f — коэффициент трения, в теории Амонтона–Кулона предполагаемый постоянным.

Закон трения (1)–(2) может, как отмечалось многими исследователями, приводить к физически абсурдным результатам, например, к неограниченному росту сил трения при отсутствии пластического течения или разрушения приграничных слоев материала. Этот дефект может быть устранен следующим образом [4, 6]:

$$\begin{aligned} &\text{если } |\sigma_T| < f|\sigma_N| \text{ и одновременно } |\sigma_T| < \tau_s, \text{ то } \mathbf{u}'_T = \mathbf{0}; \\ &\text{если } |\sigma_T| = f|\sigma_N| \text{ или } |\sigma_T| = \tau_s, \text{ то } \frac{\sigma_T}{|\sigma_T|} = -\frac{u'_T}{|u'_T|}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\tau_s = \text{const}$ или τ_s — функция деформаций и скоростей деформаций, имеющая смысл предела текучести материала на сдвиг, f — коэффициент трения скольжения.

Из опыта известно также, что коэффициент трения на некотором промежутке времени от момента начала скольжения может представлять собой убывающую функцию времени, что приводит к колебательному характеру процесса движения. Для описания данного эффекта также необходимо использовать модифицированный — по сравнению с законом Амонтона–Кулона — закон трения.

2. Построение квазивариационных неравенств. Рассмотрим задачу о нахождении напряженно-деформированного состояния линейно упругого тела, занимающего область Ω с границей $\Sigma = \Sigma_u \cup \Sigma_\sigma \cup \Sigma_c$. На части границы Σ_u заданы граничные условия в перемещениях:

$$\mathbf{u}|_{\Sigma_u} = \mathbf{0}. \quad (4)$$

На части границы Σ_σ заданы граничные условия в усилиях:

$$\sigma_{ij}\nu_j|_{\Sigma_\sigma} = P_i, \quad (5)$$

где, как и ранее, в §7 главы 1, через ν_j обозначены компоненты единичной внешней нормали к граничной поверхности. Точки части границы Σ_c могут входить в соприкосновение со штампом, уравнение границы которого

$$\Psi(\mathbf{x}) = 0. \quad (6)$$

Как и ранее, функция $\Psi(\mathbf{x})$ выбирается таким образом, чтобы для точек \mathbf{x} внутри штампа было $\Psi(\mathbf{x}) < 0$, вне — $\Psi(\mathbf{x}) > 0$. Тогда граничные условия на Σ_c формулируются следующим образом:

условие непроникания

$$\Psi(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})) \geq 0; \quad (7)$$

условие неположительности нормального давления σ_N

$$\sigma_N = \sigma_{ij}\nu_j\nu_i \leq 0; \quad (8)$$

уравнение (по поводу которого см. п. 1.4)

$$\Psi(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}))\sigma_N(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Sigma_c. \quad (9)$$

На части границы Σ_c , точки которой могут входить в контакт с жестким штампом, необходимо удовлетворить условиям (1), (2) или (3). Очевидно, что речь здесь идет об определении процесса изменения напряженно-деформированного состояния во времени, поскольку в постановку задачи входят производные по t и, стало быть, имеет место зависимость от истории процесса нагружения системы.

Следовательно, для перехода к вариационной постановке необходимо вместо принципа возможных перемещений использовать принцип возможных скоростей. Будем временно считать усилия на контактной поверхности известными и рассмотрим сразу динамическую задачу, с тем чтобы установить ограничения на поля возможных скоростей в динамике и от них уже переходить к ограничениям в квазистатических задачах. Повторяя рассуждения, используемые при построении вариационного уравнения Лагранжа, с заменой вариаций полей перемещений на вариации скоростей $\delta \mathbf{u}'$, перейдем от локальной постановки задачи с граничными условиями (1)–(2), (4)–(9) к интегральному тождеству

$$a(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}') = L(\delta \mathbf{u}') + \int_{\Sigma_c} (\sigma_N \delta u'_N + \sigma_T \cdot \delta \mathbf{u}'_T) d\Sigma - \int_{\Omega} \rho \mathbf{u}'' \cdot \delta \mathbf{u}' d\Omega, \quad (10)$$

в котором использованы обозначения $a(\cdot, \cdot)$, $L(\cdot)$ для билинейной и линейной форм из п. 1.4; двойной штрих означает вторую производную по времени.

Минимальные функциональные требования на поля возможных перемещений и скоростей указаны в монографии [9]; мы не будем останавливаться здесь на этих аспектах проблемы, сосредоточив внимание на алгоритмической стороне проблемы, считая определение пространства решений $W(0, T)$ известным [9].

Разберем, прежде всего, вопрос о формулировке условий на поверхности соприкосновения, которые позволят решить вопрос об определении границ зон сцепления и скольжения, а также контактных усилий; используем в качестве основы метод М. В. Остроградского [11]. Предположим временно (для общности), что скорости и ускорения не малы, и запишем условие непроникания для моментов времени t_0 и $t_0 + dt$ без предварительной линеаризации функции $\Psi(\mathbf{x} + \mathbf{u})$ по перемещениям \mathbf{u} :

$$\Psi(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0)) \geq 0, \quad \Psi(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0 + dt)) \geq 0. \quad (11)$$

Разложим левую часть второго из неравенств (11) в ряд по dt , ограничиваясь членами второго порядка малости:

$$\Psi(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0)) + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \Big|_{t=t_0} dt + \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial u_i \partial u_j} \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial u_i} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right) \Big|_{t=t_0} \frac{dt^2}{2} \geq 0. \quad (12)$$

В соответствии с методом Майера–Остроградского, ускорения в начальный момент времени определяются при помощи принципа наименьшего принуждения Гаусса. Далее производится интегрирование уравнений движения при соблюдении сформулированных выше условий на части $\Sigma_c^{t_0}$

границы Σ_c , где

$$\Sigma_c^{t_0} = \left\{ \mathbf{x} \mid \Psi(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0)) = 0; \left(\frac{\partial \Psi}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \Big|_{t=t_0} = 0; \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial u_i \partial u_j} \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial u_i} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right) \Big|_{t=t_0} = 0 \right\}. \quad (13)$$

Точки, в которых условия в определении (13) со временем нарушаются, при формулировке ограничений отбрасываются; точки, для которых условия (13) начинают соблюдаться, попадают в разряд тех, которые участвуют в определении допустимых полей скоростей и перемещений.

Рассмотрев, наряду с полем истинных скоростей \mathbf{u}' , поле возможных скоростей $\mathbf{u}' + \delta \mathbf{u}'$, придем к ограничению

$$\delta \mathbf{u}' \cdot \nabla \Psi \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Sigma_c^{t_0}. \quad (14)$$

В квазистатических задачах из определения множества $\Sigma_c^{t_0}$ по формуле (13) выпадает последнее равенство. Собирая полученные результаты, определяем множество $K \subset W(0, t)$ по формуле

$$K = \{ \mathbf{u} \mid \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x} \in \Omega, t \in [0, T]; \mathbf{u} \in W(0, T); u_N(\mathbf{x}, t) \leq \delta_N(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Sigma_c^t; \mathbf{u}' \cdot \nabla \Psi \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Sigma_c^t \}. \quad (16)$$

Используя введенные определения, можно доказать [9], что для любого кинематически возможного поля скоростей имеет место оценка

$$\sigma_T \cdot (\mathbf{v}'_T - \mathbf{u}'_T) \geq -f |\sigma_N(\mathbf{u})| (|\mathbf{v}'_T| - |\mathbf{u}'_T|). \quad (17)$$

Из интегрального тождества (10) и неравенства (17) и вытекает основное неравенство:

$$a(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}') - L(\delta \mathbf{u}') + \int_{\Sigma_c} f |\sigma_N(\mathbf{u})| (|\mathbf{v}'_T| - |\mathbf{u}'_T|) d\Sigma \geq \geq - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \delta d\Omega \quad \forall \delta \mathbf{u}' = \mathbf{v}' - \mathbf{u}', \quad \mathbf{u} \in K, \quad \mathbf{v} \in K. \quad (18)$$

Следовательно, любое решение задачи об определении напряженно-деформированного состояния линейно упругого тела с граничными условиями (1)–(2), (4)–(9) удовлетворяет неравенству (18). Поскольку возможные скорости в текущий момент времени t принадлежат множеству, зависящему от состояния системы в этот момент, то в соответствии с введенной Ж.-Л. Лионсом терминологией [13] (см. также [1]) неравенство (18) принадлежит к типу квазивариационных.

Обратный переход от квазивариационного неравенства (18) к локальной постановке выполнен в работе [7]; решение квазивариационного неравенства (18) называется обобщенным решением исходной контактной задачи с трением на границе.

Используя однородность закона Кулона и неравенства (18) относительно временной переменной t , для квазистатических задач, когда силами инерции пренебрегают, неравенство (18) можно записать с использованием дифференциала $d\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(t+dt)} - \mathbf{u}^t$ (который при использовании метода конечных разностей по времени заменяется конечным приращением поля перемещений):

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) - L(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + \int_{\Sigma_c} f |\sigma_N(\mathbf{u})| (|\mathbf{v}_T - \mathbf{u}_T^t| - |\mathbf{u}_T - \mathbf{u}_T^t|) d\Sigma \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in K, \quad \mathbf{u} \in K \quad (19)$$

(для сокращения записи индекс $(t+dt)$ опущен). Комбинируя рассуждения и выкладки, проведенные выше при построении неравенства (18) и неравенств, соответствующих задаче о соприкосновении нескольких упругих тел, устанавливаем, что динамическая задача о контакте нескольких тел эквивалентна квазивариационному неравенству

$$\sum_{\alpha} \int_{\Omega^{\alpha}} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{\alpha}}{\partial t^2} \cdot \delta \mathbf{u}'^{\alpha} d\Omega^{\alpha} + a(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}') + \sum_{\alpha} \int_{\Sigma_c^{\alpha}} f^{\alpha\beta} |\sigma_N^{\alpha}| (|\mathbf{v}'_T^{\alpha}| - |\mathbf{u}'_T^{\alpha}|) d\Sigma^{\alpha} \geq L(\delta \mathbf{u}) \quad \forall \delta \mathbf{u}' = \mathbf{v}' - \mathbf{u}', \quad \mathbf{v} \in K, \quad \mathbf{u} \in K, \quad (20)$$

в котором функционалы $a(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}')$, $L(\delta \mathbf{u}')$ определены в §7 главы 1, индексы α, β — номера соприкасающихся тел по общей части границы Σ_c^{α} с коэффициентом трения $f^{\alpha\beta}$.

Квазистатические задачи можно преобразовать к квазивариационному неравенству

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + L(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + \sum_{\alpha} \int_{\Sigma_c^{\alpha}} f^{\alpha\beta} |\sigma_N^{\alpha}| (|\mathbf{v}_T^{\alpha} - \mathbf{u}_T^{\alpha}| - |\mathbf{u}_T^{\alpha} - \mathbf{u}_T^{\alpha}|) d\Sigma^{\alpha} \geq L(\delta \mathbf{u}) \quad \forall \delta \mathbf{u}' = \mathbf{v}' - \mathbf{u}', \quad \mathbf{v} \in K, \quad \mathbf{u} \in K, \quad (21)$$

в котором \mathbf{u}_T^{α} — решение для момента времени t , $\mathbf{u}_T^{\alpha} \equiv \mathbf{u}_T^{(t+dt)\alpha}$ — решение — как и в неравенстве (19) — в бесконечно близкий следующий момент времени.

Если закрепленная часть границы отсутствует, то, поскольку зона скольжения может охватить всю зону контакта, возможна потеря устойчивости всей системы тел. Для предотвращения (или определения возможности возникновения) такого эффекта в процессе решения необходимо контролировать выполнение неравенства

$$L(\delta \mathbf{y}) < \sum_{\alpha} \int_{\Sigma_c^{\alpha}} f^{\alpha\beta} |\sigma_N^{\alpha}| (|\mathbf{y}_T^{\alpha} + \mathbf{u}_T^{\alpha} - \mathbf{u}_T^{\alpha}| - |\mathbf{u}_T^{\alpha} - \mathbf{u}_T^{\alpha}|) d\Sigma^{\alpha}. \quad (22)$$

При учете конечных деформаций можно доказать [10], что квазистатическая задача о контакте одного деформируемого тела с абсолютно жест-

ким штампом эквивалентна квазивариационному неравенству

$$\int_{\Omega_0} s_0^{ir} (\delta_r^j + u_{,r}^j) (v_{,i}^j - u_{,i}^j) d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \rho_0 F_0 \cdot (v - u) d\Omega_0 - \int_{\Sigma_0} kP \cdot (v - u) d\Sigma_0 \geq 0 \quad \forall \delta u = v - u, \quad v \in K, \quad u \in K, \quad \delta u \in K_u, \quad (23)$$

в котором множества K и K_u определены так, как это сделано в § главы 1; решение $u \equiv u^{(t+dt)}$ и возможные скорости v должны удовлетворять неравенству

$$(v - u^t) \cdot \nabla \Psi(a + u) \geq 0 \quad \forall a \in \Sigma_{0c}^t, \quad (24)$$

где

$$\Sigma_{0c}^t = \{ a \mid a \in \Sigma_{0c}; \Psi(a + u^t) = 0; (u - u^t) \cdot \nabla \Psi(a + u^t) = 0 \}. \quad (25)$$

Приведенные построения легко обобщаются на случай обобщенного закона трения (3) — соответствующие результаты можно найти в работах [7, 9].

3. Решение квазивариационных неравенств. Для решения квазивариационных неравенств типа (18)–(21), (23) в работах [7, 9] был предложен следующий итерационный процесс (для определенности рассмотрим неравенство (19)):

$$a(u^{(r+1)}, v - u^{(r+1)}) - L(v - u^{(r+1)}) + \int_{\Sigma_c} f |\sigma_N(u^r)| (|v_T - u_T^t| - |u_T^{(r+1)} - u_T^t|) d\Sigma \geq 0 \quad \forall v \in K, \quad u^{(r+1)} \in K. \quad (26)$$

Если начальное приближение строится как решение задачи без трения, то, по терминологии квазивариационных неравенств, предел последовательности $\{u^r\}_{r=0}^{+\infty}$ приближенных решений называется максимальным решением квазивариационного неравенства; если же итерации начинать со случая полного сцепления, то соответствующий предел называется минимальным решением. Проблема (для векторных полей до сих пор не решенная) заключается в том, чтобы доказать совпадение минимального и максимального решений, что позволит сделать вывод о единственности.

В работе [7] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Если коэффициент трения удовлетворяет неравенству

$$f < \alpha/c, \quad (27)$$

где α — постоянная в неравенстве положительной определенности формы $a(u, v)$, т.е. $a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V$, c — постоянная, определяемая свойствами непрерывности входящих в постановку задачи функционалов и

операторов, то последовательность приближенных решений, определяемая итерационным процессом (26), сходящаяся, ее предел — решение вариационного неравенства (19).

Неравенство (26) является вариационным; другими словами, оно сводится к задаче минимизации функционала

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - L(v) + \int_{\Sigma_c} f |\sigma_N(u^r)| (|v_T - u_T^t|) d\Sigma \quad (28)$$

на множестве полей перемещений, удовлетворяющих условию непроникания на множестве K .

Как установлено в работах Ж.-Л. Лионса и Ж. Дюво [5], задача минимизации функционалов типа (28) имеет решение и притом только одно. Отметим, что в формулировке закона трения в этих работах фигурируют перемещения, а не скорости относительного скольжения. Условия, при которых возможна замена скоростей перемещениями, указаны в работе [9].

С использованием очевидного равенства

$$f |\sigma_N| |v_T - u_T^t| = \max_{\sigma_T, |\sigma_T| \leq f |\sigma_N(u^r)|} (-\sigma_T) \cdot (v_T - u_T^t) \quad (29)$$

эта задача приводится к следующей проблеме разыскания седловой точки:

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - L(v) - \int_{\Sigma_c} [\sigma_T \cdot (v_T - u_T^t) - \sigma_N (\delta_N - v_N)] d\Sigma \rightarrow \min_{v \in V} \max_{|\sigma_T| \leq f |\sigma_N(u^r)|, \sigma_N \leq 0}, \quad (30)$$

которая, в свою очередь, может быть решена по методу Удзавы (описание данного метода см. в §7 главы 1).

Данный метод был реализован на примере контактной задачи о внедрении жесткого штампа в упругое полупространство в работе [8].

Сходимость данного метода оказалась медленной, тем не менее в настоящее время это, по-видимому, единственный метод, который позволяет дать оценку взаимного влияния касательной и нормальной составляющих вектора усилий контактного взаимодействия. Как установлено в работе [8], эта зависимость для реально встречающихся значений коэффициента Пуассона невелика.

Условия, при которых задачи определения нормальной σ_N и касательной компонент σ_T вектора усилий контактного взаимодействия можно разделить, были установлены, в частности, в работе [12]. Для этого случая, как оказалось [3], хорошо работают алгоритмы нелинейного программирования, подходящим образом модифицированные для учета специфики контактных задач.

В заключение данного параграфа отметим, что в работе [2] развит оригинальный подход к учету трения на поверхности контактирующих тел,

основанный на вычислении предела решений задач о контакте тел с «зубчатой» поверхностью при стремлении высоты зубцов к нулю (здесь также использована гипотеза о возможности разделения задач о нахождении касательной и нормальной составляющих вектора усилий контактного взаимодействия).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бенсуссан А., Лионс Ж.-Л. Импульсное управление и квазивариационные неравенства. М.: Наука, 1987. 368 с.
2. Вовкушевский А. В., Шойхет Б. А. Расчет массивных гидротехнических сооружений с учетом раскрытия швов. М.: Энергоиздат, 1981. 136 с.
3. Гольдштейн Р. В., Зазовский А. Ф., Спектор А. А., Федоренко Р. П. Вариационный метод решения пространственных контактных задач с проскальзыванием и сцеплением. Препринт № 138. М.: Ин-т прикладной математики АН СССР. 1988. 42 с.
4. Григорян С. С. Новый закон трения и механизм крупномасштабных горных обвалов и оползней // Докл. АН СССР. 1979. Т. 244. № 4. С. 846–849.
5. Дюво Ж., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 383 с.
6. Ильюшин А. А. Вопросы теории пластического течения по поверхностям // ПММ. 1954. Т. 48. Вып. 3. С. 265–288.
7. Кравчук А. С. К теории контактных задач с учетом трения на поверхности соприкосновения // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 1. С. 122–129.
8. Кравчук А. С. Решение некоторых пространственных контактных задач с учетом трения на поверхности соприкосновения // Трение и износ. 1981. Т. 2. № 4. С. 589–595.
9. Кравчук А. С. Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. М.: Изд-во Московской государственной академии приборостроения и информатики, 1997. 339 с.
10. Кравчук А. С., Сурсяков В. А. Численное решение геометрически нелинейных контактных задач // Докл. АН СССР. 1981. Т. 259, № 6. С. 1327–1329.
11. Остроградский М. В. Мемуар о мгновенных перемещениях систем, подчиненных переменным условиям // Полное собр. трудов. Т. 2. Киев: АН УССР, 1960. С. 32–59.
12. Спектор А. А. Некоторые пространственные статические контактные задачи с проскальзыванием и сцеплением // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 3. С. 12–25.
13. Lions J.-L. Surface problems: Methods of variational and quasivariational inequalities // Lect. Notes in Math. Syst. 1975. No. 461. P. 129–148.

§ 6. ПЛОСКИЕ И ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ КОНТАКТНО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СМАЗКИ

М. Я. Пановко

Задачи контактно-гидродинамической теории смазки возникают при анализе процессов в зоне контакта смазанных деформируемых тел, образующих различные узлы трения. В настоящем обзоре рассматриваются основные результаты, полученные асимптотическими и численными методами применительно к режиму упругогидродинамической (УГД) смазки тяжело нагруженных сосредоточенных контактов. УГД смазка характеризуется наличием тонкой смазочной пленки, толщина которой в несколько раз превосходит высоту шероховатости поверхностей, и упругой деформацией тел в зоне контакта. Тяжело нагруженным считается смазанный контакт, давление в котором, за исключением малых зон входа и выхода, близко к герцевскому. В зависимости от формы контактирующих тел различают линейный и точечный (круговой, эллиптический) контакты. Подшипники качения (роликовые, шариковые) и зубчатые передачи являются типичными примерами узлов трения со смазанными сосредоточенными (линейными, точечными) контактами, работающими в условиях УГД смазки. При исследовании линейного УГД контакта решается задача в плоской постановке, в случае точечного УГД контакта — в пространственной.

1. Система уравнений, описывающая течение смазки в УГД контакте, выводится с учетом ряда допущений (их обсуждение см., например, в [5, 7, 32]) из уравнений гидродинамики, теплопереноса и теории упругости. Основные допущения заключаются в следующем: толщина слоя смазки существенно меньше радиусов контактирующих тел, силы вязкого трения значительно больше инерционных, локально контактирующие тела заменяются полупространствами. Связь между тензором скоростей деформации и тензором напряжений, т.е. реологическая модель среды, является заданной. Зависимости свойств смазки — вязкости, плотности, теплопроводности, теплоемкости — от давления и температуры полагаются известными. Известными являются физические свойства твердых тел. При исследовании микро-УГД смазки задается топография поверхности. Система УГД уравнений замыкается начально-краевыми условиями.

Задачи УГД смазки относятся к классу нелинейных интегро-дифференциальных задач со свободной границей. В процессе решения системы УГД уравнений определяются распределения давления, температуры, толщины смазочной пленки в зоне контакта, а также выходная (свободная) граница, где возникают кавитационные явления. На основе полученного решения определяются распределения напряжения трения на контактирующих поверхностях.

2. На рис. 1 схематично показан смазанный точечный контакт между упругими телами. Типичные распределения давления $p(x, y)$ и толщины

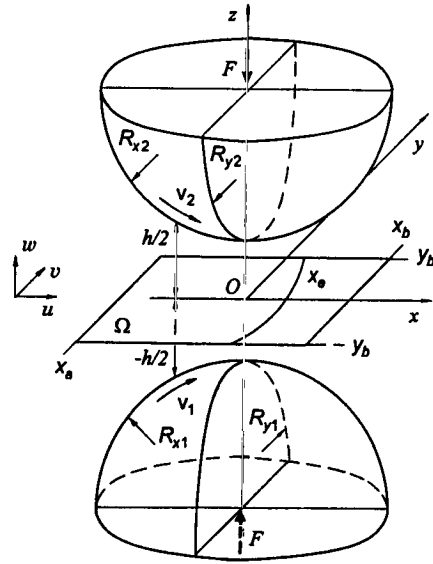


Рис. 1

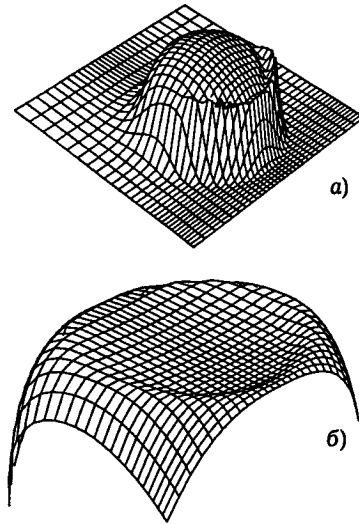


Рис. 2

смазочной пленки $h(x, y)$ в точечном УГД контакте с гладкими поверхностями показаны соответственно на рис. 2,а) и рис. 2,б) (из работы [9]).

Для численного решения изотермической задачи расчетная область задается в виде прямоугольника $\{x, y : x_a \leq x \leq x_b, -y_b \leq y \leq y_b\}$. В случае неизотермической задачи задается пространственная расчетная область $\{x, y, z : x_a \leq x \leq x_b, -y_b \leq y \leq y_b, -h/2 \leq z \leq h/2\}$.

Неизотермическая задача о точечном УГД контакте с учетом зависимости между скоростью сдвига и касательным напряжением $\partial v / \partial z = f(\tau_{xz}, \tau_{yz}, \mu)$, где $v(u, v)$, $f(f_x, f_y)$, описывается следующей системой уравнений:

$$\nabla \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \rho \left[v_1 + \int_{-h/2}^z f(\tau_{x0} + \frac{\partial p}{\partial x} \zeta, \tau_{y0} + \frac{\partial p}{\partial y} \zeta, \mu) d\zeta \right] dz + \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz = 0, \quad (1)$$

$$h(x, y, t) = h(0, 0, t) + \frac{x^2}{2R_x} + \frac{y^2}{2R_y} + d(x, y, t) - d(0, 0, t) + \frac{2}{\pi E'} \left[\iint_{\Omega} \frac{p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} - \iint_{\Omega} \frac{p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \right], \quad (2)$$

$$F(t) = \iint_{\Omega} p(x, y, t) dx dy, \quad (3)$$

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \lambda \frac{\partial T}{\partial z} + \beta T \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \tau_{xz} \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{yz} \frac{\partial v}{\partial z}, \quad (4)$$

$$v_2 - v_1 = \int_{-h/2}^{h/2} f \left(\tau_{x0} + \frac{\partial p}{\partial x} z, \tau_{y0} + \frac{\partial p}{\partial y} z, \mu \right) dz, \quad (5)$$

$$v = v_1 + \int_{-h/2}^z f \left(\tau_{x0} + \frac{\partial p}{\partial x} \zeta, \tau_{y0} + \frac{\partial p}{\partial y} \zeta, \mu \right) d\zeta,$$

$$w = -\frac{1}{\rho} \int_{-h/2}^z \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho v \right) d\zeta - \frac{\rho_1}{2\rho} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + v_1 \cdot \nabla h \right),$$

$$\tau_{xz} = \tau_{x0} + \frac{\partial p}{\partial x} z, \quad \tau_{yz} = \tau_{y0} + \frac{\partial p}{\partial y} z,$$

$$\mu = \mu(p, T), \quad \lambda = \lambda(p, T), \quad \rho = \rho(p, T), \quad \nabla = (\partial / \partial x, \partial / \partial y),$$

$$\frac{\rho_i c_i}{\lambda_i} \left(\frac{\partial T_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial T_i}{\partial x} + v_i \frac{\partial T_i}{\partial y} + w_i \frac{\partial T_i}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2}, \quad i = 1, 2, \quad (6)$$

$$p = 0 \text{ при } x = x_a, \quad -y_b \leq y \leq y_b, \quad t \geq 0, \quad (7)$$

$$p = 0 \text{ при } x_a \leq x \leq x_e(\pm y_b, t), \quad t \geq 0, \quad (8)$$

$$p = \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \text{ при } x = x_e(y, t), \quad -y_b \leq y \leq y_b, \quad t \geq 0, \quad (9)$$

$$p(x, y, 0) = p^0(x, y), \quad h(0, 0, 0) = h^0(0, 0), \quad (10)$$

$$T = T_a \text{ при } x = x_a, \quad t \geq 0, \quad (11)$$

$$T = T_a \text{ (или } \partial T / \partial y = 0) \text{ при } y = \pm y_b, \quad t \geq 0, \quad (12)$$

$$T = T_i, \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial n} \text{ при } z = (-1)^i h/2, \quad t > 0, \quad i = 1, 2, \quad (13)$$

$$T(x, y, z, 0) = T^0(x, y, z), \quad T_i(x, y, z, 0) = T_i^0(x, y, z), \quad i = 1, 2, \quad (14)$$

$$x_e(y, 0) = x_e^0(y). \quad (15)$$

Для смазки со свойствами максвелловской жидкости в (1) используется зависимость [52]

$$f(f_x, f_y) = \partial v / \partial z = (1/G) d\tau / dt + \tau \Phi(|\tau|) / \mu. \quad (16)$$

где G — модуль сдвига среды, $\Phi(|\tau|)$ — нелинейная функция, имеющая конкретный вид для выбранной реологической модели.

Из уравнения (1) выводится уравнение Рейнольдса для давления в зазоре. В частности, для точечного УГД контакта с ньютоновской смазкой

в изотермических условиях и в предположении $\rho \neq \rho(z)$ уравнение Рейнольдса имеет вид $\nabla \cdot \left(\frac{1}{12} \rho h^3 \nabla p / \mu - \frac{1}{2} (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \rho h \right) = \partial(\rho h) / \partial t$. Уравнение (2) описывает распределение толщины смазочного слоя в контакте; соотношение (3) — равенство внешней нагрузки интегралу от давления по области контакта; уравнения (4) и (6) — теплоперенос в пленке и твердых телах; (7)–(10) — начально-краевые условия для уравнения (1); (11)–(14) — начально-краевые условия для тепловой части задачи; (15) — начальное расположение выходной границы. На границе раздела смазка–твердое тело используются при решении задачи о сопряженном теплообмене условия (13). В этом случае расчетная область включает области упругих тел вблизи поверхности раздела. Другой подход к определению температуры на поверхности твердых тел в УГД задачах связан с использованием соотношений вида

$$T\left(x, y, (-1)^i \frac{h}{2}, t\right) = T_a + \frac{(-1)^{1+i}}{\sqrt{\pi \lambda_i c_i \rho_i u_i}} \int_{x_a}^x \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \left(\xi, y, (-1)^i \frac{h}{2}, t \right) \frac{d\xi}{\sqrt{x-\xi}}, \quad (17)$$

или

$$T\left(x, y, (-1)^i \frac{h}{2}, t\right) = T_{s,i}(x, y, t), \quad t \geq 0, \quad i = 1, 2. \quad (18)$$

В системе (1)–(18) приняты следующие обозначения: x, y, z — декартовы координаты; t — время; $\mathbf{v}(u, v)$ — вектор скорости в плоскости XY ; u, v, w — компоненты вектора скорости в направлении осей x, y, z , соответственно; $\mathbf{v}_1(u_1, v_1), \mathbf{v}_2(u_2, v_2)$ — скорость на поверхностях контактирующих твердых тел; $p(x, y, t)$ — давление в смазке; $h(x, y, t)$ — толщина смазочной пленки (зазор); $T(x, y, z, t)$ — температура смазки; F — внешняя нагрузка; μ, ρ, c_p, λ — вязкость, плотность, теплоемкость, теплопроводность смазки, соответственно; $\beta = -(1/\rho)(\partial\rho/\partial T)_p$ — коэффициент объемного расширения; $T_i, \rho_i, c_i, \lambda_i$ — температура, плотность, теплоемкость, теплопроводность твердых тел, соответственно; R'_x, R'_y, E' — приведенные радиусы кривизны и модуль упругости твердых тел; x_a — координата входа; T_a — температура смазки на входе в зазор; $\tau(\tau_{xz}, \tau_{yz})$ — касательное напряжение; τ_{x0}, τ_{y0} — компоненты касательного напряжения в срединной плоскости, при определении которых используется соотношение (5); $x_e(y, t)$ — выходная граница, отделяющая зону положительного давления от кавитационной зоны; Ω — область контакта; $d(x, y, t)$ — поверхностная шероховатость. При решении задач о линейном контакте система (1)–(18) сводится к системе двумерных уравнений, в которой для толщины пленки применяется зависимость вида

$$h(x, t) = h_e(x_e, t) + \frac{x^2 - x_e^2}{2R'_x} + \frac{4}{\pi E'} \int_{x_a}^{x_e} p(\xi, t) \ln \left| \frac{x_e - \xi}{x - \xi} \right| d\xi + d(x, t) - d(0, t). \quad (19)$$

3. Впервые полное численное решение стационарной задачи о точечном контакте с изотермической ньютоновской смазкой было получено в

работе [79] методом верхней релаксации. Эллиптический контакт в стационарных условиях исследовался в работах [42–45]. Для численного решения также использовался метод верхней релаксации. Результаты расчетов были обобщены в виде формул для расчета толщины пленки в центре контакта h_0 и минимальной толщины пленки h_{\min} в зависимости от варьируемых параметров, таких как эллиптичность, скорость, нагрузка, расход смазки. Используя аналогичный численный метод, в работах [28, 29] рассматривалось влияние направления вектора скорости $\frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$ на характеристики эллиптического контакта (малая ось совпадала с осью x). Обнаружено, что при увеличении угла $\gamma = \arctg((v_1 + v_2)/(u_1 + u_2))$ значение h_{\min} , в отличие от h_0 , значительно уменьшается. Выходная граница в этих работах, как впрочем и в большинстве других работ, посвященных численному исследованию точечных УГД контактов, определялась из условия $p \geq 0$. Из-за медленной сходимости релаксационных методов их прямое применение было ограничено умеренными нагрузками (до 0,5–0,7 ГПа).

Устойчивые решения в условиях высокой нагрузки были получены в работах [36, 50] с помощью обратного метода, основанного на определении $h(x, y)$ по заданному $p(x, y)$ из уравнения Рейнольдса. Гибридная численная схема для исследования эллиптического контакта описана в работе [82] и комбинировалась из алгоритмов прямого решения уравнения Рейнольдса методом верхней релаксации в области низких давлений и обратного — в области высоких давлений. Подобный алгоритм применялся при исследовании верчения в эллиптическом УГД контакте в работе [86], в которой показано, что при угловой скорости $\omega \neq 0$ распределения $p(x, y)$ и $h(x, y)$ становятся несимметричными относительно оси x и с ростом ω снижается h_{\min} . По результатам численных экспериментов получена формула для оценки h_{\min} с учетом ω .

Метод Ньютона применялся для решения задач о легком [73] и тяжелом [11] нестационарном нагружении точечного контакта, а также для решения стационарной задачи при исследовании влияния сложной конфигурации входной границы [9]. Положение свободной границы определялось в этих работах, исходя из принципа дополтельности [57], согласно которому для оператора Рейнольдса $L(p)$ и давления p выполняются условия $L(p) = 0, p > 0$ — в зоне со смазкой, $L(p) < 0, p = 0$ — в кавитационной зоне. Метод Ньютона использовался в работе [75] при решении стационарной задачи об эллиптическом УГД контакте. В работе [64] построением расчетных сеток, согласованных с границами области, был осуществлен учет условия $\partial p / \partial n = 0$ на выходе. При применении метода Ньютона в этой работе использовалась блочно-трехдиагональная аппроксимация полной системной матрицы.

Проблема медленной сходимости метода Гаусса–Зейделя из-за низкочастотных компонент ошибки на фиксированной сетке решается в УГД

задачах, начиная с исследования [70], с помощью многосеточного метода. В сочетании с методом мультиинтегрирования для расчета упругих деформаций [19] многосеточный метод позволил сократить число операций до $O(n \ln n)$, где n — число узлов сетки, и провести исследования УГД контакта с нагрузками вплоть до 5,35 ГПа на системе сеток, самая мелкая из которых состояла из 513×513 узлов [93]. В работе [92] проанализирована эффективность релаксационных методов в многосеточном алгоритме. Показано, что в зоне высоких давлений релаксация по точкам неэффективна и целесообразно использовать релаксацию Якоби по строкам, а в зоне высоких ∇p — релаксацию Гаусса–Зейделя по строкам. В работе [93] представлены результаты численного исследования стационарного точечного УГД контакта многосеточным методом при различных значениях нагрузки и при различных физических свойствах среды. Эти результаты обобщены в виде соотношений для оценки h_0 и h_{\min} . Вариант многосеточного метода на основе разностных схем более высокого порядка аппроксимации, чем первый, представлен в [87]. В многосеточном методе, описанном в работе [33], осуществлена модификация разностных схем за счет новой аппроксимации куэттовского члена. В этой работе предложена также расчетная схема, основанная на линеаризации уравнения Рейнольдса с учетом, что при оценке упругой деформации влияние давления является доминирующим только в малой окрестности расчетной точки.

Рассмотренные выше численные методы применялись для исследования влияния шероховатости на характеристики УГД контакта. При этом значительное внимание уделялось детерминированному подходу, который в отличие от стохастического [76, 109] позволил заданием функции $d(x, y, t)$ в уравнении (2) изучать локальные флуктуации толщины и давления пленки.

В работе [71] исследовалось влияние на точечный УГД контакт продольной и поперечной синусоидальной волнистости при скольжении гладкой поверхности относительно неподвижной волнистой. Из решений следовало, что амплитуда флуктуаций давления при поперечной шероховатости значительно выше, чем при продольной. Исследование качения гладкого эллипсоида по движущейся поверхности с продольной волнистостью, проведенное в работе [83], показало, что в поперечном направлении распределение давления становится волнистым, а в продольном — подобно распределению в контакте с гладкими поверхностями. В работе [59] исследовался эллиптический контакт при скольжении гладкой поверхности относительно неподвижной поверхности как с поперечной, так и с трехмерной волнистостью. В случае поперечной волнистости поверхность контакта становилась практически плоской, за исключением периферийной зоны, где из-за низкого давления шероховатость остается в недеформированном состоянии. Толщины h_0 и h_{\min} , как показали расчеты, изменялись немонотонным образом при изменении фазы волнистости в диапазоне

$0 \div 3\pi/2$, что связано с соответствующим изменением формы поверхности во входной области. На поверхности контакта в случае трехмерной волнистости практически исчезает поперечная шероховатость и сохраняется продольная. Из численных результатов следует, что амплитуда пульсаций давления Δp приближенно пропорциональна амплитуде волнистости A и с достаточной точностью оценивается формулой $\Delta p = \pi E' A / 2\lambda$, полученной для линейного контакта [6]. Анализ влияния мелкомасштабных компонент поперечной волнистости был предпринят в работе [60]. Результаты численного моделирования показали, что в продольном распределении давления присутствует обертон — длинноволновая компонента шероховатости деформируется в значительно большей степени, чем коротковолновая.

Влияние трехмерных одиночных неровностей типа бугорка или лунки в условиях чистого скольжения на точечный УГД контакт изучалось в работе [10]. Показано, что расположение неровности во входной зоне значительно возмущает распределения $p(x, y)$ и $h(x, y)$ вниз по потоку. При расположении бугорка в центре контакта наблюдалось практически полное его смятие.

Нестационарная задача о прохождении одиночного поперечного гребня через точечный УГД контакт в условиях качения со скольжением решалась в работе [90] для трех значений коэффициента скольжения $s_x = 2(u_1 - u_2)/(u_1 + u_2)$: $s_x = 1$ ($u_2 = u_1/3$), $s_x = 0$ ($u_2 = u_1$) — чистое качение, $s_x = -2$ ($u_1 = 0$) — чистое скольжение. Из решения при $s_x = 1$ следует, что модуляция толщины пленки при прохождении зоны высокого давления распространяется со средней скоростью $u_{av} = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$, опережая гребень. Общий вид решения для пленки в этой зоне $h \approx h(x - u_{av}t)$ непосредственно следует из уравнения Рейнольдса для зоны высокого давления $u_{av} \partial(\rho h) / \partial x + \partial(\rho h) / \partial t \approx 0$. При $s_x = 0$ флуктуация толщины пленки локализуется около гребня; при $s_x = -2$ — в зоне высокого давления; флуктуация давления, распространяющаяся со скоростью $u_{2x} > u_{av}$, опережает модуляцию толщины пленки, распространяющуюся со скоростью u_{av} . Подробно эти эффекты, применительно к линейному контакту, проанализированы в работе [41]. Полученные результаты подтверждаются экспериментальными данными работ [53, 54]. Особенности прохождения волнистой шероховатости в УГД контакте исследовались в работе [88].

Влияние ориентации волнистости поверхности по отношению к направлению скорости качения на характеристики точечного УГД контакта определялось в работе [13]. В расчетной модели волнистая поверхность была неподвижной, гладкая — движущейся. Для углов $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$ наблюдались те же закономерности в распределениях $p(x, y)$ и $h(x, y)$, что и в работах [59, 71]. При $\theta = \pi/4$ наблюдались пульсации $p(x, y)$ вдоль и поперек волнистости. Из решений следовало, что наклонные поверхностные борозды сильно искажались, и в результате образовывались почти продольные бороздчатые проходы для смазки. Близкие результаты были

получены в работе [33] при исследовании точечного УГД контакта в условиях чистого скольжения с волнистостью под углом $\theta = \pi/4$ на неподвижной поверхности.

Нестационарные решения задачи о точечном УГД контакте с наклонной волнистостью на одной из стенок были получены при $s_x = 0$ в работе [34] многосеточным методом. Из решений следовало, что в области высоких давлений неровности на движущейся поверхности практически не деформируются. Многосеточный алгоритм, изложенный в работе [13], был применен в [108] для исследования точечного УГД контакта с реальной шероховатостью на обеих поверхностях. Трехмерная топография шероховатых поверхностей была получена оптическим методом. Результаты вычислений показали, что распределения $p(x, y)$ и $h(x, y)$ коррелируют, несмотря на деформацию неровностей в зоне контакта, с первоначальной текстурой поверхности и ориентацией шероховатости. Установлено, что средняя толщина пленки в центральной части контакта слабо зависит от вида обработки поверхности контакта. Пиковые же значения давления и деформация неровностей весьма чувствительны к виду обработки.

4. К наиболее ранним численным решениям задачи о точечном УГД контакте с неизотермической ньютоновской смазкой относится работа [20]. В математической модели вместо уравнения Рейнольдса задавалось давление в виде герцевского профиля. Уравнение энергии учитывало только поперечный перенос тепла теплопроводностью и вязкую диссипацию. Из решения стационарной задачи следовало, что распределение температуры в смазочной пленке имеет сходство с распределением давления, максимальная температура пленки увеличивается с увеличением скорости скольжения и нагрузки. В работе [110] при решении полной системы УГД уравнений с условиями сопряжения на твердых границах для тепловой части задачи не учитывался продольный перенос тепла теплопроводностью в пленке и твердых телах. При этом уравнение Рейнольдса решалось методом верхней релаксации, а задача о сопряженном теплообмене — маршевым методом. Из численных результатов следовало, что по сравнению с изотермическим случаем имеет место снижение по величине пика давления и его некоторое смещение вверх по течению, а также возрастание температуры в зоне контакта с увеличением скорости скольжения. Отмечалось, что величины максимального повышения температуры на поверхностях тел с увеличением скорости скольжения растут медленнее, чем в пленке, из-за отвода тепла конвекцией.

На основе многосеточного метода полное численное решение стационарной задачи получено в [56]. Для упрощения вычислительных процедур решение тепловой части задачи осуществлялось в системе координат, согласованной со сложной геометрией поверхностей. Численные результаты показали, что при $s_x = 0$ максимальное значение температуры

имеет место во входной зоне; при увеличении s_x наблюдалось значительное увеличение температуры смазочной пленки в зоне контакта; коэффициент трения с ростом s_x нарастает, достигая максимума, затем монотонно уменьшается. Численное решение полной нестационарной УГД задачи с учетом условий сопряжения для теплопереноса на границах раздела смазка–твердое тело и измеренной шероховатости на обеих поверхностях контактирующих тел получено многосеточным методом с учетом релаксации по Гауссу–Зейделю–Ньютону в работе [105]. Показано, что шероховатость увеличивает максимальные значения давления и температуры по сравнению с гладкими поверхностями; при увеличении s_x значительно возрастают максимальные давления и температуры по сравнению с режимом $s_x = 0$ и значительно деформируются неровности поверхности. Отмечается, что высокие частоты шероховатости играют главную роль в возникновении пиков давления. Влияние одиночной поверхностной впадины на параметры точечного контакта исследовалось в работе [106] на основе решения нестационарной неизотермической задачи в постановке, изложенной в [56]. Результаты продемонстрировали сильное возмущение давления и температуры смазки в окрестности впадины, рост подповерхностных напряжений и перемещение максимума напряжений ближе к поверхности тела.

5. Численное решение задачи о точечном УГД контакте с изотермической неньютоновской смазкой впервые было получено в работе [55]. Задача решалась многосеточным методом для стационарных условий при $s_x \approx 0 \div 0,21$. Модифицированное уравнение Рейнольдса было выведено с учетом модели Эйринга в виде $\partial v / \partial z = \tau \Phi(|\tau|) / \mu$, где $\Phi(|\tau|) = \text{sh}(|\tau|/\tau_0) / (|\tau|/\tau_0)$, где τ_0 — эйринговское напряжение. Показано, что с ростом s_x значительно снижаются пики давления в выходной зоне; влияние s_x на h_{\min} незначительно; при $s_x = 0$ и одинаковых нагрузках величина пиков давления на выходе из контакта увеличивается с ростом скорости.

В работе [47] при решении стационарной задачи о точечном УГД контакте с неньютоновской смазкой, описываемой эйринговской моделью, применялась гибридная расчетная схема. Для упрощения вычислительных процедур нелинейная реологическая функция представлялась в диапазоне $0 < |\tau|/\tau_0 < 4$ в виде $\text{sh}(|\tau|/\tau_0) / (|\tau|/\tau_0) \approx a + b(|\tau|/\tau_0)^2 + c(|\tau|/\tau_0)^4$. Вычисления проводились для $s_x = 0 \div 1,5$. Показано, что при $s_x = 0$ расхождение результатов расчета для ньютоновской и неньютоновской жидкостей очень мало. Рост s_x в случае неньютоновской жидкости сопровождается уменьшением h_0 и снижением пиков давления на выходе из контакта (при $s_x = 1,5$ пики давления исчезали).

6. Численные исследования эллиптического УГД контакта с неньютоновской смазкой в неизотермических условиях были проведены в

работах [72, 102]. В работе [102] модифицированное уравнение Рейнольдса включало предложенное авторами реологическое уравнение вида $\dot{\gamma} = (\tau/\mu)[1 - (\tau/\tau_L)^4]^{-1/4}$, где $\dot{\gamma}$ — скорость сдвига, τ_L — предельное напряжение сдвига. Система стационарных УГД уравнений решалась для условий умеренного нагружения итерационным методом, в частности, уравнение Рейнольдса решалось методом верхней релаксации. Численные решения не выявили пика давления в выходной зоне. Показано, что максимальная температура поверхности тела находится в окрестности максимального давления и растет с ростом трения, профили $|\tau|$ на обеих поверхностях подобны друг другу. Для исследования тяжело нагруженного эллиптического УГД контакта в работе [72] использовалась расчетная методика, в которой вместо решения уравнения Рейнольдса задавался герцевский профиль давления. В качестве реологической модели использовалась модель, предложенная Бэром и Винером [17] и имеющая вид $\partial v/\partial z = (1/G)d\tau/dt - (\tau_L\tau/|\tau|\mu) \ln(1 - |\tau|/\tau_L)$. Показано, что с ростом s_x уменьшаются пики давления в выходной зоне; при больших значениях s_x максимум температуры пленки находится вблизи поверхности, имеющей меньшую скорость, и где влияние конвекции проявляется в меньшей степени; коэффициент трения нарастает до максимума при очень малых s_x и затем монотонно снижается с ростом s_x ; при небольших значениях s_x коэффициенты трения для смазки, описываемой ньютоновской моделью, значительно превышают значения, полученные по неньютоновской модели, при этом по мере роста s_x значения коэффициентов для двух моделей заметно сближаются, что объясняется влиянием диссипации при больших значениях s_x .

7. Линейный УГД контакт с ньютоновской смазкой в изотермических условиях изучен наиболее подробно. Так, в работе [38] проведен анализ устойчивости решений и сделан вывод, что система уравнений, описывающая линейный УГД контакт, имеет устойчивые однозначные решения, а неустойчивость и неоднозначность решений, наблюдаемые при некоторых режимных параметрах в работе [58], есть следствие ограниченной точности применяемой численной методики. В другой работе этих авторов [18] сделан вывод, что характерный пик давления на выходе есть гладкая функция, а не логарифмическая особенность [58]. Такой же вывод был сделан в работах [46] и [95]. В работе [2] проанализирована постановка граничных условий для одномерного уравнения Рейнольдса $d[(h^3/12\mu)dp/dx] = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)dh/dx$ и показано, что в случае, когда положение входной границы не фиксировано и имеется зона вихревого течения на входе, следует выставлять граничные условия вида $dp/dx = 2\mu(\sqrt{u_2} + \sqrt{u_1})/h^2$, $p = 0$ при $x = x_a$.

Стационарная задача о тяжело нагруженном УГД контакте изучалась в работе [4] методом сращиваемых асимптотических разложений, на основе

которого построены асимптотики для давления и толщины пленки в пограничных зонах входа и выхода и получена оценочная формула для толщины пленки на выходе из контакта.

Для численного решения задач о линейном УГД контакте широкое распространение получили алгоритмы, основанные на методе Ньютона [1, 5, 7, 49] и многосеточном методе [69]. В работе [22] предложен вычислительный алгоритм, объединяющий метод Ньютона и многосеточный метод. Особенностью этого алгоритма является сведение полной матрицы Якоби к трехдиагональной обнулением внутрехдиагональных элементов.

В работе [15] изложен алгоритм численного исследования нестационарных режимов. В алгоритме используется метод Ньютона для получения стационарного решения, которое служит начальным условием для решения нестационарной задачи методом нижней релаксации. Показано, что в режимах, при которых скорость увлечения смазки снижалась до нуля, в зазоре появляется «масляный карман». Это явление характеризуется возникновением пика давления и сужения пленки не только в выходной зоне, но и во входной. Решение задачи о смазке тяжело нагруженного линейного контакта, в начальный момент времени выводимого при постоянной внешней нагрузке из состояния покоя в режим качения с постоянной скоростью, получено в [74] многосеточным методом. Из численных результатов следует, что время достижения стационарного состояния существенно зависит от скорости качения: чем выше скорость, тем быстрее система переходит в стационарное состояние. Показано, что рост внешней нагрузки увеличивает время переходного процесса.

В работе [39] методом Ньютона получено решение стационарной задачи для условий чистого скольжения, когда на неподвижной поверхности имеется одиночная впадина в виде полуволны. Численными результатами продемонстрировано значительное влияние глубины впадины и ее расположения на распределения $p(x)$, $h(x)$ и поле касательного октаэдрического напряжения τ_{oct} в подповерхностном слое. Показано, что из-за неровности на поверхности максимальное значение τ_{oct} возрастает и сдвигается ближе к поверхности. Влияние синусоидальной волнистости поверхности в той же постановке исследовалось в работе [40]. В работе [94] при решении стационарной задачи многосеточным методом учитывался измеренный профиль шероховатости. Результаты решения показали, что имеет место заметная деформация микрогеометрии; с уменьшением скорости скольжения возрастают амплитуды осцилляций давления и уменьшаются вариации толщины пленки; в то время как h_{min} для шероховатой поверхности меньше, чем для гладкой, средняя толщина пленки практически не изменяется. В работе [78] стационарная задача решалась для условий, когда при критическом значении амплитуды волнистости внутри зоны контакта в ряде точек (в первую очередь в окрестностях зон входа и выхода) давление падает до нуля и возникает кавитация. В итоге расчетная область

разделяется на ряд зон, в пределах которых решение подобно решению для гладкой поверхности.

В работе [91] решена нестационарная задача для режима $s_x = 0$ в случае расположения на движущейся поверхности одиночной впадины. Показано значительное отличие распределений давления, толщины пленки, а также поля подповерхностных напряжений от стационарных в сходных точках контактной зоны. Решение нестационарной задачи для условий $s_x \neq 0$ с одиночной впадиной или с волнистостью только на одной из поверхностей получено в работе [89]. Из решения для условий, когда скорость движения волнистости меньше средней скорости, т.е. $2u_2/(u_1+u_2) < 1$, следовало, что модуляции толщины пленки распространяются в зоне высокого давления быстрее, чем модуляции давления. Показано, что частота модуляции толщины пленки зависит от скорости волнистой поверхности. В работе [12] представлены результаты решения многосеточным методом аналогичной нестационарной задачи, но с учетом измеренной шероховатости реальной поверхности. Из решения нестационарной задачи о скольжении следует, что шероховатость деформируется в значительно меньшей степени, чем в стационарном случае, и ее профиль близок к первоначальному, вместе с тем амплитуды пульсаций давления в обоих случаях различались незначительно. С уменьшением абсолютных значений s_x снижаются высокочастотные пульсации давления, при $s_x = 0$ наблюдались только низкочастотные пульсации давления.

8. Численные исследования влияния тепловых эффектов в линейных УГД контактах с ньютоновской смазкой появились более тридцати лет тому назад [26, 27]. В работе [27] были получены решения неизоэтермической УГД задачи для режима $s_x = 0,25$. Показано, что в окрестности пика давления из-за значительной диссипации тепла имеет место резкое повышение температуры в смазке и на поверхностях. Результаты, полученные в работе [26], свидетельствовали о сильном влиянии тепловых эффектов на коэффициент трения в контакте. В упомянутых работах основой вычислительного алгоритма был метод Ньютона.

Методом сращиваемых асимптотических разложений неизоэтермическая задача изучалась в работе [8]. Были получены асимптотические оценки толщины пленки в условиях недостаточной и обильной смазки. Численному анализу тепловых эффектов в линейном УГД контакте посвящен ряд параграфов в монографии [5]. Из расчетов следовало, что при $s_x = 0$ температура значительно повышается в зонах больших градиентов давления.

В работе [37] решалась задача методом Гаусса–Зейделя. Показано, что при $s_x = 0$ температура повышалась в зонах высоких ∇p . При $s_x \neq 0$, наоборот, из-за вязких эффектов в герцевской зоне наблюдалось значительное повышение температуры смазки и поверхностей. С ростом s_x на-

блюдалось значительное уменьшение коэффициента трения по сравнению с изотермическим случаем. Получена формула для оценки минимальной толщины пленки в неизотермических условиях. В работе [104] проведено исследование влияния вида зависимости $\mu(p, T)$ на характеристики контакта в широком диапазоне значений s_x . УГД задача решалась с помощью метода Ньютона. Показано, что модель вязкости может заметно повлиять на распределения давления и толщины пленки при $s_x \neq 0$.

В работе [63] метод Ньютона был применен для одновременного решения уравнений Рейнольдса и энергии. Якобиан системы в этом случае составлялся относительно приращений давления и температуры. Для сокращения числа вычислительных операций полная матрица системы сводилась к гексадиагональной простым обнулением внегексадиагональных членов. Показано, что с ростом s_x растет максимальная температура смазки T_{\max} , снижаются h_{\min} и пиковое давление; с ростом нагрузки растет T_{\max} и снижается h_{\min} .

В полной постановке численное решение стационарной задачи получено в работе [81]. Уравнение теплопереноса в этой работе решалось, в отличие от упомянутых выше работ, с учетом поперечного конвективного переноса тепла и продольного переноса тепла теплопроводностью. В вычислительном алгоритме использовался метод Ньютона для решения уравнения Рейнольдса и конечноэлементный метод для решения уравнения теплопереноса. Во входной зоне, где возможно вихревое течение, конвективные члены в уравнении теплопереноса аппроксимировались разностями против потока. Из численных решений следует, что в тяжело нагруженных УГД контактах температура заметно влияет на h_{\min} и это влияние растет с ростом s_x ; при $s_x = 0$ максимальная температура наблюдалась во входной зоне, при $s_x = 0,2$ — в центре контакта.

Нестационарная неизоэтермическая задача о прохождении одиночной неровности в виде выпуклости или впадины решалась с использованием многосеточного метода в работе [80]. Численные решения продемонстрировали сильное изменение во времени распределения давления, толщины пленки, температуры и коэффициента трения при движении неровности через контакт.

9. Изотермическая УГД задача о линейном контакте со смазкой, имеющей реологическое уравнение $\tau = \mu |\partial u / \partial z|^{n-1} \partial u / \partial z$, где $n > 0$, решалась в работе [3] методами регулярных и сингулярных асимптотических разложений в зонах входа и выхода, для которых получены уравнения, определяющие главные члены асимптотик давления и зазора, а также асимптотические формулы для силы трения и толщины смазочной пленки на выходе. Степенная реологическая модель была применена в работе [98] при выводе модифицированного уравнения Рейнольдса для условий $s_x = 0$. Было показано, что с увеличением показателя степени n (в рас-

четах $n = 0,7 \div 2,1$) толщина пленки возрастает, координата выхода смещается к центру контакта, возрастают пиковые значения давления. В другой работе этих авторов [101] был применен метод малого параметра для получения уравнений, учитывающих вязкопластическую и вязкоупругую реологические модели. Вязкопластическая модель использовалась в виде $\partial u / \partial z = (\tau / \mu) [1 / (1 - \tau / \tau_L)]$, представляющем упрощенный вариант реологической модели Бэра–Винера [17]. Вязкоупругая модель применялась в форме линейной максвелловской модели $\partial u / \partial z = (1/G)(d\tau/dt) + \tau/\mu$. Численные решения для обеих моделей показали, что с увеличением s_x значения пикового давления и h_{\min} снижались. Отмечается, что применение полученных уравнений для исследования режима $s_x = 0$ приводит к значительной ошибке. В работе [100] удержанием в разложении по малому параметру ϵ членов вплоть до порядка ϵ^3 получены уравнения, справедливые также и для исследования течения неньютоновской смазки в режиме $s_x = 0$. При выводе уравнений использовалась реологическая модель вида $\tau = \mu \tau_L (\partial u / \partial z) / (0,94 \tau_L + 0,91 \mu |\partial u / \partial z|)$.

Метод малого параметра применялся в работе [67], где использовалась степенная реологическая модель. Из численных решений следовало, что с ростом s_x значение h_{\min} снижается при $n < 1$ и увеличивается при $n > 1$. В другой работе этих авторов [66] модифицированное уравнение Рейнольдса было выведено для реологической модели вида $\tau + \sigma \tau^3 = \mu (\partial u / \partial z)$, где $\sigma \geq 0$ — параметр нелинейности. Показано, что с увеличением параметра нелинейности пик давления становится менее острым, а толщина пленки снижается.

Реологическая модель Эйринга применялась для вывода модифицированного уравнения Рейнольдса в работе [31]. Задача решалась в стационарной постановке методом Ньютона. Из численных решений следует, что h_0 меньше, чем при ньютоновской смазке, и заметно снижается по мере увеличения s_x .

В работе [61] предложена, так называемая, круговая реологическая модель в виде $\partial u / \partial z = (\tau / \mu) [1 - (\tau / \tau_L)^2]^{1/2}$. Численные решения были получены методом Ньютона для стационарной задачи при различных значениях внешней нагрузки и s_x . Было показано, что пиковое давление снижается с ростом s_x , из-за высоких значений ∇p на входе форма пленки в герцевской зоне при высоких значениях нагрузки и s_x не является плоской.

Круговая модель применялась также в работах [35, 62, 84]. Нестационарные уравнения с использованием круговой модели были выведены в работе [62] для исследования влияния движущейся или неподвижной неровности поверхности на характеристики УГД контакта. В работе [84] исследовались явления, возникающие в условиях, когда направления скоростей контактирующих поверхностей противоположны. Было показано, что при больших значениях s_x ($s_x > 5$) около входа и выхода образуются

два стационарных вихря и заметно сужается зазор в центре контакта и на входе. При $s_x > 10$ весьма вероятно разрушение пленки в центре контакта, что, как подчеркивали авторы, возможно только в случае неньютоновской смазки. В работе [35] исследовалось влияние движущейся одиночной неровности, а также волнистости поверхности на распределение подповерхностных напряжений.

Нестационарное уравнение Рейнольдса было получено в работе [23] с использованием модели Эйринга. Вычислительный алгоритм решения нестационарных УГД уравнений базировался на методе Ньютона и трехдиагональной аппроксимации матрицы системы. В работе изучалось влияние движущейся впадины или выступа на параметры УГД контакта. Вторая поверхность контакта задавалась гладкой. Реологическая модель Эйринга применялась также для получения нестационарных УГД уравнений в работе [16], в которой исследовались эффекты, вызываемые прохождением через контакт одиночного выступа на одной из поверхностей, а также эффекты от взаимодействия пары движущихся выступов, расположенных на противоположных поверхностях.

Результаты численных исследований влияния трехмерных одиночных неровностей на параметры линейного контакта представлены в работах [14, 25]. В работе [14] для линейного контакта с неровностью в виде бугорка получено нестационарное двумерное уравнение Рейнольдса, при выводе которого применялась модель эйринговской жидкости. Упругая деформация в этой задаче определялась в виде $v_1(x, t) + v_2(x, y, t)$, где $v_1(x, t)$, $v_2(x, y, t)$ оценивались по соотношениям, соответственно, для линейного и точечного контактов. Исследовались параметры контакта с одиночной неровностью (движущейся или неподвижной), а также эффекты, связанные с взаимодействием двух выступов, расположенных на противоположных поверхностях. Близкая математическая модель линейного УГД контакта с трехмерными неровностями была предложена в работе [25]. При выводе нестационарного уравнения Рейнольдса также использовалась эйринговская жидкость. Показано различие между результатами, полученными для двумерных и трехмерных неровностей в линейном контакте. В частности, из результатов следует, что в случае взаимодействия пары трехмерных неровностей возможно образование кавитационной зоны внутри герцевской области.

В работе [103] получено обобщенное уравнение Рейнольдса, позволяющее учесть в конкретных расчетах наиболее распространенные реологические модели смазки. В работе получены численные решения стационарной задачи для жидкости, описываемой моделями Эйринга, Бэра–Винера [17], круговой [61], а также для неизотермической ньютоновской жидкости. Проведено сравнение численных результатов. Делается вывод, что вязкопластические модели обеспечивают получение вполне разумных значений коэффициента трения, упругие свойства

смазки существенны при очень низких значениях коэффициента скольжения.

10. К первым численным исследованиям линейного УГД контакта с неньютоновской смазкой в неизотермических условиях, проведенным в предположении, что толщина смазочной пленки и распределение давления заданы, относятся работы [30, 48]. В работе [48] смазка представлялась в виде нелинейной максвелловской среды с вязкопластической компонентой, описываемой моделью Бэра–Винера [17]; в работе [30] смазка описывалась нелинейной максвелловской средой с вязкой компонентой согласно модели Эйринга. В работе [99] методом малого параметра и с использованием модели Бэра–Винера [17] получено уравнение для давления. Из решений задачи следует, что использование ньютоновской модели жидкости приводит к завышению значений температуры, особенно в окрестности температурного пика. Показано, что с ростом s_x коэффициент трения достигает максимального значения и затем монотонно снижается. Изотермический анализ коэффициента трения давал завышенные значения, особенно при больших s_x . Вязкопластическая модель Бэра–Винера [17] использовалась также в работе [68] для получения модифицированного уравнения Рейнольдса методом малого параметра.

Для численного исследования УГД контакта со смазками, описываемыми различными реологическими соотношениями, в работе [77] использовалось обобщенное на случай максвелловской жидкости уравнение Рейнольдса. Из результатов решения задачи с вязкоупругой моделью смазки [52] следовало, что с ростом s_x снижались h_{\min} и пиковое давление. Пик давления с ростом s_x сдвигался в сторону центра контакта, что согласуется с результатами работы [99]. Показано, что в неизотермических условиях h_{\min} и h_0 для ньютоновской и эйринговской моделей весьма близки во всем диапазоне изменения s_x . Сделан вывод, что влияние неньютоновских свойств смазки менее значительно, чем термических.

Эйринговская модель использовалась в работе [97]. Результаты решения стационарной задачи представлены в критериальном виде. В частности, получена критериальная формула для оценки снижения h_0 по сравнению с h_0 для ньютоновской смазки в изотермических условиях. В работе [96] был, в основном, использован тот же подход, что и в предыдущей, с той только разницей, что теперь специально рассматривался случай чистого скольжения, когда одна из поверхностей неподвижна. Показано, что $h_{\min}/h_0 \approx 0,74$ при всех рассматриваемых условиях.

В работе [85] вычислительный алгоритм с учетом эйринговской модели представлял собой обобщение алгоритма для ньютоновской смазки в неизотермических условиях [81]. Расчеты проводились для $s_x = 0 \div 0,2$. Показано, что при $s_x = 0$ температура достигает наибольших значений во входной зоне. При $s_x = 0,2$ наибольшие значения температуры смазки

наблюдались в зоне контакта. Из расчетов следует, что при очень низких значениях s_x коэффициенты трения в неизотермических условиях практически совпадают с коэффициентами трения в изотермических. Однако с ростом s_x наблюдалось существенное различие: в изотермическом случае коэффициент трения монотонно нарастал, а в неизотермическом имеет место максимум при сравнительно низких значениях s_x и монотонное снижение с ростом s_x .

В работе [65] модифицированное уравнение Рейнольдса получено на основе применения метода малого параметра с использованием степенного реологического соотношения. Из решений следует, что с увеличением n пиковые значения давления и температуры увеличиваются и их расположение сдвигается в сторону центра контакта. При увеличении s_x h_{\min} снижается, когда $n \leq 1$, и увеличивается, когда $n > 1$.

В работе [51] исследование линейного УГД контакта было проведено на основе круговой модели жидкости. Из численных решений следует, что прогнозируемое в изотермических условиях при больших значениях s_x явление коллапса смазочной пленки в центре контакта [84] в неизотермических условиях маловероятно — толщина пленки в зоне высоких давлений практически постоянна вдоль контакта. Коэффициент трения при больших значениях s_x был почти вдвое меньше, чем в изотермических условиях.

Влияние внешней нагрузки, изменяющейся во времени по гармоническому закону, на параметры линейного УГД изучалось в работе [107]. Для описания неньютоновских свойств смазки использовалась реологическая модель Эйринга. Из численных решений следует, что частота колебаний параметров контакта равна частоте возбуждающей силы, однако фазы колебаний различны. При низких частотах колебания (10 Гц) распределения давления и толщины пленки вдоль контакта близки и по виду и по численным значениям распределениям при постоянной нагрузке. При очень высокой частоте (10 000 Гц) распределение давления значительно отличалось от стационарного случая — на входе образовывался пик давления. Авторы предполагают нефизичность этого результата, поскольку он получен без учета упругой составляющей в реологической модели для условий, когда период высокочастотных колебаний внешней нагрузки возможно соизмерим с временем релаксации смазки. Распределения температуры повторяли особенности распределений давления. Показано, что коэффициент трения имеет тенденцию к снижению по мере увеличения частоты колебаний.

В работе [21] изучалось влияние шероховатости в неизотермических условиях на трение в линейном УГД контакте со смазкой, описываемой эйринговской моделью. УГД контакт описывался системой нестационарных уравнений. Для уравнений энергии ставились условия сопряжения. Процедура решения тепловой части задачи включала преобразование гео-

метрически сложных и изменяющихся во времени областей в неизменяющиеся во времени прямоугольные области. Подробно технология построения такого отображения изложена в работе [24]. Показано, что при $\Lambda > 3$, где Λ — отношение высоты шероховатости к h_0 , и $s_x = 0,1 \div 1, 0$, влияние шероховатости на коэффициент трения в целом мало. В режиме $s_x = 0,1$, близком к режиму чистого качения, наблюдалось наибольшее превышение коэффициента трения в случае шероховатых поверхностей над коэффициентом трения для гладких. Показано, что влияние структуры шероховатости на коэффициент трения сравнительно невелико и микродеформации значительно выше, когда используется ньютоновская модель смазки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айрапетов Э. Л., Кудиш И. И., Пановко М. Я. Численный метод решения задач смазки тяжело нагруженного упругогидродинамического контакта // Трение и износ. 1992. Т. 13. № 6. С. 957–964.
2. Александров В. М. О постановке задач гидродинамической теории смазки // Докл. АН СССР. 1981. Т. 258. № 4. С. 819–822.
3. Александров В. М., Кудиш И. И. Задача контактно-гидродинамической теории смазки для вязкой жидкости со сложной реологией // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 4. С. 78–91.
4. Александров В. М., Кудиш И. И., Никулинская Л. К. О постановке и решении контактно-гидродинамических задач теории смазки // Трение и износ. 1982. Т. 3. № 1. С. 51–63.
5. Галахов М. А., Гусятников П. В., Новиков А. П. Математические модели контактной гидродинамики. М.: Наука, 1985. 296 с.
6. Джонсон К. Л. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 509 с.
7. Коднир Д. С. Контактная гидродинамика смазки деталей машин. М.: Машиностроение, 1976. 304 с.
8. Кудиш И. И. Асимптотический анализ плоской неизотермической упругогидродинамической задачи для тяжело нагруженного контакта качения // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1978. Т. 31. № 6. С. 16–35.
9. Пановко М. Я. Численное исследование пространственного упругогидродинамического контакта с учетом сложной геометрии входной границы смазочной пленки // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 6. С. 151–161.
10. Пановко М. Я. Математическое моделирование пространственного упругогидродинамического контакта с учетом сложной геометрии входного масляного мениска и одиночных неровностей на поверхности // Докл. РАН. 1997. Т. 353. № 4. С. 488–492.
11. Пановко М. Я. Численное моделирование точечного упругогидродинамического контакта при нестационарном нагружении // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 2. С. 102–110.
12. Ai X., Cheng H. S. A transient EHL analysis for line contacts with measured surface roughness using MG technique // Trans. ASME J. Tribol. 1994. V. 116. No. 3. P. 549–558.
13. Ai X., Cheng H. S. The effects of surface texture on EHL point contacts // Trans. ASME. J. Tribol. 1996. V. 118. No. 1. P. 59–66.
14. Ai X., Cheng H. S., Zheng L. A transient model for micro-elastohydrodynamic lubrication with three-dimensional irregularities // Trans. ASME. Tribol. 1993. V. 115. No. 1. P. 102–110.
15. Ai X., Yu H. A full numerical solution for general transient elastohydrodynamic line contact and its application // Wear. 1988. V. 121. No. 2. P. 143–159.
16. Ai X., Zheng L. A general model for micro-elastohydrodynamic lubrication and its full numerical solution // Trans. ASME. J. Tribol. 1989. V. 111. No. 4. P. 569–576.
17. Bair S., Winer W. O. A rheological model for elastohydrodynamic contacts based on primary laboratory data // Trans. ASME. J. Lubric. Technol. 1979. V. 101. No. 3. P. 258–265.
18. Bissett E. J., Glander D. W. A highly accurate approach that resolves the pressure spike of elastohydrodynamic lubrication // Trans. ASME. J. Tribol. 1988. V. 110. No. 2. P. 241–246.
19. Brand A., Lubrecht A. A. Multilevel matrix multiplication and fast solution of integral equations // J. Comput. Phys. 1990. V. 90. No. 2. P. 348–370.
20. Bruggemann H., Kollmann F. G. A numerical solution of the thermal elastohydrodynamic lubrication in an elliptical contact // Trans. ASME. J. Lubric. Technol. 1982. V. 104. No. 3. P. 392–400.
21. Chang L. Traction in thermal elastohydrodynamic lubrication of rough surfaces // Trans. ASME. J. Tribol. 1992. V. 114. No. 1. P. 186–191.
22. Chang L., Conry T. F., Cusano C. An efficient, robust, multi-level computational algorithm for elastohydrodynamic lubrication // Trans. ASME. J. Tribol. 1989. V. 111. No. 2. P. 193–199.
23. Chang L., Cusano C., Conry T. F. Effects of lubricant rheology and kinematic conditions on micro-elastohydrodynamic lubrication // Trans. ASME. J. Tribol. 1989. V. 111. No. 2. P. 344–351.
24. Chang L., Farnum C. A thermal model for elastohydrodynamic lubrication of rough surfaces // STLE Tribol. Trans. 1992. V. 35. No. 2. P. 281–286.
25. Chang L., Webster M. N., Jackson A. A line-contact micro-EHL model with three-dimensional surface topography // Trans. ASME. J. Tribol. 1994. V. 116. No. 1. P. 21–28.
26. Cheng H. S. A refined solution to the thermal elastohydrodynamic lubrication of rolling and sliding cylinders // ASLE Trans. 1965. V. 8. No. 3. P. 397–410.
27. Cheng H. S., Sternlicht B. A numerical solution for the pressure, temperature and film thickness between two infinitely long, lubricated rolling and sliding cylinders, under heavy loads // Trans. ASME. Ser. D. J. Basic Engineering. 1965. V. 87. No. 3. P. 695–707.
28. Chittenden R. J., Dowson D., Dunn J. F., Taylor C. M. A theoretical analysis of the isothermal elastohydrodynamic lubrication of concentrated contacts. I. Direction of lubricant entrainment coincident with the major axis of the Hertzian contact ellipse // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A. 1985. V. 397. No. 1813. P. 245–269.
29. Chittenden R. J., Dowson D., Dunn J. F., Taylor C. M. A theoretical analysis of the isothermal elastohydrodynamic lubrication of concentrated contacts. II. General case, with lubricant entrainment along either principal axis of the Hertzian contact ellipse or at some intermediate angle // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A. 1985. V. 397. No. 1813. P. 271–294.
30. Conry T. F. Thermal effects on traction in EHD lubrication // Trans. ASME. J. Lubric. Technol. 1981. V. 103. No. 4. P. 533–538.

31. *Conry T. F., Wang S., Cusano C.* A Reynolds-Eyring Equation for elastohydrodynamic lubrication in line contacts // *Trans. ASME. J. Tribol.* 1987. V. 109. No. 4. P. 648–658.
32. *Dowson D., Higginson G. R.* Elastohydrodynamic lubrication. Oxford: Pergamon Press, 1966. 235 p.
33. *Ehret P., Dowson D., Taylor C. M., Wang D.* Analysis of isothermal elastohydrodynamic point contacts lubricated by Newtonian fluids using multigrid methods // *Proc. Inst. Mech. Engrs. J. Mechanical Engineering Sciences. Part C.* 1997. V. 211. No. 7. P. 493–508.
34. *Ehret P., Dowson D., Taylor C. M.* Time-dependent solutions with waviness and asperities in EHL point contacts // *Proc. 23-rd Leeds-Lyon Symp. on Tribology.* Leeds. 1996. P. 313–324.
35. *Elsharkawy A. A., Hamrock B. J.* Subsurface stresses in micro-EHL line contacts // *Trans. ASME. J. Tribol.* 1991. V. 113. No. 3. P. 645–655.
36. *Evans H. P., Snidle R. W.* The elastohydrodynamic lubrication of point contacts at heavy loads // *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A.* 1982. Vol. 382. No. 1782. P. 183–199.
37. *Ghosh M. K., Hamrock B. J.* Thermal elastohydrodynamic lubrication of line contacts // *ASLE Trans.* 1985. V. 28. No. 2. P. 159–171.
38. *Glander D. W., Bissett E. J.* On the stability and uniqueness of elastohydrodynamic lubrication solutions // *Trans. ASME. J. Tribol.* 1988. V. 110. No. 4. P. 628–631.
39. *Goglia P. R., Conry T. F., Cusano C.* The effects of surface irregularities on the elastohydrodynamic lubrication of sliding line contacts. Part I — single irregularities // *Trans. ASME. J. Tribol.* 1984. V. 106. No. 1. P. 104–112.
40. *Goglia P. R., Conry T. F., Cusano C.* The effects of surface irregularities on the elastohydrodynamic lubrication of sliding line contacts. Part II — wavy surfaces // *Trans. ASME. J. Tribol.* 1984. V. 106. No. 1. 1984. P. 113–119.
41. *Greenwood J. A., Morales-Espejel G. E.* The behaviour of transverse roughness in EHL contacts // *Proc. Inst. Mech. Engrs. J. Eng. Tribol.* 1994. V. 208. No. 2. P. 121–132.
42. *Hamrock B. J., Dowson D.* Isothermal elastohydrodynamic lubrication of point contacts. Part I — theoretical formulation // *Trans. ASME. J. Lubric. Technol.* 1976. V. 98. No. 2. P. 223–229.
43. *Hamrock B. J., Dowson D.* Isothermal elastohydrodynamic lubrication of point contacts. Part II — ellipticity parameter results // *Trans. ASME. J. Lubric. Technol.* 1976. V. 98. No. 3. P. 375–383.
44. *Hamrock B. J., Dowson D.* Isothermal elastohydrodynamic lubrication of point contacts. Part III — fully flooded results // *Trans. ASME. J. Lubric. Technol.* 1977. V. 99. No. 2. P. 264–276.
45. *Hamrock B. J., Dowson D.* Isothermal elastohydrodynamic lubrication of point contacts. Part IV — starvation results // *Trans. ASME. J. Lubric. Technol.* 1977. V. 99. No. 1. P. 15–23.
46. *Hamrock B. J., Pan P., Lee R. T.* Pressure spikes in elastohydrodynamically lubricated conjunctions // *Trans. ASME. J. Tribol.* 1988. V. 110. No. 2. P. 279–284.
47. *Holt C. A., Evans H. P., Snidle R. W.* Solution of the non-Newtonian elastohydrodynamic problem for circular contacts based on a flow continuity method // *Proc. Inst. Mech. Engrs. J. Eng. Tribol.* 1996. V. 210. No. 4. P. 247–258.
48. *Houpert L., Flamand L., Berthe D.* Rheological and thermal effects in lubricated EHD contacts // *Trans. ASME. J. Lubric. Technol.* 1981. V. 103. No. 4. P. 526–532.

49. *Houpert L. G., Hamrock B. J.* Fast approach for calculating film thicknesses and pressures in elastohydrodynamically lubricated contacts at high loads // *Trans. ASME. J. Tribol.* 1986. V. 108. No. 3. P. 411–420.
50. *Hou K. P., Zhu D., Wen S. Z.* An inverse solution to the point contact EHL problem under heavy loads // *Trans. ASME. J. Tribol.* 1987. V. 109. No. 3. P. 432–436.
51. *Hsiao H. S., Hamrock B. J.* A complete solution for thermal-elastohydrodynamic lubrication of line contacts using circular non-Newtonian fluid model // *Trans. ASME. J. Tribol.* 1992. V. 114. No. 3. P. 540–552.
52. *Johnson K. L., Tevaarwerk J. L.* Shear behaviour of elastohydrodynamic oil film // *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A.* 1977. V. 356. No. 1685. P. 215–236.
53. *Kaneta M.* Effects of surface roughness in elastohydrodynamic lubrication // *Bull. JSME.* 1992. V. 35. No. 4. P. 535–546.
54. *Kaneta M., Sakai T., Nishikawa H.* Optical interferometric observations of the effects of a bump on point contact EHL // *Trans. ASME. J. Tribol.* 1992. V. 114. No. 4. P. 779–784.
55. *Kim K. H., Sadeghi F.* Non-Newtonian elastohydrodynamic lubrication of point contact // *Trans. ASME. J. Tribol.* 1991. V. 113. No. 4. P. 703–711.
56. *Kim K. H., Sadeghi F.* Three-dimensional temperature distribution in EHD lubrication: Part I — circular contact // *Trans. ASME. J. Tribol.* 1992. V. 114. No. 1. P. 32–41.
57. *Kostreva M. M.* Elastohydrodynamic lubrication: a nonlinear complementarity problem // *Intern. J. Numer. Methods in Fluids.* 1984. V. 4. No. 4. P. 377–397.
58. *Kostreva M. M.* Pressure spikes and stability considerations in elastohydrodynamic lubrication models // *Trans. ASME. J. Tribol.* 1984. V. 106. No. 3. P. 386–395.
59. *Kweh C. C., Evans H. P., Snidle R. W.* Micro-elastohydrodynamic lubrication of an elliptical contact with transverse and three-dimensional sinusoidal roughness // *Trans. ASME. J. Tribol.* 1989. V. 111. No. 4. P. 577–584.
60. *Kweh C. C., Patching M. J., Evans H. P., Snidle R. W.* Simulation of elastohydrodynamic contacts between rough surfaces // *Trans. ASME. J. Tribol.* 1992. V. 114. No. 3. P. 412–419.
61. *Lee R. T., Hamrock B. J.* A circular non-Newtonian fluid model: Part I — used in elastohydrodynamic lubrication // *Trans. ASME. J. Tribol.* 1990. V. 112. No. 3. P. 486–496.
62. *Lee R. T., Hamrock B. J.* A circular non-Newtonian fluid model: Part II — used in microelastohydrodynamic lubrication // *Trans. ASME. J. Tribol.* 1990. V. 112. No. 3. P. 497–505.
63. *Lee R. T., Hsu C. H.* A fast method for the analysis of the thermal-elastohydrodynamic lubrication of rolling/sliding line contacts // *Wear.* 1993. V. 166. No. 1. P. 107–117.
64. *Lim S., Brewe D.* A system approach to the elastohydrodynamic lubrication point-contact problem // *STLE Tribol. Trans.* 1992. V. 35. No. 2. P. 367–373.
65. *Lin T. R.* Thermal elastohydrodynamic lubrication of rolling and sliding contacts with a power law fluid // *Wear.* 1992. V. 154. No. 1. P. 77–93.
66. *Lin T. R., Lin J. F.* The elastohydrodynamic lubrication of line contacts with pseudoplastic fluids // *Wear.* 1990. V. 140. No. 2. P. 235–249.
67. *Lin T. R., Lin J. F.* Compressible elastohydrodynamic lubrication of rolling and sliding contacts with a power law fluid // *Wear.* 1991. V. 142. No. 2. P. 315–330.

68. *Lin T. R., Lin J. F.* Thermal effects in elastohydrodynamic lubrication of line contacts using a non-Newtonian lubricant // *Tribology International*. 1991. V. 24. No. 6. P. 365–372.
69. *Lubrecht A. A., ten Napel W. E., Bosma R.* Multigrid, an alternative method for calculating film thickness and pressure profiles in elastohydrodynamically lubricated line contacts // *Trans. ASME. J. Tribol.* 1986. V. 108. No. 4, P. 551–556.
70. *Lubrecht A. A., ten Napel W. E., Bosma R.* Multigrid, an alternative method of solution for two-dimensional elastohydrodynamically lubricated point contact calculations // *Trans. ASME J. Tribol.* 1987. V. 109. No. 3. P. 437–443.
71. *Lubrecht A. A., ten Napel W. E., Bosma R.* The influence of longitudinal and transverse roughness on the elastohydrodynamic lubrication of circular contacts // *Trans. ASME J. Tribol.* 1988. V. 110. No. 3. P. 421–426.
72. *Ma M.* An expedient approach to the non-Newtonian thermal EHL in heavily loaded point contacts // *Wear*. 1997. V. 206. No. 1-2. P. 100–112.
73. *Oh K. P.* The numerical solution of dynamically loaded elastohydrodynamic contact as a nonlinear complementarity problem // *Trans. ASME J. Tribol.* 1984. V. 106. No. 1. P. 88–95.
74. *Osborn K. F., Sadeghi F.* Time dependent line EHD lubrication using the multigrid/multilevel technique // *Trans. ASME. J. Tribol.* 1992. V. 114. No. 1. P. 68–74.
75. *Park T. J., Kim K. W.* A numerical analysis of the elastohydrodynamic lubrication of elliptical contacts // *Wear*. 1990. V. 136. No. 2. P. 299–312.
76. *Patir N., Cheng H. S.* An average flow model for determining effects of three-dimensional roughness on partial hydrodynamic lubrication // *Trans. ASME. J. Lubric. Technol.* 1978. V. 100. No. 1. P. 12–17.
77. *Peiran Y., Shizhu W.* A generalized Reynolds equation for non-Newtonian thermal elastohydrodynamic lubrication // *Trans. ASME. J. Tribol.* 1990. V. 112. No. 4. P. 631–636.
78. *Ping H., Shizhu W.* Study on oil film and pressure distribution of micro-EHL // *Trans. ASME. J. Tribol.* 1992. V. 114. No. 1. P. 42–46.
79. *Ranger A. P., Ettles C. M. M., Cameron A.* The solution of the point contact elastohydrodynamic problem // *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*. 1975, V. 346. No. 1645. P. 227–244.
80. *Sadeghi F., Kim K. H.* Effects of a single bump or dent in time dependent thermal line EHD lubrication // *Trans. ASME. J. Tribol.* 1994. V. 116. No. 1. P. 9–21.
81. *Sadeghi F., Sui P. C.* Thermal elastohydrodynamic lubrication of rolling/sliding contacts // *Trans. ASME. J. Tribol.* 1990. V. 112. No. 2. P. 189–195.
82. *Seabra J., Berthe D.* Elastohydrodynamic point contacts part I: formulation and numerical solution // *Wear*. 1989. V. 130. No. 2. P. 301–318.
83. *Seabra J., Berthe D.* Elastohydrodynamic point contacts part II: influence of surface speeds, surface waviness and load on the contact behaviour // *Wear*. 1989. V. 130. No. 2. P. 319–335.
84. *Shieh J., Hamrock B. J.* Film collapse in EHL and micro-EHL // *Trans. ASME. J. Tribol.* 1991. V. 113. No. 2. P. 372–377.
85. *Sui P. C., Sadeghi F.* Non-Newtonian thermal elastohydrodynamic lubrication // *Trans. ASME. J. Tribol.* 1991. V. 113. No. 2. P. 390–397.
86. *Taniguchi M., Dowson D., Taylor C. M.* The effect of spin motion upon elastohydrodynamic elliptical contacts // *Proc. 23rd Leeds-Lyon Symp. on Tribology*. Leeds. 1996. P. 599–610.

87. *Venner C. H.* Higher-order multilevel solvers for EHL line and point contact problem // *Trans. ASME. J. Tribol.* 1994. V. 116. No. 4. P. 741–750.
88. *Venner C. H., Lubrecht A. A.* Numerical analysis of the influence of waviness on the film thickness of a circular EHL contact // *Trans. ASME. J. Tribol.* 1996. V. 118. No. 1. P. 153–161.
89. *Venner C. H., Lubrecht A. A.* Transient analysis of surface features in an EHL line contact in the case of sliding // *Trans. ASME. J. Tribol.* 1994. V. 116. No. 2. P. 186–193.
90. *Venner C. H., Lubrecht A. A.* Numerical simulation of a transverse ridge in a circular EHL contact under rolling/sliding // *Trans. ASME. J. Tribol.* 1994. V. 116. No. 4. P. 751–761.
91. *Venner C. H., Lubrecht A. A., ten Napel W. E.* Numerical simulation of the overrolling of a surface feature in an EHL line contact // *Trans. ASME. J. Tribol.* 1991. V. 113. No. 4. P. 777–783.
92. *Venner C. H., ten Napel W. E.* Multilevel solution of the elastohydrodynamically lubricated circular contact problem. Part I. theory and numerical algorithm // *Wear*. 1992. V. 152. No. 2. P. 351–367.
93. *Venner C. H., ten Napel W. E.* Multilevel solution of the elastohydrodynamically lubricated circular contact problem. Part II. smooth surface results // *Wear*. 1992. V. 152. No. 2. P. 369–381.
94. *Venner C. H., ten Napel W. E.* Surface roughness effects in an EHL line contact // *Trans. ASME. J. Tribol.* 1992. V. 114. No. 3. P. 616–622.
95. *Venner C. H., ten Napel W. E., Bosma R.* Advanced multilevel solution of EHL line contact problem // *Trans. ASME. J. Tribol.* 1990. V. 112. No. 3. P. 426–432.
96. *Wang S. H., Conry T. F., Cusano C.* Thermal non-Newtonian elastohydrodynamic lubrication of line contacts under simple sliding conditions // *Trans. ASME J. Tribol.* 1992. V. 114. No. 2. P. 317–327.
97. *Wang S. H., Cusano C., Conry T. F.* Thermal analysis of elastohydrodynamic lubrication of line contacts using the Ree-Ryring fluid model // *Trans. ASME. J. Tribol.* 1991. V. 113. No. 2. P. 232–244.
98. *Wang S. H., Hua D. Y., Zhang H. H.* A full numerical EHL solution for line contacts under pure rolling condition with a non-Newtonian rheological model // *J. Engineering Tribol.* 1988. V. 110. No. 3. P. 583–586.
99. *Wang S. H., Zhang H. H.* Combined effects of thermal and non-Newtonian character of lubricant on pressure, film profile, temperature rise, and shear stress in EHL // *Trans. ASME. J. Tribol.* 1987. V. 109. No. 4. P. 666–670.
100. *Wang J., Zhang H. H.* A higher order perturbational approach in the lubricated EHL contacts with non-Newtonian lubricant // *Trans. ASME. J. Tribol.* 1992. V. 114. No. 1. P. 95–99.
101. *Wang S. H., Zhang H. H., Hua D. Y.* The influence of the viscoplastic and viscoelastic character of a lubricant on elastohydrodynamic lubrication // *Wear*. 1987. V. 118. No. 2. P. 185–197.
102. *Wang J., Tan J.* Numerical simulation of traction in rolling/sliding contacts // *Trans. ASME. J. Tribol.* 1997. V. 119. No. 4. P. 869–874.
103. *Wolff R., Kubo A.* A generalized non-Newtonian fluid model incorporated into elastohydrodynamic lubrication // *Trans. ASME. J. Tribol.* 1996. V. 118. No. 1. P. 74–82.

104. *Wolff R., Nonaka T., Kubo A., Matsuo K.* Thermal elastohydrodynamic lubrication of rolling/sliding line contacts // *Trans. ASME. J. Tribol.* 1992. V. 114. No. 4. P. 706–713.
105. *Xu G., Sadeghi F.* Thermal EHL analysis of circular contacts with measured surface roughness // *Trans. ASME. J. Tribol.* 1996. V. 118. No. 3. P. 473–483.
106. *Xu G., Sadeghi F., Cogdell J. D.* Debris denting effects on elastohydrodynamic lubricated contacts // *Trans. ASME. J. Tribol.* 1997. V. 119. No. 3. P. 579–587.
107. *Yang P., Wen S.* The behavior of non-Newtonian thermal EHL film in line contacts at dynamical loads // *Trans. ASME. J. Tribol.* 1992. V. 114. No. 1. P. 81–85.
108. *Zhu D., Ai X.* Point contact EHL based on optically measured three-dimensional rough surfaces // *Trans. ASME. J. Tribol.* 1997. V. 119. No. 3. P. 375–384.
109. *Zhu D., Cheng H. S.* Effect of surface roughness on the point contact EHL // *Trans. ASME. J. Tribol.* 1988. V. 110. No. 1. P. 32–37.
110. *Zhu D., Wen S. Z.* A full numerical solution for the thermo-elastohydrodynamic problem in elliptical contacts // *Trans. ASME. J. Tribol.* 1984. V. 106. No. 2. P. 246–254.

Глава 6

Контактные задачи для сложных сред (вязкоупругие, электроупругие, упруго-пластические и т.д.)

§ 1. УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЙ ДИНАМИЧЕСКИЙ КОНТАКТ ТЕЛ

И. Г. Кадамцев

Важность исследования неупругого соударения тел определяется, с одной стороны, практическими потребностями современной техники, с другой — необходимостью теоретического объяснения наблюдаемых экспериментальных результатов. Трудно указать какую-либо область техники, где бы ударные нагрузки не оказывали влияния на работоспособность машин и конструкций. Многочисленные исследования показывают, что более 80% случаев выхода из строя машин и механизмов обусловлено процессами, происходящими в зоне контакта соприкасающихся твердых тел. Следует отметить, что экспериментальные исследования ударных процессов связаны с большими материальными затратами, в то время как теоретические решения позволяют намного сократить их объем и обоснованно определить рациональную программу экспериментов.

1. Обзор работ по соударению тел с учетом контактных деформаций можно найти в монографиях [2, 4–6, 18–20]. В точной постановке задачи о неупругом соударении деформируемых тел приводят к нестационарным контактным задачам. Реальные материалы обладают сложным комплексом свойств и попытки учесть их все сразу чрезвычайно усложняют решение задачи. В силу их сложности они решаются либо численно, либо приближенно. Подходы к решению таких задач зависят, как правило, от относительной скорости сближения тел. Если скорость соударения мала, то с результатами экспериментов хорошо согласуется теория Герца. Теория Герца, построенная для упругих тел, часто дает заметное расхождение с экспериментами из-за того, что уже при весьма малых скоростях соударения появляются пластические деформации. Более того, пластические деформации часто значительно превосходят упругие и на активной стадии удара последними иногда можно пренебрегать. Для стали, например, критическая скорость соударения, начиная с которой появляются пластические деформации, равна 1 см/с. Однако, хотя теория Герца была разработана для исследования соударения упругих тел, гипотезы, положенные в её основу, имеют более широкое применение и могут быть использованы при рассмотрении упругопластического удара.

Напомним, что основное предположение Герца заключается в том, что влияние сил инерции, возникающих за счет деформаций тел в области их контакта, на связь между величиной местного смятия α и силой контактного взаимодействия P считается пренебрежимо малым. При этом полагается также, что скорость соударения мала по сравнению со скоростями распространения в материалах тел упругих возмущений, оба тела массивны и радиус зоны контакта много меньше размеров тел.

При таких предположениях задача о соударении тел разбивается на две. Сначала решается статическая контактная задача и определяется зависимость $P(\alpha)$, а затем решается задача о движении каждого тела

как абсолютно твердого под действием силы $P(\alpha)$. Многочисленные экспериментальные работы подтвердили справедливость гипотез Герца и показали, что наличие пластических деформаций не сужает области применимости основных предпосылок этой теории. В настоящее время при рассмотрении жесткопластического удара статическая зависимость $P(\alpha)$ определяется эмпирическим или полуэмпирическим способом [2, 5]. Суть этих способов в следующем. Сначала определяется зависимость между вдавливающей силой P и радиусом отпечатка a . Чаще всего эта зависимость берется в виде формулы Бринеля:

$$P = q_0 \pi a^2, \quad q_0 = \gamma k, \quad (1)$$

q_0 — среднее давление под штампом, $k = \sigma_T/2$ — пластическая постоянная материала; $\gamma = 5,69$ для гладкого штампа и 6,05 для абсолютно шероховатого штампа. Иногда эта зависимость берется в виде полуэмпирического закона Мейера:

$$P = B a^\beta, \quad (2)$$

где B и β определяются из экспериментов. Затем находится связь между местным смятием α и радиусом зоны контакта a . При этом местное смятие отождествляется с глубиной лунки и определяется геометрией тел. В частности, для степенного штампа вида $z = C r^n$

$$\alpha = C a^n. \quad (3)$$

Формулы (1) и (3) дают зависимость $P(\alpha)$ в параметрическом виде. Теперь, зная $P(\alpha)$, из решения второй части задачи

$$m \ddot{\alpha} = -P(\alpha); \quad \dot{\alpha}(0) = v_0; \quad \alpha(0) = 0; \quad m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2) \quad (4)$$

(здесь m_1 и m_2 — массы сталкивающихся тел, v_0 — скорость их соударения) можно найти все параметры удара. Однако такой подход не учитывает вытекание материала из-под штампа, что, как показано в [16], приводит к заметным погрешностям в определении основных параметров удара. Для степенного штампа $z = C_n r^n$ в этом случае основные параметры удара имеют вид [16]

$$\alpha_{\max} = \lambda_n^{\frac{2s}{1+2s}} \left[\frac{m v_0^2}{2} \frac{1+2s}{k_1} \right]^{\frac{1}{1+2s}}, \quad P_{\max} = \lambda_n^{\frac{2s}{1+2s}} \left[\frac{m v_0^2}{2} (1+2s) k_1^{\frac{1}{2s}} \right]^{\frac{2s}{1+2s}},$$

$$T = \frac{\delta_{\max} (2s+3) \sqrt{\pi}}{2 v_0 (1+2s)} \Gamma \left(\frac{2s+2}{2s+1} \right) \left[\Gamma \left(\frac{6s+5}{4s+2} \right) \right]^{-1}. \quad (5)$$

Здесь $k_1 = \pi q_0 C^{-2s}$, $s = \frac{1}{n}$, T — время внедрения, Γ — гамма-функция, λ_n характеризует вытекание материала из-под штампа и зависит от показателя степени функции формы штампа n [11]. Значения λ_n для различных n приведены в табл. 1.

ТАБЛИЦА 1

n	1	1,5	2	4	6	8	10	12	∞
λ_n	0,78	0,71	0,67	0,54	0,53	0,51	0,50	0,49	0,45

Зависимость $P(\alpha)$ в этом случае имеет вид

$$P(\alpha) = \pi q_0 (\lambda C^n)^{-2s} \alpha^{2s}. \quad (6)$$

Если же нас интересует процесс отскока или если скорость соударения сравнительно мала, не учитывать упругие деформации нельзя. В этом случае необходимо использовать упругопластическую модель $P(\alpha)$. Наибольшее распространение получила модель Н.А.Кильчевского [18], в которой зависимость $\alpha(P)$ имеет вид

$$\alpha = \begin{cases} bP^{2/3}, & P < P_0; \\ bP^{2/3} + Pd, & P > P_0, \dot{P} > 0; \\ bP^{2/3} + P_{\max}d, & P_{\max} > P_0, \dot{P} < 0. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь $b = R^{-1/3} [3/(4E)]^{2/3}$; $d = (2R\eta)^{-1}$; $\eta = \pi\gamma\sigma_T$, E — приведенный модуль Юнга, R — приведенный радиус кривизны, P_0 — сила, начиная с которой появляются пластические деформации. Для параболического штампа $z = 0,5 R^{-1} r^2$

$$P_0 = \frac{4}{3} R^{-1} E a_0^3; \quad a_0 = \frac{k\pi}{0,62} RE^{-1}. \quad (8)$$

Однако, следует отметить, что модель (7) не всегда хорошо согласуется с экспериментальными данными. В основу ее положено предположение, что $\alpha = \alpha_{\text{пл}} + \alpha_{\text{уп}}$, т.е. полное местное смятие равно сумме упругой и пластической составляющих, причем упругая составляющая есть герцевское решение, а пластическая — решение жесткопластической задачи без учета вытекания материала из-под штампа. Очевидно, что при развитых пластических деформациях распределение нормальных напряжений под штампом стремится к распределению напряжений в жесткопластической задаче, и упругая часть местного смятия будет определяться этими напряжениями, а не герцевским распределением напряжений. Модель местного смятия, свободная от этих недостатков, и применимая для произвольных $P(t)$, была построена в [1]. Сравнение с многочисленными экспериментальными и численными результатами показывает ее высокую эффективность. Зависимость $\alpha(P)$ из [1] удобно записать в форме

$$\frac{\alpha}{\alpha_1} = \begin{cases} P_*^{2/3}, & P_* < 1; \\ \frac{1}{2} [(1 + \beta)P_*^{1/2} + (1 - \beta)P_*], & P_* > 1, \dot{P} > 0; \\ \frac{1}{2} P_*^{2/3} P_{\max}^{-1} P_1^{-1} + (1 - \beta) [P_{\max}^{-1} P_1^{-1} - P_{\max}^{1/2} P_1^{-1/2}], & P_* > 1, \dot{P} < 0. \end{cases} \quad (9)$$

Здесь $P_* = P/P_1$; P_1 и α_1 — контактная сила и местное смятие, начиная с которых учитываются пластические деформации; P_{\max} — наибольшая сила, достигаемая на этапе внедрения; $P_1 = \eta R \alpha_1$; $\alpha_1 = R [3\eta / (4E)]^2$; $\eta = \pi k \gamma$; $k = \sigma_T / 2$; $\gamma = 5,7$ в случае отсутствия трения между телами; β характеризует вытекание материала из-под штампа в процессе его внедрения (если вытекание не учитывается, то $\beta = 0$, при отсутствии трения для параболического штампа $\beta = 1 - \lambda_2 = 0,33$); k — пластическая постоянная. Пластические деформации начинают заметно влиять с момента, когда среднее давление под штампом достигает бринелевского значения. Соответствующее значение силы P_1 почти в 20 раз больше P_0 , при котором максимальные касательные напряжения достигают пластического уровня. Затем, решая задачу Коши (4) либо численно, либо аналитически, находим основные параметры удара. Обозначив $\dot{\alpha} = u$, преобразуем уравнение (4) к виду

$$\frac{m}{2} (u^2 - v_0^2) = - \int_0^P P \frac{d\alpha}{dP} dP. \quad (10)$$

Из (10), используя (9), для активной стадии процесса ($\dot{P} > 0$), находим в случае $P > P_1$ (если $P < P_1$, то это герцевская зависимость)

$$u = \sqrt{\Phi(P_*)},$$

$$\Phi(P_*) = v_0^2 - \left[\frac{4}{5} + \frac{1}{3} (1 + \beta) (P_*^{3/2} - 1) + \frac{1}{2} (1 - \beta) (P_*^2 - 1) \right] \frac{\alpha_1 P_1}{m}. \quad (11)$$

Сила контактного взаимодействия достигает максимального значения P_{\max} в момент, когда скорость внедрения u равна нулю. Следовательно, из (11) получаем уравнение для определения P_{\max} :

$$\Phi(P_{\max}) = 0. \quad (12)$$

Из (11) находим t_{\max} , за которое происходит внедрение штампа:

$$t_{\max} = \int_0^{P_{\max}} \frac{1}{u} \frac{d\alpha}{dP} dP. \quad (13)$$

Используя (9), окончательно имеем

$$\frac{t_{\max}}{\alpha_1} = \int_0^1 \frac{\frac{2}{3} P^{-1/3}}{\sqrt{v_0^2 - \frac{4}{5m} P^{5/3} \alpha_1 P_1}} dP + \int_1^{P_{\max}} \frac{\frac{1}{2} (1 + \beta) P^{-1/2} + (1 - \beta) P}{\sqrt{\Phi(P)}} dP. \quad (14)$$

Формулы, аналогичные (12) и (14), были получены и для модели А. Н. Кильчевского (7). Численные значения t_{\max} и P_{\max} для различных материалов, с использованием моделей Герца, Кильчевского, жесткопластической (6) и упругопластической (9), приведены в табл. 2. Эти результаты

ТАБЛИЦА 2

	m	R	v_0	σ_{TD}	P_1	t_1	P_2	t_2	P_3	t_3	P_4	t_4	P_5	t_5
D1T	20	6,5	365	27,5	3,35	3,5	3,51	3,27	3,24	3,7	4,74	2,8	2,38	5,1
—	13,1	6,3	173	—	1,2	4,9	1,35	2,6	1,19	3,2	1,50	2,8	0,86	4,4
—	—	—	222	—	1,95	3,6	1,73	2,6	1,54	3,1	2,03	2,6	1,12	4,3
—	—	—	384	—	2,87	2,7	2,99	2,6	2,74	3,0	3,91	2,4	2,01	4,1
—	—	—	520	—	3,97	2,4	4,06	2,6	3,75	2,9	5,63	2,2	2,76	4,1
—	4,86	—	420	—	1,93	1,99	1,99	1,6	1,79	1,9	2,40	1,6	1,30	2,5
—	—	—	556	—	2,52	1,6	2,63	1,6	2,40	1,8	3,37	1,5	1,73	2,5
—	—	—	650	—	3,00	1,5	3,08	1,6	2,83	1,8	4,06	1,4	2,07	2,5
Al	6	14	1650	19,6	10,3	1,7	11,0	1,4	10,3	1,6	16,8	1,1	7,66	2,1
—	—	25	720	—	20,8	3,4	23,1	3,6	20,5	4,1	30,9	3,1	15,1	5,6
—	—	—	870	—	30,7	3,1	26,7	3,6	25,0	4,1	38,6	2,9	18,5	5,6
Pb	72	—	730	0,67	4,05	21	4,05	20	4,03	21	18,2	5,3	3,22	26

получены для тех же исходных данных, для которых получены экспериментальные значения в [2]. Здесь P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 — максимальное значение контактной силы P (10^4 Н), определяемой экспериментально, по жесткопластической модели, по упругопластической модели, по модели Герца и модели Кильчевского; t_i — соответствующее время соударения (10^{-4} с); m — масса (кг), R — радиус (см), v — скорость (см/с); σ_{TD} — динамический предел текучести (10^2 МПа). Как видно из сравнения теоретических и экспериментальных результатов, теория, построенная на модели (9), дает результаты, наиболее близкие к экспериментальным. Отметим, что при расчетах брался динамический предел текучести σ_{TD} , который, как правило, больше статического, его значения также взяты из [2]. Из таблицы хорошо видно, что при $P_{\max} \gg P_1$ хорошие результаты дает модель жесткопластического тела, и основные характеристики удара легко определяются по простым формулам. Для параболического штампа $z = 0,5R^{-1}r^2$ они имеют вид

$$P_{\max} = \left[\frac{mv_0^2 \pi \sigma_T \gamma R}{0,67} \right]^{1/2}; \quad \alpha_{\max} = \left[\frac{0,67 mv_0^2}{R \gamma \pi \sigma_T} \right]^{1/2}; \quad T = \frac{\pi \alpha_{\max}}{2v_0}. \quad (15)$$

Одной из важных характеристик при изучении соударения тел является коэффициент восстановления. Приведем основные результаты из [8]. На этапе внедрения, при развитых пластических деформациях, пренебре-

ТАБЛИЦА 3

v_0	λ_1	λ_2	λ_3	λ_1	λ_2	λ_3	λ_1	λ_2	λ_3
5	0,74	0,74	0,69	0,69	0,69	0,68	0,56	0,56	0,63
0	0,64	0,62	0,66	0,58	0,58	0,65	0,47	0,47	0,60
20	0,54	0,52	0,62	0,47	0,48	0,61	0,38	0,39	0,56
50	0,40	0,41	0,57	0,33	0,38	0,54	0,27	0,31	0,51
100	0,29	0,35	0,53	0,23	0,32	0,52	0,18	0,26	0,47
150	0,23	0,31	0,51	0,16	0,29	0,50	0,13	0,24	0,45
200	0,19	0,29	0,49	0,12	0,27	0,48	0,09	0,22	0,43

гаем упругой составляющей местного смятия. В этом случае зависимость $\alpha(P)$ имеет вид

$$\alpha(P) = (1 - \beta)Pd, \quad d = (2\eta R)^{-1}, \quad \eta = 5,7k\pi. \quad (16)$$

Уравнение движения тела при отскоке, согласно (9),

$$m\ddot{\alpha} = -(4E/3)^{3/2} \eta^{-1/2} \alpha_{\max}^{1/2} (\alpha - \alpha_p)^{3/2},$$

$$\alpha_p = \alpha_{\max} - \alpha_{\text{уп}}(P_{\max}), \quad \alpha_{\text{уп}}(P_{\max}) = 3\eta \alpha_{\max} (4E)^{-1}, \quad (17)$$

с начальными условиями $\alpha(0) = \alpha_{\max}$ и $\dot{\alpha}(0) = 0$; α_{\max} определяется из (15).

Решая (17), находим скорость отскока:

$$v_1 = \left(\frac{3}{5E} \right)^{1/2} m^{-1/8} \eta^{5/8} \left(\frac{2R}{1-\beta} \right)^{3/8} v_0^{3/4}. \quad (18)$$

Отсюда коэффициент восстановления для тел с квадратичным зазором имеет вид

$$\lambda_1 = v_1/v_0 = 4,577 m^{-1/8} R^{3/8} E^{-1/2} \sigma_T^{5/8} v_0^{-1/4}. \quad (19)$$

Сравним полученные результаты с результатами экспериментов из [17]. Все исходные данные берутся из [17], однако там не приведены значения динамического предела текучести материалов σ_{TD} , поэтому для его определения использовался первый опыт при скорости 5 м/с. Результаты экспериментов и расчетов приведены в табл. 3.

В качестве инденторов применялись закаленные подшипниковые шарики диаметром 1,59 мм, массой 16,2 мг, а мишенью служили образцы из дюраля Д16Т, отожженная сталь Ст.3 и катаная техническая медь М1. В столбце 1 дана скорость удара шарика по мишени (м/с), столбцы 2–4 дают значения для дюраля Д16Т коэффициентов восстановления для экспериментальных значений (λ_1), вычисленных по формуле (19) (λ_2) и определяемых теорией [17] (λ_3), соответственно. В столбцах 5–7 в том же порядке приведены λ для Ст.3, а в 8–10 — для меди. Сравнение показывает

лучшее совпадение с экспериментами предлагаемой теории. При скорости 100 м/с и более диаметр пластического отпечатка приближается к диаметру шарика и, следовательно, нарушаются исходные предпосылки данной теории. Отсюда заметные расхождения с экспериментом. В [8] приведен алгоритм более точного определения коэффициента восстановления, но из-за его громоздкости он здесь не приводится.

В современной литературе [2, 5, 6, 18] при исследовании соударения тел обычно полагают, что отраженными волновыми процессами можно пренебречь, если размеры тела таковы, что полная длительность удара больше (в 5–10 раз) времени пробега упругой волны, или, наоборот, размеры настолько большие, что отраженная волна не успеет вернуться за время удара. На примере продольного удара тела по стержню конечной длины можно проверить обоснованность этих предположений и исследовать, как влияют волновые явления на процесс удара в случае, когда ими пренебрегать нельзя.

Поместим начало координат в точке начального касания тела и стержня. Уравнение продольных колебаний стержня

$$m \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}; \quad a_1 = \left(\frac{E_1}{\rho_1} \right)^{1/2}. \quad (20)$$

Здесь u_1 — продольное смещение точек стержня, E_1 — модуль Юнга, ρ_1 — плотность материала стержня. Перемещение тела u_2 находится из решения уравнения

$$m \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = -P(t), \quad (21)$$

где m — его масса, $P(t)$ — сила контактного взаимодействия тела и стержня. Начальные условия

$$u_1(x, 0) = u_2(x, 0) = \frac{\partial u_1}{\partial t}(x, 0) = 0; \quad \frac{\partial u_2}{\partial t}(x, 0) = v_0, \quad (22)$$

v_0 — начальная скорость соударения.

На концах стержня выполняются условия

$$u_1(l, t) = 0, \quad E_1 F_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}(0, t) = -P(t), \quad (23)$$

F_1 — площадь поперечного сечения стержня.

Применяя к (20) и (23) прямое и обратное преобразования Лапласа,

окончательно получаем:

$$\frac{u_1}{b} = \begin{cases} 0, & t \leq \frac{x}{a_1}; \\ \int_0^{t-\frac{x}{a_1}} P(t-\tau-\frac{x}{a_1}) d\tau, & \frac{x}{a_1} \leq t \leq \frac{2l-x}{a_1}; \\ \int_0^{t-\frac{x}{a_1}} P(t-\tau-\frac{x}{a_1}) d\tau - \int_0^{t+\frac{x-2l}{a_1}} P(t-\tau+\frac{x-2l}{a_1}) d\tau, & \frac{2l-x}{a_1} \leq t \leq \frac{2l+x}{a_1}; \\ \sum_{k=0}^n \int_{2ak}^{(2k+1)a} \left(P(t-\tau-\frac{x}{a_1}) - P(t-\tau+\frac{x-2l}{a_1}) \right) d\tau, & (2n+1)a - \frac{x}{a_1} \leq t \leq (2n+3)a + \frac{x-2l}{a_1}; \\ \sum_{k=0}^n \int_{2ak}^{(2k+1)a} \left(P(t-\tau-\frac{x}{a_1}) - P(t-\tau+\frac{x-2l}{a_1}) \right) d\tau + \\ + \int_{(2n+2)a}^{t-\frac{x}{a_1}} P(t-\tau-\frac{x}{a_1}) d\tau, & (2n+3)a + \frac{x-2l}{a_1} \leq t \leq (2n+3)a - \frac{x}{a_1}; \\ \sum_{k=0}^n \int_{2ak}^{(2k+1)a} \left(P(t-\tau-\frac{x}{a_1}) - P(t-\tau+\frac{x-2l}{a_1}) \right) d\tau + \\ + \int_{(2n+2)a}^{t-\frac{x}{a_1}} P(t-\tau-\frac{x}{a_1}) d\tau - \int_{(2n+2)a}^{t+\frac{x-2l}{a_1}} P(t-\tau+\frac{x-2l}{a_1}) d\tau, & (2n+3)a - \frac{x}{a_1} \leq t \leq (2n+4)a + \frac{x-2l}{a_1}; \\ \sum_{k=0}^n \int_{2ak}^{(2k+1)a} \left(P(t-\tau-\frac{x}{a_1}) - P(t-\tau+\frac{x-2l}{a_1}) \right) d\tau + \\ + \int_{(2n+2)a}^{(2n+3)a} P(t-\tau-\frac{x}{a_1}) d\tau - \int_{(2n+2)a}^{t+\frac{x-2l}{a_1}} P(t-\tau+\frac{x-2l}{a_1}) d\tau, & (2n+4)a + \frac{x-2l}{a_1} \leq t \leq (2n+4)a - \frac{x}{a_1}; \end{cases} \quad (24)$$

где $b = a_1/(E_1 F_1)$, $a = 2l/a_1$.

Решение (21) представим в виде

$$u_2 = -\frac{1}{m} \int_0^t dt \int_0^t P(\tau) d\tau + v_0 t. \quad (25)$$

Местное смятие α будет

$$\alpha = u_2(0, t) - u_1(0, t). \quad (26)$$

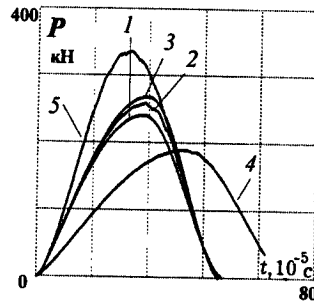


Рис. 1

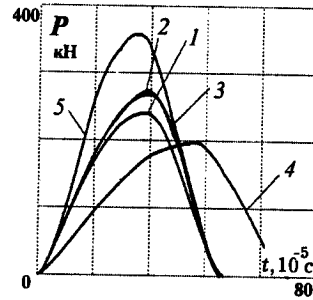


Рис. 2

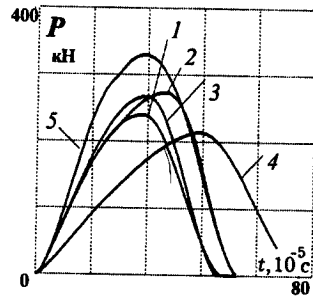


Рис. 3

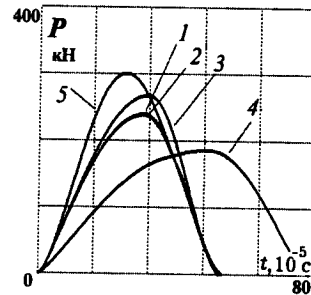


Рис. 4

Подставляя (24) и (25) в (26) и используя (9), приходим к нелинейному интегральному уравнению, в процессе численного решения которого находилось $P(t)$. В [2] проведены эксперименты по продольному удару тела по стержню конечной длины. В данной работе все исходные данные взяты из [2]. В [3] рассмотрен продольный удар тела по полубесконечному стержню. Сравнение результатов расчетов основных параметров удара с экспериментальными данными из [2] показывает, что теория Сирса, построенная на основе упругой модели Герца, дает завышенные значения P_{\max} в среднем на 20–30% по сравнению с экспериментальными и заниженное значение T . Теория, построенная на упругопластической модели Кильчевского, дает заниженное значение P_{\max} на 30–40% и завышенное значение T . Предлагаемая теория, построенная на модели (9), дает результаты, отличающиеся от экспериментальных на 2–6%.

На рис. 1, 2, 3, 4 приведены графики $P(t)$ для различных моделей и длин стержня. Все вычисления проводились для значений параметров: $m = 13,1$ кг, $v_0 = 3,84$ м/с, $R = 0,063$ м. На рис. 1, 2, 3, 4 длина $l = 0,05$ м; 0,2 м; 0,6 м; 1,0 м, соответственно.

На графиках кривая 1 соответствует зависимости $P(t)$ в случае упругопластического удара по полубесконечному стержню, кривая 2 — по

стержню конечной длины, кривая 3 — по полупространству, кривые 4 и 5 — по моделям Кильчевского и Герца, соответственно, для конечного стержня. Из приведенных графиков видно, что модели Герца и Кильчевского дают самую большую погрешность в определении $P(t)$ по сравнению с ошибкой за счет неучета волновых явлений.

На практике часто встречаются случаи неквадратичного зазора при динамическом контакте тел, поэтому модель (9) в этих случаях будет неприменима.

Рассмотрим случай конического штампа. Отметим, что упругопластическая контактная задача об определении $P(\alpha)$ для конического штампа точного решения не имеет. Поэтому широкое распространение получили численные и приближенные способы решения этих задач. Так в [2], на базе многочисленных экспериментов, построена полуэмпирическая теория, в которой параметры ударного процесса коническим индентором определяются по одному экспериментальному данному. В [9] построена феноменологическая модель местного смятия для упругопластических тел, одно из которых коническое, и на базе этой модели исследуется процесс удара, определяются все его параметры. Отмечается хорошее совпадение с экспериментальными данными из [2].

Угол конуса считается близким к π , трение в области контакта отсутствует, используется условие пластичности Треска–Сен-Венана. Пластические постоянные считаются различными настолько, что пластические деформации возникают только в теле, пластическая постоянная k которого наименьшая. Приближенное решение контактной задачи сведено к комбинации решений упругой и жесткопластической задач с помощью следующих предположений:

1) перемещение u любой точки контактирующих тел представимо в виде суммы упругой u_e и пластической u_p составляющих:

$$u = u_e + u_p, \quad (27)$$

причем u_e не зависит от пластических деформаций и однозначно определяется контактными давлениями, а u_p не меняется при разгрузке;

2) распределение давлений в области контакта сохраняет вид упругого решения при любых P

$$q(P, r) = -q_0 \ln \{ a/r - [(a/r)^2 - 1]^{1/2} \}, \quad (28)$$

где $q_0 = P/(\pi a^2)$ — среднее давление, a — радиус зоны контакта;

3) среднее давление не превышает бринелевского

$$q_0 \leq \lambda k; \quad (29)$$

4) приращение пластических деформаций происходит при выполнении условий

$$q_0 = \lambda k, \quad \dot{P} > 0; \quad (30)$$

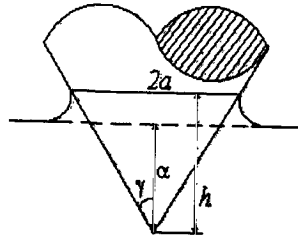


Рис. 5. Схема внедрения конуса

5) за пределами пластического отпечатка пластические смещения поверхности упругопластического тела совпадают со смещениями жесткопластического тела, копирующего отпечаток на упругопластическом теле.

Из решения упругой контактной задачи для конуса [21] имеем

$$a = [2P \operatorname{tg} \gamma / (\pi E)]^{1/2}, \quad E = E_1 E_2 [(1 - \nu_1^2) E_2 + (1 - \nu_2^2) E_1]^{-1}, \quad (31)$$

откуда

$$q_{\text{ср}} = E \operatorname{ctg} \gamma / 2. \quad (32)$$

Из (32) следует, что в упругом решении среднее давление не зависит от вдавливающей силы, а зависит только от модуля E и угла раствора конуса. Хорошо известно, что при внедрении пологого штампа в жесткопластическое полупространство среднее давление меняется мало и близко к бринелевскому. Последний факт отражен в гипотезе (3). Следовательно, для существования упругого решения должны выполняться (29) и (32), откуда следует

$$\operatorname{tg} \gamma \geq E(2k\lambda)^{-1}. \quad (33)$$

Легко видеть, что неравенство (33) выполняется для углов γ , близких к $\pi/2$. Для стали, например, $1,565 < \gamma < \pi/2$. Отсюда можно сделать вывод, что для конического штампа упругое решение реализуется только для углов раствора конуса близких к π , т.е. для реальных конических штампов пластические деформации нужно учитывать при любых P .

Если рассматривать процесс нагружения конического штампа в упругопластическое полупространство из недеформированного состояния при $\dot{P} > 0$, то окончательно [9] $\alpha(P)$ имеет вид

$$\alpha = (1 - \beta)a \operatorname{ctg} \gamma + \lambda k E^{-1} (\pi - 2 + 2\beta)a. \quad (34)$$

Учитывая, что из (30) $a = (P/\eta)^{1/2}$, окончательно получаем

$$\alpha = CP^{1/2}, \quad C = \operatorname{ctg} \gamma (1 - \beta) \eta^{-1/2} + [1 + (\beta - 2)/\pi] \eta^{1/2} E^{-1}. \quad (35)$$

Для пологого конуса $\beta = 0,22$ (см. табл. 1).

ТАБЛИЦА 4

	2γ	m	v_0	σ_{TD}	$P_{\max,1}$	$t_{\max,1}$	$\alpha_{\max,1}$	P_{\max}	t_{\max}	α_{\max}
сталь 15	135	10,0	12,2	225	4,11	0,55	0,44	4,58	0,56	0,49
—	150	12,0	21,8	225	13,3	0,36	5,5	15,0	0,366	5,7
—	90	6,3	12,5	225	2,08	0,69	6,2	1,93	0,85	7,6
Д1-Т	90	3,44	5,43	274	0,465	0,783	0,29	0,455	0,86	0,33
—	90	8,45	4,43	274	0,333	0,855	0,25	0,343	0,91	0,29
—	50	6,3	12,5	274	1,18	1,20	11,0	1,23	1,33	11,9
свинец	120	5,75	4,43	19,5	0,257	1,86	5,3	0,292	1,84	5,8

Подставляя (35) в (4) и учитывая начальные условия, приходим к следующей задаче Коши:

$$\ddot{\alpha} = -\alpha^2 B, \quad \alpha(0) = 0, \quad \dot{\alpha}(0) = v_0, \quad B = (mC^2)^{-1}. \quad (36)$$

Путем замены

$$\alpha = K_\alpha y, \quad t = K_t \tau, \quad K_\alpha = (v_0^2 B^{-1})^{1/3}, \quad K_t = (v_0 B)^{-1/3} \quad (37)$$

задачу (36) приводим к виду

$$\ddot{y} + y^2 = 0, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1. \quad (38)$$

Решая (38), находим основные характеристики удара:

$$\alpha_{\max} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} K_\alpha, \quad P_{\max} = (\alpha_{\max}/C)^2, \quad t_{\max} = 1,605 K_t. \quad (39)$$

Сравнив экспериментальные данные из [2] с теоретическими, рассчитанными по формулам (39) данной теории, обнаружим хорошее их совпадение. Эти результаты приведены в табл. 4. Индексом «1» обозначены экспериментальные данные. Здесь γ измеряется в градусах, m — в кг, v_0 — м/с, σ_{TD} — МПа, P_{\max} — 10^5 Н, t_{\max} — 10^{-3} с, α_{\max} — мм.

Рассмотрим упругопластическое сжатие двух осесимметричных тел в случае их плотного касания. Введем цилиндрическую систему координат с началом в точке касания, осью r в касательной плоскости и осью z , направленной в сторону тела, имеющего меньшую пластическую постоянную k . Полагаем, что в окрестности точки касания ($r = 0$) начальная форма тел представима в виде

$$z_1 = A_1 r^{2n}, \quad z_2 = A_2 r^{2n}, \quad n > 1, \quad (40)$$

и зазор между ними

$$z = Ar^{2n}, \quad A = A_2 - A_1. \quad (41)$$

Вводим те же предположения, что и для конического штампа, только полагаем теперь, что давление в зоне контакта распределено по закону

$$q(P, r) = \frac{2n+1}{2} \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \sum_{k=2}^n \left[\left(\frac{r}{a} \right)^{2n-2} + \frac{(2k-3)!!}{(2k-2)!!} \left(\frac{r}{a} \right)^{2(n-k)} \right] \sqrt{1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2} \frac{P}{\pi a^2},$$

$$0 < r < a. \quad (42)$$

При развитых пластических деформациях давление в области контакта будет стремиться к давлению жесткопластической задачи, вычисленному в [7]. Поэтому (42) можно рассматривать как 1-е приближение из [7]. Однако при $n \rightarrow \infty$ штамп стремится к плоскому, и (42) дает большую погрешность при $r = a$. Было исследовано до каких значений n аппроксимация (42) дает погрешность в определении вертикальной составляющей упругой части перемещения u_e в любой точке области контакта не более 5%. Численный анализ показал, что это будет выполняться при $n \leq 7$.

Используя принятые выше гипотезы, получаем зависимость $\alpha(P)$. Она будет упругой [21]

$$\alpha = Aa^{2n} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}, \quad P = \frac{4nE}{1-\nu^2} A \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}, \quad \alpha(P) = KP^{\frac{2n}{2n+1}},$$

$$K = A \frac{(2n)!!}{(2N-1)!!} \left[\frac{(1-\nu^2)(2n+1)!!}{4AEn} \right]^{\frac{2n}{2n+1}} \quad (43)$$

пока P не достигнет величины P_1 . Это наступит, когда среднее давление достигнет бринелевского, следовательно,

$$P_1 = \left[\eta^{\frac{2n+1}{2}} \frac{1-\nu^2}{4nE} A \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \right]^{\frac{2}{2n+1}}, \quad \eta = k\pi\gamma. \quad (44)$$

При $P > P_1$ необходимо учитывать пластические деформации, и окончательно зависимость $\alpha(P)$ принимает вид [10]

$$\alpha = \begin{cases} KP^{\frac{2n}{2n+1}}, & P < P_1; \\ K_1 P^{\frac{2n}{2n+1}} + \alpha_{\text{пл}}(P_{\text{max}}), & P_{\text{max}} > P_1, \dot{P} < 0; \\ CP^n + BP^{1/2}, & P > P_1, \dot{P} > 0, \end{cases} \quad (45)$$

$$C = (1-\beta)A\eta^{-n}, \quad B = \frac{1-\nu^2}{E} \frac{2n+1}{n} \eta^{1/2} \left[1 - (1-\beta) \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]. \quad (46)$$

Здесь K_1 получается из K подстановкой вместо A коэффициента приведенного штампа A_* , определяемого из равенства

$$\alpha_e = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} A_* a^{2n} = \frac{(1-\nu^2)(2n-1)}{4E} \eta^{1/2} P^{1/2}. \quad (47)$$

Полученная зависимость (45) $\alpha(P)$ может быть использована при решении задач трибоники, расчетах соударения тел по теории Герца и Тимошенко.

В заключение отметим, что зависимость $\alpha(P)$ (9) для параболического штампа применялась для исследования упругопластического удара массивного тела по пластинам и оболочкам (см., например, [12–15]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В. М., Кадамцев И. Г., Царюк Л. Б. Осесимметричные контактные задачи для упругопластических тел // Трение и износ. 1984. Т. 1. № 1. С. 16–26.
2. Батуев Г. С., Голубков Ю. В., Ефремов А. К., Федосов А. А. Инженерные методы исследования ударных процессов. М.: Машиностроение, 1977. 240 с.
3. Бублик С. А., Кадамцев И. Г. К вопросу о продольном ударе тела по стержню // ПМТФ. 1992. № 1. С. 123–125.
4. Виноградов В. Н. и др. Изнашивание при ударе. М.: Машиностроение, 1982. 192 с.
5. Гольдсмит. Удар. М.: Стройиздат, 1965. 448 с.
6. К.Джонсон. Механика контактных взаимодействий. М.: Мир, 1989. 509 с.
7. Ишлинский А. Ю. Осесимметричная задача пластичности проба Бринеля // ПММ. 1944. Т. 8. Вып. 8. С. 201–222.
8. Кадамцев И. Г. Определение коэффициента восстановления при упругопластическом соударении тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 6. С. 89–91.
9. Кадамцев И. Г. Осесимметричное упругопластическое соударение двух тел, одно из которых коническое // Изв. СКНЦ ВШ. Естеств. науки. 1990. № 4. С. 50–54.
10. Кадамцев И. Г. Модель местного смятия осесимметричных упругопластических тел с неквадратичным зазором // Изв. СКНЦ ВШ. Естеств. науки. 1988. № 3. С. 73–76.
11. Кадамцев И. Г., Ковальчук В. Е., Царюк Л. Б. Теория удара С.П.Тимошенко при пластическом местном смятии // Труды XII Всес. конф. по теории оболочек и пластин. Т. 2. Ереван: Изд-во Ерев. ун-та, 1980. С. 191–197.
12. Кадамцев И. Г., Рухленко С. А. Удар массивного тела по бесконечной пластине, лежащей на жидком полупространстве, с учетом контактных явлений // Изв. СКНЦ ВШ. Естеств. науки. 1989. № 3. С. 22–29.
13. Кадамцев И. Г., Рухленко С. А. Упругопластический удар массивного тела по круглой пластине, лежащей на винклеровском основании. // Научные труды программы ГК РФ по ВО «Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемых сред и конструкций». Н. Новгород. 1993. № 1. С. 104–111.
14. Кадамцев И. Г., Фрейгейт М. Р. Упругопластический удар массивного тела по цилиндрической незамкнутой оболочке. // Труды XIV Всес. конф. по теории пластин и оболочек. Кутаиси. 1987. Т. 2. С. 9–14.
15. Кадамцев И. Г., Фрейгейт М. Р. Удар массивного тела по шарнирно опертому куполу. // Проблемы прочности. 1991. № 9. С. 57–59.
16. Кадамцев И. Г., Царюк Л. Б. Соударение жесткопластических тел вращения. // Расчет оболочек и пластин. Ростов-на-Дону: РИСИ. 1978. С. 189–194.
17. Канзур Х. Ф., Клейс И. Р. Экспериментальное и расчетное определение коэффициента восстановления при ударе. // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 5. С. 182–185.

18. Кильчевский Н. А. Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар. Киев: Наукова думка, 1976. 315 с.
19. Колесников Ю. В., Морозов Е. М., Сулов А. Г. Механика контактного взаимодействия. Киев: Наукова думка, 1989. 224 с.
20. Рыжов Э. В., Колесников Ю. В., Сулов А. Г. Контактное взаимодействие твердых тел при статических и динамических нагрузках. Киев: Наукова думка, 1982. 172 с.
21. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М.-Л.: Гостехиздат, 1949. 272 с.

§ 2. КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ (СТЕПЕННАЯ НЕЛИНЕЙНОСТЬ)

С. А. Гришин

Все задачи нелинейной теории ползучести очень трудны. Ниже описан приближенный подход к решению контактных задач «степенной» установившейся ползучести в случае, когда одно из контактирующих тел является жестким штампом, имеющим углы, а другое — тонким деформируемым слоем или полуплоскостью. Метод основан на идее срачивания локальных и проникающих решений. Основными его достоинствами являются ясность предположений и простота вычислений. При изложении материала в основном следуем [24].

Прежде всего рассмотрена локальная задача о контакте между недеформируемой четвертью плоскости и полуплоскостью, находящейся в условиях ползучести. Она эквивалентна известной задаче Черепанова–Райса–Хатчинсона о трещине. Отсюда получено напряженно-деформированное состояние вблизи угла как функция одного свободного параметра. Внутреннее решение для тонкого слоя получено асимптотическим анализом, для полупространства — методом Н.Х.Арутюняна, оба решения суть функции еще одного свободного параметра. Размер пограничного слоя может быть рассмотрен как третий свободный параметр. Интегральное условие статики системы и требование непрерывности основных характеристик контактной задачи приводят к нелинейному алгебраическому уравнению для численного определения свободных постоянных. В частных случаях его решение может быть дано явными формулами. Помимо названных задач решена периодическая задача, моделирующая изготовление штамповкой плиты с ребрами. Более того, полностью изучены как отдельные случаи локальное решение вблизи вершины угла при ползучести (произвольный угол, различные граничные условия), асимптотика осесимметричной задачи вблизи конической точки (произвольный угол, различные граничные условия), а также найдены внутренние асимптотики плоской задачи для тонкого слоя из материалов Надаи и Эмбера.

1. Модель и обозначения. Изучается одна из самых популярных моделей нелинейной ползучести [15, 19], так называемая степенная установившаяся ползучесть, описываемая определяющими соотношениями

$$\varepsilon_i = A\sigma_i^m, \quad (\sigma_i = K\varepsilon_i^\mu), \quad \sum_k \varepsilon_{kk} = 0, \quad s_{ij} = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \varepsilon_{ij}, \quad (1)$$

где s_{ij} — компоненты девиатора напряжений по некоторому ортонормальному базису, ε_{ij} — компоненты тензора приращений деформации, σ_i — интенсивность напряжений, ε_i — интенсивность приращений деформации, A , m (или K , μ) — постоянные материала, $A = K^{-m}$, $m = 1/\mu \geq 1$.

Уравнения равновесия, соотношения Коши и краевые условия идентичны соответствующим уравнениям классической теории упругости [20]. Если рассматривать ε_{ij} как компоненты тензора напряжений, то немедленно получим постановку задачи деформационной теории пластичности [14].

2. **Локальная задача.** Рассмотрим малую окрестность угла жесткого штампа в предположении о плоской деформации. Имеем недеформируемую четверть плоскости, контактирующую с полуплоскостью из материала (1). Если поверхность контакта гладкая, такая задача почти идентична задаче Черепанова [21], Райса-Розенгринга [27] и Хатчинсона [25, 26] для кончика трещины. Все различие состоит в знаке компонент тензора напряжений: для штампа имеем сжатие там, где было растяжение для трещины. Поэтому и метод решения тот же самый. Предполагается, что функция напряжений Эри имеет вид

$$\Phi(r, \vartheta) = Q r^s \varphi(\vartheta), \quad (2)$$

где r и ϑ — полярные координаты с началом в углу штампа, Q и s — неизвестные действительные постоянные, а φ — неизвестная функция переменной ϑ . Компоненты тензоров напряжений и скоростей деформации выражаются через $\varphi(\vartheta)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(r, \vartheta) &= Q r^{s-2} \tilde{\sigma}_{ij}(\vartheta), \\ \tilde{\sigma}_{rr} &= s\varphi + \varphi'', \quad \tilde{\sigma}_{\vartheta\vartheta} = s(s-1)\varphi, \quad \tilde{\sigma}_{r\vartheta} = (1-s)\varphi', \\ 4\tilde{\sigma}_i^2 &= [\varphi'' + s(2-s)\varphi]^2 + 4(1-s)^2\varphi', \\ \varepsilon_{ij}(r, \vartheta) &= A Q r^{m+m(s-2)} \tilde{\varepsilon}_{ij}(\vartheta), \\ \tilde{\varepsilon}_{rr} &= -\tilde{\varepsilon}_{\vartheta\vartheta} = \tilde{\sigma}_i^{m-1} [\varphi'' + s(2-s)\varphi]/2, \quad \tilde{\varepsilon}_{r\vartheta} = \tilde{\sigma}_i^{m-1} (1-s)\varphi'. \end{aligned} \quad (3)$$

Штрихом обозначено дифференцирование по ϑ , и оно же обозначено оператором ∂_ϑ в следующей формуле.

Представление (2) разделяет переменные в уравнении совместности, в результате чего оно принимает вид обыкновенного дифференциального уравнения относительно функции $\varphi(\vartheta)$ (в котором s присутствует как параметр):

$$\left\{ \partial_\vartheta^2 - m(s-2)[m(s-2)+2] \right\} \left\{ \tilde{\sigma}_i^{m-1} \frac{1}{2} [\partial_\vartheta^2 \varphi + s(2-s)\varphi] \right\} + 2(s-1)[m(s-2)+1] \partial_\vartheta \tilde{\sigma}_i^{m-1} \partial_\vartheta \varphi = 0. \quad (4)$$

Краевые условия свободной поверхности $\varphi = \varphi' = 0$. Условия на абсолютно гладкой подошве штампа $\varphi' = \varphi''' = 0$. Таким образом приходим к однородной краевой задаче с собственным числом s . Она решена численно, аналогично изложенному в статьях [25, 26] или [2]. Наименьшее значение s , отвечающее решению с конечной энергией, дается формулой

$$s = (2m+1)/(m+1). \quad (5)$$

Именно оно является наиболее интересной характеристикой в задаче о трещине, но для наших целей необходимо также знать значения φ'' и

ТАБЛИЦА 1

m	$-\varphi''$	φ'''	m	$-\varphi''$	φ'''	m	$-\varphi''$	φ'''
1,1	0,003	1,237	1,8	0,141	1,337	5	0,461	0,534
1,15	0,005	1,431	1,9	0,164	1,275	6	0,501	0,432
1,2	0,007	1,573	2	0,185	1,223	7	0,526	0,387
1,25	0,013	1,585	2,33	0,247	1,059	8	0,549	0,334
1,3	0,022	1,589	2,66	0,296	0,932	9	0,567	0,301
1,4	0,042	1,575	3	0,332	0,842	10	0,585	0,259
1,5	0,067	1,522	3,5	0,376	0,732	11	0,598	0,227
1,6	0,091	1,468	4	0,410	0,653	12	0,608	0,221
1,7	0,117	1,402	4,5	0,438	0,586	13	0,618	0,198

φ''' на свободной от нагрузки поверхности, которые нигде не были опубликованы. Поэтому в [2] пришлось повторить вычисления Хатчинсона. Формула (5) и примеры полей напряжений и деформаций, опубликованные Хатчинсоном, были подтверждены. Значения φ'' и φ''' на свободной поверхности в зависимости от постоянной материала приведены в табл. 1.

В итоге нормированное локальное решение может быть определено по формуле (3) с s из (5) и $\varphi(\vartheta)$, найденным численно. Мультипликативная постоянная Q , фигурирующая в выражениях (3), остается неизвестной и играет роль первого свободного параметра.

3. Внутреннее решение для тонкого слоя (плоская деформация).

Рассмотрим прямоугольный жесткий штамп, вдавливаемый в тонкий слой ($-\infty < x < \infty$, $0 \leq y \leq h$) из материала (1) [11]. «Тонкий» означает, что ширина штампа значительно больше толщины слоя. Если пренебречь трением, краевые условия запишутся ($q(x)$ — контактное давление)

$$\begin{aligned} y = h: \quad \sigma_{yy} &= q(x), \quad \sigma_{xy} = 0, \\ y = 0: \quad u_y &= 0, \quad \sigma_{xy} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Дальняя асимптотика (дальняя от угла) находится подстановкой линейного представления $\sigma_{xy} = a(x) + b(x)y$ в (1), (6) и в уравнения равновесия (σ — гидростатическое давление):

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= q(x), \quad \sigma_{xx} = f(y), \quad \sigma_{xy} = \varepsilon_{xy} = 0, \quad \sigma_{xx} = \sigma + K \varepsilon_i^{\mu-1} \varepsilon_{xx}, \\ \sigma &= q(x) - K \varepsilon_i^{\mu-1} \varepsilon_{yy}, \quad q(x) = K \varepsilon_i^{\mu-1} (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx}) + f(y). \end{aligned} \quad (7)$$

Функция $f(y) \equiv 0$, поскольку напряжения должны быть нулевыми при $x \rightarrow \infty$. Интенсивность приращения деформации $\varepsilon_i = |\varepsilon_{yy}|$, поскольку $\varepsilon_{xx} = -\varepsilon_{yy}$ и $\varepsilon_{xy} = 0$. Из последнего уравнения (7) имеем

$$q(x) = 2K |\varepsilon_{yy}|^\mu \operatorname{sgn}(\varepsilon_{yy}). \quad (8)$$

Соотношение Коши, третье граничное условие (6) и (8) дают

$$u_y = y(2K)^{-m} |q(x)|^m \operatorname{sgn}(q(x)). \quad (9)$$

Заметим, что дальние асимптотики можно построить для любой функции $\sigma_i(\varepsilon_i)$, которая может быть обращена как $\varepsilon_i(\sigma_i)$. Метод их получения — тот же самый. Формулы для u_y имеют структуру, напоминающую уравнения состояния. Так, для закона Эмбера [8] $\varepsilon_i = \exp(n\sigma_i) - 1$, ($n = \text{const}$) имеем: $u_y = y [\exp(|nq/2|) - 1] \operatorname{sgn}(q)$, а для закона Надаи [14] $\varepsilon_i = \varepsilon_0 \operatorname{sh}(\sigma_i/\sigma_0)$ ($\varepsilon_0, \sigma_0 = \text{const}$) эта формула примет вид $u_y = y \varepsilon_0 \operatorname{sh}[|q/(2\sigma_0)|] \operatorname{sgn}(q)$.

4. Внутреннее решение в случае осевой симметрии. Та же самая техника была применена для нахождения внутреннего решения задачи о вдавливании жесткого цилиндра с плоской подошвой в тонкий слой из материала (1) [11]. В цилиндрических координатах $R\Theta Z$

$$\sigma = q(R) - K\varepsilon_i^{\mu-1} \varepsilon_{ZZ}, \quad \sigma_R = q(R) + K\varepsilon_i^{\mu-1} (2\varepsilon_{RR} + \varepsilon_{\Theta\Theta}). \quad (10)$$

Уравнения равновесия дают сложное нелинейное дифференциальное уравнение (штрихом обозначено дифференцирование по R)

$$q' + [K\varepsilon_i^{\mu-1} (2\varepsilon_{RR} + \varepsilon_{\Theta\Theta})]' + K\varepsilon_i^{\mu-1} (\varepsilon_{RR} - \varepsilon_{\Theta\Theta})/R = 0. \quad (11)$$

Используя формулы $\varepsilon'_{\Theta\Theta} = (\varepsilon_{RR} - \varepsilon_{\Theta\Theta})/R$, $\varepsilon_{RR} = \varepsilon_{\Theta\Theta} + O(h^2)$ ($h \rightarrow 0$), из (11) получаем

$$q' + (3\mu + 1)K3^{(\mu-1)/2} |\varepsilon_{\Theta\Theta}|^{\mu-1} \varepsilon'_{\Theta\Theta} = 0, \quad (12)$$

и поскольку $\mu |\varepsilon_{\Theta\Theta}|^{\mu-1} \varepsilon'_{\Theta\Theta} = (\varepsilon_{\Theta\Theta} |\varepsilon_{\Theta\Theta}|^{\mu-1})'$,

$$q + (3\mu + 1)\mu^{-1} K3^{(\mu-1)/2} |\varepsilon_{\Theta\Theta}|^\mu \operatorname{sgn}(\varepsilon_{\Theta\Theta}) = 0. \quad (13)$$

Аналог (9) имеет вид

$$u_z = 2ZK^{-m} (3\mu + 1)^{-m} [\mu |q(R)| 3^{(1-\mu)/2}]^m \operatorname{sgn}[q(R)]. \quad (14)$$

Структура (9) и (14) одинакова, но множители при контактом давлении различны. Эти множители переходят друг в друга и совпадают с хорошо известными ранее [17] только для случая линейной ползучести: $m = \mu = 1$.

5. Внутреннее решение для полуплоскости при плоском напряженном состоянии. Наиболее популярная геометрическая ситуация контакта между прямоугольным штампом и полуплоскостью в условиях степенной установившейся ползучести была рассмотрена Арутюняном в 1959 г. [5]. Он нашел приближенное решение в гипергеометрических функциях с помощью не до конца понятной техники. Это решение опубликовано также в статье [4] или в книге Джонсона [12]. Дальнейшие исследования

методики Арутюняна на примере различных задач со степенной нелинейностью предприняты в [1, 6, 7]. Примечательно, что в задаче об антиплоском сдвиге полуплоскости штампом [1] метод Арутюняна дает результаты, близкие к точному решению [22] всюду, кроме окрестностей углов штампа. Этот факт позволил рассматривать его как дальнюю асимптотику и разработать в [4] (на примере плоской задачи о вдавливании штампа в полуплоскость) основные идеи описываемого подхода.

6. Одиночный штамп, вдавливаемый в тонкий слой. Вернемся к задаче о вдавливании прямоугольного штампа в тонкий слой из материала (1) при плоской деформации [11]. Дальняя асимптотика дается формулой (9) и первой из формул (7) (контактное давление q постоянно по x), решение вблизи угла — формулой (3). Нормируем линейные размеры так, чтобы иметь $x = \pm 1$ координатой угла штампа, и рассмотрим симметричную ситуацию, когда сила P , действующая на штамп, совпадает с осью iy . Можно рассматривать только правую полуплоскость. Контактное давление вблизи угла дается формулой (в полярных координатах с вершиной в правом углу штампа и направлением $\vartheta = 0$ влево)

$$\sigma_{\vartheta\vartheta}(r, 0) = -Qs(s-1)r^{s-2}. \quad (15)$$

Здесь и ниже все напряжения нормированы на K/t_0^μ , через t_0 обозначена некоторая постоянная размерности времени.

Введем неизвестный параметр ε как расстояние от угла до точки, где дальняя и ближняя асимптотики будут склеены. Интегральное условие статики системы может быть записано в форме

$$\int_0^{1-\varepsilon} q dx + Qs(s-1) \int_\varepsilon^0 r^{s-2} dr = \frac{P}{2}. \quad (16)$$

Требование непрерывности контактного давления в точке $r = \varepsilon$, $\vartheta = 0$ дает

$$q = -Qs(s-1)\varepsilon^{s-2}. \quad (17)$$

Интегрированием (3) с использованием соотношений Коши на свободной поверхности вблизи угла получим [4]

$$u_\vartheta(r, \pi) = -\delta + g(m)Q^m r^{1/(m+1)}, \quad g(m) \equiv 2^{-m} (m+1)^2 |\varphi''(\pi)|^{m-1} \varphi'''(\pi), \quad (18)$$

где δ означает вертикальное смещение угла, а значения производных функции $\varphi(\vartheta)$ на свободной поверхности $\vartheta = \pi$ даны в табл. 1. Левая часть (18) должна быть равной нулю вдали от угла, поэтому требование сращивания решений в точке $r = \varepsilon$, $\vartheta = \pi$ приводит к соотношению

$$\delta = g(m) Q^m \varepsilon^{1/(m+1)}. \quad (19)$$

С другой стороны, δ должна быть найдена из (9) и (17):

$$\delta = 2^{-m} h [Qs(s-1)]^m \varepsilon^{m(s-2)}. \quad (20)$$

Из (19) и (20) имеем следующую формулу:

$$\varepsilon = h \frac{s^m(s-1)^m}{2^m g(m)}. \quad (21)$$

Наконец, подставив (21) в (16), получим нормирующий множитель локального решения:

$$Q = -P \frac{\varepsilon^{1/(m+1)}(m+1)}{2s(m+\varepsilon)}. \quad (22)$$

Теперь, если P дано (а δ неизвестна), используем последовательно (21), (22), (20) или (19) для получения δ . Этим же формул достаточно, чтобы найти P , когда δ известна. Свободные параметры фиксированы, и теперь все элементы приближенного решения могут быть вычислены. Простая структура формул допускает параметрический анализ, опубликованный в [11]. Там также выполнен расчет модельных примеров и сделан ряд замечаний о пределах применимости метода.

В случае линейной ползучести ($m=1$, $g(1)=3/2$) формулы упрощаются еще более:

$$\varepsilon = \frac{h}{4}, \quad Q = \frac{-4R\sqrt{h}}{3(4+h)}, \quad -P = k\delta^\mu, \quad k = \frac{4+h}{h}. \quad (23)$$

Осесимметричный аналог этой задачи (с плоским локальным решением) рассмотрен в рамках того же круга идей и представлен в кандидатской диссертации автора (1987 г.). Решение также дается явными формулами. Их структура та же, что и у формул (21), (19), (22), однако коэффициенты иные:

$$\varepsilon = h \frac{C}{g(m)}, \quad \delta = CQ^m \varepsilon^{m(s-2)}, \quad C \equiv 2 \frac{3^{(m-1)/2}}{(m+3)^m} s^m(s-1)^m, \\ Q = -P \frac{1}{2\pi} \varepsilon^{1/(m+1)} \left(\frac{1}{2} s(s-1)(1-\varepsilon)^2 + s\varepsilon - (s-1)\varepsilon^2 \right)^{-1}.$$

7. Периодическая задача. Рассмотрим периодическую систему штампов, вдавливаемых в тонкий слой из материала (1) [10]. Деформация предполагается плоской, трением по поверхностям пренебрегается. Геометрия деформируемого тела и краевые условия в декартовых координатах x, y могут быть описаны следующими формулами:

$$\begin{aligned} y=0, \quad 0 \leq x \leq 1 + \Delta/2: \quad u_y = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \\ y=h, \quad 0 \leq x \leq 1: \quad u_y = \text{const} \equiv -\delta, \quad \sigma_{xy} = 0, \\ y=h, \quad 1 < x < 1 + \Delta/2: \quad \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0, \\ 0 < y < h, \quad x=0, \quad x=1 + \Delta/2: \quad u_x = 0, \quad \sigma_{xy} = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Они показывают, что задача симметрична по отношению к оси \dot{y} , и периодична по оси \dot{x} с периодом, равным $2+\Delta$. Угол штампа расположен

в точке $x=1, y=h$, основание штампа слева от него, а свободная поверхность — справа. Предполагается, что толщина слоя h и расстояние между соседними штампами Δ связаны формулой $h \sim \Delta \ll 1$, и что область контакта заранее известна. Отсюда можно предположить, что поле напряжений будет сингулярным только в углу штампа. Представляется, что оно будет быстро убывать в окрестности угла и слабо изменяться вдали от угла. В отличие от случая одиночного штампа, считать $f(y)=0$ в формуле (7) нельзя, но можно усреднить эту функцию вдали от угла и предположить $f(y) = \text{const} \equiv p_0 < 0$. Тогда p_0 будет означать среднее значение σ_{xx} вдали от угла. Подобно случаю одиночного штампа, $\varepsilon_x = |\varepsilon_{yy}|$. Поэтому последняя формула из (7) переписывается так:

$$q(x) - p_0 = 2 |\varepsilon_{yy}|^{\mu-1} \varepsilon_{yy}. \quad (25)$$

Разрешив (25) относительно ε_{yy} , используя соотношения Коши и граничные условия (24), получим

$$u_y(x, h) = h 2^{-m} |q(x) - p_0|^m \text{sgn}(q(x) - p_0) \\ (0 < x < 1 - \varepsilon, \quad 1 + \varepsilon < x < 1 + \Delta/2). \quad (26)$$

Отсюда $q = \text{const} \equiv q_0 < 0$ под штампом вдали от угла, поскольку в силу (24) $u_y = \text{const}$.

Чтобы использовать локальное решение (3), необходимо потребовать

$$\varepsilon < h, \quad \varepsilon < \Delta/2, \quad (27)$$

где ε — неизвестный радиус полукруга с центром в вершине угла. Так как $\Delta \sim h \ll 1$, можно предположить, что смещение свободной поверхности $u_y = \text{const} \equiv u_0 > 0$ вдали от угла $y=h, 1+\varepsilon < x < 1+\Delta/2$. Для склеивания асимптотик потребуем непрерывности контактного давления и свободной поверхности в точках $y=h, x=1 \pm \varepsilon$:

$$q_0 = -Qs(s-1)\varepsilon^{s-2}, \quad u_0 = -\delta + Q^m \varepsilon^{1/(m+1)} g(m). \quad (28)$$

С другой стороны, из (26) вытекает, что $u_0 = h 2^{-m} |p_0|^m$, поскольку $q \equiv 0$ при $1+\varepsilon < x < 1+\Delta/2$, и $\delta = h 2^{-m} |q_0 - p_0|^m$, поскольку $u_y(x, h) = -\delta$ при $x < 1 - \varepsilon$. Исключив p_0 из последних двух уравнений, получим

$$q_0 = -2h^{-\mu} (\delta^\mu + u_0^\mu). \quad (29)$$

Требования равновесия системы и несжимаемости дают

$$\int_0^1 q(x) dx \equiv q_0(1-\varepsilon) - Qs\varepsilon^{s-1} = \frac{P}{2}, \quad (30)$$

$$\int_0^{1+\Delta/2} u_y(x, h) dx \equiv -\delta(1+\varepsilon) + \int_0^\varepsilon u_y(r, \pi) dr + u_0 \left(\frac{\Delta}{2} - \varepsilon \right) = \\ = u_0 \left(\frac{\Delta}{2} - \varepsilon \right) - \delta(1+\varepsilon) + \frac{m+1}{m+2} g(m) Q^m \varepsilon^{(m+2)/(m+1)} = 0. \quad (31)$$

Пять уравнений (28) — (31) позволяют найти пять постоянных: ε , Q , q_0 , u_0 и δ или P . Эта система может быть сведена к единственному сложному нелинейному алгебраическому уравнению относительно ε [10]. В частном случае линейной ползучести ($m = 1$, $g(1) = 3/2$) ее решение выписывается в явном виде (здесь P считается заданным, а δ неизвестным):

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{h}{4}, & q_0 &= \frac{2P}{4+h}, & Q &= \frac{-4P\sqrt{h}}{3(4+h)}, \\ \delta &= \frac{Ph(h-6\Delta)}{3(4+h)(4+2\Delta)}, & u_0 &= -\frac{Ph(h+12)}{3(4+h)(4+2\Delta)}. \end{aligned} \quad (32)$$

В [10] выполнена серия вычислений для различных m . Расчет начался при $m = 1$, после чего m увеличивалось шагами, а значение ε предыдущего шага принималось за первую итерацию для следующего. Результаты сопоставлены с результатами для одиночного штампа.

8. Обсуждение. Таким образом, с помощью методики сращивания локальных и проникающих решений построены

— приближенные решения в виде явных формул для одиночного штампа, вдавливаемого в полупространство (плоская или осесимметричная деформация) из материала со степенной нелинейностью,

— приближенные решения, получаемые ценой простых вычислений (численно должно быть решено нелинейное скалярное алгебраическое уравнение) в случаях плоской периодической задачи для тонкого слоя и для одиночного штампа, вдавливаемого в полуплоскость.

Все асимптотики сопрягаются *только частично*. Невозможно сделать что-либо больше, чтобы сблизить их в глубине тела: число свободных параметров недостаточно.

Список локальных решений может быть значительно расширен: подход Черепанова–Райса–Хатчинсона дает решение и для клиньев иного, нежели π , угла раствора и иных, нежели «гладкий штамп–свободная поверхность», краевых условий. Собственное число s в этих случаях не может быть найдено явно, но вполне определимо численно. Значительное число результатов по этому поводу можно найти в [2]. Особый интерес представляют локальные решения осесимметричной задачи. Метод Хатчинсона распространен и на задачу об асимптотике напряженно-деформированного состояния вблизи конической точки в среде со степенной физической нелинейностью. Такое исследование выполнено в [3, 23] для различных краевых условий на боковой поверхности конуса.

Вопрос о нахождении внутренних решений более сложен. Например, осесимметричная задача о вдавлении штампа в полупространство была решена в [16] методом Арутюняна, но более поздние рассмотрения [9, 18] показали, что оно обладает некоторыми физически неясными свойствами. Определенную пользу при построении внутренних решений могли бы принести исследования М.А.Задояна, наиболее полно представленные в

[13]. Статья [6] интересна с этой точки зрения тем, что в ней рассмотрена плоская контактная задача о вдавлении деформируемой плиты в слой из материала со степенной нелинейностью.

Вопрос о законности применения плоского погранслоя в осесимметричных задачах, понятный в линейном случае, для степенной нелинейности также остается открытым. Сравнение результатов для плоских и осесимметричных задач о вдавлении штампа в тонкий слой показывает значительные различия при $m \geq 3$.

По мнению автора, модель степенной установившейся ползучести, несмотря на свой не слишком высокий уровень адекватности реально происходящим процессам, является все же слишком сложной математически, чтобы оставлять большие надежды отыскать точные решения физически содержательных контактных задач. Тем ценнее немногие известные точные результаты, например [22]. Наиболее актуальным и перспективным сегодня видится применение к таким задачам численных методов, о которых выше намеренно не было сказано ни слова. Кроме того, было бы очень полезно иметь прямые экспериментальные данные по контактной ползучести.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В. М., Брудный С. Р. О методе обобщенной суперпозиции в контактной задаче антиплоского сдвига // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 4. С. 71–78.
2. Александров В. М., Гришин С. А. Напряженно-деформированное состояние малой окрестности вершины клина при физической нелинейности и различных граничных условиях // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 4. С. 653–661.
3. Александров В. М., Гришин С. А. Об асимптотике в вершине конуса из степенного материала // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 2, С. 32–44.
4. Александров В. М., Сумбатян М. А. Об одном решении контактной задачи нелинейной установившейся ползучести для полуплоскости // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 1. С. 107–113.
5. Арутюнян Н. Х. Плоская контактная задача теории ползучести // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 5. С. 901–924.
6. Арутюнян Н. Х., Александров В. М. Некоторые нелинейные задачи механики мерзлых грунтов // Изв. СКНЦ ВШ. Естественные науки. 1982. № 4. С. 61–65.
7. Арутюнян Н. Х., Манжиров А. В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1990; Изд-во НАН РА, 1999. 320 с.
8. Белл Дж. Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Часть 1. Малые деформации. М.: Наука, 1984. 600 с.
9. Галанов Б. А. Численное решение задачи о сосредоточенной силе, приложенной к границе полупространства при степенном упрочнении материала // Сопротивление материалов и теория сооружений. Вып. 44. Киев: Будивельник, 1984. С. 77–81.
10. Гришин С. А. Периодическая контактная задача нелинейной установившейся ползучести для тонкого слоя // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 2. С. 107–111.

11. Гришин С. А., Манжиров А. В. Контактные задачи для тонкого слоя в условиях нелинейной установившейся ползучести // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 6. С. 119–125.
12. Джонсон К. Л. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
13. Задоян М. А. Пространственные задачи теории пластичности. М.: Наука, 1992. 384 с.
14. Ильющин А. А. Пластичность. Часть 1. Малые упруго-пластические деформации. М.-Л.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
15. Качанов Л. М. Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960. 456 с.
16. Кузнецов А. И. Вдавливание жестких штампов в полупространство при степенном упрочнении и при нелинейной ползучести материала // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 3. С. 481–491.
17. Манжиров А. В. Плоские и осесимметричные задачи о действии нагрузок на тонкий неоднородный вязкоупругий слой // ПМТФ. 1983. № 5. С. 153–158.
18. Мартыненко М. Д., Свицкий Е. А. Осесимметричные поля напряжений и перемещений в задаче о действии сосредоточенной силы на нелинейное полупространство // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 11. С. 2007–2009.
19. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
20. Снеддон И. Н., Берри Д. С. Классическая теория упругости. М.: Гостехиздат, 1961. 219 с.
21. Черепанов Г. П. О распространении трещин в сплошной среде // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 3. С. 476–488.
22. Amazigo J. C. Fully plastic crack in an infinite body under anti-plane shear // Int. J. Solids and Structures. 1974. V. 10. P. 1003–1015.
23. Fleck N. A., Durban D. Asymptotic fields at tip of conical notches and inclusions in a power hardening solid // J. Mech. Phys. Solids. 1989. V. 37. No. 2. P. 233–263.
24. Grishin S. A. Contact problems for power-law creeping body // Contact Mechanics / Ed. by M. Raous et al. // Proc. 2nd Contact Mechanics Intern. Symp. 1994, Carry-le-Rouet, France. New-York; London: Plenum Press, 1995. P. 319–326.
25. Hutchinson J. W. Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material // J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16. No. 1. P. 13–31.
26. Hutchinson J. W. Plastic stress and strain fields at a crack tip // J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16. No. 5. P. 337–347.
27. Rice J. R., Rosengren G. F. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material // J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16. No. 1. P. 1–12.

§ 3. КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ СТАРЕЮЩИХ ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ

А. В. Манжиров

Исследования контактных задач для неоднородных стареющих вязкоупругих тел стали естественным продолжением работ, посвященных изучению контактных взаимодействий для однородных вязкоупругих тел, достаточно полно представленных в [26]. Эти исследования были инициированы необходимостью учета реальных свойств вязкоупругих материалов, а также особенностями процессов изготовления реальных оснований и инженерных конструкций.

Подавляющее большинство вязкоупругих материалов (бетоны, полимеры, пластмассы, стеклопластики, древесина, твердые ракетные топлива и др.) обладают ярко выраженным свойством изменения их физико-механических свойств с течением времени — *старением*. Процесс постепенного возведения или изготовления конструкций приводит к тому, что различные элементы деформируемых тел изготавливаются или зарождаются в различные моменты времени, что приводит к появлению специфической *возрастной неоднородности* и *неоднородному старению* тела. Очевидно, что использование при изготовлении конструкций нескольких стареющих или нестареющих материалов влечет за собой появление традиционной *конструкционной неоднородности* [7].

Первой особенностью представленных ниже контактных задач является учет возрастной и конструкционной неоднородностей вязкоупругих тел, обусловленных процессами изготовления и возведения реальных объектов. Второй особенностью является одновременность установки или снятия жестких элементов (штампов, втулок, колец), диктуемая особенностями монтажа инженерных конструкций. Контактные задачи для тел с указанными видами неоднородностей называют контактными задачами для неоднородных стареющих вязкоупругих тел. Контактные задачи для вязкоупругих тел с учетом постепенного изменения систем взаимодействующих с ними элементов называют контактными задачами для эволюционных систем или контактными задачами дискретного наращивания деформируемых тел системами элементов.

1. Контактные задачи для одиночных элементов. В работах [1, 2, 4, 5, 7, 12–15, 20, 21] изучается влияние ползучести и старения, а также возрастной и конструкционной неоднородностей на закономерности формирования полей контактных напряжений при взаимодействии деформируемых тел с одиночными жесткими элементами (штампами, кольцами, втулками).

Плоские задачи. В статье [12] и монографии [7] рассмотрена плоская задача о воздействии гладкого жесткого штампа на двухслойное основание, слои которого изготовлены из вязкоупругого стареющего материала в разные моменты времени. Между слоями осуществляется гладкий или идеальный контакт, причем верхний слой считается относительно тонким, т. е. его толщина намного меньше характерного размера области контакта. Нижняя грань основания сцеплена с жестким основанием или находится в состоянии гладкого контакта с ним.

В монографии [5] и работах [1, 2, 4, 13] даны постановки и решения плоских контактных задач для неоднородных стареющих слоистых осно-

ваний. Считается, что двухслойные основания изготовлены из двух разных стареющих материалов так, что нижний их слой произвольной толщины стареет однородно, а верхний относительно тонкий слой — неоднородно. Штампы, вдавливаемые в основания, гладкие и жесткие. Между слоями осуществляется гладкий или идеальный контакт. Пакеты слоев гладко или идеально контактируют с подстилающими недеформируемыми основаниями.

Осесимметричные задачи для оснований. Работы [1, 13–15] посвящены исследованию контактного взаимодействия неоднородных стареющих слоистых оснований с гладкими жесткими кольцевыми и круговыми в плане штампами. Нижние слои рассматриваемых оснований стареют однородно и либо сцеплены, либо гладко контактируют с подстилающими жесткими основаниями. Верхние слои деформируемых оснований изготовлены из стареющих вязкоупругих материалов и стареют неоднородно. Между слоями осуществляется гладкий или идеальный контакт. Считается, что верхние слои относительно тонкие, т. е. их толщина намного меньше характерного размера области контакта. Изучаются процессы формирования полей контактных напряжений и закономерности изменения осадок кольцевых и круговых штампов.

Задачи для цилиндрических тел. В статьях [20, 21] изучаются процессы контактного взаимодействия неоднородных вязкоупругих слоистых цилиндрических тел с гладкими жесткими втулкой или кольцом. В работе [20] гладкая жесткая усиливающая втулка устанавливается (с натягом или без) на двухслойную вязкоупругую трубу, слои которой изготовлены из разных стареющих материалов. Основной внутренний слой трубы произвольной толщины стареет однородно. Внешний защитный слой, непосредственно контактирующий с усиливающей втулкой, стареет неоднородно и является относительно тонким, т. е. его толщина гораздо меньше ширины втулки. После установки втулки внутренняя поверхность трубы подвергается действию равномерного давления (задача о трубе высокого давления), или в ней устанавливается жесткая гладкая или фиксирующая вставка.

В статье [21] изучаются контактные задачи для двухслойного цилиндра с относительно тонким внутренним слоем. Либо на цилиндр действует внешнее давление, либо он помещен в жесткую гладкую или фиксирующую обойму. Исследуется контакт такого слоистого цилиндрического тела со вставленным в него гладким жестким подкрепляющим кольцом.

Представленные выше работы послужили основой для изучения более сложных контактных задач для эволюционных систем присоединяемых элементов. Эти задачи будут рассмотрены ниже. Естественно, что их разрешающие уравнения и методы решения полностью применимы в задачах для одиночных элементов в частном случае, когда к неоднородным стареющим телам присоединяется один элемент.

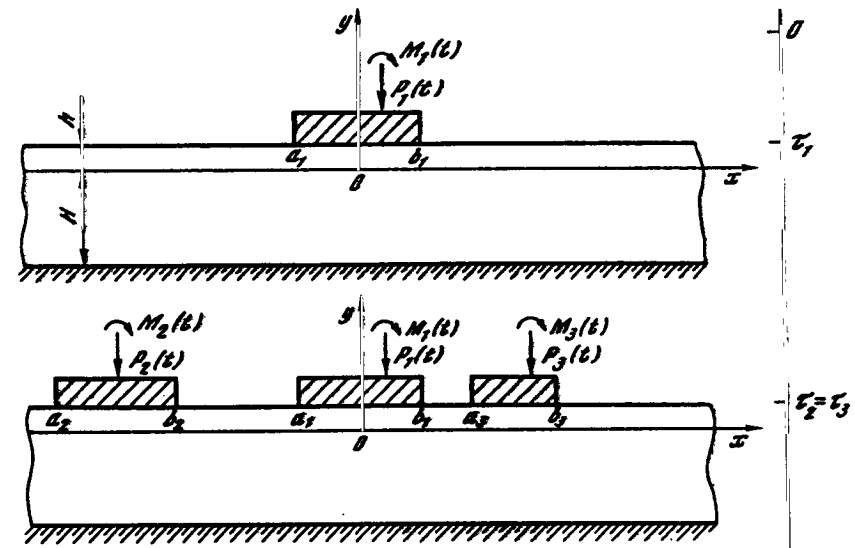


Рис. 1

Следует отметить работы [11, 24, 25], где исследовалось взаимодействие однородно стареющих вязкоупругих тел и тонкостенных элементов, изготовленных в различные моменты времени, а также монографию [27] и статью [3], где рассмотрены контактные задачи для однородных стареющих вязкоупругих тел с переменной областью контакта.

2. Задачи для эволюционных систем элементов. В статьях [16–19, 22, 23] и монографиях [8, 9] изучаются плоские и осесимметричные задачи о взаимодействии неоднородных стареющих вязкоупругих тел с произвольными конечными системами жестких элементов (штампов, втулок, колец). Деформируемые тела обладают свойствами возрастной и конструкционной неоднородностей, а системы элементов — свойством неодновременности их установки или снятия. Структуры неоднородных стареющих вязкоупругих слоистых оснований и цилиндрических тел аналогичны рассмотренным ранее в п. 1.

Плоские задачи. В работах [8, 9, 16–18] дается постановка плоских контактных задач (см. рис. 1), приводятся системы их разрешающих двумерных интегральных уравнений. Формулируется общая математическая задача для операторного уравнения в абстрактном гильбертовом пространстве, предлагается проекционно-спектральный метод ее решения. Проводится численный анализ ряда конкретных процессов, причем исследуются закономерности как индивидуального, так и совместного влияния основных факторов на характеристики контактного взаимодействия.

Изучаемые здесь классы задач возникают при последовательном монтаже комплексов сооружений на фундаментах и основаниях, при определении допустимых кренов объектов, возводимых в непосредственной близости друг от друга, при постепенном возведении инженерных и строительных конструкций.

Исследование процесса последовательного присоединения или снятия конечного числа штампов приводит к необходимости пошагового решения систем двумерных интегральных уравнений на интервалах времени, когда число штампов неизменно. Системы уравнений каждого последующего шага содержат информацию о напряженно-деформированном состоянии тел на предыдущем шаге. Таким образом, учитывается вся история деформирования оснований.

Разрешающие системы уравнений на каждом интервале времени, когда число штампов фиксировано, приводятся заменами переменных к единой основной системе двумерных интегральных уравнений плоских контактных задач

$$c(t)(I^* - L_1^*)q^i(x, t) + (I^* - L_2^*) \sum_{j=1}^N A_{ij}^* q^j(x, t) = \delta^i(t) + \alpha^i(t)x - g^i(x, t), \quad (1)$$

$$|x| \leq 1, \quad t \in [\tau_r, \tau_{r+1}], \quad i = 1, \dots, N, \quad L_m^* = L_m^*(\tau_r, t), \quad m = 1, 2,$$

$$L_m^*(\tau_i, t)w(t) = \int_{\tau_i}^t w(\tau)K_m(t, \tau) d\tau, \quad A_{ij}^*v(x) = \int_{-1}^1 k^{ij}(x, \xi)v(\xi) d\xi,$$

с двумя последовательностями дополнительных условий

$$\int_{-1}^1 q^i(x, t) dx = p^i(t), \quad \int_{-1}^1 q^i(x, t)x dx = m^i(t), \quad (2)$$

$$m^i(t) = p^i(t)e_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

где $q^i(x, t)$ — контактные напряжения под i -м штампом; $\delta^i(t)$ и $\alpha^i(t)$ — его осадка и угол поворота; $g^i(x, t)$ — функция, учитывающая форму подошвы штампа и искажение поверхности вязкоупругого основания под ним за счет ползучести материалов; $p^i(t)$, $e_i(t)$ и $m^i(t)$ — сила, вдавливающая i -й штамп, эксцентриситет ее приложения и возникающий при этом момент; N — число штампов на интервале времени $[\tau_r, \tau_{r+1}]$; I^* — тождественный оператор.

Основная система уравнений (1) с последовательностями условий (2) представляется, в свою очередь, в форме одного операторного уравнения плоских контактных задач с двумя векторными условиями ($|x| \leq 1$, $t \in [\tau_r, \tau_{r+1}]$, всюду далее по верхним повторяющимся индексам ведется суммирование):

$$c(t)(I^* - L_1^*)q(x, t) + (I^* - L_2^*)A^*q(x, t) = a(t) + b(t)x - g(x, t), \quad (3)$$

$$\int_{-1}^1 q(x, t) dx = p(t), \quad \int_{-1}^1 q(x, t)x dx = m(t), \quad (4)$$

$$q(x, t) = q^i(x, t)i^i, \quad a(t) = \delta^i(t)i^i, \quad b(t) = \alpha^i(t)i^i,$$

$$g(x, t) = g^i(x, t)i^i, \quad p(t) = p^i(t)i^i, \quad m(t) = m^i(t)i^i,$$

где оператор A^* — вполне непрерывный, самосопряженный и положительно определенный из $L_2([-1, 1], V)$ в $L_2([-1, 1], V)$. Пространство $L_2([-1, 1], V)$ есть гильбертово пространство вектор-функций, компоненты которых принадлежат $L_2[-1, 1]$.

Решение задачи (3)–(4) ищется в классе функций, непрерывных по t в $L_2([-1, 1], V)$, при этом показано, что существует пятнадцать возможных вариантов ее постановки. Действительно, на одном штампе могут быть заданы четыре типа условий: сила и момент, сила и угол поворота, осадка и момент, осадка и угол поворота. При этом необходимо отыскивать, соответственно, осадку и угол поворота, осадку и момент, силу и угол поворота, силу и момент. Далее группой штампов будем называть любое конечное число штампов, на которых задаются условия одного и того же типа. В произвольной системе штампов таких групп, очевидно, может быть от одной до четырех. Поскольку на группе штампов можно задать четыре типа различных условий, то для системы, состоящей из одной группы, имеем четыре варианта постановки. Если система состоит из двух групп, т.е. на каждой группе выставляются различные условия из четырех возможных, то имеем шесть вариантов. Для системы, состоящей из трех групп, получим еще четыре варианта постановки, а состоящей из четырех групп — один.

Установлено, что все варианты постановки обладают свойством, которое позволяет вместо исследования каждого из них перейти к изучению одной задачи для операторного уравнения в абстрактном гильбертовом пространстве (см. пп. 3 и 4) и затем уже вернуться к конкретным случаям (см. п. 5).

Осесимметричные задачи для слоистых оснований. Работы [9, 19] посвящены исследованию осесимметричных контактных задач для неоднородных стареющих вязкоупругих оснований, взаимодействующих с системами одновременно присоединяемых или снимаемых жестких кольцевых в плане штампов (см. рис. 2). В них даны системы разрешающих двумерных интегральных уравнений, исследовано основное операторное уравнение осесимметричных задач, приведены решения модельных задач.

Разрешающие системы уравнений поставленных задач заменами переменных приводятся к основной системе двумерных интегральных уравнений осесимметричных контактных задач

$$c(t)(I^* - L_1^*)q^i(r, t) + (I^* - L_2^*) \sum_{j=1}^N B_{ij}^* q^j(r, t) = \delta^i(t) - g^i(r, t), \quad (5)$$

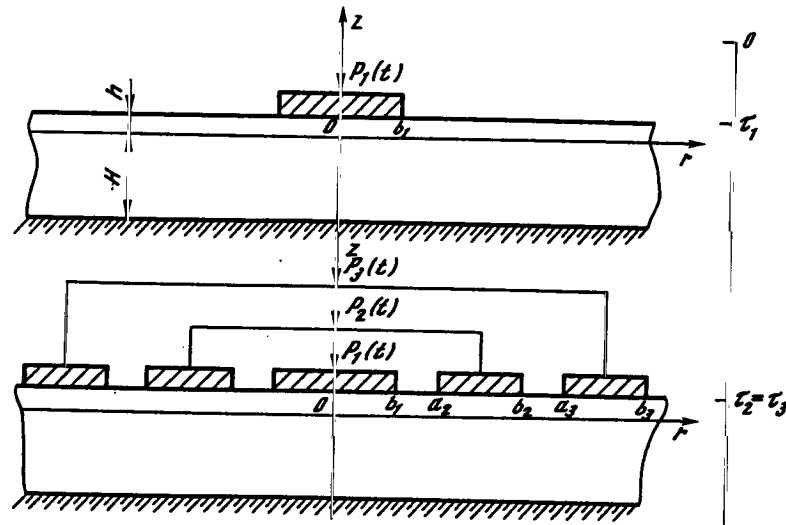


Рис. 2

$$\mathbf{B}_{ij}^* \varphi(r) = \int_0^1 k^{ij}(r, \rho) \varphi(\rho) \rho d\rho, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad t \in [\tau_r, \tau_{r+1}], \quad i = 1, \dots, N$$

с последовательностью дополнительных условий

$$\int_0^1 q^i(\rho, t) \rho d\rho = p^i(t), \quad i = 1, \dots, N, \quad (6)$$

где $q^i(r, t)$ — контактные напряжения под i -м штампом; $\delta^i(t)$ — его осадка; $g^i(r, t)$ — функция, учитывающая форму подошвы штампа и искажение поверхности деформируемого основания в результате ползучести материалов; $p^i(t)$ — вдавливающая сила; N — неизменное на интервале времени $[\tau_r, \tau_{r+1}]$ число штампов; операторы L_i^* определены в (1).

Аналогично полученному для плоских задач, основная система осесимметричных задач (5) и условия (6) преобразуются к одному уравнению и одному условию в функциональном векторном пространстве ($0 \leq r \leq 1, t \in [\tau_r, \tau_{r+1}]$):

$$c(t)(\mathbf{I}^* - L_1^*) \mathbf{q}(r, t) + (\mathbf{I}^* - L_2^*) \mathbf{B}^* \mathbf{q}(r, t) = \mathbf{a}(t) - \mathbf{g}(r, t), \quad (7)$$

$$\int_0^1 \mathbf{q}(\rho, t) \rho d\rho = \mathbf{p}(t), \quad (8)$$

$$\mathbf{q}(r, t) = q^i(r, t) \mathbf{i}^i, \quad \mathbf{a}(t) = \delta^i(t) \mathbf{i}^i, \quad \mathbf{g}(r, t) = g^i(r, t) \mathbf{i}^i, \quad \mathbf{p}(t) = p^i(t) \mathbf{i}^i,$$

где \mathbf{B}^* — вполне непрерывный, самосопряженный и положительно определенный оператор из $L_2(\Omega, V)$ в $L_2(\Omega, V)$; $L_2(\Omega, V)$ — гильбертово пространство вектор-функций, компоненты которых принадлежат $L_2(\Omega)$.

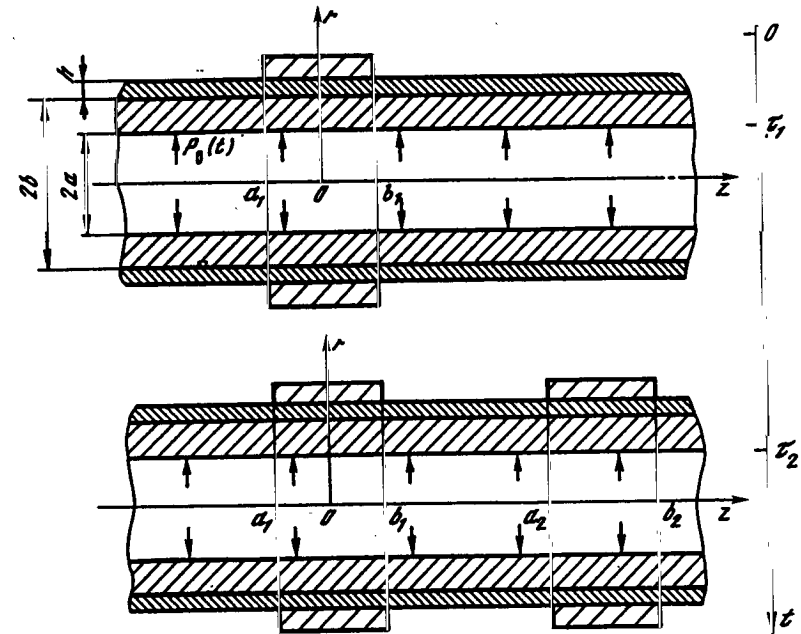


Рис. 3

Сформулированы три возможных варианта постановки осесимметричной задачи о системе кольцевых в плане штампов. Два варианта возникают в случае, когда система представляет из себя группу и на всех штампах заданы либо кинематические, либо квазистатические условия. И еще один вариант появляется при исследовании системы, состоящей из двух групп штампов, на одной из которых заданы осадки, а на другой усилия. Общий метод решения уравнений контактных задач будет рассмотрен в пп. 3 и 4 (см. также п. 5).

Задачи для цилиндрических тел. В статьях [22, 23] и монографиях [8, 9] исследуются осесимметричные контактные задачи для неоднородных стареющих вязкоупругих цилиндрических тел, наращиваемых системами жестких усиливающих элементов (см. рис. 3 и рис. 4). По своему математическому содержанию они идентичны плоским контактным задачам, рассмотренным ранее (см. также пп. 3–5). Поэтому основное внимание сосредоточено здесь на постановке задач, выводе их разрешающих систем интегральных уравнений и анализе качественных и количественных эффектов, обусловленных процессами ползучести, неоднородного старения и неодновременного присоединения жестких элементов.

Работы содержат большой вычислительный материал. В них проводится анализ ряда конкретных задач, возникающих при взаимодействии

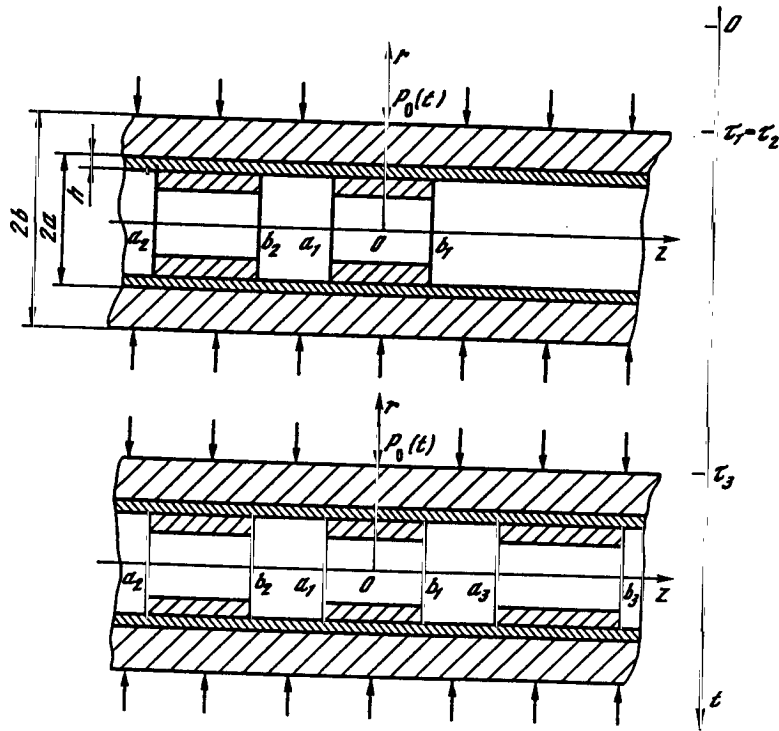


Рис. 4

двухслойных полых бетонных и металлополимерных цилиндров с эволюционными системами усиливающих втулок и колец. Делаются выводы качественного характера.

3. Общая постановка контактной задачи. Интегральные уравнения или системы интегральных уравнений представленных и многих других контактных задач можно записать в форме одного операторного уравнения

$$c(t)(I - L_1)x_t + (I - L_2)Ax_t = f_t, \quad (9)$$

где x_t и f_t — непрерывные функции t со значениями из гильбертова пространства H , $c(t) > 0$ — непрерывна по t , I — тождественный оператор, A — вполне непрерывный, самосопряженный и положительно определенный оператор из H в H , L_1 и L_2 — операторы Вольтерра (по t) такие, что построенные по ним операторы $(I - L_1)$, $(I - L_2)$, $(I - (\omega_1(t)L_1 + \omega_2(t)L_2))$ и обратные к ним не выводят функции из класса непрерывных ($\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$ — непрерывны по t).

Заметим, что гильбертово пространство H можно представить в виде суммы ортогональных подпространств $H = H_1 \oplus H_2$, причем для непре-

рывных по t функций со значениями из H справедливо разложение

$$f_t = f_t^1 + f_t^2, \quad x_t = x_t^1 + x_t^2,$$

где f_t^i , x_t^i — непрерывные по t функции со значениями из H_i ($i = 1, 2$).

Рассмотрим теперь оператор P_1 ортогонального проектирования H на H_1 . Оператор $P_2 = I - P_1$ проектирует H на H_2 . Очевидно, что $P_i f_t = f_t^i$, $P_i x_t = x_t^i$ ($i = 1, 2$).

Контактные задачи с любыми заданными дополнительными условиями или без них (с заданной правой частью уравнения (9)) могут быть сведены к следующей универсальной задаче для операторного уравнения [8, 9, 18]:

Пусть x_t и f_t удовлетворяют уравнению (9). Требуется по заданным x_t^1 и f_t^2 определить неизвестные x_t^2 и f_t^1 .

4. Проекционный метод решения задачи. Подействуем оператором P_2 на уравнение (9). Полученное в результате новое уравнение после несложных преобразований запишем в форме [8, 9, 18]

$$c(t)(I - L_1)x_t^2 + (I - L_2)P_2Ax_t^2 = f_t^2 - (I - L_2)P_2Ax_t^1. \quad (10)$$

ТЕОРЕМА 1. Оператор P_2A — вполне непрерывный, самосопряженный и положительно определенный из H_2 в H_2 .

Следовательно собственные функции φ_i оператора P_2A , соответствующие его собственным числам α_i , т.е.

$$P_2A\varphi_i = \alpha_i\varphi_i,$$

образуют базис в H_2 . Тогда для непрерывных по t функций со значениями из H_2 справедливо представление

$$\begin{aligned} x_t^2 &= \sum_i a_i(t)\varphi_i, & f_t^2 &= \sum_i f_i(t)\varphi_i, \\ g_t^2 &= (I - L_2)P_2Ax_t^1 = \sum_i g_i(t)\varphi_i, \end{aligned} \quad (11)$$

где $a_i(t)$, $f_i(t)$, $g_i(t)$ — непрерывны по t .

Подставляя (11) в (10), получаем

$$\begin{aligned} (I - L^i)a_i(t) &= \Phi_i(t), & L^i &= \frac{c(t)L_1 + \alpha_i L_2}{c(t) + \alpha_i}, \\ \Phi_i(t) &= \frac{f_i(t) - g_i(t)}{c(t) + \alpha_i}, & a_i(t) &= (I - L^i)^{-1}\Phi_i(t). \end{aligned} \quad (12)$$

Заметим, что L^i и $\Phi_i(t)$ всегда определены благодаря положительности $c(t)$, α_i и того, что $\alpha_i \rightarrow 0$ и $L^i \rightarrow L_1$ при $i \rightarrow \infty$. В силу условий, наложенных на операторы и функции, ряд (11) для x_t^2 сходится равномерно по t в H_2 к непрерывной по t в H_2 функции.

ТЕОРЕМА 2. В выбранных классах функций, решение уравнения (10) существует и единственно.

Таким образом x_t^2 найдено. Для отыскания f_t^1 подействуем оператором P_1 на уравнение (9), тогда будем иметь

$$f_t^1 = c(t)(I - L_1)x_t^1 + (I - L_2)P_1 A(x_t^1 + x_t^2), \quad (13)$$

что сразу дает выражение для f_t^1 , поскольку x_t^1 задано, а x_t^2 определено. Вопрос существования и единственности f_t^1 решается одновременно с вопросом о существовании и единственности x_t^2 по теореме 2.

ТЕОРЕМА 3. Для того, чтобы x_t и f_t удовлетворяли уравнению (9) при заданных проекциях $P_1 x_t$ и $P_2 f_t$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (10) и (13).

ТЕОРЕМА 4. Решение уравнения (9) при заданных x_t^1 и f_t^2 существует и единственно тогда и только тогда, когда существует и единственно решение уравнения (10).

При $P_2 = I$ изложенный метод переходит в классический метод разделения переменных Фурье, где решение представляется в виде ряда по собственным функциям оператора A .

Заметим, что при применении традиционных процедур разложения решений в ряды по произвольному базису H или по собственным функциям оператора A , когда $P_2 \neq I$, возникает проблема изучения бесконечной системы операторных уравнений Вольтерра (см., например, [6, 10, 25]). Это ставит серьезные теоретические проблемы и создает существенные вычислительные трудности при решении прикладных задач. Проекционный метод дает кроме теоретической ясности и эффективный численный алгоритм, в котором требуется решать последовательность независимых уравнений Вольтерра.

Следует также отметить, что выбор условий положительности $c(t)$ и положительной определенности A продиктован только физическим содержанием рассматриваемых контактных задач. Можно опустить эти условия и без труда обобщить основные результаты.

5. Реализация проекционного метода. Применение общего проекционного метода в конкретных задачах требует зачастую большой самостоятельной работы. Так необходимо ввести соответствующие функциональные пространства, определить разрешающий ортопроектор задачи и аккуратно провести достаточно громоздкие выкладки.

Плоские задачи. Вернемся к уравнению (3) с дополнительными условиями (4). Рассмотрим вектор-функции $\mathbf{f}(x) = f^i(x)\mathbf{i}^i$ и тензор-функции двух переменных $N(x, \xi) = n^{ij}(x, \xi)\mathbf{i}^i\mathbf{j}^j$ ($i, j = 1, \dots, N$), где \mathbf{i}^k ($k = 1, \dots, N$) — ортонормированный алгебраический векторный базис N -мерного евклидова пространства V . Напомним, что всюду по верхним повторяющимся индексам ведется суммирование.

Гильбертово пространство $L_2([-1, 1], V)$ вектор-функций имеет следующие глобальное скалярное произведение и норму:

$$\mathbf{a}(x), \mathbf{b}(x) \in L_2([-1, 1], V) : (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int_{-1}^1 \mathbf{a}(x) \cdot \mathbf{b}(x) dx,$$

$$\mathbf{a}(x) \cdot \mathbf{b}(x) = a^k(x)b^k(x), \quad \|\mathbf{a}\| = (\mathbf{a}, \mathbf{a})^{1/2}.$$

Глобальным произведением (справа) тензор-функции на вектор-функцию назовем выражение

$$(N(x, \xi), \mathbf{a}(\xi)) = \int_{-1}^1 N(x, \xi) \cdot \mathbf{a}(\xi) d\xi, \quad N(x, \xi) \cdot \mathbf{a}(\xi) = n^{ij}(x, \xi)a^j(\xi)\mathbf{i}^i.$$

Тогда оператор \mathbf{A}^* в уравнении (3) можно записать в виде $\mathbf{A}^*\mathbf{f}(x) = (\mathbf{K}(x, \xi), \mathbf{f}(\xi))$. При описании разрешающего ортопроектора далее будем пользоваться аналогичными обозначениями.

Остановимся на вопросе разложения вектор-функций и тензор-функций в ряды по функциональным векторным базисам. Пусть $\{P_k^*(x)\}$ ($k = 0, 1, \dots$) — базис $L_2[-1, 1]$, тогда

$$\mathbf{a}(x) = a^i(x)\mathbf{i}^i = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^i P_k^*(x)\mathbf{i}^i = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^i \mathbf{p}_k^i(x),$$

$$\mathbf{p}_k^i(x) = P_k^*(x)\mathbf{i}^i, \quad (\mathbf{p}_k^i(x), \mathbf{p}_n^j(x)) = \delta_{kn}\delta_{ij},$$

где $\mathbf{p}_k^i(x)$ ($i = 1, \dots, N; k = 0, \dots, \infty$) — базис $L_2([-1, 1], V)$, δ_{ml} — символ Кронекера.

Аналогично предыдущему, получим

$$\begin{aligned} N(x, \xi) &= n^{ij}(x, \xi)\mathbf{i}^i\mathbf{j}^j = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} n_{mn}^{ij} P_m^*(x) P_n^*(\xi) \mathbf{i}^i \mathbf{j}^j = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} n_{mn}^{ij} \mathbf{p}_m^i(x) \mathbf{p}_n^j(\xi). \end{aligned}$$

В качестве примера построим решение задачи при заданных на всех штампах квазистатических условиях. Пусть в (3)–(4) заданы усилия $\mathbf{p}(t)$, моменты $\mathbf{m}(t)$ и вектор-функция $\mathbf{g}(x, t)$, а необходимо найти контактные давления $\mathbf{q}(x, t)$, осадки $\mathbf{a}(t)$ и углы поворотов $\mathbf{b}(t)$.

Представим $L_2([-1, 1], V)$ в виде суммы ортогональных подпространств, т.е.

$$L_2([-1, 1], V) = L_2(1, V) \oplus L_2(x, V) \oplus L_2^0([-1, 1], V),$$

где $L_2(1, V)$ — пространство алгебраических векторов, $L_2(x, V)$ — пространство вектор-функций, образуемых умножением алгебраических векторов на x ($x \in [-1, 1]$), $L_2^0([-1, 1], V)$ — гильбертово пространство вектор-функций из $L_2([-1, 1], V)$, ортогональных вектор-функциям из $L_2(1, V)$ и $L_2(x, V)$.

Заметим, что функциональными векторными базисами $L_2(1, V)$ и $L_2(x, V)$ являются $\mathbf{p}_0^k(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i}^k$ и $\mathbf{p}_1^k(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} x \mathbf{i}^k$ ($k = 1, \dots, N$), соответственно, за базис пространства $L_2^0([-1, 1], V)$ можно взять, например, $\{\mathbf{p}_m^k(x)\}$ ($k = 1, \dots, N$; $m = 2, \dots, \infty$), где $\mathbf{p}_m^k(x) = P_m^*(x) \mathbf{i}^k$, а $P_m^*(x)$ — ортонормированные полиномы Лежандра. Тогда представим $\mathbf{q}(x, t)$ и правую часть уравнения (3) в форме

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(x, t) &= z_0^i(t) \mathbf{p}_0^i(x) + z_1^i(t) \mathbf{p}_1^i(x) + \sum_{m=2}^{\infty} z_m^i(t) \mathbf{p}_m^i(x), \\ \mathbf{a}(t) + \mathbf{b}(t)x - \mathbf{g}(x, t) &= [\delta_0^i(t) - g_0^i(t)] \mathbf{p}_0^i(x) + \\ &+ [\alpha^i(t) - g_1^i(t)] \mathbf{p}_1^i(x) + \sum_{m=2}^{\infty} g_m^i(t) \mathbf{p}_m^i(x). \end{aligned} \quad (14)$$

Обратимся к условиям (3). Легко видеть, что

$$\begin{aligned} z_0^i(t) &= (\mathbf{q}(x, t), \mathbf{p}_0^i(x)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 q^i(x, t) dx = \frac{p^i(t)}{\sqrt{2}}, \\ z_1^i(t) &= (\mathbf{q}(x, t), \mathbf{p}_1^i(x)) = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^1 q^i(x, t) dx = \sqrt{\frac{3}{2}} m^i(t), \end{aligned}$$

т.е. дополнительные условия задают проекцию $\mathbf{q}(x, t)$ на пространство непрерывных по t в $L_2(V) = L_2(1, V) \oplus L_2(x, V)$ вектор-функций. С другой стороны, как следует из (14), для правой части уравнения (3) такая проекция как раз неизвестна. Таким образом, решение задачи можно найти проекционным методом из пп. 3 и 4, где разрешающий ортопроектор P_1 задается выражением

$$P_1 = P_1^* : P_1^* \mathbf{f}(x) = (\mathbf{p}_0^i(x) \mathbf{p}_0^i(\xi) + \mathbf{p}_1^i(x) \mathbf{p}_1^i(\xi), \mathbf{f}(\xi)). \quad (15)$$

Воспроизведем основные этапы построения решения, необходимые для численной реализации задачи. Воспользуемся разложениями

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(x, t) &= z_0^i(t) \mathbf{p}_0^i(x) + z_1^i(t) \mathbf{p}_1^i(x) + \sum_{k=2}^{\infty} z_k(t) \mathbf{f}_k(x), \\ \mathbf{g}(x, t) &= g_0^i(t) \mathbf{p}_0^i(x) + g_1^i(t) \mathbf{p}_1^i(x) + \sum_{k=2}^{\infty} g_k(t) \mathbf{f}_k(x) \quad (i = 1, \dots, N), \end{aligned} \quad (16)$$

где $\mathbf{f}_k(x)$ — собственные вектор-функции оператора $(\mathbf{I}^* - P_1^*) \mathbf{A}^*$ в $L_2^0([-1, 1], V)$, соответствующие его собственным числам α_k , т.е.

$$(\mathbf{I}^* - P_1^*) \mathbf{A}^* \mathbf{f}_k(x) = \alpha_k \mathbf{f}_k(x), \quad k = 2, \dots, \infty. \quad (17)$$

Собственные вектор-функции $\mathbf{f}_k(x)$ представим в виде

$$\mathbf{f}_k(x) = \sum_{p=2}^{\infty} f_{p(k)}^l \mathbf{p}_p^l(x), \quad k = 2, \dots, \infty, \quad l = 1, \dots, N, \quad (18)$$

а ядро $\mathbf{K}(x, \xi)$ оператора \mathbf{A}^* в форме двойного ряда

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(x, \xi) &= k^{ij}(x, \xi) \mathbf{i}^i \mathbf{i}^j = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} r_{mn}^{ij} P_m^*(x) P_n^*(\xi) \mathbf{i}^i \mathbf{i}^j = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} r_{mn}^{ij} \mathbf{p}_m^i(x) \mathbf{p}_n^j(\xi) \end{aligned} \quad (19)$$

причем $\mathbf{K}(x, \xi) = \mathbf{K}^T(\xi, x)$ и $r_{mn}^{ij} = r_{nm}^{ji}$.

Тогда для спектральной задачи (17) с учетом (18) и (19) получим

$$\sum_{n=2}^{\infty} r_{mn}^{ij} f_{n(k)}^j = \alpha_k f_{m(k)}^i, \quad m = 2, \dots, \infty, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (20)$$

Заметим, что матрица полученной алгебраической системы уравнений симметрична. Выбирая $m = M$, получаем приближенные значения искомым собственным числам и собственным функциям.

Полное решение задачи определяется следующими выражениями:

$$\begin{aligned} z_k(t) &= -(\mathbf{I}^* + \mathbf{D}_k^*) \frac{g_k(t) + (\mathbf{I}^* - \mathbf{L}_2^*) [z_1^i(t) k_{k(1)}^i + z_0^i(t) k_{k(0)}^i]}{c(t) + \alpha_k}, \\ \delta^i(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ c(t) (\mathbf{I}^* - \mathbf{L}_1^*) z_0^i(t) + \right. \\ &+ (\mathbf{I}^* - \mathbf{L}_2^*) \left[\sum_{k=2}^{\infty} z_k(t) k_{k(0)}^i + r_{00}^{ij} z_0^j(t) + r_{01}^{ij} z_1^j(t) \right] + g_0^i(t) \left. \right\}, \\ \alpha^i(t) &= \sqrt{\frac{3}{2}} \left\{ c(t) (\mathbf{I}^* - \mathbf{L}_1^*) z_1^i(t) + \right. \\ &+ (\mathbf{I}^* - \mathbf{L}_2^*) \left[\sum_{k=2}^{\infty} z_k(t) k_{k(1)}^i + r_{11}^{ij} z_1^j(t) + r_{10}^{ij} z_0^j(t) \right] + g_1^i(t) \left. \right\}, \\ k_{k(l)}^i &= \sum_{n=2}^{\infty} r_{ln}^{ij} f_{n(k)}^j, \quad z_0^i = \frac{p^i(t)}{\sqrt{2}}, \quad z_1^i(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} m^i(t), \\ \mathbf{D}_k^* \mathbf{f}(t) &= \int_{\tau_r}^t f(\tau) R_k(t, \tau) d\tau, \quad t \in [\tau_r, \tau_{r+1}], \\ k &= 2, \dots, \infty, \quad i = 1, \dots, N, \quad l = 0, 1, \end{aligned} \quad (21)$$

где $R_k(t, \tau)$ есть резольвента ядра

$$K_k^0(t, \tau) = \frac{\alpha(t)K_1(t, \tau) + \alpha_k K_2(t, \tau)}{\alpha(t) + \alpha_k}. \quad (22)$$

Следует отметить, что во всех вариантах постановки плоской задачи для системы штампов вид разрешающего ортопроектора аналогичен (15), а спектральная задача приводится к системе алгебраических уравнений типа (20), где матрица системы симметрична и в качестве элементов содержит коэффициенты разложения r_{mn}^{ij} (естественно, что для каждого варианта постановки получим свою матрицу системы уравнений спектральной задачи).

Осесимметричные задачи. Рассмотрим уравнение (7) при условии (8). Пусть $L_2[\Omega]$ — пространство функций, интегрируемых с квадратом в области Ω , где Ω — круг единичного радиуса. Подпространство $L_2[\Omega]$ функций, зависящих только от радиальной координаты, обозначим $L_2(\Omega)$. Очевидно, что $L_2(\Omega)$ является гильбертовым пространством со следующими скалярным произведением и нормой:

$$f(r), g(r) \in L_2(\Omega) : (f, g)_\Omega = \int_0^1 f(\rho)g(\rho)\rho d\rho, \quad \|f\|_\Omega = (f, f)_\Omega^{1/2}.$$

Введем теперь гильбертово пространство $L_2(\Omega, V)$ вектор-функций со следующими глобальным скалярным произведением и нормой:

$$\mathbf{a}(r), \mathbf{b}(r) \in L_2(\Omega, V) : (\mathbf{a}, \mathbf{b})_{(\Omega, V)} = \int_0^1 \mathbf{a}(\rho) \cdot \mathbf{b}(\rho)\rho d\rho, \\ \|\mathbf{a}\|_{(\Omega, V)} = (\mathbf{a}, \mathbf{a})_{(\Omega, V)}^{1/2},$$

где $\mathbf{a}(r) = a^i(r)\mathbf{i}^i$ ($i = 1, \dots, N$)

Определим глобальное произведение (справа) тензор-функции $\mathbf{M}(r, \rho) \in L_2(\Omega, V)$ на вектор-функцию $\mathbf{f}(\rho) \in L_2(\Omega, V)$ следующим соотношением:

$$(\mathbf{M}(r, \rho), \mathbf{f}(\rho))_{(\Omega, V)} = \int_0^1 \mathbf{M}(r, \rho) \cdot \mathbf{f}(\rho)\rho d\rho.$$

Тогда оператор \mathbf{B}^* в уравнении (7) можно записать в виде $\mathbf{B}^*\mathbf{f}(r) = (\mathbf{K}(r, \rho), \mathbf{f}(\rho))_{(\Omega, V)}$. При описании разрешающего ортопроектора далее будем пользоваться аналогичными обозначениями.

Построим функциональный векторный базис $L_2(\Omega, V)$, взяв за основу базис $L_2(\Omega)$. Пусть последовательность функций $P_m^0(r)$ ($m = 0, 1, \dots, \infty$), составляет базис пространства $L_2(\Omega)$:

$$(P_m^0(r), P_n^0(r))_\Omega = \delta_{mn}, \quad (1, P_m^0(r))_\Omega = \frac{\delta_{0m}}{\sqrt{2}}, \\ P_m^0(r) = \sqrt{4m + 2}P_m(1 - 2r^2),$$

где $P_m(x)$ — полином Лежандра, δ_{mn} — символ Кронекера. Тогда последовательность вектор-функций $\mathbf{p}_k^i(r)$ ($i = 1, \dots, N; k = 0, 1, \dots, \infty$) составляет базис $L_2(\Omega, V)$, и справедливо представление

$$\mathbf{a}(r) \in L_2(\Omega, V) : \mathbf{a}(r) = a^i(r)\mathbf{i}^i = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^i P_k^0(r)\mathbf{i}^i = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^i \mathbf{p}_k^i(r), \\ \mathbf{p}_k^i(r) = P_k^0(r)\mathbf{i}^i, \quad (\mathbf{p}_k^i(r), \mathbf{p}_n^j(r)) = \int_0^1 \mathbf{p}_k^i(r) \cdot \mathbf{p}_n^j(r)\rho d\rho = \delta_{ij}\delta_{kn}.$$

Аналогично тензор-функция $\mathbf{K}(r, \rho) \in L_2(\Omega, V)$ может быть разложена в следующий двойной ряд:

$$\mathbf{K}(r, \rho) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{mn}^{ij} \mathbf{p}_m^i(r)\mathbf{p}_n^j(\rho).$$

В качестве примера выпишем разрешающий ортопроектор задачи (7), (8) в случае, когда на всех штампах заданы усилия $p^i(t)$, а необходимо определить контактные давления $q^i(r, t)$ и осадки штампов $\delta^i(t)$. Для этого варианта постановки задачи

$$P_1 = \mathbf{P}_{\Omega(1)}^* : \mathbf{P}_{\Omega(1)}^* \mathbf{f}(r) = (\mathbf{p}_0^i(r)\mathbf{p}_0^i(\rho), \mathbf{f}(\rho)),$$

где $\mathbf{P}_{\Omega(1)}^*$ проектирует $L_2(\Omega, V) = L_2(\Omega, V)_1 \oplus L_2(\Omega, V)_2$ на $L_2(\Omega, V)_1$, причем

$$\mathbf{f}(r) \in L_2(\Omega, V) : \mathbf{f}(r) = \mathbf{f}_1(r) + \mathbf{f}_2(r), \\ \mathbf{f}_1(r) \in L_2(\Omega, V)_1 : \mathbf{f}_1(r) = f_0^i \mathbf{p}_0^i(r), \\ \mathbf{f}_2(r) \in L_2(\Omega, V)_2 : \mathbf{f}_2(r) = \sum_{s=1}^{\infty} f_s^j \mathbf{p}_s^j(r).$$

Техника построения полного решения задачи достаточно ясна и аналогична используемой для плоских задач.

Задачи для цилиндрических тел. Задачи для эволюционных систем штампов, взаимодействующих с неоднородными стареющими цилиндрическими телами приводят к исследованию уравнения вида (3) с заданной правой частью. Общий метод решения основного операторного уравнения и полные решения представленных задач при различных постановках подробно изложены, например, в монографиях [8, 9].

Следует отметить также статью [10] и монографию [6], в которых исследованы процессы последовательного присоединения вязкоупругих однородно стареющих накладок к упругой однородной полуплоскости и последовательной установки гладких жестких штампов на однородно стареющую вязкоупругую полуплоскость.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В. М., Арутюнян Н. Х., Манжиров А. В. Контактные задачи теории ползучести неоднородно стареющих тел // Аналитические и численные методы решения краевых задач пластичности и вязкоупругости. Свердловск: Изд-во УНЦ АН СССР, 1986. С. 3–13.
2. Александров В. М., Коваленко Е. В., Манжиров А. В. Некоторые смешанные задачи теории ползучести неоднородно стареющих сред // Изв. АН АрмССР. Механика. 1984. Т. 37, № 2. С. 12–25.
3. Александров В. М., Коваленко Е. В., Фурин В. В. Контактная задача теории ползучести для стареющего слоя // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 3. С. 105–110.
4. Александров В. М., Манжиров А. В. О двумерных интегральных уравнениях в прикладной механике деформируемых твердых тел // ПМТФ. 1987. № 5. С. 146–152.
5. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.
6. Арутюнян Н. Х., Дроздов А. Д., Наумов В. Э. Механика растущих вязкоупругопластических тел. М.: Наука, 1987. 472 с.
7. Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б. Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.
8. Арутюнян Н. Х., Манжиров А. В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1990; Изд-во НАН РА, 1999. 320 с.
9. Арутюнян Н. Х., Манжиров А. В., Наумов В. Э. Контактные задачи механики растущих тел. М.: Наука, 1991. 176 с.
10. Арутюнян Н. Х., Наумов В. Э. О контактном взаимодействии наращиваемой системы вязкоупругих накладок с однородной полуплоскостью // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 2. С. 144–154.
11. Давтян З. А. О двух задачах кручения усиленного тонким покрытием бесконечного цилиндра в условиях неоднородной ползучести // Докл. АН АрмССР. 1979. Т. 69. № 1. С. 45–51.
12. Коваленко Е. В., Манжиров А. В. Контактная задача для двухслойного стареющего вязкоупругого основания // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 674–682.
13. Коваленко Е. В. К вопросу решения контактных задач теории ползучести для комбинированных стареющих оснований // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 6. С. 1006–1014.
14. Манжиров А. В. Осесимметричные контактные задачи для неоднородно стареющих вязкоупругих слоистых оснований // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 4. С. 684–693.
15. Манжиров А. В. Об одном методе решения двумерных интегральных уравнений осесимметричных контактных задач для тел со сложной реологией // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 6. С. 1019–1025.
16. Манжиров А. В. О некоторых постановках и решениях контактных задач теории ползучести для произвольных систем штампов // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 3. С. 139–151.
17. Манжиров А. В. Контактные задачи о взаимодействии вязкоупругих оснований, подверженных старению, с системами неодновременно прикладываемых штампов // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 4. С. 670–685.
18. Манжиров А. В. Проекционно-спектральный метод решения операторных уравнений, возникающих в механике сплошных сред // Труды XIII науч. конф. молод. ученых Ин-та механики АН УССР, Киев, 24–27 мая 1988 г. Ч. 2. / Ин-т механики АН УССР. Киев, 1988. Деп. в ВИНТИ 27.12.88, № 9072–В88. С. 423–427.

19. Манжиров А. В. Осесимметричная контактная задача для вязкоупругого слоистого основания, наращиваемого системой кольцевых в плане штампов // Труды XV науч. конф. молод. ученых Ин-та механики АН УССР. Киев, 29 мая–1 июня 1990 г. Ч. 2. / Ин-т механики АН УССР. Киев, 1990. Деп. в ВИНТИ 10.07.90, № 3801–В90. С. 266–272.
20. Манжиров А. В., Черныш В. А. О взаимодействии жесткой усиливающей втулки с неоднородной стареющей трубой высокого давления // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 6. С. 112–118.
21. Манжиров А. В., Черныш В. А. Контактная задача для слоистого неоднородного стареющего цилиндра, подкрепленного жестким кольцом // ПМТФ. 1990. № 6. С. 101–109.
22. Манжиров А. В., Черныш В. А. О последовательном усилении неоднородных вязкоупругих цилиндрических тел системами жестких элементов / Ин-т проблем механики АН СССР. М., 1991. 56 с. Деп. в ВИНТИ 11.07.91, № 2975–В91.
23. Манжиров А. В., Черныш В. А. Контактная задача дискретного наращивания неоднородного вязкоупругого стареющего цилиндра системой жестких втулок // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 6. С. 1018–1025.
24. Мирзоян С. Е., Мхитарян С. М. О некоторых задачах контактного взаимодействия между бесконечными стрингерами и полосами с учетом неоднородности старения материалов // Изв. АН АрмССР. Механика. 1981. Т. 34. № 5. С. 27–40.
25. Мирзоян С. Е., Мхитарян С. М. К задаче контактного взаимодействия между тонкостенным включением конечной длины и плоскостью, находящимися в условиях ползучести // Докл. АН АрмССР. 1983. Т. 76. № 4. С. 171–177.
26. Развитие теории контактных задач в СССР / Под ред. Л. А. Галина. М.: Наука, 1976. 493 с.
27. Golden J. M., Graham G. A. C. Boundary Value Problems in Linear Viscoelasticity. Heidelberg–Berlin: Springer-Verlag, 1988. XIV + 266 p.

§ 4. КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ КОНСОЛИДАЦИИ

В. Б. Глазовский, Б. М. Нуллер

Основы теории консолидации были заложены в 1924 г. К. Терцаги в монографии [12] на основе большого опыта строительства гидротехнических сооружений и фундаментов, существенный вклад в развитие теории внесли Н.М. Герсеванов [1] и В.А. Флорин [13]. Эта теория, которую часто называют фильтрационной (или несвязанной) консолидацией, успешно развивается и применяется до настоящего времени при решении ряда одномерных нелинейных задач для оценки изменения порового давления и осадок сооружений, однако она не учитывает ряд существенных факторов.

В 1941 г. в работе [16] М.А. Био построил классическую систему уравнений линейной теории консолидации в трехмерном пространстве. Она описывает связанные медленные процессы фильтрации и деформирования в пористой упругой среде, полностью насыщенной жидкостью. Динамические явления, в частности, распространение упругих волн, теория не охватывает, так как в систему уравнений инерционные члены не входят. Сравнение двух теорий консолидации (Терцаги и Био) выполнено в ряде работ, например [31]. Показано, что результаты могут в определенных случаях качественно различаться, в частности, в теории Био имеет место эффект Мандела–Крайера — немонотонное изменение порового давления по времени.

Решению различных задач теории консолидации посвящено большое число работ. Так, приведенный в [23] библиографический справочник [30] содержит около 500 наименований работ, опубликованных до 1982 г., при этом работы советских авторов в нем почти не упоминаются.

Фактически контактные задачи имеет смысл рассматривать только для связанной теории консолидации, поскольку в фильтрационной теории нет возможности качественно исследовать процесс изменения контактных напряжений во времени, и теряется основное содержание контактной задачи.

Рассматриваемые в дальнейшем контактные задачи теории консолидации Био (в отличие от фильтрационной консолидации, где может рассматриваться только изменение условий фильтрации) могут быть поставлены с разными типами смешанных граничных условий: только по упругости, только по фильтрации или с изменением типа обоих условий.

В данной статье рассматриваются работы, посвященные аналитическому решению контактных задач теории консолидации. Мы не затрагиваем в обзоре довольно многочисленной группы работ, использующих метод конечных элементов (конечных разностей, граничных элементов) для приближенного решения различных конкретных задач консолидации, для

расчета временных осадок фундаментов, гидротехнических сооружений и прогноза развития порового давления при оценке устойчивости плотин, дамб и откосов.

К настоящему времени детально исследовано сравнительно небольшое число краевых задач теории консолидации Био. Рассмотрим более подробно некоторые из работ, посвященных контактному взаимодействию штампов и плит с пороупругим полупространством или слоем (пачкой слоев).

В работах [14, 15, 17, 27, 33] рассматривались контактные задачи для пороупругого полупространства или слоя, в основном, связанные с изучением проблем геомеханики. В большинстве работ исследовалось поведение пористой среды, насыщенной несжимаемой жидкостью, материал скелета предполагался несжимаемым.

В работах В.И. Керчмана [7, 8] рассмотрена контактная задача о проницаемом плоском гладком штампе на полуплоскости, насыщенной несжимаемой жидкостью. Задача сведена к уравнению Фредгольма I рода, получены асимптотические решения при больших и малых значениях времени, приближенное решение методом коллокации для любых значений времени. Обсуждаются вопросы постановки контактных задач консолидации, а также результаты, полученные ранее другими авторами.

В работе [34] рассматривается осесимметричная контактная задача для плоского гладкого штампа на (вязкоупругом) полупространстве, насыщенном сжимаемой жидкостью, условие по фильтрации (существует проницаемость или нет) одинаковое на всей границе. После применения интегральных преобразований Ханкеля по координате и Лапласа по времени задача сведена к парным интегральным уравнениям, которые методом Лебедева–Уфлянда сведены к уравнению Фредгольма II рода, решение строится в форме разложения по полиномам Лежандра. Предполагается, что нагрузка на штамп линейно возрастает до некоторого постоянного значения на заданном промежутке времени. Обращение интегральных преобразований выполняется численно методом Крылова. Приведены результаты расчетов, показывающие влияние скорости нагружения на осадку штампа и контактные напряжения.

В работе [25] рассматривается аналогичная задача для штампа на полупространстве, но смешанные условия ставятся и по фильтрации — плоский гладкий штамп непроницаемый, остальная поверхность проницаемая. Полученные парные интегральные уравнения сведены к системе уравнений Фредгольма II рода. Показано, что характер сингулярности не изменяется при смешанных условиях по фильтрации.

В работе [24] исследуется задача о вдавливании плоского гладкого штампа в полуплоскость, граница которой проницаема. Задача сведена к парным интегральным уравнениям с тригонометрическими ядрами, решение которых сводится к уравнению Фредгольма II рода.

В работе [35] исследуется задача о давлении прямоугольной плиты на слой, насыщенный несжимаемой жидкостью. Дана вариационная формулировка, задача решается численно методом Канторовича. Приведены примеры расчета, иллюстрирующие влияние отношения модулей упругости плиты и слоя, коэффициента Пуассона слоя и размеров плиты на изменение осадок во времени.

Осесимметричная задача консолидации для круглого проницаемого штампа, лежащего без трения на полупространстве, насыщенном несжимаемой жидкостью, исследовалась в [20]. После применения интегральных преобразований задача сведена к парным интегральным уравнениям, строится приближенное решение путем разложения в ряд по косинусам, обращение преобразования по времени выполняется методом трапеций. Приведены численные результаты, иллюстрирующие влияние коэффициента Пуассона на осадки штампа.

В работе [19] рассмотрена осесимметричная задача о круглой непроницаемой плите конечной жесткости, лежащей без трения на пороупругом полупространстве, насыщенном несжимаемой жидкостью (случай проницаемой плиты был рассмотрен в более ранней работе этих авторов [18]). После применения интегральных преобразований Ханкеля по координате и Лапласа по времени строится приближенное решение задачи путем разложения по системе кусочно-постоянных функций с выделением статической особенности под краем штампа. Обращение преобразования Лапласа выполняется численно. Приведены некоторые результаты численных расчетов для равномерно распределенной нагрузки на плиту, исследовано влияние проницаемости и жесткости плиты и коэффициента Пуассона грунта на степень консолидации.

В работе Е.В. Коваленко [9] рассматривается плоская задача о вдавлении параболического штампа в тонкий консолидируемый слой, насыщенный сжимаемой жидкостью, получены асимптотические решения для больших и малых значений времени. Решение задачи представляет интерес для расчета антифрикционных покрытий.

В работе [32] рассмотрена осесимметричная задача о вдавлении плоского гладкого штампа в пороупругий слой, насыщенный сжимаемой жидкостью. Слой опирается на жесткое непроницаемое основание, фильтрационное условие на верхней грани слоя не меняется, вся поверхность может быть либо проницаемой, либо непроницаемой. Уравнения консолидации записаны в форме [29]. После применения интегральных преобразований Лапласа по времени и координате задача сведена к интегральному уравнению Фредгольма II рода, решение строится методом коллокаций с выделением особенности. Приведенные в статье численные результаты иллюстрируют влияние коэффициента Пуассона, отношения толщины слоя к радиусу штампа, сжимаемости жидкости и условий дренирования на поведение осадок штампа во времени.

В работе [37], приведенной в [36], исследуется аналогичная задача об эксцентричном вдавлении круглого штампа, к которому приложены заданные главный вектор и главный момент. Задача сведена к системе интегральных уравнений Фредгольма II рода с неизвестной сингулярностью. Решение строится в рядах по функциям Бесселя. Приведены численные результаты, анализируется влияние перечисленных выше факторов, а также эксцентриситета нагрузки на изменение осадок и порового давления.

В работе [40], приведенной в [28], рассмотрена в той же постановке осесимметричная задача для многослойного основания. Задача сведена к системе уравнений Фредгольма II рода. Приведены численные результаты, иллюстрирующие для двухслойного основания влияние характеристик слоев и граничных условий на скорость консолидации.

В работе [38] рассмотрена осесимметричная задача о вдавлении плоского гладкого штампа в пороупругий слой, насыщенный сжимаемой жидкостью, при различных типах условий по фильтрации на верхней грани слоя, в частности, для непроницаемого штампа. Аналогичным методом задача сведена к системе уравнений Фредгольма II рода. Приведены численные результаты, иллюстрирующие влияние фильтрационных условий на осадку штампа.

В перечисленных выше работах при сведении решения интегральных уравнений к линейным системам полученные бесконечные системы линейных алгебраических уравнений не анализируются. Вопрос о нахождении коэффициентов интенсивности напряжений под краем штампа или плиты не ставится.

В работе А.Г. Егорова и А.В. Костерина [5] рассмотрена плоская контактная задача для штампа — круга, движущегося с постоянной скоростью по поверхности упругого полупространства, насыщенного несжимаемой жидкостью.

Близкие по тематике к рассмотренным выше задачам смешанные задачи для пористой упругой среды, связанные с трещинами и включениями, рассматривались в ряде работ (см. обзорную статью [22], а также [21, 39]). В большинстве этих работ исследовались задачи антиплоской деформации.

В работах авторов [2–4, 26] рассматривается процесс консолидации двухфазного линейно-деформируемого изотропного пористого слоя, описываемый уравнениями Био в форме [16] с учетом сжимаемости поровой жидкости и материала твердой фазы:

$$\begin{aligned} G\Delta \mathbf{u}^* + G(1 - 2\nu)^{-1} \text{grad div } \mathbf{u}^* - H_1 \text{grad } p^* &= 0, \\ k\Delta p^* &= H_1 \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{u}^* + (H_2 + H_3) \frac{\partial p^*}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1)$$

где \mathbf{u}^* — вектор упругих перемещений твердой фазы, p^* — поровое

давление, t — время, G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, k — коэффициент фильтрации, $H_1 = 1 - c$, $H_2 = (H_1 - f)c_2^{-1}$, $H_3 = fc_3^{-1}$, $c = c_1c_2^{-1}$, $c_1 = \frac{2}{3}G(1+\nu)(1+2\nu)^{-1}$, f — пористость, c_1, c_2, c_3 — соответственно, модули объемного сжатия скелета, однородного изотропного материала твердой фазы и поровой жидкости с учетом растворенного в ней газа.

Рассматриваются краевые задачи для консолидируемой полосы, полуполосы и прямоугольника, что соответствует плоской деформации упруго-консолидируемого слоя в направлении, перпендикулярном к z .

В основе уравнения (1) лежат уравнения равновесия, обобщенный закон Гука для твердой и жидкой фаз

$$\sigma_x^* = 2G \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \operatorname{div} u^* + e_x^* \right) - H_1 p^*, \quad (2)$$

$$\sigma_y^* = 2G \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \operatorname{div} u^* + e_y^* \right) - H_1 p^*, \quad u^* = (u_x^*, u_y^*), \quad (3)$$

$$p^* = \kappa_1 \Theta^* + \kappa_2 \operatorname{div} u^*, \quad \kappa_1 = (H_2 + H_3)^{-1}, \quad \kappa_2 = -H_1 \kappa_1, \quad (4)$$

$$\tau_{xy}^* = G e_{xy}^*, \quad \sigma_x^* = \sigma_{xs}^* - f p^*, \quad \sigma_y^* = \sigma_{ys}^* - f p^*, \quad (5)$$

$$e_x^* = \frac{\partial u_x^*}{\partial x}, \quad e_y^* = \frac{\partial u_y^*}{\partial y}, \quad e_{xy}^* = \frac{\partial u_x^*}{\partial y} + \frac{\partial u_y^*}{\partial x},$$

закон Дарси–Герсеванова

$$v^* = -k \operatorname{grad} p^*, \quad v^* = f \left(v_a^* - \frac{\partial u^*}{\partial t} \right), \quad v^* = (v_x^*, v_y^*) \quad (6)$$

и уравнение сплошности

$$\operatorname{div} v^* = -\frac{\partial \Theta^*}{\partial t}, \quad \Theta^* = H_1 \operatorname{div} u^* + (H_2 + H_3) p^*. \quad (7)$$

Здесь скорость v^* равна расходу поровой жидкости, протекающей в единицу времени через единичную площадку сечения пористой среды относительно твердой фазы; направление v^* совпадает с направлением нормали к сечению; v_a^* — истинная средняя скорость жидкости в эйлеровых координатах; Θ^* — изменение первоначального объема жидкости в единице объема пористой среды после деформации. Под напряжениями σ_{xs}^* , σ_{ys}^* понимаются силы, приложенные к скелету единичной площадки пористой среды соответствующего направления, напряжения в скелете больше в $(1-f)^{-1}$ раз.

Применение интегрального преобразования Лапласа по времени и двустороннего преобразования Лапласа по координате позволяет выписать общее решение задачи через функции параметров этих преобразований μ и s , соответственно. Для трансформированных функций используются те же обозначения, но без звездочки.

Произвольные постоянные, входящие в общее решение, определяются граничными условиями на верхней и нижней границах слоя, которые складываются из условий упругости в перемещениях и напряжениях для скелета и условий фильтрации в давлениях и скоростях для поровой жидкости, а также из производных этих величин, в частности, это могут быть условия контакта слоя со штампами, балками, стрингерами, винклеровскими или дренажными слоями [2]. Указанные группы условий в общем случае не зависят одна от другой и могут быть поставлены в различных комбинациях, порождая соответствующие характеристические уравнения $N_m(\mu, s) = 0$ для собственных чисел задачи $s_k(\mu)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, обладающие рядом общих свойств.

Если, например, граница полосы $y = h$ полностью свободна от нагрузки, и жидкость через нее беспрепятственно протекает, то

$$\sigma_y(x, h, t) = \tau_{xy}(x, h, t) = 0, \quad p(x, h, t) = 0. \quad (8)$$

Аналогично однородные условия под непроницаемым для жидкости штампом, лежащим на полосе без трения, имеют вид

$$\tau_{xy}(x, h, t) = u_y(x, h, t) = 0, \quad v_y(x, h, t) = 0. \quad (9)$$

После решения краевой задачи с условиями типа (9) необходимо проверить корректность этих условий с точки зрения физической реализации полученного решения. Обычному условию сжатия материала под штампом $\sigma_y(x, h, t) \leq 0$ (при растягивающих контактных напряжениях материал фактически отойдет от штампа и вместо (9) на некотором участке полосы возникнут условия типа (8)) в контактных задачах теории консолидации соответствует условие $\sigma_y < -(1-f)p$, $p \geq 0$, невыполнение которого приводит к эффекту образования пристенного слоя жидкости [6].

Выпишем характеристические уравнения для нескольких типов граничных условий [2] для полосы $-1 \leq y \leq 1$ (или полосы $0 \leq y \leq 1$ при условиях симметрии (9) при $y = 0$).

Характеристические функции однородных краевых задач (8), (9) определяются, соответственно, выражениями

$$N_1(s) = N_1(\mu, s) = \eta_1 \eta_2 \cos q(2s + \sin 2s) + 4G\lambda^{-1} s \cos s (q \sin q \cos s - s \sin s \cos q), \quad (10)$$

$$N_2(s) = N_2(\mu, s) = \sin^2 s \cos q,$$

$$\eta_j = (\beta + j)\eta + H_1, \quad \eta = (H_2 + H_3)GH_1^{-1}, \quad j = 1, 2,$$

$$q^2 = s^2 - \lambda H_4, \quad H_4 = H_2 + H_3 + H_1^2(\alpha G)^{-1},$$

$$\alpha = 2(1-\nu)(1-2\nu)^{-1}, \quad \beta = 2\nu(1-2\nu)^{-1}, \quad \lambda = \mu k^{-1}.$$

Если при $y = 1$ поставлены, например, условия контакта с проницаемой балочной плитой

$$D\partial^4 u_y / \partial x^4 + \sigma_y = 0, \quad p(x, 1, t) = 0 \quad (11)$$

где D — изгибная жесткость балки, то характеристическое уравнение имеет вид

$$N_3(s) = DG^{-1}\eta_2^2 s^3 \sin^2 s \cos q + N_1(s). \quad (12)$$

В работе [4] исследованы некоторые общие свойства характеристических уравнений для задач консолидации, в частности, доказаны следующие утверждения.

ТЕОРЕМА. Если $s = i\beta$, $\beta \neq 0$ — чисто мнимый параметр, то все корни характеристических уравнений $N_m(\mu, s) = 0$, $m = 1, 2, \dots$ лежат на луче $\operatorname{Re} \mu \leq 0$, $\operatorname{Im} \mu = 0$.

СЛЕДСТВИЕ. Если $\mu = \epsilon + i\delta$, $\delta \neq 0$, то функции $N_m(\mu, s)$ не имеют чисто мнимых нулей $s = i\beta$, $\beta \neq 0$.

Решение смешанных задач консолидации при смене вида граничного условия на одной грани слоя в ряде случаев может быть сведено к решению уравнения Винера–Хопфа с коэффициентом, представляющим собой отношение характеристических функций $N_m(\mu, s)$. Доказанные утверждения позволяют строить эффективные решения смешанных (контактных) задач связанной теории консолидации для слоя при различных комбинациях граничных условий.

В работе [2] показано, что решения задач консолидации для слоя при любых согласованных граничных условиях обладают фундаментальным свойством обобщенной ортогональности.

Пусть u_x^m, u_y^m, p^m , $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ — перемещения по x и y и давление в m -м однородном решении задачи консолидации для полосы $|y| \leq 1$ при каких-либо однородных условиях на верхней и нижней гранях полосы, аналогично индекс m определяет и другие компоненты m -го решения.

Однородные решения после разделения переменных принимают вид

$$u_x^m(x, y) = u_x^m(y)e^{s_m x}, \quad u_y^m(x, y) = u_y^m(y)e^{s_m x}, \quad p^m(x, y) = p^m(y)e^{s_m x}, \quad (13)$$

где s_m — корни характеристического уравнения, соответствующего данным граничным условиям при $y = \pm 1$, $u_x^m(y) \equiv u_x(s_m, y)$ и т. д.

Доказано, что имеют место следующие соотношения обобщенной ортогональности:

$$I_1 = \int_{-1}^1 (\sigma_x^m u_x^n + \tau^m u_y^n - \mu^{-1} p^m v_x^n - \sigma_x^n u_x^m - \tau^n u_y^m + \mu^{-1} p^n v_x^m) dy = 0, \quad s_m \neq -s_n, \quad (14)$$

$$I_2 = \int_{-1}^1 (\sigma_x^m u_x^n - u_y^m \tau^n - \mu^{-1} p^m v_x^n) dy = 0, \quad s_m^2 \neq s_n^2.$$

Первым из этих соотношений необходимо пользоваться для сопряжения решений в контактирующих прямоугольниках и полуполосах при решении смешанных задач консолидации. Второе соотношение обобщенной ортогональности позволяет методом Фурье–Шиффа решать в замкнутой форме основные задачи теории консолидации для полуполосы и прямоугольника, если граничные условия на торцах соответствуют условию типа скользящей заделки или условию контакта среды с проницаемой мембраной

$$u_x(x, y) = h_1(y), \quad \tau(x, y) = h_2(y), \quad v_x(x, y) = h_3(y), \quad (15)$$

$$\sigma_x(x, y) = h_4(y), \quad u_y(x, y) = h_5(y), \quad p(x, y) = h_6(y), \quad (16)$$

при $x = \text{const}$, где $h_i(y)$, $i = 1, 2, \dots, 6$ — заданные функции.

Например, решение задачи (15) при любых однородных условиях на боковых гранях полуполосы имеет вид

$$u(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m u^m(y) e^{-s_m x}, \quad p(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m p^m(y) e^{-s_m x}, \quad (17)$$

$$A_m = \int_{-1}^1 (h_1 \sigma_x^m - h_2 u_y^m - \mu^{-1} h_3 p^m) dy \times \left[\int_{-1}^1 (u_x^m \sigma_x^m - \tau^m u_y^m - \mu^{-1} v_x^m p^m) dy \right]^{-1}.$$

Отметим, что в (16) задана функция σ_x , а не σ_{xs} , в граничные условия на боковых сторонах входит функция σ_y , а не σ_{ys} . Указанное обстоятельство накладывает естественные ограничения на сочетание условий упругости и фильтрации. Например, нельзя поставить условия $\sigma_{ys} = \tau = v_y = 0$, ибо в этом случае функция $p(x, \pm 1)$ неизвестна и, следовательно, функцию $\sigma_y(x, \pm 1)$ найти заранее нельзя. Однако, указанные математические условия не соответствуют каким-либо важным физическим ограничениям или устройствам. Действительно, если $v_y(x, 1) = 0$, то поры среды на границе закрыты. Если они заклеены, например, нерастяжимой не нагруженной снаружи и абсолютно гибкой пленкой, то $u_x(x, 1) = 0$. По условию равновесия пленки, которая может быть приклеена только к скелету, $\sigma_{ys} = fp$, следовательно, $\sigma_y = 0$. Если на пленку положен штамп, то $u_x(x, 1) = u_y(x, 1) = 0$ и т. д.. Проблема не возникает и при вычислении функции $\sigma_x(x, y)$ на торце, так как эта функция входит в условия (16) вместе с функцией $p(x, y)$.

Для более сложных типов граничных условий имеют место соотношения обобщенной ортогональности с нагрузкой

$$\int_{-1}^1 (\sigma_x^m u_x^n - u_y^m \tau^n - \mu^{-1} p^m v_x^n) dy - \sum_{k=1}^2 [\mu^{-1} p^m(y_k) q^n(y_k) - T^m(y_k) u_x^n(y_k) +$$

$$+ M^m(y_k)K^n(y_k) + u_y^m(y_k)Q^n(y_k) = 0, \quad y_k = (-1)^k, \quad (18)$$

где $q^m(\pm 1)$ — расход жидкости в дренажном слое $y = \pm 1$, $K^m(\pm 1)$ — угол поворота, $M^m(\pm 1)$ — изгибающий момент, $Q^m(\pm 1)$ — перерезывающая сила, $T^m(\pm 1)$ — продольная сила в балке $y = \pm 1$, порождаемые m -м однородным решением при соответствующих однородных краевых условиях при $y = \pm 1$. Решение задачи для условий (15), (16) имеет также вид (17). В общем случае соотношение (18) требует задания в угловых точках прямоугольника при $y = \pm 1$, $x = a$ и $x = b$ краевых значений расхода в дренажных слоях, углов поворота, изгибающих моментов, перерезывающих и продольных сил на концах балок и стрингеров. Оно реализуется частично или полностью в решениях задач (15), (16) с дифференциальными краевыми условиями при $y = \pm 1$.

Базовой задачей для некоторых классов смешанных краевых задач консолидации и для использования метода кусочно-однородных решений (КОР) служит задача о бесконечной полосе, верхняя грань которой контактирует с полубесконечным штампом (или упругой балкой). Решение этой задачи получено в [4] в квадратурах. Напряженно-деформированное состояние полосы на бесконечности под штампом определяет временные процессы осадки штампа и выдавливания жидкости в основных задачах для прямоугольника. Система КОР этой задачи [26] позволяет удовлетворить различным условиям на торце полуполосы или на торцах прямоугольника и решить, в частности, задачи о вдавливании нескольких штампов (балок) в консолидируемую полосу или прямоугольник, соответствующие периодические задачи для полосы, периодические и двоякопериодические задачи для всей плоскости, содержащей систему преград, дренажей или трещин и т.п..

При построении системы КОР используется метод Винера–Хопфа. Первоначально полученные замкнутые решения выражаются тройными интегралами, и при их реализации возникают различные вычислительные проблемы, связанные с медленной сходимостью обращений преобразования Лапласа. Спектральный анализ соответствующих характеристических функций позволил преодолеть эти трудности и построить эффективное решение, в котором все ряды и интегралы имеют экспоненциальную сходимость. Для сингулярных точек области получены асимптотические представления решений и явные формулы для коэффициентов интенсивности. Получены простые формулы для временных осадок штампа на прямоугольнике. Выполнены численные проверки сходимости, приводятся численные результаты по исследованию изменения коэффициента интенсивности напряжений в процессе консолидации.

Приведем более подробно некоторые результаты работы [4]. Рассматривается задача о давлении на полосу $-\infty < x < \infty$, $0 \leq y \leq 1$ полубесконечного проницаемого жесткого штампа $x \geq 0$, $y = 1$ при отсутствии

контактного трения на обеих границах $y = 0$ и $y = 1$.

Предполагая, что полоса опирается на жесткое непроницаемое основание, выпишем основные

$$y = 0: \quad u_y = 0, \quad \tau = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad y = 1: \quad \tau = 0, \quad p = 0 \quad (19)$$

и смешанные граничные условия

$$y = 1: \quad \sigma_y = R(x, \mu), \quad x < 0; \quad u_y = Q(x, \mu), \quad x \geq 0, \quad (20)$$

где $R(x, \mu)$, $Q(x, \mu)$ — трансформанты пригрузки $R^*(x, t)$ и осадки штампа $Q^*(x, t)$, соответственно.

Удовлетворяя условиям (19), можно записать решение в виде

$$\begin{aligned} 2Gu_x &= C(s)[\eta_1 \eta_2 s \cos q (y \sin s \sin sy + \cos s \cos sy) + \\ &+ \lambda^{-1} 2Gs \cos s (q \sin q \cos sy - s \sin s \cos qy) - \eta \eta_2 \sin s \cos q \cos sy], \\ 2Gu_y &= C(s)[\eta_1 \eta_2 s \cos q (y \sin s \cos sy - \cos s \sin sy) - \\ &- \lambda^{-1} 2Gs q \cos s (\sin q \sin sy - \sin s \sin qy) - \eta_2^2 \sin s \cos q \sin sy], \quad (21) \\ p &= C(s) \eta_2 s \sin s (\cos q \cos sy - \cos s \cos qy), \end{aligned}$$

где $C(s)$ — произвольная функция.

Удовлетворим условиям (20). Подставив в них выражения (21) и исключив функцию $C(s)$, получим уравнение Винера–Хопфа:

$$\sigma^+(s) + \sigma^-(s) = K(s)[u^+(s) + u^-(s)], \quad s \in L_2, \quad (22)$$

$$K(s) \equiv K(\mu, s) = G \eta_2^{-2} s N_1(s) N_2^{-1}(s).$$

где L_j — прямая $\operatorname{Re} \mu = \chi_j$, $\chi_j > 0$ ($j = 1, 2$),

$$\begin{aligned} \sigma^+(s) &= \int_0^\infty \sigma_y(x, 1) e^{-sx} dx, \quad \sigma^-(s) = \int_{-\infty}^0 R(x) e^{-sx} dx, \\ u^+(s) &= \int_0^\infty Q(x) e^{-sx} dx, \quad u^-(s) = \int_{-\infty}^0 u_y(x, 1) e^{-sx} dx. \end{aligned}$$

Общее решение уравнения можно построить в форме Ф.Д. Гахова, общее решение для случая отсутствия пригрузки и $Q(x, \mu) = -Q(\mu)$ в более простой форме [10]. Выпишем решение для одной из искомым функций, порового давления:

$$p(x, y, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} p(x, y) e^{\mu t} d\mu, \quad (23)$$

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} C(s) \eta_2 s \sin s (\cos q \cos sy - \cos s \cos qy) e^{sx} ds.$$

При $x > 0$ функцию $p(x, y)$ можно записать в виде

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \frac{2GQ(u)}{\eta_2 u_0^-(0)} \int_{L_2} \frac{u_0^-(s)(\cos q \cos sy - \cos s \cos qy)}{\sin s \cos q} e^{sx} ds, \quad (24)$$

где $u_0^-(s)$ — каноническое решение однородного уравнения (22). Учитывая, что подынтегральная функция мероморфна, и замыкая контур интегрирования полуокружностью в левой полуплоскости $\text{Re } s \leq \chi_2$, представим $p(x, y)$ в виде суммы рядов по вычетам в нулях функций $\sin s$ и $\cos q$:

$$p(x, y) = \frac{2GQ(\mu)}{\eta_2 u_0^-(0)} \left\{ u_0^-(0) \left(1 - \frac{\text{ch } q^0 y}{\text{ch } q^0} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} u_0^-(n\pi) \left[(-1)^n \cos n\pi y - \frac{\cos q_n y}{\cos q_n} \right] e^{n\pi x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n u_0^-(s_n)(n\pi + \pi/2) \cos s_n \cos(n\pi + \pi/2)y}{s_n \sin s_n} e^{s_n x} \right\}, \quad (25)$$

где $q_n = \sqrt{n^2 \pi^2 - \lambda H_4}$, $s_n = -\sqrt{(n\pi + \pi/2)^2 + \lambda H_4}$, $n = -1, -2, \dots$, $q^0 = \sqrt{\lambda H_4}$.

Рассмотрим две постановки задачи о погружении штампа: а) мгновенное погружение штампа в начальный момент времени на заданную величину Q_0 , б) погружение штампа по некоторому временному закону, удовлетворяющему условиям $Q^*(0) = 0$, $Q^*(t) \geq 0$, $Q^*(t) \rightarrow Q_0$ при $t \rightarrow \infty$.

Изменив порядок интегрирования по μ и суммирования рядов в формуле (25), рассмотрим первый из рядов (25). Замкнем контур интегрирования L_1 налево контуром, состоящим из четверти окружности большого радиуса во втором квадранте, контура L_3 , включающего полупрямую $\text{Re } \mu \leq \chi_1$, $\text{Im } \mu = \xi$, $\xi > 0$, отрезок прямой $\text{Re } \mu = \chi_1$, $-\xi \leq \text{Im } \mu \leq \xi$, полупрямую $\text{Re } \mu \leq \chi_1$, $\text{Im } \mu = -\xi$, и из четверти окружности в третьем квадранте. Внутри рассматриваемого замкнутого контура подынтегральная функция не имеет особых точек, интегралы по дугам окружностей большого радиуса стремятся к нулю в силу леммы Жордана. Показано, что особые точки n -го вычета подынтегральной функции в левой полуплоскости $\text{Re } \mu \leq 0$ (их можно разделить на три группы) лежат на левой полуоси.

Таким образом, в левой полуплоскости $\text{Re } \mu \leq 0$ вне луча $\text{Re } \mu \leq 0$, $\text{Im } \mu = 0$ рассматриваемая функция является аналитической и вычисление медленно сходящегося интеграла по контуру L_1 можно заменить вычислением интеграла от экспоненциально убывающей функции на L_3 .

Для второго ряда (25) почленное вычисление интегралов по контуру L_1 весьма эффективно: при $\lambda = ir$ быструю сходимость обеспечивает множитель $e^{s_n x}$, так как

$$s_n = -\sqrt{\rho_n^2 (\cos(\theta_n/2) + i \sin(\theta_n/2))}, \quad \text{где } \rho_n = \sqrt{(n\pi + \pi/2)^4 + r^2 H_4^2},$$

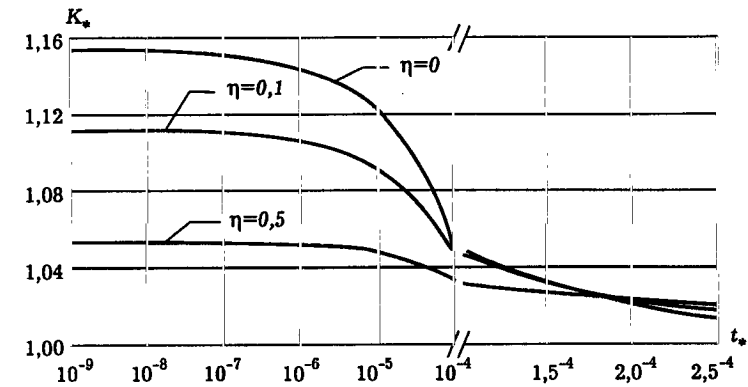


Рис. 1

$$\theta_n = \arctg [rH_4(n\pi + \pi/2)^{-2}] \text{ и } \theta_n \rightarrow \pi/2 \text{ при } r \rightarrow \infty.$$

Аналогично $p(x, y, t)$ вычисляются и другие компоненты решения.

Оценим при $x > 0$, $y = 1$ и $t \rightarrow 0$ поведение функции $\partial p^*/\partial y$, определяющей скорость вытекания жидкости через пронизываемый штамп в начальный момент времени. Согласно (25) на границе $y = 1$ при $\mu \rightarrow \infty$ $\partial p^*/\partial y \sim Q(\mu)\mu^{1/2}$. По теореме абелева типа отсюда следует, что скорость бесконечна, $\partial p^*/\partial y \sim t^{-1/2}$, $t \rightarrow 0$, при мгновенном погружении штампа и равна нулю, $\partial p^*/\partial y \sim t^{1/2}$, $t \rightarrow 0$, при погружении штампа по экспоненциальному закону.

Определим коэффициент интенсивности нормальных напряжений под краем штампа как функцию времени. Поведение нормальных напряжений под краем штампа во времени дается выражением ($k = 1, 3$)

$$\sigma_{ys}^*(x, 1, t) \sim \frac{K_I(t)}{\sqrt{2\pi x}}, \quad K_I(t) = -\frac{2\sqrt{2}G}{\sqrt{1-\nu}} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} Q(\mu) \sqrt{\psi(\mu)} e^{\mu t} d\mu, \quad (26)$$

$$\psi(\mu) = \frac{\eta_1}{\eta_2} - \frac{Gq^0 \text{th } q^0}{\eta^2 \lambda}.$$

Легко проверить, что при $\mu \rightarrow 0$ $\psi(\mu) \rightarrow [2(1-\nu)]^{-1}$ и, следовательно, при $t \rightarrow \infty$ согласно (26), $k = 1$,

$$\sigma_{ys}^*(x, 1) \sim \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}}, \quad K_I = -\frac{2GQ_0}{1-\nu},$$

что совпадает с асимптотикой контактных напряжений под краем штампа в задаче теории упругости, соответствующей задаче консолидации при $t \rightarrow \infty$.

На рис. 1, 2 приведены графики изменения во времени коэффициентов интенсивности напряжений (26) при $G = 1000$, $\nu = 1/3$, $c_2 = \infty$ (несжимаемый материал скелета) соответственно для задачи о мгновенном погружении штампа при трех значениях параметра η и для задачи о погружении

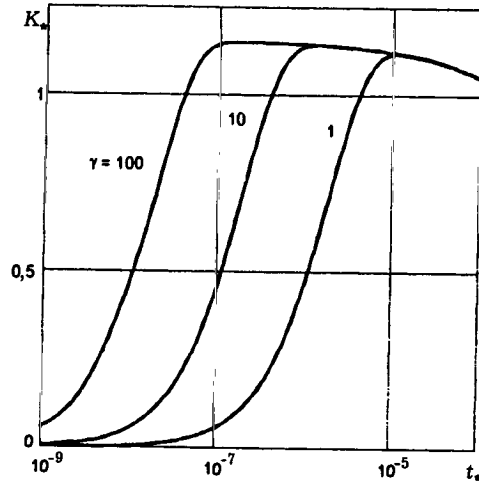


Рис. 2

штампа по экспоненциальному закону $Q^*(t) = Q_0(1 - e^{-\gamma t})$ при трех значениях параметра γ и $\eta = 0$; $t_* = kt[G]$ — безразмерная величина, $[G]$ — размерность G , единицей длины служит толщина полосы, $K_* \equiv K_I(t_*)/K_I$. В первой задаче поведение функции $\sigma_{ys}^*(x, 1, t)$ при малых t и $x \rightarrow 0$ можно определить по асимптотической формуле

$$\sigma_{ys}^*(x, 1, t) \sim \frac{K_I^0}{\sqrt{2\pi x}}, \quad K_I^0 = -\frac{2\sqrt{2}GQ_0}{\sqrt{1-\nu}} \sqrt{\frac{\eta_1}{\eta_2}},$$

которая дает те же значения $K_I(0)$, что и графики на рис. 1. Сравнение числовых значений функции $K_I(t)$ на рис. 1 и 2 при $\eta = 0$ и $\gamma = 100$ показывает, что они совпадают с точностью до трех значащих цифр уже при $t_* = 1,7 \cdot 10^{-7}$. Этот результат оправдывает более простую постановку задачи с мгновенным погружением штампа, несмотря на бесконечно большую скорость вытекания жидкости при $t \rightarrow 0$.

Пусть штамп вдавливается в полосу под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивностью $\sigma_0^*(t)$. Тогда контактные напряжения при $x \rightarrow \infty$ принимают значение $\sigma_y^*(x, 1, t) = -\sigma_0^*(t)$, что дает возможность найти временной закон погружения штампа $Q_0^*(t)$. Действительно, вычисляя вычет в полюсе $s = 0$, получаем

$$\sigma_y(x, 1, \mu) = 4GQ_0(\mu)\psi(\mu), \quad Q_0(\mu) = [4G\psi(\mu)]^{-1}\sigma_0(\mu).$$

В частности, если нагрузка не зависит от времени, $\sigma_0^*(t) = \sigma_0$, то $Q_0(\mu) = [4G\mu\psi(\mu)]^{-1}\sigma_0$. Отсюда, суммируя вычеты в корнях t_m уравнения

$\chi t - \text{tg } t = 0$, $\chi = \eta_1\eta_2(GH_4)^{-1}$ ($\chi \geq \alpha \geq 2$), получаем формулу осадки штампа:

$$u_y^*(1, t) = -\frac{\sigma_0}{2G} \left[(1-\nu) - \frac{\alpha\eta_2}{H_1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\exp(-t_m^2 k H_4^{-1} t)}{\chi^2 t_m^2 + 1 - \chi} \right]. \quad (27)$$

Полная осадка u_y^s равна $\lim_{t \rightarrow \infty} u_y^*(1, t) = -\sigma_0(1-\nu)(2G)^{-1}$. При $t = 0$ ряд в формуле (27) суммируется

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\chi^2 t_m^2 + 1 - \chi} = \frac{1}{2\chi(\chi-1)},$$

что позволяет найти начальную осадку

$$u_y^0 = \lim_{t \rightarrow 0} u_y^*(1, t) = -\frac{\sigma_0}{4G} \frac{\eta_2}{\eta_1}, \quad \eta_2 \geq \eta_1 \geq 1.$$

Если материал скелета и поровая жидкость несжимаемы, то $\eta_2 = \eta_1 = 1$, $u_y^0/u_y^s = [2(1-\nu)]^{-1}$. Если несжимаем и сам скелет ($\nu \rightarrow 1/2$), то $u_y^0 = u_y^s$, штамп сразу погружается на полную глубину.

Оценим скорость вытекания жидкости в начальный момент времени. При $x \rightarrow \infty$ имеем

$$v_y^*(x, 1, t) = -k \frac{\partial p^*}{\partial y} \sim \frac{\sigma_0 \sqrt{H_4 k}}{2\sqrt{\pi} \eta_1} t^{-1/2}, \quad t \rightarrow 0.$$

Если материал скелета и поровая жидкость несжимаемы, то при $x \rightarrow \infty$

$$v_y^*(x, 1, t) \sim \frac{\sigma_0 \sqrt{(1-2\nu)k}}{2\sqrt{2\pi} \sqrt{(1-\nu)G}} t^{-1/2}, \quad t \rightarrow 0.$$

Легко проверить также, что при $x \rightarrow \infty$ $\partial p^*/\partial x = 0$, $\tau^* = 0$, σ_x^* зависит от y , но $\int_0^1 \sigma_x^* dy = 0$. Отметим, что при $x \rightarrow \infty$ и $t \rightarrow 0$ $p^*(x, 0, t) \rightarrow \sigma_0(2\eta_1)^{-1}$, т. е. в случае несжимаемого материала скелета и поровой жидкости $p^*(x, 0, t) \rightarrow \sigma_0/2$.

Расчет фундаментов, опирающихся на консолидируемое основание, сводится, как правило, к решению смешанной краевой задачи, одно из граничных условий которой ставится на участках взаимодействия фундаментных плит (балок) и основания, а другое — на дневной поверхности основания вне фундамента. Если моделью основания может служить консолидируемая полоса $x \in (-\infty, \infty)$, $y \in [0, 1]$, то на ее нижней границе $y = 0$ естественно возникает сквозное условие (9), а смешанные условия при $y = 1$ имеют вид (11) под балками и (8) вне балок.

Такая задача эффективно решается методом кусочно-однородных решений [11]. Для рассматриваемого случая система кусочно-однородных решений строится методом Винера-Хопфа в квадратурах и имеет вид [26]

$k = 1, 2, \dots$

$$W^k(x, y) = C_k \left[W(b_k y) e^{b_k x} + \frac{N_1(b_k)}{2\pi i \sigma_0^+(b_k) b_k} \int_{L_1} \frac{s \sigma_0^+(s) W(s, y)}{N_1(s)(s - b_k)} e^{s x} ds \right],$$

 $k = -1, -2, \dots$

$$W^k(x, y) = C_k \left[W(a_k y) e^{a_k x} - \frac{N_3(a_k)}{2\pi i \eta_0^-(a_k) a_k} \int_{L_1} \frac{s \sigma_0^+(s) W(s, y)}{N_1(s)(s - a_k)} e^{s x} ds \right],$$

$$\sigma_0^+(s) = K_0 \frac{\Gamma^3(\frac{1}{2} + s)}{\Gamma^3(1 + s)} \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\ln K(t)}{t - s} dt \right\}, \quad (28)$$

$$\eta_0^-(s) = \frac{\Gamma^3(1 - s)}{\Gamma^3(\frac{1}{2} - s)} \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\ln K(t)}{t - s} dt \right\},$$

$$K(t) = \frac{N_1(t) t^3}{K_0 N_3(t) \operatorname{tg}^3 \pi t}, \quad K_0 = \frac{2G(\eta_1 \eta_2 - GH_4)}{D \eta_2^2} = \frac{G(1 - \nu)}{D},$$

где C_k — произвольные постоянные, b_k — корни характеристического уравнения $N_3(s) = 0$, a_k — корни уравнения $N_1(s) = 0$, вектор-функция $W = (u_x, u_y, p)$ определяется формулами (13), (21). Далее, консолидируемая полоса расчленяется на прямоугольники и две полуполосы, такие что в каждой из этих элементарных областей содержится одна точка раздела граничных условий. Решение в элементарной области ищется в форме ряда (17), коэффициенты A_k находятся из условий сопряжения на торцах соседних прямоугольников. В результате образуется нормальная система алгебраических уравнений Пуанкаре–Коха относительно неизвестных A_k . Основание может иметь и изначально форму прямоугольника. В частности, для случая, когда на полосе — основании — лежит одна конечная балка, решение можно искать в одной полуполосе, торец которой проходит через середину балки. При этом задача разбивается на симметричную и кососимметричную задачи для полосы, а условия сопряжения полуполос становятся эквивалентными перекрестным условиям на торце полуполосы (15), (16). Если, например, балка имеет длину 2λ и нагружена симметрично на расстоянии δ от своих концов сосредоточенными силами P , система Пуанкаре–Коха принимает вид ($z_k = -C_k e^{b_k \lambda}$, $k = 1, 2, \dots$)

$$z_k - \sum_{l=1}^{\infty} z_l T(b_l, -b_k) e^{-\lambda(b_k + b_l)} = -P t(-b_k) e^{-b_k \lambda},$$

$$t(\tau) = -\frac{2}{N_3'(\tau)} \left[e^{-\tau \delta} \tau^{-1} + \tau \eta_0^-(\tau) \sum_{l=1}^{\infty} t(b_l, \tau) \right], \quad (29)$$

$$t(s, \tau) = \frac{N_1(s) e^{-s \delta}}{(s - \tau) N_3'(s) \sigma_0^+(s) s^2}, \quad T(s, \tau) = \frac{N_1(s) \tau \eta_0^-(\tau)}{\sigma_0^+(s) N_3'(\tau) (\tau - s)}.$$

Благодаря асимптотике корней b_k , матричные элементы и свободные члены системы (29) убывают экспоненциально по номерам строк и столбцов. Система имеет нормальное решение z_k , элементы которого также экспоненциально убывают по номеру k .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Герсеванов Н.М. Основы динамики грунтовой массы. М.: Госстройиздат, 1933. 196 с.
2. Глазовский В. Б., Нуллер Б. М. Аналитические решения связанных задач консолидации двухфазной пористой среды для прямоугольных областей // Изв. ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева. 1991. Т. 223. С. 31–40.
3. Глазовский В. Б., Нуллер Б. М. Контактная задача о вдавлении штампа в консолидируемый слой // Труды 3-й Укр. научно-техн. конфер. по механике грунтов и фундаментостроению. Одесса, 1997. Т. 1. С. 18–19.
4. Глазовский В. Б., Нуллер Б. М. Контактная задача теории консолидации для полосы // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 1. С. 139–149.
5. Егоров А. Г., Костерин А. В. О движении катка по поверхности насыщенного пористого полупространства // Докл. РАН. 1998. Т. 358. № 6. С. 343–345.
6. Калинин Н. Н., Нуллер Б. М. Уравнения транспорта волокнистого консолидируемого материала и эффект пристенного слоя // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 3. С. 522–525.
7. Керчман В. И. Контактная задача теории консолидации водонасыщенной среды // Изв. АН СССР. МТТ. 1974. № 3. С. 102–109.
8. Керчман В. И. Задачи консолидации и связанной термоупругости для деформируемого полупространства // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 1. С. 45–54.
9. Коваленко Е. В. О расчете тонких пористых покрытий // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 3. С. 469–473.
10. Нобл Б. Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.
11. Нуллер В. М. Метод кусочно-однородных решений в смешанных задачах теории упругости. Автореферат дисс. ... докт. физ.-мат. наук. Ленинград, 1973. 23 с.
12. Терцаги К. Строительная механика грунта. М.: Госстройиздат, 1933. 392 с.
13. Флорин В. А. Основы механики грунтов. М.: Госстройиздат, 1961. Т. 2. 544 с.
14. Agbezuge L. K., Deresiewicz Z. H. On the indentation of a consolidating half-space // Israel J. of Technology. 1974. V. 12. No. 5-6. P. 322–338.
15. Agbezuge L. K., Deresiewicz Z. H. The consolidation settlement of a circular footing // Israel J. of Technology. 1975. V. 13. No. 4. P. 264–269.
16. Biot M. A. General theory of three-dimensional consolidation // J. Appl. Phys. 1941. V. 12. No. 2. P. 155–165.
17. Biot M. A., Clingan F. M. Bending settlement of a slab resting on a consolidating foundation // J. Appl. Phys. 1942. V. 13. No. 1. P. 35–40.
18. Booker J. R., Small J. C. The time-deflection behaviour of a circular raft of finite flexibility on a deep clay layer // Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. 1984. V. 8. No. 4. P. 343–357.
19. Booker J. R., Small J. C. The behaviour of an impermeable flexible raft on a deep layer of consolidating soil // Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. 1986. V. 10. No. 3. P. 311–327.
20. Chiarella C., Booker J. R. The time-settlement behaviour of a rigid die resting on a deep clay layer // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1975. V. 28. No. 3. P. 317–328.

21. Craster R. V., Atkinson C. On finite length cracks and inclusions in poroelasticity // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1996. V. 49. No. 2. P. 311–335.
22. Craster R. V., Atkinson C. Theoretical aspects of fracture in porous elastic media // In [28] P. 23–45.
23. Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media / Ed. by J. Bear and M. Y. Corapciogly // Martinus Nijhoff Publishers, The Netherlands. 1984. 1003 p.
24. Gaszynski J. On a certain solution of dual integral equations and its application to contact problems of consolidation // Archiwum Mechaniki Stosowanej. 1976. V. 28. No. 1. P. 75–88.
25. Gaszynski J., Szefer G. Axisymmetric problem of the punch for the consolidating semi-space with mixed boundary permeability conditions // Archiwum Mechaniki Stosowanej. 1978. V. 30. No. 1. P. 17–26.
26. Glagovsky V. B., Goldin A. L., Nuller B. M. Method of solution to contact problems of the Biot consolidation theory // Proc. of the X Europ. Conf. on Soil Mech. and Found. Eng. Florence, 1991. V. 1. P. 207–208.
27. Lan Q., Selvadurai A. P. S. Interacting indentors on a poroelastic halfspace // J. Appl. Mathematics and Physics (ZAMP). 1996. V. 47. P. 695–716.
28. Mechanics of Poroelastic Media (Solid Mechanics and its Applications, vol. 41) / Ed. by A. P. S. Selvadurai. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands. 1996. 394 p.
29. Rice J. R., Cleary M. P. Some basic stress diffusion solutions for fluid-saturated elastic porous media with compressible constituents // Rev. Geophys. Space Phys. 1976. V. 14. No. 2. P. 227–241.
30. Shiffman R. L. A Bibliography of Consolidation. In [23]
31. Shiffman R. L., Chen A. T.-F., Jordan J. C. An analysis of consolidation theories // J. of the soil mechanics and foundation division. ASCE. 1969. V. 95. No. SM1. P. 285–312.
32. Selvadurai A. P. S., Yue Z. Q. On the indentation of a poroelastic layer // Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. 1994. V. 18. No. 3. P. 161–175.
33. Small J. C., Zhang B. Q. Finite layer analysis of the behaviour of a raft on a consolidating soil // Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. 1994. V. 18. No. 4. P. 237–251.
34. Szefer G., Gaszynski J. Axisymmetric punch problem under condition of consolidation // Archiwum Mechaniki Stosowanej. 1975. V. 27. No. 3. P. 497–515.
35. Tabaddor F. Plates on saturated porous elastic foundations // Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. 1978. V. 2. No. 2. P. 177–187.
36. Vertical and horizontal deformations of foundations and embankments // Proceedings of Settlement' 94. V. 1, 2. ASCE, Geotechnical Special Publication No. 40. Texas, 1994. 1906 p.
37. Yue Z. Q., Selvadurai A. P. S. Eccentric settlements of a rigid foundation on a consolidating layer. In [36] P. 612–627.
38. Yue Z. Q., Selvadurai A. P. S. Contact problem for saturated poroelastic solid // J. of Engineering Mechanics. 1995. V. 121. No. 4. P. 502–512.
39. Yue Z. Q., Selvadurai A. P. S. On the mechanics of a rigid disc inclusion embedded in a fluid saturated poroelastic medium // Int. J. of engineering science. 1995. V. 33. No. 11. P. 1633–1662.
40. Yue Z. Q., Selvadurai A. P. S. Axysymmetric indentation of a multilayered poroelastic solid // In [28] P. 235–241.

§ 5. КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ

Д. Я. Бардзокас, Н. А. Сеник

Явление пьезоэлектричества, заключающееся во взаимодействии в твердом теле механических и электрических полей, имеет разнообразные применения в автоматике, вычислительной технике, дефектоскопии, метрологии и других. На их основе разрабатываются такие устройства, как, например, линии задержки, пьезотрансформаторы, акустооптические модуляторы, пьезогенераторы, акселерометры. Характерной особенностью этих устройств является наличие на части их поверхности возбуждающих и (или) приемных электродов, в то время как незелектродированные участки поверхностей граничат с внешней средой, например, с воздухом или вакуумом. Как известно, исследование электроупругих полей в устройствах такого вида сводится к построению решений уравнений электроупругости со смешанными условиями для электрических полей.

Другим важным типом устройств, использующих явление пьезоэлектричества, являются устройства типа пьезогенераторов и пьезодвигателей. Особенностью таких устройств является наличие не только частично электродированных поверхностей, но и наличие участка поверхности, по которой происходит механический и электрический контакт пьезодвигателя с внешним телом. Расчет электроупругих полей в устройствах такого типа также сводится к смешанным задачам электроупругости.

Большое количество различных устройств, основанных на явлении пьезоэлектричества, можно найти, например, в книгах [22, 44, 45, 53]. Обратимся к формулировке смешанных задач электроупругости.

1. Пусть пьезоэлектрическая среда занимает область B с границей ∂B в трехмерном пространстве R_3 с декартовыми координатами x_1, x_2, x_3 . Как известно, полная система линейных уравнений электроупругости состоит из

— уравнений движения

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i, \quad (1)$$

— уравнений электростатики диэлектриков

$$D_{i,i} = 0, \quad E_i = -\varphi_{,i}, \quad (2)$$

— соотношений Коши

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}, \quad (3)$$

— уравнений состояния

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= c_{ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{ijk} E_k, \\ D_i &= \varepsilon_{ij}^S E_j + e_{ijk} \varepsilon_{jk}. \end{aligned} \quad (4)$$

Решение системы (1)–(4) должно удовлетворять граничным условиям

$$\sigma_{ij} n_j = p_i, \quad \vec{x} \in \partial B_\sigma, \quad (5)$$

$$u_i = f_i, \quad \vec{x} \in \partial B \setminus \partial B_\sigma, \quad (6)$$

$$\varphi = \varphi_0, \quad \vec{x} \in \partial B_\varphi, \quad (7)$$

$$D_i n_i = 0, \quad \vec{x} \in \partial B \setminus \partial B_\varphi. \quad (8)$$

Здесь ∂B_σ , ∂B_φ — участки границы, на которых заданы нагрузки и потенциал. Обозначения в формулах (1)–(8) имеют обычный для электроупругости смысл (см., например, [3, 17, 33]), а входящие в правые части соотношений (5)–(8) функции предполагаются известными.

В случае, когда рассматриваются нестационарные задачи, к граничным условиям (5)–(8) необходимо добавить начальные условия, которые задаются только для механических полей, как это принято в теории упругости. Обоснование применения уравнений электростатики диэлектриков (2) вместо полной системы уравнений Максвелла приведено в работе [23].

При решении смешанных статических и динамических задач электроупругости используются разработанные в классической теории упругости методы решения смешанных задач. Следует отметить, что обобщение этих методов на случай пьезоэлектрических сред связано с дополнительными сложностями, обусловленными как анизотропией пьезоэлектрической среды, так и более высоким порядком разрешающих уравнений электроупругости. В связи с этим рядом авторов (см. работы [1, 49, 51, 55]) использовался метод последовательных приближений, учитывающий малость коэффициента электромеханической связи. Согласно этому методу смешанная задача электроупругости о возбуждении волн в пьезоэлектрике системой электродов решается в два этапа. На первом этапе решается соответствующая смешанная задача электростатики и определяется распределение электрического потенциала в среде, а на втором этапе строится решение уравнений теории упругости, в которых электрический потенциал входит в качестве известной величины, определенной на первом этапе. Следует отметить, что сходимость такого подхода авторами не обсуждалась.

Другие приближенные методы, используемые при расчетах различных пьезоустройств, такие как метод эквивалентных электрических цепей, а также различные варианты теории пьезооболочек и т.п. можно найти в обзорных статьях [26, 29, 52].

2. Рассмотрим антиплоские контактные задачи электроупругости, относящиеся в математическом плане к наиболее простым задачам электроупругости. В пьезоэлектрических средах, как показано в работах [19, 48], существуют сдвиговые поверхностные волны. Эти волны могут распространяться как вдоль границ пьезоэлектрического полупространства, так и вдоль поверхности цилиндра. Для возбуждения сдвиговых поверхностных волн в пьезосредах используются системы поверхностных электродов, на которых задаются изменяющиеся во времени по известному закону значения потенциала электрического поля. Для кристаллов симметрии класса *btt* с осью симметрии, совпадающей с осью z , при антиплоской деформации имеем $u(x, y) = v(x, y) = 0$, $w = w(x, y)$, $\varphi = \varphi(x, y)$ и система уравнений электроупругости (1)–(4) сводится к определению смещения $w(x, y)$

и потенциала $\varphi(x, y)$ из системы уравнений (временной фактор $\exp(i\omega t)$ отброшен)

$$\begin{aligned} c_{44}^E \Delta w + e_{15} \Delta \varphi &= -\rho \omega^2 w, \\ e_{15} \Delta w - \varepsilon_{11}^S \Delta \varphi &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где Δ — оператор Лапласа в цилиндрической или декартовой системах координат, ω — частота колебаний.

Отметим, что из второго уравнения (9) следует, что $\varphi = (e_{15}/\varepsilon_{11}^S)w + \psi$, причем $\Delta \psi = 0$.

Решение системы (9) должно удовлетворять определенным граничным условиям, формулировка которых зависит от способа возбуждения колебаний электродами, в частности, от их подключения во внешнюю электрическую цепь. Отвлекаясь от конкретного способа включения электродов во внешнюю цепь, можно считать, что на электродах задано значение потенциалов, а сами электроды предполагать невесомыми, абсолютно гибкими и идеально электропроводными.

Статическое электроупругое состояние сплошного пьезоцилиндра радиуса a , часть поверхности которого с центральным углом $2\theta_0$ покрыта электродом с потенциалом φ_0 , исследовано в работе [32]. Представляя решение уравнений (9) для пьезоцилиндра в виде тригонометрических рядов с неизвестными коэффициентами A_n и B_n

$$\{w(r, \theta), \varphi(r, \theta)\} = \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n, B_n\} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos(n\theta), \quad (10)$$

потенциал электрического поля для вакуума в области $r > a$

$$\varphi^*(r, \theta) = D_0 \ln \left(\frac{r}{a}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(\frac{a}{r}\right)^n \cos(n\theta), \quad (11)$$

с учетом контактных и граничных условий при $r = a$

$$\begin{aligned} \sigma_{rz} &= 0, & 0 \leq \theta < \pi, \\ \varphi &= \varphi^*, & 0 \leq \theta < \pi, \\ \varphi &= V_0, & 0 \leq \theta < \theta_0, \\ D_r &= D_r^*, & \theta_0 < \theta < \pi, \end{aligned} \quad (12)$$

автор приходит к определению неизвестных коэффициентов из системы парных рядов-уравнений вида

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n\theta) &= V_0, & 0 \leq \theta < \theta_0, \\ D_0 k_0 + \sum_{n=1}^{\infty} n B_n \cos(n\theta) &= 0, & \theta_0 < \theta < \pi, \end{aligned} \quad (13)$$

где k_0 — постоянная, определяемая характеристиками материала.

Путем введения вспомогательной функции $f(\theta)$ соотношением

$$f(\theta) = D_0 k_0 + \sum_{n=1}^{\infty} n B_n \cos(n\theta), \quad |\theta| < \theta_0 \quad (14)$$

система (13) приводится к интегральному уравнению первого рода с логарифмическим ядром относительно функции $f(\theta)$, пропорциональной распределению электрического заряда на электроде:

$$\int_0^{\theta_0} f(\tau) \ln |2(\cos \theta - \cos \tau)| d\tau = -V_0, \quad 0 \leq \theta < \theta_0. \quad (15)$$

Точное решение уравнения (15) представлено автором в виде

$$f(\theta) = -\frac{\varphi_0}{\ln(2\beta)} \frac{\sqrt{2} \cos(\theta/2)}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}, \quad 0 \leq \theta < \theta_0. \quad (16)$$

Отметим, что плотность зарядов на электроде, как следует из (16), имеет характерную корневую особенность. Кроме этого, всюду в цилиндре оказываются нулевыми компоненты напряжений σ_{rz} и $\sigma_{\theta z}$.

Авторы работы [30] исследовали сдвиговые колебания пьезоэлектрического цилиндра с системой $(2m)$ разноименно заряженных электродов с потенциалами $\pm V_0$ на поверхности $r = a$. Представляя решение уравнений электроупругости в форме тригонометрических рядов и удовлетворяя смешанным условиям на поверхности цилиндра $r = a$, они сводят задачу к системе парных рядов-уравнений, которая путем введения вспомогательной функции $\sigma(\theta)$, пропорциональной распределению заряда на электроде, преобразуется далее к интегральному уравнению первого рода

$$\int_{-1}^1 \sigma(s) \ln |s - \eta| ds = C V_0 + \int_{-1}^1 \sigma(s) K(s, \eta) ds, \quad |\eta| < 1, \quad (17)$$

где C — некоторый постоянный множитель, $K(s, \eta)$ — известная функция, учитывающая инерционные эффекты и имеющая бесконечное число полюсов, которые определяют частоты собственных колебаний.

Представляя вспомогательную функцию в виде ряда по полиномам Чебышева первого рода с неизвестными коэффициентами и выполняя процедуру Бубнова–Галеркина, авторы сводят решение уравнения (17) к решению бесконечной системы алгебраических уравнений

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^* \alpha_{ks} = 2\delta_{0s}, \quad (s = 0, 1, 2, \dots), \quad (18)$$

где α_{ks} — известные коэффициенты, δ_{0s} — символ Кронекера.

Интересно отметить, что суммарный заряд электрода, а значит и ток, текущий через него, оказываются пропорциональными a_0^* . В работе приводятся расчетные зависимости суммарного заряда от частоты колебаний и ширины электродированного участка, а также отмечается, что для получения приемлемой точности определения электроупругих полей в цилиндре при решении системы уравнений (18) достаточно ограничиться системой порядка (3×3) или (4×4) .

Задача о возбуждении волны Гуляева–Блюстейна парой разноименно заряженных электродов, расположенных на граничной поверхности полупространства симметрии класса *bmm*, рассмотрена в работе [28]. Предполагается, что пьезоэлектрик занимает область полупространства $x_2 < 0$, $|x_1| < \infty$ (ось x_3 — гексагональная ось кристалла) и на его границе $x_2 = 0$ выполнены условия

$$\begin{aligned} \sigma_{23} &= 0, & 0 \leq x_1 < \infty, \\ \varphi &= \varphi_0, & 0 \leq x_1 < \infty, \\ \varphi &= V_0, & a < x_1 < b, \\ D_z &= D_z^{(0)}, & 0 \leq x_1 < a, \quad b < x_1 < \infty, \end{aligned} \quad (19)$$

где φ_0 , $D_z^{(0)}$ — потенциал и индукция полупространства $x_2 > 0$, $(b - a)$ — ширина электрода.

Представляя решение уравнений электроупругости и электростатики для диэлектрического полупространства $x_2 > 0$ в форме интегралов Фурье и удовлетворяя условиям (19), авторы сводят задачу к системе тройных интегральных уравнений относительно неизвестной функции $B(s)$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} B(s) K(s) \sin(sx) ds &= V_0, \quad a < x_1 < b, \\ \int_0^{\infty} s B(s) \sin(sx) ds &= 0, \quad 0 \leq x_1 < a, \quad b < x_1 < \infty, \\ K(s) &= 1 - \frac{\delta s}{\sqrt{s^2 - k^2}}, \end{aligned} \quad (20)$$

где δ — некоторая постоянная, определяемая физическими характеристиками сред, k — волновое число.

Следует отметить, что функция $K(s)$ на полуоси интегрирования имеет простой полюс при $s = s_0 = k/\sqrt{1 - \delta^2}$, и поэтому интегралы в (20) понимаются в смысле главного значения. Второе уравнение в (20) представляет собой распределение скачка плотности зарядов на границе $x_2 = 0$, который вне электродов равен нулю, а на электроде описывается неизвестной функцией $q(x_1)$. Это обстоятельство позволяет получить из второго уравнения (20) выражение для $B(s)$ через $q(x_1)$ в форме

$$sB(s) = \frac{2}{\pi} \int_a^b q(t) \sin(st) dt. \quad (21)$$

В дальнейшем предлагается функцию скачка плотности зарядов на электроде разыскивать в форме ряда по полиномам Чебышева первого рода в виде $(a_n$ — неизвестные коэффициенты)

$$q(x_1) = \frac{CV_0}{\sqrt{(b-x_1)(x_1-a)}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n \left(2 \frac{x_1-a}{b-a} - 1 \right), \quad a < x_1 < b, \quad (22)$$

где C — известная постоянная.

Используя соотношения (21), (22) и первое уравнение (20), авторы получают бесконечную систему уравнений для определения коэффициентов a_n в разложении (22)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\omega_{nm} - \gamma_{nm}) = \delta_{m0}, \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (23)$$

причем для вычисления коэффициентов в системе (23) получены удобные и эффективные формулы. Заметим, что коэффициенты γ_{nm} учитывают влияние инерционных эффектов.

Сдвиговые волны, возникающие в слое пьезоэлектрика симметрии класса btm или поляризованной керамики (слой занимает область $|x, z| < \infty$, $0 \leq y \leq h$, кристаллографическая ось или направление предварительной поляризации совпадает с осью z), рассматривались в работе [38] в предположении, что граница $y = 0$ жестко закреплена и имеет нулевой потенциал, а на границе $y = h$ при $|x| < a$ расположен невесомый полосовой электрод с заданными величинами смещения w и потенциала φ . За пределами электрода предполагаются отсутствующими механические напряжения и нормальная составляющая вектора индукции. Рассматривая первоначально вспомогательную задачу, которая отличается от сформулированной выше граничными условиями при $y = h$ (здесь считаются заданными распределение соответствующего касательного напряжения и нормальной составляющей вектора индукции), авторы сводят задачу к системе интегральных уравнений вида

$$\int_{-a}^a \hat{k}(x-t) \vec{q}(t) dt = \vec{u}(x), \quad |x| < a, \quad (24)$$

$$\hat{k}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_L K(t) \exp(-itx) dt.$$

Здесь $K(t)$ — известная матрица-функция размерности 2×2 , элементы которой регулярны всюду на вещественной оси за исключением конечного числа полюсов, и поэтому при вычислении соответствующих интегралов обход контура L должен быть согласован с условиями излучения. Вектор-столбцы \vec{q} и \vec{u} своими компонентами имеют касательное напряжение и плотность зарядов под электродом и сдвиговое смещение штампа и его потенциал, соответственно.

Установленные асимптотические свойства элементов матрицы $K(t)$ при $|t| \rightarrow \infty$ позволяют доказать разрешимость системы (24) в классе функций $L_p(-a, a)$, $p > 1$. В этой же работе [38] авторы рассмотрели случай, когда сдвиговая волна возбуждается заданным на электроде потенциалом, расположенным на свободной границе, и привели ряд численных расчетов для полосы из пьезокерамики ЦТС-19 и кристалла окиси цинка при различных соотношениях ширины электрода и длины волны. Следует отметить, что авторы не учитывали влияния внешней диэлектрической среды, контактирующей со слоем пьезоэлектрика.

Сдвиговые волны в пьезоэлектрическом слое симметрии класса btm , возбуждаемые парой расположенных симметрично на границе $y = 0$ разноименно заряженных электродов, исследовались в работе [35]. Авторы предполагали, что граница $y = 0$ акустически свободна и граничит с изотропной диэлектрической средой с проницаемостью ϵ_0 , занимающей полупространство $y < 0$, а на границе $y = h$ расположен невесомый электрод с нулевым потенциалом. Относительно механических условий на этой границе рассмотрены два вида граничных условий:

- граница $y = h$ акустически свободна (задача А),
- граница $y = h$ жестко закреплена (задача Б).

Используя интегральное преобразование Фурье и удовлетворяя граничным условиям, задачи А и Б сведены к тройным интегральным уравнениям вида (20), в которых функция $K(s)$ определена соотношением

$$K(s) = \frac{R_1(s)}{R_3(s) + \epsilon R_1(s)}, \quad (25)$$

где входящие в (25) функции определены соотношениями

$$R_1(s) = 2k_*^2 sq + q \operatorname{ch}(sh) \operatorname{ch}(qh) \{-k_*^2 s + q \operatorname{th}(sh) \operatorname{th}(qh) - k_*^2 s \operatorname{ch}(sh) \operatorname{ch}(qh) [q - k_*^2 s \operatorname{th}(sh) \operatorname{th}(qh)]\}, \quad (26)$$

$$R_3(s) = q[q \operatorname{ch}(sh) \operatorname{sh}(qh) - sk_*^2 \operatorname{sh}(sh) \operatorname{ch}(qh)]$$

для задачи А и

$$K(s) = \frac{q \operatorname{th}(sh) - k_*^2 s \operatorname{th}(qh)}{q + \epsilon [q \operatorname{th}(sh) - k_*^2 s \operatorname{th}(qh)]} \quad (27)$$

для задачи Б.

В формулах (25)–(27) приняты обозначения

$$\epsilon = \epsilon_0 / \epsilon_{11}^S, \quad q = \sqrt{s^2 - \kappa^2}, \quad \kappa^2 = \rho \omega^2 / [c_{44}^E (1 + k_{15}^2)], \quad (28)$$

$$k_{15}^2 = e_{15}^2 / (c_{44}^E \epsilon_{11}^S), \quad k_*^2 = k_{15}^2 / (1 + k_{15}^2), \quad 0 \leq s < \infty.$$

Дальнейшее решение полученных тройных интегральных уравнений основано на методе ортогональных многочленов и аналогично использованному ранее в работе [28]. Важное значение при решении задачи имеет исследование полюсов функций (25) и (27), которые определяют

распространяющиеся в полосе волны. Показано, что в области коротких волн уравнение (25) существенно упрощается и имеет два корня, которые асимптотически совпадают со скоростями волн Гуляева–Блюстейна для электродированного и неэлектродированного полупространств. В области длинных волн уравнение (25) имеет единственный корень, высокочастотная асимптота которого совпадает со скоростью волны Гуляева–Блюстейна для неэлектродированного пьезополупространства. Для задачи Б установлены условия существования корня уравнения (27) и показано, что в области высоких частот его асимптотическое значение совпадает с соответствующим корнем волны Гуляева–Блюстейна для полупространства с неэлектродированной поверхностью. Следует отметить, что при условии $\kappa > s$ в уравнениях (25), (27) гиперболические функции необходимо заменить на тригонометрические, полюса получаемых уравнений в этом случае будут описывать распространяющиеся в полосе дисперсионные сдвиговые волны.

Возбуждение сдвиговой объемной волны в пьезоэлектрическом полупространстве парой электродов, расположенных на его акустически свободной поверхности, рассматривалось в работе [12]. В данной работе задача возбуждения сдвиговых волн решается в предположении слабого пьезоэффекта, что позволило авторам, используя функцию Грина для двумерного уравнения Гельмгольца, представить поле смещений в виде (гармонический множитель отброшен)

$$w(x_1, x_2) = \frac{i}{2\mu} \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(\sqrt{(x_1 - \tilde{x}_1)^2 + x_2^2}) [e_{14} E_1(\tilde{x}_1, 0) + e_{24} E_2(\tilde{x}_1, 0)] d\tilde{x}_1, \quad (29)$$

где μ , e_{14} , e_{24} — модуль сдвига и пьезокоэффициенты, $H_0^{(1)}(\dots)$ — функция Ханкеля первого рода нулевого порядка.

Входящие в (29) компоненты напряженности электрического поля E_1 , E_2 авторы определяют, исходя из решения смешанной электростатической задачи, причем решение ее строится в замкнутом виде с использованием известного представления Келдыша–Седова. Этот подход позволил получить приближенные выражения для сдвиговой волны в случае узких и широких по отношению к длине волны электродов и исследовать диаграмму направленности и потоки излучаемой энергии.

Расчет характеристик сдвиговых волн в пьезоэлектрическом полупространстве приведен также в монографии [3], в которой рассмотрение проводится на основе строгого метода расчета параметров электроупругих волн в пьезоэлектриках, возбуждаемых поверхностными электродами. В основу этого метода положено использование функций Грина и последующее сведение задач возбуждения и приема волн в пьезоэлектриках к интегральным уравнениям. Первоначально этот метод был развит в работах [9–11, 14, 16]. Результаты этих работ обобщены в упоминавшейся моно-

графии [3]. Коснемся результатов, полученных в перечисленных выше работах и относящихся к возбуждению поверхностными электродами сдвиговых волн в полупространстве.

В соответствии с общей схемой первоначально строится функция Грина для полупространства $x > 0$ с линейно распределенным в точке $x = x_0 > 0$, $y = y_0$ пьезокристалла симметрии класса *бтт* зарядом Q и компонентами силы $F_3 = F$ (ось z — ось симметрии кристалла), затем с помощью предельного перехода $x_0 \rightarrow 0$ для смещения U_z и потенциалов ϕ , ϕ_v в кристалле и в вакууме получают формулы

$$U_z = \tilde{u}_0 \int \frac{\exp i(p(y - y_0) + q_1 x)}{D_-(p)} dp,$$

$$\phi = \frac{4\pi e_1}{\epsilon} U_z - \tilde{u}_1 \int \frac{\exp i(p(y - y_0) + q_2 x)}{D_-(p)} dp - Q_0 \ln \left(\frac{\rho}{R_0} \right), \quad (30)$$

$$\phi_v = -Q_0 \ln \left(\frac{\rho}{R_0} \right) - \tilde{u}_2 \int \frac{\exp i(p(y - y_0) - q_2 x)}{D_-(p)} dp.$$

В формулах (30) e_1 , ϵ , ϵ_0 обозначают пьезокоэффициент и диэлектрические проницаемости среды и вакуума, \tilde{u}_0 , \tilde{u}_1 , \tilde{u}_2 , Q_0 — некоторые постоянные, определяемые через Q , F и характеристики среды, q_1 , q_2 — полюса, $D_-(p)$ — известная функция, определяемая через полюса, $\rho = \sqrt{x^2 - (y - y_0)^2}$, интегралы в формулах (30) понимаются в смысле главного значения.

В дальнейшем, переходя в (30) к контурным интегралам, авторы проводят исследования электроупругих полей в дальней и ближней зонах от источника, используя для этих целей метод перевала, и оценивают расстояние от источника, на котором формируется поверхностная волна Гуляева–Блюстейна. Для кристалла из сульфида кадмия зона формирования поверхностной волны на свободной поверхности может быть весьма значительной. Полученные функции Грина использовались затем для получения интегральных уравнений Фредгольма первого рода, решение которых позволило определить параметры возбуждаемых в пьезоэлектриках сдвиговых волн.

В неоднородном полупространстве, представляющем собой слой пьезоэлектрика на упругой проводящей или диэлектрической полубесконечной подложке, при определенных условиях могут существовать волны типа Лява. Такого типа волны, как и волны Гуляева–Блюстейна, могут легко возбуждаться поверхностными электродами. Возбуждение таких волн было рассмотрено в работе [21] в предположении, что пьезослой симметрии класса *бтт* (ось z совпадает с осью симметрии кристалла) занимает область $|x, z| < \infty$, $0 < y < h$, граничит с упругим изотропным полупространством $y > h$, а полупространство $y < 0$ занято изотропным диэлектриком и акустически не взаимодействует со слоем. Предполагалось,

что граница слоя $y = 0$ имеет нулевой электрический потенциал и идеальный механический контакт с полупространством, а на границе $y = 0$ имеется идеальный электрический контакт и расположена пара разноименно заряженных электродов с потенциалами $\pm V \exp(i\omega t)$. Расстояние между внутренними краями электродов равно $2a$, а между наружными $2b$. Применяя интегральное преобразование Фурье по переменной x и удовлетворяя граничным условиям, авторы получили систему тройных интегральных уравнений вида (20) и известным способом в конечном итоге свели ее к бесконечной системе алгебраических уравнений.

Авторы проанализировали полученное дисперсионное соотношение для случая затухающих волн и показали, что в области низких частот в слое существует одна сдвиговая волна, медленно затухающая при удалении от границы контакта слоя с упругим полупространством. С уменьшением длины волны переносимая этой волной энергия уменьшается и при длинах волн, меньших толщины слоя, появляется вторая затухающая вглубь волна с максимальным смещением на свободной поверхности пьезоэлектрика. В области высоких частот скорость распространения второй волны соответствует волне Гуляева–Блюштейна, что вполне объяснимо физически.

Следует отметить, что, кроме указанных волн, в рассматриваемой структуре может существовать и электрически активная волна типа Лява, однако эта возможность в данной работе не рассматривалась.

В том случае, когда упругое полупространство является идеальным проводником и на него воздействует направленное вдоль оси x постоянное магнитное поле, появляется возможность управления скоростью распространения поверхностных волн вплоть до их полной невозможности распространения, что было отмечено в работе [34].

3. Решения плоских и осесимметричных задач электроупругости для полупространства или полосы при их статическом нагружении рассматривались рядом авторов. В работе [27] рассмотрена задача определения электромеханических полей, возбуждаемых в пьезоэлектрическом полупространстве симметрии класса btt (ось симметрии перпендикулярна к свободной границе полупространства и совпадает с осью z) двумя половыми разноименно заряженными невесомыми электродами.

Применяя к уравнениям электроупругости для случая плоской деформации интегральное преобразование Фурье и удовлетворяя граничным условиям при $z = 0$

$$\begin{aligned} \sigma_{13} = \sigma_{33} &= 0, & |x| < \infty, \\ D_3 &= 0, & |x| > b, \quad |x| < a, \\ \varphi &= \pm V_0, & a < |x| < b, \end{aligned} \quad (31)$$

в работе получена система тройных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \int_0^\infty A(\tau) \sin(\tau x) d\tau &= V, & a < x < b, \\ \int_0^\infty \tau A(\tau) \sin(\tau x) d\tau &= 0, & 0 \leq x < a, \quad x > b. \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь V — постоянная, определяемая потенциалом электрода и физико-механическими параметрами пьезосреды, $2a$ и $2b$ — расстояния между внутренними и наружными краями электродов.

Введением вспомогательной функции, пропорциональной неизвестной плотности заряда на электроде, решение системы (32) сводится к интегральному уравнению первого рода с логарифмическим ядром относительно введенной функции. Решение последнего строится с использованием некоторого разрывного интеграла и позволяет получить простое выражение для плотности зарядов $Q(x)$ на электроде

$$Q(x) = \text{const} \frac{V}{\sqrt{(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)}}, \quad a < x < b, \quad (33)$$

из которого следует наличие корневой особенности плотности зарядов у краев электродов. Такая же особенность характерна для напряженности электрического поля E_x и напряжения σ_{xx} . Интересно отметить, что на поверхности пьезоэлектрика напряженность поля E_x соответствует той, которая будет в вакууме с двумя ленточными электродами. Автором [27] построено распределение сдвигового напряжения σ_{xz} и показано, что его максимум достигается на некоторой глубине от границы.

Плоская контактная задача для пьезоэлектрической полуплоскости при наличии сцепления была рассмотрена в работах [6, 7] при следующих граничных условиях для механических переменных поля

$$\begin{aligned} u_z(0, z) &= f_1(z), & u_x(0, x) &= f_2(z), & |z| < a, \\ \sigma_{xz}(0, z) &= \sigma_{xx}(0, z) = 0, & & & |z| > a. \end{aligned} \quad (34)$$

Относительно электрических условий были рассмотрены варианты неэлектропроводной поверхности, когда нормальная составляющая вектора индукции равна нулю, и вариант электропроводной граничной поверхности, когда задано значение потенциала электрического поля.

Используя преобразование Фурье и удовлетворяя граничным усло-

виям, задача сводится к системе парных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} t[m_1 B_1(t) + n_1 B_2(t)] \sin(tz) dt &= F_1(z), & 0 \leq z < a, \\ \int_0^{\infty} t[m_3 B_1(t) + n_3 B_2(t)] \cos(tz) dt &= F_2(z), & 0 \leq z < a, \\ \int_0^{\infty} t^2[m_2 B_1(t) + n_2 B_2(t)] \sin(tz) dt &= 0, & a < z < \infty, \\ \int_0^{\infty} t^2[m_4 B_1(t) + n_4 B_2(t)] \cos(tz) dt &= 0, & a < z < \infty. \end{aligned} \quad (35)$$

Решение системы (35) строится путем введения двух вспомогательных функций, пропорциональных комбинациям функций B_1, B_2 , относительно которых задача сводится к системе двух сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши. Далее эта система преобразуется к задаче Римана, решение которой имеет замкнутый вид. Показано, что механические напряжения и напряженность электрического поля в обоих случаях электрических граничных условий оказываются пропорциональными функциям вида

$$\frac{\text{const}}{\sqrt{a^2 - z^2}} \cos\left(\gamma \ln \frac{a+z}{a-z}\right), \quad \frac{\text{const}}{\sqrt{a^2 - z^2}} \sin\left(\gamma \ln \frac{a+z}{a-z}\right), \quad (36)$$

причем постоянная γ оказывается сильно зависящей от типа электрических граничных условий.

Дальнейшее обобщение плоской контактной задачи электроупругости при наличии сцепления с учетом того, что штамп имеет потенциал V_0 , дается в работе [8]. Рассмотренная задача первоначально сводится к системе трех парных интегральных уравнений. Вводя неизвестные нормальные и касательные напряжения под штампом, а также неизвестную плотность зарядов под ним, систему парных уравнений преобразуем к системе сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши относительно введенных неизвестных функций. Решение этой системы авторами получено в замкнутом виде, что позволило определить контактные напряжения и распределение заряда под штампом.

Симметричная плоская контактная задача для пьезокерамической плоскости, поляризованной по нормали к границе, была рассмотрена в работе [43] для случая, когда под штампом отсутствуют касательные напряжения и под ним задано значение потенциала. Отметим, что рассмотренная в данной работе задача является частным случаем более общей задачи, решенной в работе [8].

Обобщение метода [54], предложенного первоначально для решения краевых задач для анизотропных упругих сред с дислокациями и трещинами, приводится в работе [50] для случая пьезоэлектрической среды общего вида анизотропии. Развитый авторами метод позволил свести задачу

электроупругости со смешанными механическими и электрическими граничными условиями к векторной задаче сопряжения Гильберта и получить ее решение в замкнутом виде при некоторых дополнительных условиях на характеристики материала.

Задача о вдавливании жесткого кругового в плане штампа в упругое пьезоэлектрическое полупространство рассмотрена в работе [31] с использованием интегрального преобразования Ханкеля. В случае штампа с малой диэлектрической проницаемостью принимают граничные условия ($z = 0$)

$$\begin{aligned} u_r &= f(r), & r \leq a, & & \sigma_{zz} &= 0, & r > a, \\ \sigma_{rz} &= 0, & D_z &= 0, & r > 0, \end{aligned} \quad (37)$$

что позволяет получить систему парных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} A(t) J_0(tr) dt &= f(r), & 0 \leq r < a, \\ \int_0^{\infty} t A(t) J_0(tr) dt &= 0, & a < r < \infty. \end{aligned} \quad (38)$$

В случае вдавливания штампа с заданным значением электрического потенциала последнее условие в (37) заменяется на $D_z = 0$ ($r > a$), $\varphi = V$ ($0 \leq r < a$), и в результате задача сводится к системе типа

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} [m_1 B_1(t) + n_1 B_2(t)] J_0(tz) dt &= V_0, & 0 \leq r < a, \\ \int_0^{\infty} [m_3 B_1(t) + n_3 B_2(t)] J_0(tz) dt &= f(r), & 0 \leq r < a, \\ \int_0^{\infty} t [m_2 B_1(t) + n_2 B_2(t)] J_0(tz) dt &= 0, & a < r < \infty, \\ \int_0^{\infty} t [m_4 B_1(t) + n_4 B_2(t)] J_0(tz) dt &= 0, & a < r < \infty, \end{aligned} \quad (39)$$

для решения которой применяется метод подстановки в сочетании с методом преобразующих операторов. Показана необходимость учета влияния пьезоэффекта и электрических граничных условий на жесткость полупространства.

Отметим также работы [24, 25], в которых рассмотрены задачи возбуждения электроупругих полей в полосе периодической системой электродов и двумя кольцевыми электродами, расположенными на противоположных и свободных от механических нагрузок поверхностях слоя. В первой из указанных работ задача сведена к системе парных рядов-уравнений, а во второй — к системе тройных интегральных уравнений. В дальнейшем полученные уравнения в конечном итоге сводятся к бесконечным

системам алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения плотности зарядов на электродах в ряды по ортогональным на отрезке функциям. Авторы приводят результаты численных расчетов электроупругих полей.

Решение трехмерной контактной задачи о вдавлении в пьезоэлектрическое полупространство плоского эллиптического штампа рассмотрено в работе [36] при условии, что вне области, занятой штампом, механические нагрузки отсутствуют, в области основания эллиптического штампа касательные напряжения нулевые, а нормальное напряжение неизвестно и должно быть определено при решении задачи. При таких условиях равновесие штампа возможно только при действии на него сжимающей силы и моментов, равнодействующие которых определяются из условий равновесия штампа. Краевое усилие для перемещения w точек площадки штампа определяется через перемещение штампа как жесткого тела и принимается в виде $w = \delta - \omega_y x + \omega_x y$, где δ поступательное, а ω_x, ω_y — вращательные движения штампа. При формулировке граничных условий для электрических полей рассмотрены два варианта их задания:

— в области контакта задано значение потенциала электрического поля и вне штампа нулевое значение нормальной составляющей вектора электрической индукции (задача А);

— вся граница полупространства свободна от электрических зарядов (задача Б).

Для решения поставленных задач авторы использовали представление общего решения уравнений электроупругости через четыре вспомогательные функции, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{\partial \phi_j^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi_j^2}{\partial y^2} + \nu_j \frac{\partial \phi_j^2}{\partial z^2} = 0, \quad (j = 1, \dots, 4),$$

причем постоянные ν_j определяются через характеристики среды.

Дальнейшее определение функций ϕ_j связано с изменением масштаба по z , так что в новых переменных функции ϕ_j будут гармоническими. Последующее введение эллипсоидальных координат позволило построить решения поставленных задач в замкнутом виде и получить компактные формулы, выражающие смещение штампа от силы, действующей на него, и электрического потенциала.

4. Несмотря на то, что статические задачи электроупругости представляют определенный практический интерес, все же они не могут быть использованы при анализе работы многих устройств акустоэлектроники. В связи с этим в электроупругости существенное значение имеет развитие строгих методов решения задач со смешанными граничными условиями и с учетом инерционных эффектов. Следует отметить, что в акустоэлектронике часто возникает задача возбуждения акустической волны одной

группой электродов и последующего ее приема другой группой. Строгая теория возбуждения и приема акустических волн была предложена в работах [10, 11, 14, 15, 18]. В дальнейшем результаты этих работ были систематизированы и развиты в [3].

Предложенный в [14] подход к решению задачи возбуждения волн электродами сводится к следующему (см. также [3]). Первоначально находится матрица Грина для пьезополупространства, свободного от механических нагрузок, с точечным распределением заряда на граничной поверхности и с учетом условий излучения. Знание функции Грина позволяет, в принципе, определить поля смещений и потенциал электрического поля при произвольном распределении заряда на граничной поверхности в виде интегралов

$$u_k = \int_{-\infty}^{\infty} q(t) G_k^{(4)}(x, y - t) dt \quad (k = 1, 2, 3),$$

$$\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} q(t) G_k^{(4)}(x, y - t) dt,$$

где $G_k^{(4)}(x, y - t)$ компоненты матрицы-функции Грина.

Учитывая, что матрица Грина удовлетворяет однородным уравнениям электроупругости и условиям сопряжения электрических полей в пьезоэлектрике и во внешней среде, авторы получают относительно функции распределения плотности электрического заряда на возбуждающих электродах $q(t)$ интегральное уравнение Фредгольма первого рода в предположении идеальной проводимости электродов:

$$Kq(y) = \int_L q(t) \frac{\partial G_4^{(4)}(x=0, y-t)}{\partial y} dt = 0, \quad y \in L, \quad (41)$$

где L — множество электродов с заданным потенциалом.

Если решается задача рассеяния волн на электродах или расчета приемного преобразователя, на электроды которого падает электроупругая волна, то интегральное уравнение (41) модернизируется и принимает вид

$$Kq(y) + \frac{\partial \varphi_e(x=0, y)}{\partial y} = 0, \quad y \in L_e, \quad (42)$$

где L_e обозначает систему приемных электродов, а $\varphi_e(x, y)$ — известную амплитуду падающей волны потенциала.

Полученные интегральные уравнения имеют особенность, так как их ядра имеют расходящийся член, и поэтому интегралы понимаются в смысле главного значения. Применение известных процедур к полученным уравнениям позволяет перейти к эквивалентным интегральным уравнениям Фредгольма второго рода, что оказывается полезным при использовании численных и итерационных методов. Этот путь был использован в упоминавшихся выше работах [10, 11], а также в работе [9], в которых

полученные интегральные уравнения Фредгольма второго рода использовались для различных качественных оценок и расчетов конкретных преобразователей с числом электродов до 20 штук.

В работе [41] рассмотрена задача возбуждения электроупругой волны Рэлея в полупространстве симметрии класса bmt , когда ось симметрии кристалла перпендикулярна к свободной от механических нагрузок поверхности с расположенными на ней двумя разноименно заряженными электродами. С использованием преобразования Фурье задача сводится к тройным интегральным уравнениям, которые преобразуются затем известными методами к бесконечной системе алгебраических уравнений. Коэффициенты последней, а также выражения для механических и электрических полей определяются интегралами по полуоси и понимаются в смысле главного значения. Полюсная точка этих интегралов определяется единственным корнем уравнения, аналогичного уравнению Рэлея в теории упругости

$$R_2(x) + \varepsilon_0 R_1(x) = 0, \quad (43)$$

где ε_0 — малый параметр, характеризующий отношение диэлектрических проницаемостей вакуума и пьезоэлектрика, R_2, R_1 — функции Рэлея для пьезоэлектрика со свободной и металлизированной границами.

В работе [41] приведены явные выражения для волн Рэлея, полученные с использованием метода стационарной фазы, их энергетические характеристики, а также определены особенности механических и электрических полей у краев электродов и приведено численное исследование указанных величин в зависимости от относительной ширины электродов.

Возбуждение волн Рэлея в пьезополупространстве системой $2N$ симметрично расположенных на свободной поверхности электродов рассмотрено в [4]. Авторы, используя результаты работы [41], сводят решение задачи к N системам интегральных уравнений, ядра которых имеют логарифмические особенности. Представляя решения этих уравнений в виде рядов по полиномам Чебышева первого рода с неизвестными коэффициентами, получают бесконечную систему уравнений для их определения.

В работе приводится численное исследование сходимости решений системы алгебраических уравнений для случая полупространства из сульфида кадмия с четырьмя эквидистантными электродами.

Для случая, когда возбуждающие электроды представляют собой конечную периодическую решетку, предлагается использовать приближенный подход, суть которого заключается в следующем. Выделяют внутренние электроды и задают на них то распределение зарядов, которое будет получаться при решении задачи о возбуждении колебаний в полупространстве бесконечной периодической системой электродов. В результате этого число электродов, на которых не известно распределение плотности зарядов, существенно сокращается. Следует отметить, что аналогичный

подход использовался и ранее рядом авторов (см., например, [20]), однако, во-первых, распределение зарядов при этом определялось из решения соответствующей несвязанной задачи электростатики, во-вторых, не учитывались краевые эффекты.

В работе [5] рассмотрено возбуждение волн Лэмба в полосе из кристалла класса bmm . Предполагается, что на свободных от механических нагрузок поверхностях расположено конечное число $2N$ электродов и напряжение на них таково, что в полосе реализуется симметричное или антисимметричное по толщинной координате z состояние.

Применение интегрального преобразования Фурье по переменной x и удовлетворение граничным условиям позволило получить систему интегральных уравнений вида

$$\sum_{k=1}^N \int_{a_k}^{b_k} q_k(t) K(t, x) dt = e_i, \quad a_i < x < b_i, \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (44)$$

где a_i, b_i — начало и конец i -го электрода, e_i — известные постоянные, связанные с потенциалами электродов.

Установлено, что ядро уравнения (44) представляется в виде

$$K(t, x) = \ln \left| \frac{x+t}{x-t} \right| + K_*(t, x), \quad (45)$$

$$K_*(t, x) = \int_0^\infty \frac{r_1 R_1(p) + r_2 R_2(p)}{p r_2 R_{21}(p)} \sin(pt) \sin(px) dp,$$

где $r_1, r_2, R_1, R_2, R_{21}$ — постоянные и функции, зависящие от длины волны, толщины и физических характеристик среды.

Интеграл в (45) понимается в смысле главного значения. Полюса определяются корнями уравнения

$$R_{21}(p) = 0, \quad (46)$$

которое в работе анализируется численно и при заданной частоте имеет конечное число корней.

Учитывая представление ядра (45), при решении системы (44) используется метод Бубнова–Галеркина, при этом плотности зарядов на электродах представлены в виде рядов по полиномам Чебышева первого рода. Авторы провели анализ распределения полей по поперечной координате полосы вдали от возбуждающих электродов и показали численно, что распределение полей для тонких полос согласуется с принимаемыми обычно гипотезами Кирхгофа–Лява при построении теории пьезопластин.

Принцип предельного поглощения применялся в работе [42] при анализе возбуждения связанных электроупругих волн в полосе из поляризованной по толщине керамики. Предполагалось, что граничные поверхности полосы свободны от механических нагрузок и на противоположных

границах расположены электроды с гармонически изменяющейся на них разностью потенциалов. Относительно плотности зарядов на электроде автор получил интегральное уравнение первого рода с разностным ядром

$$\int_{-a}^a D_2(t)k(t-\tau) d\tau = C, \quad |t| < a,$$

$$k(t) = \int_{L_r} K(\alpha, \omega) \exp(-i\alpha t) d\alpha, \quad (47)$$

$$K(\alpha, \omega) = \Delta_1(\alpha, \omega)/\Delta(\alpha, \omega),$$

где Δ_1, Δ , — известные функции, зависящие от частоты ω , толщины полосы h и характеристик материала, $2a$ — относительная ширина электрода.

Контур L_r в (47) совпадает с положительной полуосью везде, за исключением вещественных полюсов, которые обходятся сверху или снизу в зависимости от того, образует ли нейтральная кривая, определяемая корнем уравнения $\Delta = 0$, острый или тупой угол с осью α (при кратных полюсах контур пересекает этот полюс).

Установленные в данной работе асимптотические свойства функции $K(\alpha, \omega)$ позволили записать явный вид решения уравнения (47), используя для этого метод факторизации.

Возбуждение гармонических колебаний в пьезокристаллическом полупространстве периодической системой электродов изучалось в работах [2, 46, 47]. Предполагалось, что бесконечные в одном направлении электроды образуют периодическую решетку и моделируются абсолютно жесткими штампами, имеющими массу, при этом всюду, за исключением электродов-штампов, поверхность свободна от напряжений и граничит с вакуумом. На участках, занятых электродами-штампами, заданы изменяющиеся во времени по гармоническому закону нормальное смещение и потенциал, касательные напряжения под электродом приняты нулевыми.

Учитывая периодичность решения, авторы для описания электроупругих полей из граничных условий получают систему интегральных уравнений

$$\int_{-a}^a K_{nm}(x-t)q_m(t) dt = f_n(x), \quad |x| < a,$$

$$K_{nm}(t) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} k_{nm}(s) \exp(ist), \quad (n, m = 1, 2), \quad (48)$$

где a — полуширина электрода, f_n являются функциями, связанными со смещением электрода-штампа и его потенциалом, по m предполагается суммирование.

Исследованы свойства ядра интегрального уравнения (48) и установлено его поведение на бесконечности, показано наличие конечного чи-

сла полюсов и возможность аппроксимации ядер полиномами. Эти свойства ядра позволяют применить к решению уравнения (48) известные из контактной теории упругости методы решения и свести задачу к системе линейных алгебраических уравнений.

В работе [13] рассмотрена трехмерная задача расчета многослойной пьезоэлектрической полосы общей толщины $z = 2h$ при ее гармоническом нагружении. Предполагается, что пьезоэлектрические слои симметрии класса *bmm* имеют идеальный механический и электрический контакты, а на граничных поверхностях первоначально считаются заданными механические нагрузки и нормальные составляющие вектора электрической индукции. Общий случай нагружения представляется в виде суммы симметричного и антисимметричного относительно срединной поверхности слоя состояний. Введение авторами вместо компонент перемещений $u_x(x, y, z)$, $u_y(x, y, z)$ (оси x, y расположены в срединной плоскости пакета) новых неизвестных функций соотношениями

$$u_x = \partial_x f_1 + \partial_y f_2, \quad u_y = \partial_y f_1 - \partial_x f_2 \quad (49)$$

позволило избежать громоздкого анализа характеристического уравнения, получаемого после применения преобразования Фурье по переменным x и y к нетрадиционно записанным уравнениям электроупругости. В дальнейшем авторы показали, что решение вспомогательной задачи может быть представлено в виде

$$h_i(x, y, z) = \frac{\exp(-i\omega t)}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} H_i(z, \alpha, \beta, \omega) \exp[-i(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta, \quad (50)$$

$$H_i(z, \alpha, \beta) = K_{ij}(\alpha, \beta, \omega, z) T_j,$$

где $h_i(x, y, z)$ — любая из компонент перемещения или электрический потенциал, T_j — компоненты известного вектора, определяемого через граничные условия на поверхностях полосы, K_{ij} — известная матрица, связанная с характеристиками слоев ($i, j = 1 \dots 4$).

Отметим, что в работе построены матрицы K_{ij} для случаев полупространства, слоя на полупространстве и многослойной среды на полупространстве.

Выражения (50) используются затем для формулировки контактных задач электроупругости. Предполагая, что электроды-штампы занимают область S , где заданы компоненты вектора перемещения и потенциал, а остальная часть границы свободна от механических нагрузок и зарядов, авторы [13] приходят к системе четырех сингулярных интегральных уравнений вида

$$\iint_S \bar{k}(x-\xi, y-\zeta, \omega) \vec{t}^{(0)}(\xi, \zeta, \omega) d\xi d\zeta = \vec{u}^{(0)}(x, y, \omega), \quad x, y \in S,$$

$$\bar{k}(x, y, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\sigma_1} \int_{\sigma_2} \hat{K}(\alpha, \beta, \omega) \exp[-i(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \quad (51)$$

относительно неизвестного вектора $\vec{t}^{(0)}$, компонентами которого являются нормальное и тангенциальные напряжения и нормальная составляющая вектора электрической индукции, а выбор контуров σ_1, σ_2 должен быть согласован с принципом предельного поглощения.

В качестве примера в работе рассмотрена задача о нестационарном взаимодействии трансверсально-изотропной слоистой полосы с массивным штампом, на который действуют известные во времени силы и моменты. Интегральные уравнения задачи в пространстве изображений могут быть получены путем пренебрежения пьезоэффектом и формальной заменой параметра частоты ω на (ip) , где p — параметр преобразования по Лапласу. Используя метод Файлона для численного обращения преобразования Лапласа, авторы представили результаты расчетов вертикального смещения штампа для изотропной и трансверсально-изотропной полосы, скрепленной с основанием, и для некоторых других условий.

Заметим, что в частном случае плоской деформации полосы полученное уравнение (51) совпадает с рассмотренным ранее в работе [39].

Дальнейшее развитие рассмотренного метода на случай нестационарного взаимодействия одиночного электрода-штампа со слоистой пьезополосой выполнено в [40]. Рассматривая пьезослой общей толщины H , набранный из N слоев с полутолщинами h_r , авторы предполагают, что на его поверхности располагается электрод-штамп массы m , к которому приложены нестационарные во времени силы и моменты. Для электрических условий нагружения рассматриваются три практически реализуемых случая:

1) на контактной площадке между полосой и штампом определено значение потенциала, изменяющееся во времени известным образом (возбуждение колебаний генератором напряжения);

2) на контактной площадке S значение потенциала, не зависящее от координат, не известно и должно быть определено из дополнительного условия (возбуждение колебаний генератором тока, $I(t)$ — заданная функция тока)

$$\int_S \dot{D}_3(t, x, y) ds = -I(t); \quad (52)$$

3) к электроду не подводится и с него не снимается электрическая энергия; в этом случае потенциал также является неизвестным и должен быть определен из дополнительного условия, которое эквивалентно условию (52) при $I(t) = 0$.

Во всех рассматриваемых электрических условиях нагружения электрода-штампа предполагаются отсутствующими механические нагрузки и заряды на незелектродированной поверхности, а полоса в начальный момент времени находится в состоянии покоя. Предполагается идеальный контакт между слоями, а также, что граница, противоположная электроду, жестко закреплена и имеет нулевой потенциал.

Указанную задачу путем применения преобразования Лапласа по времени и Фурье по переменным x, y (электрод-штамп расположен на плоскости $z = 0$, и ось z перпендикулярна к границам всех слоев), авторы сводят в пространстве изображений к системе четырех интегральных уравнений вида (51), в ядре которого достаточно произвести замену параметра частоты ω на ip , с шестью или семью (в зависимости от способа электрического нагружения электрода-штампа) дополнительными условиями, вытекающими из уравнений движения штампа и способа его электрического подключения. В данном случае компонентами неизвестного вектора $\vec{t}^{(0)}$ являются три компоненты вектора перемещения и потенциал поля.

После построения матрицы-функции Грина для решения интегрального уравнения применяется метод фиктивного поглощения. Для перехода из пространства изображений в пространство оригиналов авторы используют численный метод Файлона. Развитый трехмерный формализм решения задачи применяется затем к анализу нестационарного нагружения слоистой полосы при плоской деформации, когда на электрод-штамп в центре его массы действует перпендикулярная к границе сила в форме ступеньки, а электрические условия соответствуют случаям 1) или 2). Авторами представлены численные расчеты для различных случаев соотношения жесткостей слоев, коэффициентов электромеханической связи и различных электрических условий подключения электрода.

Обобщение метода фиктивного поглощения на случай возбуждения колебаний в пьезоэлектриках системами полосовых электродов предложено в работе [37]. В том случае, когда колебания возбуждаются N невесомыми электродами, задача сводится к определению неизвестных функций $q_r(x)$ ($r = 1, 2, \dots, N$), пропорциональных распределению зарядов на электродах, из системы интегральных уравнений

$$\sum_{r=1}^N \int_{a_{2r-1}}^{a_{2r}} k(x-\eta) q_r(\eta) d\eta = f_m, \quad a_{2m-1} < x < a_{2m}, \quad m = 1, 2, \dots, N, \quad (53)$$

$$k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} K(\alpha) \exp(-i\alpha x) d\alpha,$$

причем относительно $K(\alpha)$ предполагается, что она является четной функцией параметра α , мероморфной в комплексной области, на вещественной оси имеет конечное число вещественных нулей и полюсов и счетное множество комплексных, с точкой густения в малом секторе, содержащем мнимую ось, и $K(\alpha) = \text{const} |\alpha|^{-1} + o(|\alpha|^{-1})$, $|\alpha| \rightarrow \infty$. Обход контура интегрирования σ в (53) должен быть согласован с условиями излучения. Считая систему (53) разрешимой в классе L_p , $p > 1$ при дважды непрерывно дифференцируемых функциях $f_m(x)$, авторы обобщают метод фиктивного поглощения на случай пьезоэлектриков с системами электродов и в качестве примера приводят численные расчеты для пьезоэлектрического слоя с двумя поверхностными электродами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агранович З. С., Деревянко Н. И. Электроупругие поля прямого пьезоэффекта при деформировании пьезокерамических тел // Прикл. мех. 1974. № 9. С. 3–8.
2. Бабешко В. А., Финкельштейн А. Б. Колебания электроупругих тел с периодической решеткой на поверхности // 3 Всес. симп. «Теор. вопросы магнитоупругости». Ереван. 1984. С. 17–18.
3. Балакирев М. К., Гилинский И. А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск.: Наука, 1982. 257 с.
4. Бардзокас Д., Кудрявцев Б. А., Сенник Н. А. Волны Релея в полупространстве с конечной системой электродов // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 1. С. 45–51.
5. Бардзокас Д., Сенник Н. А. Возбуждение поверхностными электродами симметричных и антисимметричных волн Лэмба в пьезополосе // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 6. С. 91–99.
6. Бежанян В. А. Плоская контактная задача электроупругости для полуплоскости при наличии сцепления // Дифф. ур.-ния с частн. производн. в прикл. задачах. Киев.: Ин-т математики АН УССР. 1985. С. 94–103.
7. Бежанян В. А., Улитко А. Ф. Контактная задача электроупругости для полуплоскости при наличии сцепления // Докл. АН УССР. сер. А. Физ.-мат. и техн. науки. 1986. № 6. С. 16–20.
8. Бежанян В. А., Улитко А. Ф. Контактная задача для пьезокерамической полуплоскости, электродированной под штампом, при наличии сцепления // Докл. АН УССР. сер. А. Физ.-мат. и техн. науки. 1990. № 6. С. 35–39.
9. Бирюков С. В. Расчет электродных преобразователей поверхностных волн в пьезоэлектриках // Радиотехника и электроника. 1980. Т. 50. № 8. С. 1655–1661.
10. Бирюков С. В., Горышник А. А. Рассеяние поверхностной волны в пьезоэлектрике системой металлических электродов // Радиотехника и электроника. 1977. Т. 23. № 8. С. 1588–1595.
11. Бирюков С. В., Горышник Л. А. Теория взаимодействия поверхностных волн в пьезоэлектриках с электродными структурами // Журнал технической физики. 1980. Т. 50. № 8. С. 1647–1654.
12. Васильковский С. А., Демидов В. П. Генерация сдвиговых волн парой поверхностных электродов // Радиотехника и электроника, 1982. Т. 27. № 2. С. 392–397.
13. Ворovich И. И., Пряхина О. Д., Тукодова О. М., Фрейгейт М. Р. Об одном подходе к решению динамических задач для слоистых электроупругих и анизотропных сред // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 4. С. 652–661.
14. Гилинский И. А., Попов В. В. Возбуждение акустоэлектрических колебаний металлическими электродами // Радиотехника и электроника. 1978. Т. 22. № 2. С. 392–402.
15. Горышник Л. Л., Кондратьев С. Н. Возбуждение поверхностных электроупругих волн электродными преобразователями // Радиотехника и электроника. 1974. Т. 19. № 8. С. 1719–1728.
16. Горышник Л. А., Кондратьев С. М. Теория электродных преобразователей упругих поверхностных волн в пьезоэлектриках // Радиотехника и электроника. 1978. Т. 23. № 1. С. 151–159.
17. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Электроупругость. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Киев.: Наукова думка, 1989. 279с.
18. Губанов В. А. Возбуждение акустических поверхностных волн парой штырей // Радиотехника и электроника. 1976. Т. 21. № 10. С. 2095–2102.

19. Гуляев Ю. В. Поверхностные электрорезонансные волны в твердых телах // Письма в ЖЭТФ. 1969. Т. 9. № 1. С. 3480–3482.
20. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов. М.: Наука, 1982. 424 с.
21. Ермаков С. В., Сенник Н. А. Возбуждение и структура сдвиговых поверхностных волн в упругом полупространстве с пьезоактивным слоем // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 4. С. 63–71.
22. Ерофеев А. А. Пьезоэлектронные устройства автоматики. Л.: Машиностроение, 1982. 212 с.
23. Жарий О. Ю. К вопросу об оценке магнитных эффектов, сопровождающих распространение плоских волн в пьезокерамической среде // Докл. АН УССР. Сер. А. 1978. № 8. С. 705–709.
24. Кокунов В. А., Кудрявцев Б. А., Сенник Н. А. Плоская задача электроупругости для пьезоэлектрического слоя с периодической системой электродов на поверхностях // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 3. С. 485–491.
25. Кокунов В. А., Партон В. З., Сенник Н. А. Осесимметричная деформация пьезоэлектрического слоя с кольцевыми электродами // Проблемы прочности. 1988. № 5. С. 84–88.
26. Кудрявцев Б. А. Механика пьезоэлектрических материалов. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНТИ. 1978. Т. 13. С. 5–66.
27. Кудрявцев Б. А. Электроупругое состояние полуплоскости из пьезокерамики с двумя граничными электродами // Проблемы прочности. 1982. № 7. С. 56–59.
28. Кудрявцев Б. А., Партон В. З. О волнах Гуляева-Блюштейна в пьезоэлектрических средах // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 5. С. 815–821.
29. Кудрявцев Б. А., Партон В. З., Сенник Н. А. Механические модели пьезоэлектриков для электронного машиностроения. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНТИ. 1984. Т. 17. С. 3–62.
30. Мартыненко В. С., Партон В. З., Сенник Н. А. Возбуждение сдвиговой волны в пьезоэлектрическом цилиндре системой поверхностных электродов // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 3. С. 105–110.
31. Мелкумян С. А., Улитко А. Ф. Осесимметричная контактная задача электроупругости для полупространства // Прикл. механика. 1987. Т. 23. № 9. С. 44–51.
32. Партон В. З. Об одной задаче электроупругости // Механика твердого деформируемого тела и родственные проблемы анализа. М.: МИХМ, 1980. С. 3–13.
33. Партон В. З., Кудрявцев Б. А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 472 с.
34. Партон В. З., Ермаков С. В., Сенник Н. А. Возбуждение сдвиговой поверхностной волны в пьезоактивном слое и управление ее скоростью магнитным полем // Докл. АН СССР. 1989. Т. 306. № 6. С. 1320–1324.
35. Партон В. З., Мустафаев Дж. М., Сенник Н. А. Возбуждение и структура сдвиговых ПАВ в гексагональном слое пьезоэлектрика. Баку. 1989. Ин.-т физики АН АзербССР. Препринт № 3. 20 с.
36. Подильчук Ю. Н., Ткаченко В. Ф. Контактная задача электроупругости для плоского эллиптического штампа // Теор. и прикл. механика (Киев). 1998. № 28. С. 40–52.
37. Пряхина О. Д., Смирнова А. В., Тукодова О. М. Метод фиктивного поглощения в динамических задачах электроупругости // ПММ. 1998. Т. 62. № 5. С. 834–839.
38. Пряхина О. Д., Тукодова О. М. Антиплоская динамическая контактная задача для электроупругого слоя // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 5. С. 844–849.

39. Пряхина О. Д., Тукодова О. М. Об одной плоской смешанной динамической задаче электроупругости // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 1. С. 80–85.
40. Пряхина О. Д., Тукодова О. М., Фрейгейт М. Р. Решение нестационарных связанных электромеханических задач для слоистых сред // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 6. С. 1031–1042.
41. Сенник Н. А. Волны Релея в пьезоэлектрическом пространстве с парой поверхностных электродов // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 4. С. 106–115.
42. Скалух А. С. Симметричная смешанная задача для пьезокерамической полосы. Ростовский Гос. университет. 1981. Рук. деп. в ВИНТИ. № 5445-81ДЕП. 12 с.
43. Тоноян В. С., Бежанян В. А. Контактная задача для пьезокерамической полуплоскости, электродированной под штампом // Тез. докл. 4 Междунар. совещ.-семинара «Инж.-физ. пробл. нов. техн.». М. 1996. С. 112–113.
44. Трофимов А. И. Пьезоэлектрические датчики статического давления. М.: Машиностроение, 1979. 95 с.
45. Фильтры на поверхностных акустических волнах. Расчет, технология и применение / Под ред. Г. Мэттьюса. М.: Радио и связь, 1981. 472 с.
46. Финкельштейн А. Б. Колебания пьезоэлектрической полуплоскости, нагруженной системой массивных электродов // Рук. деп. в ВИНТИ. № 7833–84ДЕП. 18 с.
47. Финкельштейн А. Б. Волны в полуограниченной среде с периодической системой электродов // Изв. СКНЦ ВШ. Естеств. науки. 1986. № 1. С. 59–62.
48. Bleustein J. L. A new surface wave in piezoelectric materials // Appl. Phys. Lett. 1968. V. 13. No. 12. P. 412–413.
49. Coquin G. A., Tiersten T. E. Analysis of the excitation and detection of piezoelectric surface waves in quartz by means of surface electrodes // J. Acoust. Soc. Amer. 1967. V. 41. No. 4. P. 921–939.
50. Hui Fan, Kam-Yim Sze, Wei Yang Two-dimensional contact on a piezoelectric half-space // Int. J. Solids and Struct. 1996. V. 33. No. 9. P. 1305–1315.
51. Joshin S. G., White R. M. Excitation and detection of surface elastic waves in piezoelectric crystals // J. Acoust. Soc. Amer. 1969. V. 46. No. 1. Pt. 1. P. 17–27.
52. Kudryavtsev B., Parton V., Senik N. Electromagnetoelasticity. Applied mechanics: Soviet Reviews. V.2. Hemisphere Publ. Corp. 1990. P. 2–145.
53. Lines M., Glass A. Principles and application of ferroelectrics and related materials. Oxford: Clarendon Press. 1977. 723 p.
54. Stroh A. N. Dislocation and crack in anisotropic elasticity // Phil. Mag. 1958. No. 3. P. 625–646.
55. Theng G. C. Frequency response of interdigital transducers for excitation of surface elastic waves // IEEE Trans. Electron. Devices. 1968. Ed-15. No. 8. P. 586–594.

§ 6. КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ НАРАЩИВАЕМЫХ ТЕЛ

А. В. Манжиров

Математическое моделирование процессов возведения зданий и гидротехнических сооружений, намотки и послойного изготовления композиционных материалов, отверждения металлических расплавов и полимерных растворов, процессов напыления, осаждения, замерзания и многих других давно привлекало инженеров и технологов. Классическими примерами в литературе по механике наращиваемых или растущих тел стали работы [14, 25, 29, 30, 32], в которых предлагались различные модели процессов наращивания деформируемых тел. Однако и они и многие другие содержали часто несовершенные в физико-механическом и математическом планах модели конкретных частных процессов.

Водоразделом между многочисленными не связанными между собой моделями из частных задач и строгой единой теорией стали работы [1, 28], которые содержали все необходимые соотношения, за исключением одного специфического условия на поверхности тела, к которой притекал материал. Формулировкой этого условия в работах [8, 26] было по существу закончено построение математической теории непрерывно наращиваемых деформируемых тел при малых деформациях и условии отсутствия инерционных эффектов.

В дальнейшем теория была развита для описания больших деформаций [3, 23, 27] и динамических процессов [10–13]. Обзоры по данной проблематике заинтересованный читатель может найти в монографиях [2, 4, 6, 7, 31].

Контактные задачи для наращиваемых деформируемых тел являются естественным направлением развития такой новой области естествознания как механика растущих тел. Они изучают формирование напряженно-деформированного состояния растущих тел, обусловленного взаимодействием процессов контактного взаимодействия и непрерывного наращивания таких тел. Имея широкий круг приложений, контактные задачи механики растущих тел порождают совершенно новые нетрадиционные проблемы постановочного и математического аспектов и обнаруживают новые механические эффекты.

1. Краевая задача для растущего тела. В монографиях [6, 7] и статье [19] исследуются процессы деформирования вязкоупругих тел при кусочно-непрерывном изменении их состава, массы или объема за счет притока к внешней поверхности нового материала. Моделирование таких процессов приводит к принципиально новым неклассическим задачам механики деформируемого твердого тела. Рассматривается постановка и предлагается метод построения решения общей безынерционной начально-краевой задачи для кусочно-непрерывно наращиваемого вязкоупругого стареющего тела. Формулируются основные теоремы. Изучаются некоторые качественные моменты эволюции напряженно-деформированного состояния растущих тел.

Предполагается, что основное вязкоупругое однородное стареющее тело, изготовленное в момент времени $\tau_1^*(x) = 0$, занимает область Ω_0 с поверхностью $S_0(x \in \Omega_0)$ и до момента загрузки $\tau_0 \geq 0$ свободно от напряжений (основным или исходным телом называется тело, к поверхности которого, начиная с некоторого момента времени — момента начала

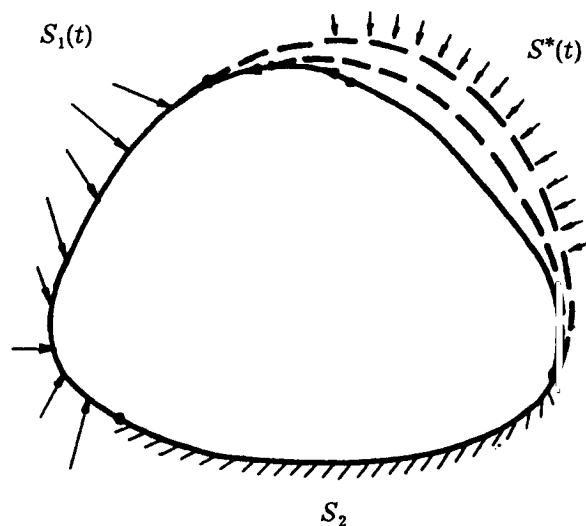


Рис. 1

наращивания — происходит приток новых элементов). От момента загрузки на поверхности тела задаются в общем случае четыре типа граничных условий (на $S_1(t)$ — поверхностные силы, на $S_2(t)$ — перемещения, на $S_3(t)$ — нормальные перемещения и касательные усилия, на $S_4(t)$ — нормальные усилия и касательные перемещения), а также объемные силы, зависящие от времени и координат. Участки поверхности, на которых задаются разные граничные условия, не пересекаются и в целом занимают всю поверхность тела. Зависимость S_i от времени t , позволяя учитывать возможную эволюцию систем нагрузок, штампов и т.п. на поверхности S_0 , считается кусочно-постоянной. Если поверхность тела не замкнута, то на бесконечности задается поведение напряжений или перемещений (рис. 1).

В момент $\tau_1 \geq \tau_0$ начинается непрерывное наращивание основного тела элементами, изготовленными одновременно с ним ($\tau_1^*(x) \equiv 0$). В процессе роста оно занимает область $\Omega(t)$ с поверхностью $S(t)$. Поверхность роста $S^*(t)$ ($S^*(\tau_1) \subset S_0$) движется в пространстве, при этом участки задания граничных условий $S_i(t)$ ($i = 1, \dots, 4$) могут изменяться и за счет загрузки неподвижной поверхности *дополнительного тела* (т.е. тела, образованного присоединенными частицами). Само дополнительное тело может иметь сложную структуру и состоять из совокупности тел, образовавшихся на разных временных промежутках этапа непрерывного наращивания. Их называют *субтелами*. Очевидно, что объединение субтел составляет дополнительное тело, причем области, занимаемые как первыми, так и последним могут быть несвязными. Объединение основного

и дополнительного тел называют *растущим* или *наращиваемым телом*. Процесс наращивания может происходить и без участия основного тела, когда он начинается с зарождения бесконечно малого материального элемента тела.

Считается, что задаваемый на поверхности роста полный тензор напряжений, характеризующий натяг приращиваемых элементов, согласован с известными поверхностными силами $\mathbf{p}^*(x, t)$ на $S^*(t)$ (например, с давлением), а момент приложения нагрузки к приращиваемым элементам $\tau_0(x)$ совпадает с моментом их присоединения к растущему телу $\tau^*(x)$.

В момент времени $\tau_2 > \tau_1$ наращивание тела прекращается и с этого момента на поверхности $S_1 = S(\tau_2)$ тела, занимающего область $\Omega_1 = \Omega(\tau_2)$, задаются (как и до начала наращивания) четыре типа граничных условий на участках $S_i(t)$.

Через некоторое время в момент $\tau_3 > \tau_2$ может вновь начаться наращивание тела, при этом возникнет новая поверхность наращивания и новая задача, которая впрочем практически ничем не отличается от задачи наращивания на первом этапе. Затем можно рассмотреть остановку наращивания в момент τ_4 , и далее последовательно задачу кусочно-непрерывного наращивания деформируемого тела с n моментами начала роста и, естественно, с n его остановками.

Таким образом, принципиально важно исследовать состояние тела на интервалах времени от начала загрузки до начала наращивания, от начала наращивания до его прекращения и после прекращения наращивания.

Краевая задача для основного (нерастущего) вязкоупругого стареющего тела на интервале времени $[\tau_0, \tau_1]$ представляет собой традиционную задачу теории вязкоупругости. Ее можно преобразовать к краевой задаче теории упругости при наличии параметра, доказать взаимно однозначное соответствие решений поставленной и полученной в результате преобразования задач и получить связывающие их соотношения.

Общую безынерционную смешанную начально-краевую задачу для непрерывно растущего тела составляют:

уравнение равновесия

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{f} = 0,$$

краевые условия на неподвижной части поверхности

$$\mathbf{x} \in S_1(t) : \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{p}_0,$$

$$\mathbf{x} \in S_2(t) : \mathbf{u} = \mathbf{u}_0,$$

$$\mathbf{x} \in S_3(t) : (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{n} = \mathbf{u}_1, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} = \mathbf{p}_1,$$

$$\mathbf{x} \in S_4(t) : (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} = \mathbf{p}_2, \quad \mathbf{u} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{n} = \mathbf{u}_2,$$

начально-краевое условие на поверхности роста

$$\mathbf{x} \in S^*(t) : \mathbf{T} = \mathbf{T}^*, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}^* = \mathbf{p}^* \quad (t = \tau^*(x)), \quad (1)$$

соотношение между скоростями деформации и перемещения

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T], \quad \mathbf{D} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t},$$

и уравнение состояния

$$\mathbf{T} = G(\mathbf{I} + \mathbf{N}(\tau_0(\mathbf{x}), t)) [2\mathbf{E} + (K - 1)I_1(\mathbf{E})\mathbf{1}],$$

$$\tau_0(\mathbf{x}) = \begin{cases} \tau_0, & \mathbf{x} \in \Omega_0, \\ \tau^*(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega(t) \setminus \Omega_0, \end{cases} \quad (\mathbf{I} + \mathbf{N}(\tau_0(\mathbf{x}), t))^{-1} = (\mathbf{I} - \mathbf{L}(\tau_0(\mathbf{x}), t)),$$

$$2G = \frac{1}{E(1+\nu)}, \quad K = \frac{1}{1-2\nu}, \quad \mathbf{L}(\tau_0(\mathbf{x}), t)f(t) = \int_{\tau_0(\mathbf{x})}^t f(\tau)K(t, \tau) d\tau,$$

где \mathbf{T} и \mathbf{E} — тензоры напряжений и деформации; \mathbf{u} и \mathbf{f} — векторы перемещения и объемных сил; \mathbf{T}^* — тензор натяга; $I_1(\mathbf{E})$ — первый инвариант тензора деформации; $\mathbf{1}$ — единичный тензор; \mathbf{p}_i и \mathbf{u}_i ($i = 0, 1, 2$) — задаваемые векторы поверхностных сил и перемещений; \mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности тела; G , E и ν — упругомгновенные модули деформации при сдвиге, растяжении и коэффициент Пуассона; $K(t, \tau)$ — ядро ползучести; \mathbf{I} — тождественный оператор; начальные значения всех функций в момент времени τ_1 известны из решения задачи для основного тела.

Отличительными особенностями начально-краевой задачи для наращиваемого тела (1), выводящими ее за рамки классических задач механики деформируемого твердого тела, являются:

специфическое начально-краевое условие на поверхности роста;

нарушение условия совместности деформации в области, занимаемой дополнительным телом, и выполнение лишь его аналога и аналога соотношений Коши в скоростях соответствующих величин (это обстоятельство позволяет учитывать тот факт, что приращиваемые элементы до момента присоединения к основному телу могут подвергаться деформирующим воздействиям независимо от процессов, протекающих в самом теле);

зависимость определяющих соотношений от функции $\tau_0(\mathbf{x})$, которая может иметь разрывы первого рода.

В статье [19] показано, что для того, чтобы \mathbf{T} , \mathbf{E} и \mathbf{u} были решением поставленной краевой задачи (1), необходимо и достаточно, чтобы \mathbf{S} , \mathbf{D}

и \mathbf{v} давали решение задачи

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{h} - \theta(\tau^*(\mathbf{x})\tau_1^{-1} - 1)\mathbf{h}_1 - \delta(\tau^*(\mathbf{x})\tau_1^{-1} - 1)\mathbf{h}_2 &= 0, \\ \mathbf{x} \in S_1(t) : \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} &= \mathbf{w}_0, \\ \mathbf{x} \in S_2(t) : \mathbf{v} &= \mathbf{v}_0, \\ \mathbf{x} \in S_3(t) : (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\mathbf{n} &= \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = \mathbf{w}_1, \\ \mathbf{x} \in S_4(t) : (\mathbf{n} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} &= \mathbf{w}_2, \quad \mathbf{v} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\mathbf{n} = \mathbf{v}_2, \\ \mathbf{x} \in S^*(t) : \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} &= [\nabla \cdot \mathbf{T}^*(\mathbf{x})G^{-1}(t) + \mathbf{f}^*(\mathbf{x})G^{-1}(t) - \\ & - \theta(\tau^*(\mathbf{x})\tau_1^{-1} - 1)\mathbf{f}_1^0(\mathbf{x}, t) - \delta(\tau^*(\mathbf{x})\tau_1^{-1} - 1)\mathbf{f}_2^0(\mathbf{x}, t)]s_n, \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}^*(\mathbf{x}) &= \mathbf{p}^*(\mathbf{x}) \quad (t = \tau^*(\mathbf{x})), \\ \mathbf{D} &= \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T], \quad \mathbf{S} = 2\mathbf{D} + (K - 1)I_1(\mathbf{D})\mathbf{1}, \end{aligned} \quad (2)$$

где \mathbf{h} , \mathbf{h}_k , \mathbf{f}_k^0 , \mathbf{f}^* , \mathbf{p}^* , \mathbf{v}_i , \mathbf{w}_i — определяемые по исходным данным функции, s_n — скорость движения поверхности $S^*(t)$ по нормали, θ и δ — обобщенные функции на гладкой поверхности, аналоги функций Хевисайда и Дирака, соответственно, и при этом выполнялись соотношения ($R(t, \tau)$ — резольвента ядра $K(t, \tau)$)

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) &= G(t) \left\{ \frac{\mathbf{T}(\mathbf{x}, \tau_0(\mathbf{x}))}{G(\tau_0(\mathbf{x}))} \left[1 + \int_{\tau_0(\mathbf{x})}^t R(t, \tau) d\tau \right] + \right. \\ & \left. + \int_{\tau_0(\mathbf{x})}^t \mathbf{S}(\mathbf{x}, \tau) + \int_{\tau_0(\mathbf{x})}^{\tau} \mathbf{S}(\mathbf{x}, \zeta) d\zeta R(t, \tau) d\tau \right\}, \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau_0(\mathbf{x})) + \int_{\tau_0(\mathbf{x})}^t \mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3)$$

Краевая задача (2) совпадает по форме с краевой задачей теории упругости с параметром t . Ее решение может быть построено любым эффективным в теории упругости аналитическим или численным методом. Решение исходной начально-краевой задачи наращивания вязкоупругого стареющего тела (1) при $t \in [\tau_1, \tau_2]$ восстанавливается затем по формулам (3).

Основные соотношения задачи для тела, наращивание которого прекращено, имеют вид (1), где отсутствует условие на поверхности роста. Аналогично тому, как это было проделано для растущего тела, они приводятся к решению задачи типа (2), причем формулы, по которым восстанавливаются истинные характеристики напряженно-деформированного состояния, сохраняют вид (3).

На основании предложенного метода можно изучать процесс кусочно-непрерывного наращивания вязкоупругого стареющего тела с любым конечным числом моментов начала роста и остановки. Задача с n моментами

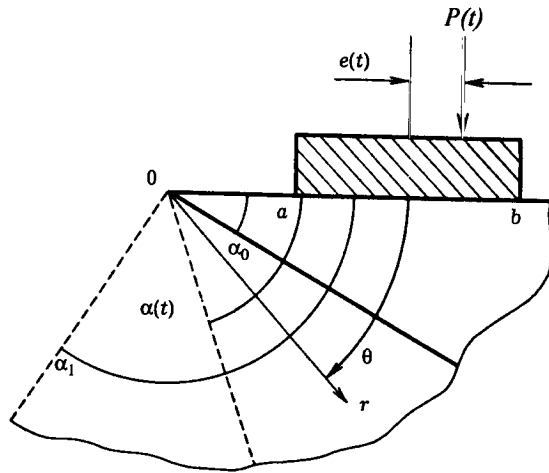


Рис. 2

начала роста (и, естественно, с n остановками) приводится к исследованию $2n + 2$ однотипных задач, совпадающих по форме с краевой задачей теории упругости, содержащей параметр t . После решения этих $2n + 2$ задач напряженно-деформированное состояние наращиваемого вязкоупругого стареющего тела в любой момент времени легко восстанавливается по единым формулам (3).

В статье [19] рассматриваются также особенности поведения растущих деформируемых тел при некоторых характерных способах их наращивания и загрузки. Обсуждаются такие органически присущие растущим телам явления, как возникновение остаточных напряжений после снятия нагрузок, появление в наращиваемом теле поверхностей разрыва напряжений, зависимость напряженно-деформированного состояния вязкоупругих тел от скорости их роста и другие.

2. Задачи для растущего клина. В монографиях [6, 7] и статье [5] рассматривается контактная задача для клина, угол раствора которого увеличивается за счет притока вещества извне (рис. 2). Считается, что однородный стареющий клин с углом раствора α_0 изготовлен в нулевой момент времени. В момент времени τ_0 в одну из граней клина на участке $a \leq r \leq b$ начинает вдавливаться гладкий жесткий штамп с формой основания $g(r)$. На штамп действует сила $P(t)$ и момент $M(t)$, эксцентриситет приложения силы равен $e(t)$. Другая грань клина свободна от напряжений.

В момент времени τ_1 незагруженная грань начинает наращиваться не-напряженными элементами так, что с течением времени изменяется угол раствора клина $\alpha(t)$ (наращивание по такому закону называют *угловым*). В момент времени τ_2 рост клина прекращается, угол его раствора к этому

моменту равен $\alpha_1 < 2\pi$, а грань, к которой происходил приток вещества, свободна от напряжений и при $t \geq \tau_2$.

На основании решения вспомогательной краевой задачи для наращиваемого клина (см. п. 1) выводятся разрешающие интегральные уравнения. Для каждого основного этапа кусочно-непрерывного наращивания клина (до начала, в процессе и после остановки роста) получается свое интегральное уравнение. От соотношений классических контактных задач механики деформируемого твердого тела эти уравнения отличаются тем, что связывают не контактные напряжения и кинематические характеристики штампа, а некоторые другие величины, по которым истинные контактные давления и перемещение штампа определяются с использованием формул (3).

Показано, что в задаче допускаются два варианта постановки:

- 1) когда известны сила и угол поворота, а отыскиваются контактные давления и эксцентриситет приложения силы (момент);
- 2) когда известны сила и эксцентриситет (момент), а определяются контактные напряжения и угол поворота штампа.

Все полученные интегральные уравнения при условиях равновесия штампа на клине приводятся к одной математической задаче:

$$\int_a^b k(\rho, r, \lambda(t)) \varphi(\rho, t) d\rho = \psi(t)r - h(r), \quad (4)$$

$$\int_a^b \varphi(\rho, t) d\rho = \chi(t), \quad \int_a^b \left(\rho - \frac{a+b}{2}\right) \varphi(\rho, t) d\rho = \eta(t),$$

где в зависимости от варианта постановки не известны $\varphi(\rho, t)$ и $\eta(t)$ либо $\varphi(\rho, t)$ и $\psi(t)$.

Решение интегрального уравнения с дополнительными условиями (4) строится при помощи известного в теории упругости приближенного метода, основанного на некоторой специальной форме аппроксимации ядра $k(\rho, r, \lambda(t))$. Такое решение имеет то преимущество, что, мало отличаясь от точного, записывается в явном виде.

После того, как получено решение задачи (4), легко находятся решения задач, соответствующих основным этапам процесса роста клина, и по формулам (3) — истинные характеристики его напряженно-деформированного состояния.

Приведены расчеты контактной задачи для бетонной четвертьплоскости, вырастающей в процессе углового наращивания до полуплоскости. Отмечается существенная зависимость контактных характеристик от скорости роста, принципиальное отличие картины их эволюции от известной для классических случаев. Делается акцент на том, что представление о теле, выросшем до полуплоскости, как о полуплоскости может привести просто к качественно ошибочному пониманию явления.

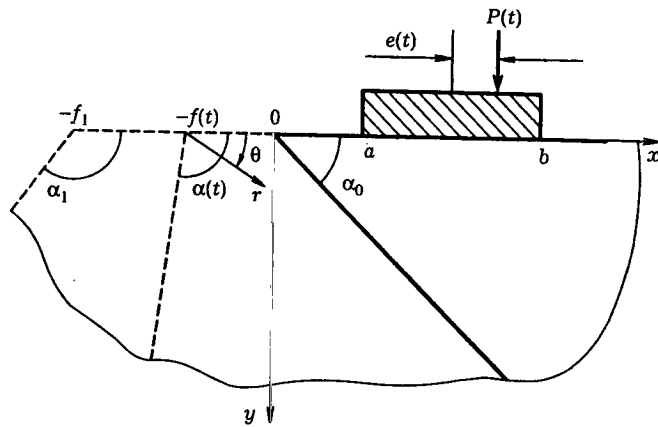


Рис. 3

В работах [5–7] исследуется контактная задача для клина, наращиваемого по произвольному закону (рис. 3). Считается, что вязкоупругий стареющий клин с углом раствора α_0 изготовлен в нулевой момент времени. В момент времени τ_0 на участке $a \leq x \leq b$ в него начинает вдавливаться силой $P(t)$ с эксцентриситетом приложения $e(t)$ гладкий жесткий штамп. Форма основания штампа описывается функцией $g(x)$, а поверхность клина, исключая участок $a \leq x \leq b$, свободна от воздействий. В момент τ_1 начинается наращивание клина ненапряженными элементами, изготовленными одновременно с ним. При этом общая конфигурация тела как клина с произвольным углом раствора сохраняется. Наращивание прекращается в момент времени τ_2 . Предполагается, что и при $t \geq \tau_2$ поверхность тела, образованного в процессе роста, по-прежнему подвергается только контактному воздействию штампа.

Исследуемый процесс роста описывается заданием двух неубывающих функций, непрерывно зависящих от времени: функцией $f(t)$, характеризующей расстояние вдоль оси x от вершины основного клина до вершины наращиваемого, и функцией $\alpha(t)$, характеризующей угол раствора растущего клина. Очевидно, что $f(t) = 0$ и $\alpha(t) = \alpha_0$ при $\tau_0 \leq t \leq \tau_1$, кроме того, полагается $f(t) = f_1$ и $\alpha(t) = \alpha_1$ при $t \geq \tau_2$.

Получаемые разрешающие интегральные уравнения и дополнительные условия приводятся к единому виду

$$\int_a^b k(\xi + f(t), x + f(t), \alpha(t)) \varphi(\xi, t) d\xi = \psi(t)x - h(x),$$

$$\int_a^b \varphi(x, t) dx = \kappa(t), \quad \int_a^b \varphi(x, t) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx = \eta(t). \quad (5)$$

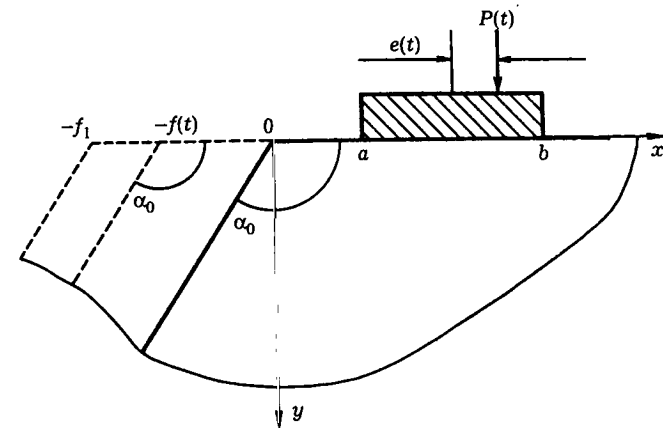


Рис. 4

Методика исследования задачи (5) и последующее восстановление процесса формирования полей напряжений и перемещений в клине при произвольном законе его наращивания аналогичны описанным выше.

Проводится числовой анализ контактной задачи для бетонной четвертьплоскости при ее *трансляционном* наращивании (рис. 4), т. е. при таком способе наращивания, при котором одна из граней клина движется, оставаясь параллельной первоначальному положению, а общая конфигурация тела как клина с фиксированным углом раствора сохраняется. Обсуждаются механические эффекты. Сравняются различные способы наращивания по их влиянию на характеристики контактного взаимодействия. Отмечается, что при постоянных воздействиях независимо от скорости и способа наращивания существует характерный момент времени t^0 , начиная с которого влиянием процесса наращивания на контактные характеристики можно пренебречь.

3. Кручение растущего цилиндра штампом. В монографии [7] и статье [18] рассматривается контактная задача кручения вязкоупругого стареющего растущего цилиндра жестким штампом (рис. 5). Предполагается, что в нулевой момент времени из стареющего вязкоупругого материала изготовлен круговой цилиндр длины l и радиуса b_0 , причем отношение l к b_0 достаточно велико, т. е. цилиндр достаточно длинный. Один из торцов цилиндра сцеплен с недеформируемым основанием, а к другому соосно прикреплен жесткий круговой в плане штамп с плоской подошвой радиуса $a < b_0$. В момент времени τ_0 на штамп начинает действовать крутящий момент $M(t)$, поворачивающий его на угол $\alpha(t)$. Боковая поверхность цилиндра свободна от напряжений.

В момент времени τ_1 к боковой поверхности цилиндра начинается при-

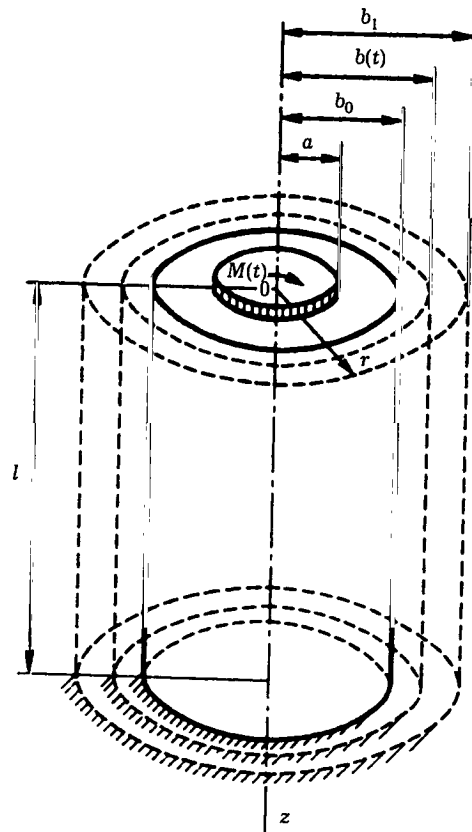


Рис. 5

ток вещества. При этом новые наращиваемые элементы не напряжены и в момент присоединения происходит их сцепление с недеформируемым основанием со стороны закрепленного торца. Закон роста цилиндра полностью задается функцией $b(t)$, характеризующей изменение его радиуса с течением времени. Естественно, что

$$b(\tau_1) = b_0.$$

Наращивание прекращается в момент времени τ_2 . К этому моменту радиус цилиндра принимает значение b_1 ($b(\tau_2) = b_1$), а его боковая поверхность свободна от воздействий и при $t \geq \tau_2$. Цилиндр считается относительно длинным в процессе роста и после прекращения роста (отношения $l/b(t)$ и l/b_1 достаточно велики). Выводятся парные сумматорные уравнения, отражающие математическое содержание задачи на различных этапах процесса наращивания, каждое из которых удается преобразовать

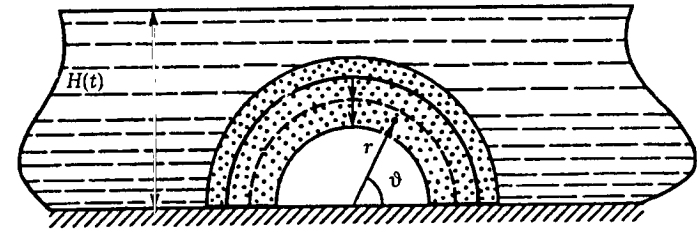


Рис. 6

к виду

$$\begin{aligned} \zeta \varphi_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} \varphi_n J_1(\lambda_n x) &= \psi x, & 0 \leq x \leq c, \\ \varphi_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n J_1(\lambda_n x) &= 0, & c \leq x \leq 1, \end{aligned} \quad (6)$$

где $J_\nu(x)$ — функция Бесселя порядка ν ; φ_k — последовательность искомым функций; λ_n — корни уравнения $J_2(\lambda_n) = 0$; ζ , x , ψ , c — известные функции, в общем случае зависящие от времени t .

Парное сумматорное уравнение (6) при помощи известной техники приводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, после решения которого остается только поэтапно при помощи формул (3) восстановить действительные значения напряжений и перемещений в растущем цилиндре. В частности, используется известный приближенный метод построения решения уравнения Фредгольма второго рода в явном виде, обсуждается область его эффективного применения.

Установлено, что угол поворота штампа существенно зависит от скорости наращивания и момента начала наращивания, причем предельные зависящие от скорости значения его приращения могут различаться в несколько раз. При постоянном крутящем моменте существует характерный момент времени, начиная с которого влиянием процесса кусочно-непрерывного наращивания на характеристики контактного взаимодействия можно пренебречь. В этом же случае проявляется сильная зависимость предельного значения угла поворота штампа от интервала времени между моментами начала нагружения и начала роста.

4. Контакт наращиваемой арки с основанием. В статье [22] исследуется напряженно-деформированное состояние засыпаемой арки, которая, начиная с некоторого момента времени, наращивается с целью усиления (рис. 6). Рассматривается арочная конструкция в форме половины кругового цилиндра, опирающаяся на гладкое жесткое основание. Считается, что арка изготовлена из вязкоупругого стареющего материала в нулевой момент времени, ее внутренний радиус равен a_0 , а внешний — b . В момент

времени τ_0 начинается засыпка арки сыпучим грунтом, высота слоя которого характеризуется кусочно-гладкой функцией $H(t)$ ($H(\tau_0) \geq 0$). Для усиления конструкции с момента времени $\tau_1 \geq \tau_0$ производится ее непрерывное наращивание ненапряженными элементами одинакового с ней возраста. За время наращивания внутренний радиус арки изменяется по закону $a(t)$ ($a(\tau_1) = a_0$) и в момент завершения наращивания τ_2 принимает значение a_1 . Дальнейшее деформирование арки ($t \geq \tau_2$) происходит, как и прежде, только за счет давления слоя сыпучего грунта.

Процессы засыпки и наращивания полностью характеризуются функциями $H(t)$ и $a(t)$ и не зависят друг от друга. Так, наращивание может начаться после достижения $H(t)$ некоторого значения, а может и одновременно с засыпкой. Отмечается возможность неполной засыпки арки, когда $H(t) < b$ для любого момента времени и то обстоятельство, что действие слоя сыпучего грунта на арку моделируется нормальным к поверхности арки давлением, равным по модулю весу столба материала грунта над рассматриваемой точкой конструкции.

Задача кусочно-непрерывного наращивания вязкоупругой стареющей арки приводится к последовательности задач, совпадающих по форме с плоской задачей теории упругости при наличии параметра времени. Решение каждой из полученных задач строится в форме тригонометрических рядов Фурье. Полная картина эволюции напряженно-деформированного состояния восстанавливается на основании соотношений (3).

Отмечается, что напряженное состояние основной арки при $t \in [\tau_0, \tau_1]$ не зависит от свойств ее материала и полностью определяется геометрическими размерами конструкции, высотой слоя и плотностью материала грунта. Оно возникает как в упругих, так и в вязкоупругих арках и не изменяется при исследовании случая их обобщенного плоского напряженного состояния вместо плоской деформации. В отличие от напряжений, перемещения нерастущей арочной конструкции зависят от упругих и реологических свойств ее материала, а также от типа плоской задачи. И напряжения, и перемещения основной арки непрерывны по пространственным координатам и могут иметь только разрывы первого рода по времени в точках t_k , где функция $H(t)$ претерпевает скачки.

На напряженно-деформированное состояние растущей конструкции существенно влияют характеристики процессов ее наращивания и засыпки, а также свойства ползучести и старения используемого материала. Помимо разрывов первого рода по t в точках t_k функции напряжений и перемещений в области, занимаемой растущей аркой, имеют разрывы первого рода по радиальной координате в точках начала и остановки процесса наращивания и в точках $a(t_k)$ при $t_k \in [\tau_1, \tau_2]$. При наращивании арки в течение длительного времени после остановки засыпки возникает ситуация, при которой взаимным влиянием конструкции и вновь наращиваемых ненапряженных ее элементов можно пренебречь.

Проводятся расчеты заглубленной наращиваемой бетонной арки. Обсуждаются возникающие качественные и количественные эффекты. Установлено, что уменьшение скорости наращивания конструкции вызывает более неравномерное распределение контактных напряжений на ее торцах, а также состояние, при котором большая часть добавленного материала практически не напряжена. Увеличение же скорости наращивания приводит к тому, что слабо загруженный на начальном этапе новый материал берет на себя с течением времени весомую долю общей действующей на конструкцию нагрузки, а распределение напряжений на торцах становится более равномерным.

Показано, что сложный характер функции перемещения вершины рассматриваемой бетонной арки (когда она возрастает, затем убывает и даже меняет знак) объясняется наличием нескольких тенденций в ее поведении. Первой является тенденция к увеличению абсолютного значения перемещения за счет ползучести материала конструкции. Другими определяющими исследуемое перемещение тенденциями являются тенденции к его возрастанию при $\alpha(t) > \alpha^*$ и к убыванию при $\alpha(t) < \alpha^*$ за счет наращивания, где α^* — определяемая постоянная. Их взаимодействием и определяется изменение перемещения с течением времени. Сделан акцент на качественном различии явлений, характерных для растущих и неизменяемых деформируемых тел.

Следует отметить также работы [9, 15–17, 20, 21], где исследовались процессы дискретного наращивания деформируемых тел системами деформируемых и жестких элементов, и статью [24], в которой изучалось взаимодействие жесткого растущего штампа с вязкоупругим стержневым основанием.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арутюнян Н. Х. Краевая задача теории ползучести для наращиваемого тела // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 5. С. 783–789.
2. Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б. Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.
3. Арутюнян Н. Х., Дроздов А. Д. Механика растущих вязкоупругих тел, подверженных старению, при конечных деформациях // Докл. АН СССР. 1984. Т. 276. № 4. С. 821–825.
4. Арутюнян Н. Х., Дроздов А. Д., Наумов В. Э. Механика растущих вязкоупругопластических тел. М.: Наука, 1987. 472 с.
5. Арутюнян Н. Х., Манжиров А. В. Контактные задачи механики растущих тел // ПММ. 1989. Т. 53, Вып. 1. С. 145–158.
6. Арутюнян Н. Х., Манжиров А. В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1990; Изд-во НАН РА, 1999. 320 с.
7. Арутюнян Н. Х., Манжиров А. В., Наумов В. Э. Контактные задачи механики растущих тел. М.: Наука, 1991. 176 с.

8. Арутюнян Н. Х., Метлов В. В. Нелинейные задачи теории ползучести наращиваемых тел, подверженных старению // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4. С. 142–152.
9. Арутюнян Н. Х., Наумов В. Э. О контактном взаимодействии наращиваемой системы вязкоупругих накладок с однородной полуплоскостью // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 2. С. 144–154.
10. Арутюнян Н. Х., Наумов В. Э., Радаев Ю. Н. Математическая модель динамически наращиваемого деформируемого тела. Ч. 1. Кинематика и меры деформации растущего тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 6. С. 85–96.
11. Арутюнян Н. Х., Наумов В. Э., Радаев Ю. Н. Математическая модель динамически наращиваемого деформируемого тела. Ч. 2. Эволюционная граничная задача теории растущих тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 1. С. 72–86.
12. Арутюнян Н. Х., Наумов В. Э., Радаев Ю. Н. Динамическое наращивание упругого слоя. Ч. 1. Движение потока осаждаемых частиц с переменной скоростью // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 5. С. 6–24.
13. Арутюнян Н. Х., Наумов В. Э., Радаев Ю. Н. Динамическое наращивание упругого слоя. Ч. 2. Случай падения приращиваемых частиц с постоянной скоростью // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 6. С. 99–112.
14. Дятловицкий Л. И., Вайнберг А. И. Формирование напряжений в гравитационных плотинах. Киев: Наукова думка, 1975. 264 с.
15. Манжиров А. В. О некоторых постановках и решениях контактных задач теории ползучести для произвольных систем штампов // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 3. С. 139–151.
16. Манжиров А. В. Контактные задачи о взаимодействии вязкоупругих оснований, подверженных старению, с системами одновременно прикладываемых штампов // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 4. С. 670–685.
17. Манжиров А. В. Осесимметричная контактная задача для вязкоупругого слоистого основания, наращиваемого системой кольцевых в плане штампов // Труды XV науч. конф. молод. ученых Ин-та механики АН УССР. Киев, 29 мая–1 июня 1990 г. Ч. 2. / Ин-т механики АН УССР. Киев, 1990. Деп. в ВИНТИ 10.07.90, № 3801-В90. С. 266–272.
18. Манжиров А. В. О кручении растущего цилиндра жестким штампом // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 5. С. 842–850.
19. Манжиров А. В. Общая безынерционная начально-краевая задача для кусочно-непрерывно наращиваемого вязкоупругого стареющего тела // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 5. С. 836–848.
20. Манжиров А. В., Черныш В. А. О последовательном усилении неоднородных вязкоупругих цилиндрических тел системами жестких элементов / Ин-т проблем механики АН СССР. М., 1991. 56 с. Деп. в ВИНТИ 11.07.91, № 2975-В91.
21. Манжиров А. В., Черныш В. А. Контактная задача дискретного наращивания неоднородного вязкоупругого стареющего цилиндра системой жестких втулок // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 6. С. 1018–1025.
22. Манжиров А. В., Черныш В. А. Задача об усилении заглубленной арочной конструкции методом наращивания // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 5. С. 25–37.
23. Метлов В. В. О наращивании неоднородных вязкоупругих тел при конечных деформациях // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 4. С. 637–647.
24. Наумов В. Э. Вдавливание растущего штампа в стержневое вязкоупругое основание // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 3. С. 84–94.

25. Раиба Э. И. Определение напряжений в массивах от действия собственного веса с учетом порядка их возведения // Сб. тр. ин-та строит. механики АН УССР. 1953. № 18. С. 23–27.
26. Тринчер В. К. О постановке задачи определения напряженно-деформированного состояния растущего тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 2. С. 119–124.
27. Тринчер В. К. Расчет наращиваемых тел. М.: Изд-во МГУ, 1989. 154 с.
28. Харлаб В. Д. Линейная теория ползучести наращиваемого тела // Механика стержневых систем и сплошных сред: Межвуз. темат. сб. тр. Л.: Ленингр. инж.-строит. ин-т. 1966. Вып. 49. С. 93–119.
29. Шульман С. Г. Расчеты гидротехнических сооружений с учетом последовательности возведения. М.: Энергия, 1975. 168 с.
30. Brown C. B., Goodman L. E. Gravitational stresses in accreted bodies // Proc. Roy. Soc. London, A. 1963. V. 276. No. 1367. P. 571–576.
31. Drozdov A. D. Viscoelastic Structures: Mechanics of Growth and Aging. New York: Academic Press, 1997. 568 p.
32. Southwell R. V. An Introduction to the Theory of Elasticity for Engineers and Physicists. Oxford: University Press, 1941. VII + 509 p.

Глава 7

**Разрушение
при контактном
взаимодействии**

§ 1. МЕХАНИКА РАЗРУШЕНИЯ ТЕЛ ПРИ КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ

М. В. Зернин, Е. М. Морозов

1. Попытки систематизации и описания процессов разрушения при контактном нагружении предпринимались многими исследователями. Эти вопросы освещены, например, в отечественных публикациях С. В. Пинегина, А. В. Орлова и В. М. Гудченко [14], Г. П. Черепанова и В. В. Соколинского [19, 20] и др. Становление *механики контактного разрушения* можно отсчитывать с момента опубликования первой работы Ф. Фрэнка и Б. Лоуна [22], в которой подходы механики разрушения применяются для моделирования контактного повреждения, или фундаментального обзора по проблеме, выполненного Б. Лоуном и Т. Уилшоу [25]. В настоящем параграфе кратко формулируются проблемы и перспективы развития указанной области науки. Подробный анализ состояния механики контактного разрушения со ссылками на большое количество первоисточников содержится в наших монографиях [9, 11].

Схожесть задач о контактном взаимодействии и задач механики разрушения состоит прежде всего в наличии точек с особенностями напряженного состояния. Это позволяет применять методы решения контактных задач теории упругости для решения отдельных задач механики разрушения, таких как определение поля напряжений у вершины трещин. Вместе с тем заметим, что нахождение коэффициентов интенсивности напряжений не есть механика разрушения, подобно тому как нахождение напряжений еще не определяет прочности изделия. И только формулировка и использование критериев разрушения, т.е. условий срабатывания и роста магистральных трещин, составляет предмет механики разрушения. Некоторые приемы механики разрушения можно использовать при решении контактных задач. Например, корневую особенность в угловых точках штампа можно снизить (не прибегая к закруглению краев штампа), предполагая пластическое течение вдоль определенных линий скольжения. Допуская несколько таких линий или сплошной их веер можно устранить особенность вообще, как это описано в статьях В. М. Александрова и Л. А. Кипниса [1, 2].

Задачи механики контактного разрушения подразделяются по характеру нагружения на статические (упругие и упругопластические), динамические (упругие и упругопластические) и циклические (усталостные). Большинство аналитических решений построено в рамках классической формулировки. Результатом являются критерии срабатывания и роста магистральных трещин различного вида в континуальной среде.

Обычная (классическая) формулировка предмета механики разрушения предполагает изучение процессов разрушения твердого тела в результате распространения магистральной трещины под действием тех или

иных причин. Забегая вперед, укажем, что в механике контактного разрушения также применяют критерии Гриффитса и Ирвина. Классическая формулировка упускает важные стадии деградации материала, накопления микроповреждений, зарождения очага разрушения (исходной трещины), не оценивается также предельное состояние тела без трещины.

Применение к задачам механики разрушения современных численных методов позволяет рассматривать не только развитие макротрещин, но и более ранние, а также более поздние стадии процесса. Если известно поле напряжений, возникающее при контактном взаимодействии тел, то в принципе можно исследовать всю последовательность событий, привлекаемая достаточно широкий круг методов механики деформируемого твердого тела, физики прочности, физического металловедения и других. В нашей монографии [11] описаны некоторые варианты численных моделей и продемонстрирована их перспективность для всех перечисленных выше случаев нагружения контактирующих тел.

Важно отметить, что при контактном взаимодействии твердых тел характерна геометрическая локализация (непосредственно под площадкой контакта и вблизи нее) всех видов деформаций (упругой и пластической) и разрушения (зарождения и развития трещин). В таких условиях даже материалы, которые обычно являются хрупкими, проявляют пластические свойства в локальных зонах. Кроме того, пластическое деформирование приповерхностного слоя материала приводит к образованию поля остаточных напряжений, растягивающие компоненты которого оказываются причиной возникновения определенной системы трещин.

Конфигурации трещин при различных условиях контактного нагружения достаточно разнообразны. При контактировании согласованных поверхностей поле напряжений может не иметь высоких градиентов компонент, возникающие трещины могут мало отличаться от трещин в деталях без контактного нагружения. В качестве наглядного примера особой конфигурации трещин, возникающих при контактном воздействии при значительных градиентах компонент поля напряжений, приведем из статьи П. Остожика и Р. Макферсона [27] схему образования трещин в полупространстве, нагружаемом сферическим индентором (рис. 1). Диаграмма нагружения и разгрузки расположена в центре рисунка.

Вначале (рис. 1,а) контакт упругий, но при достижении максимумом касательных напряжений критерия пластичности, под поверхностью возникает зона пластичности (темная зона ПЗ на рис. 1,б-в). На поверхности у границы площадки контакта (в зоне растягивающих первых главных напряжений) появляются отдельные дуговые трещины. При больших нагрузках таких трещин становится больше, длина их увеличивается. В итоге дуговые трещины замыкаются, образуя одну или несколько круговых (кольцевых) трещин, вложенных одна в другую. Одна такая трещина обозначена на рис. 1,б двумя короткими сплошными линиями, направлен-

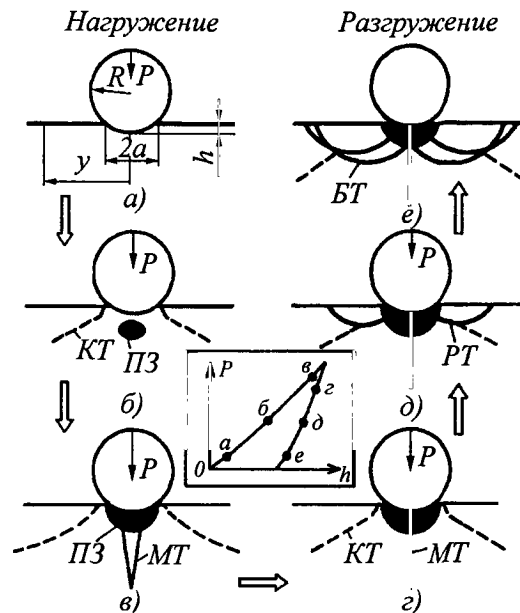


Рис. 1

ными от поверхности почти вертикально. При дальнейшем повышении нагрузки кольцевая трещина перерастает в коническую трещину КТ. Далее формируется пространственная трещина в виде усеченного конуса, так называемый, конус Герца. Кроме того, увеличение нагрузки приводит к увеличению пластической зоны, у основания которой возникает (рис. 1,в) медианная трещина МТ.

При разгрузке медианная трещина закрывается за счет сжимающих сил упругодеформированной части материала (рис. 1,г). Однако при разгрузке напряжения на поверхности меняют знак, и при остаточной силе, равной примерно половине максимальной (рис. 1,д), возникает система радиальных трещин РТ. Такие трещины зарождаются у краев контактной площадки и растут при дальнейшей разгрузке. Иногда одна из радиальных трещин сливается с медианной. После полного снятия нагрузки (рис. 1,е) под пластически деформированной зоной возникают большие растягивающие напряжения, которые создают систему боковых трещин БТ. Эти трещины берут свое начало от границы пластической зоны незадолго до полного снятия нагрузки (составляющей примерно 10 % максимальной), ориентированы они почти параллельно поверхности и затем растут вверх, принимая блюдцеобразную форму. Пересечение радиальных трещин с боковыми приводит к образованию осколков. Если подобным образом нагружается не полупространство, а плита конечной толщины,

то возможно прорастание конических, радиальных и медианных трещин до тыльной поверхности плиты. Из середины плиты выдавливается усеченный конус, заполненный осколками, как показано в работах С. С. Солнцева и Е. М. Морозова [17], Б. Л. Глушака с соавторами [6].

Появление целой системы близлежащих и взаимовлияющих трещин существенно осложняет процедуру моделирования процесса разрушения. Аналитическому описанию поддаются стадии появления и развития одной трещины в наиболее напряженном месте. Начиная с этого момента, трещины могут существенно изменить исходное напряженное состояние, что весьма сложно учесть при построении аналитических моделей.

На рис. 1 видно, что медианные, радиальные и боковые трещины как бы «вылезают» из пластической зоны и растут в упругой зоне, где пластическое деформирование затруднено из-за малости касательных напряжений. Этот факт предопределяет возможность использования аппарата линейной механики разрушения и позволяет оперировать понятием коэффициента интенсивности напряжений. Заметим, однако, что в большинстве случаев при этом необходимо учитывать трехмерное поле напряженно-деформированного состояния, чем аналитические модели зачастую пренебрегают.

В заключении вводного пункта сформулируем некоторые приложения задач, решаемых методами механики контактного разрушения: определение вязкости разрушения поверхностных слоев материала; оценка уровня остаточных поверхностных напряжений; определение параметров функций распределения поверхностных дефектов; описание развития поверхностных и подповерхностных трещин, в том числе с изменением их траекторий; описание взаимодействия системы трещин; определение критериев выкрашивания фрагментов поверхностного слоя и оценка объема таких фрагментов; построение на этой основе моделей изнашивания (многообразие реализуемых при этом условий нагружения многократно усложняет задачу).

2. Моделирование развития трещин при упругом статическом индентировании. Приведем пример возможностей численных методов при решении детерминированной задачи о развитии хрупкой трещины 3 при внедрении жесткого цилиндрического штампа с плоским основанием 1 в цилиндрический блок ограниченных размеров 2 из высокоэластичного нелинейно-упругого материала (рис. 2). В работе С. В. Пономорева [15] применялся метод конечных элементов в осесимметричной геометрически нелинейной постановке с использованием треугольных (в сечении тора) шестиузловых конечных элементов второго порядка. Процесс реального возрастания нагрузки и соответствующего развития трещины смоделирован пошаговой процедурой приращения вертикальных перемещений нижней границы эластичного блока.

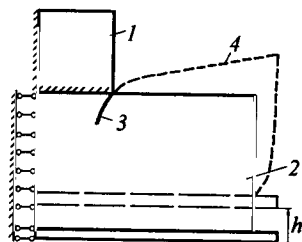


Рис. 2

Критическая глубина внедрения, при которой начинается разрушение материала, определялась из эксперимента, а развитие трещины моделировалось численно. Локальное сингулярное поле напряжений у вершины трещины моделировалось смещением средних узлов квадратичных конечных элементов. Начальное направление трещины в расчетах задавалось вдоль образующей боковой поверхности деформированной конфигурации эластичного блока (линия 4 на рис. 2). Длина трещины при заданной глубине внедрения штампа определялась из условия равенства вязкости разрушения $G_{IC} = 2\gamma$ интенсивности освобождения упругой энергии в вершине трещины G . Причем после появления или продвижения трещины сетка конечных элементов перестраивалась. Конфигурация трещины в таких условиях нагружения высокоэластичного материала имеет специфическую форму (линия 3 на рис. 2), подтвержденную экспериментально. Для такой трещины, нагруженной сжимающими напряжениями, оказалось существенным трение берегов трещины. Численное моделирование позволило учесть практически все влияющие факторы.

Явление хрупкого контактного разрушения характеризуется значительным рассеиванием результатов, что указывает на необходимость статистического описания распределения дефектов, распределения прочностных свойств материала и учета масштабного фактора. В простейшей статистической модели приняты гипотезы: рассеивание результата определяется концентрацией и размерами (глубиной) поверхностных микротрещин; повреждения не искажают исходную картину напряженного состояния; нет взаимодействия между дефектами и развивающимися из них трещинами; стадией развития дуговых трещин и образования замкнутой кольцевой трещины пренебрегают и сразу рассматривают этап распространения кольцевой трещины в глубину материала.

Возможные различия глубины кольцевых трещин могут привести к страгиванию одной из них, удаленной на расстояние $y/a = 1 \div 2$ от центра контакта (геометрические параметры обозначены на рис. 1,а), а не только в точке $y/a = 1$, где значения напряжений максимальны. Если задана функция распределения концентрации и глубины исходных

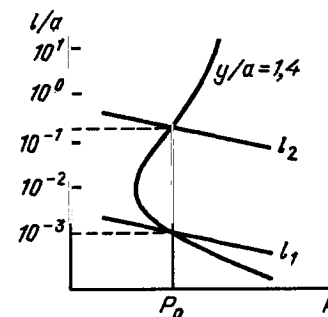


Рис. 3

кольцевых коротких трещин, можно оценить возможность страгивания хотябы одной из них. Опириуют с безразмерной длиной трещины l/a , а границу перехода от короткой трещины к длинной (макротрещине) принимают равной $l/a = 3 \cdot 10^{-2}$.

Графически критерии страгивания упругой кольцевой трещины и развития конической трещины представляют в виде, так называемой, кривой герцевского разрушения (на рис. 3 изображена схема такой кривой для определенного расположения трещины y/a) в координатах « l/a — P », где P — приложенная к сфере нагрузка. Каждому уровню нагрузки P_c соответствует на диаграмме два значения длины трещины: l_1 и l_2 .

Критерий страгивания короткой трещины ($l/a < 3 \cdot 10^{-2}$), расположенной перпендикулярно к поверхности, (критическое значение силы) определяется зависимостью

$$P_c = \frac{32}{3(1,12)^2} \frac{kR\gamma}{(1-2\nu)^2(1-\nu^2)} \left(\frac{l}{a}\right)^{-1} \left(\frac{y}{a}\right)^4,$$

где $k = \frac{9}{16} [(1-\nu^2) + (1+\nu^2)E/E_1]$ — фактор, учитывающий упругие постоянные индентора (E_1, ν_1) и полупространства (E, ν). Критическая сила по этому уравнению обратно пропорциональна относительному размеру трещины, что указывает на неустойчивый рост коротких трещин после достижения P_c . Для трещины исходных размеров l_1 достижение критической нагрузки P_c приводит к скачкообразному перерастанию короткой кольцевой трещины в макроскопическую коническую трещину размером l_2 . При этом трещина изменяет свою пространственную ориентацию и движется под углом к поверхности, следуя траектории главных напряжений. Такой процесс скачкообразного подрастания хрупких трещин подтверждается экспериментально.

Для описания развития длинной ($l/a > 3 \cdot 10^{-2}$) конической трещины принято, что траектория ее прямолинейна; развитие трещины не нарушает исходного поля напряжений. В рамках этих допущений получено выраже-

ние для критической силы

$$P_c \sim RG_{IC} \left(\int_0^l \frac{\sigma_a dz}{\sqrt{l-z}} \right)^{-2}.$$

Здесь R — текущий радиус основания конуса Герца, l — длина образующей (трещины) конуса, σ_a — безразмерное напряжение на поверхности трещины, составляющей угол с дневной поверхностью. Для длинной трещины зависимость критической силы от длины трещины нанесена на рис. 3 в виде кривой, которая является продолжением линии для коротких трещин и характеризует устойчивое развитие. Упрощенные соотношения между характерной величиной длинной конической трещины и нагрузкой получил Ф. Рослер, пренебрегая формой и размерами индентора. В качестве характерного размера трещины выбран радиус основания герцевского конуса R , связанный с критической силой соотношением $P^2 \sim R^3 EG_{IC}$.

Уровень критической нагрузки зависит от следующих параметров: первоначального размера микротрещины l ; соотношения y/a (следовательно, от распределения глубины и плотности поверхностных микротрещин); вязкости разрушения материала G_{IC} . В случае наличия остаточных поверхностных напряжений σ^r эти параметры также входят в выражения для критической силы. Экспериментально определить разрушающее напряжение проще, чем измерить перечисленные параметры. Поэтому эксперименты с нагружением сферой поверхности хрупких тел могут использоваться для приближенного определения указанных величин.

Параметры функции распределения микротрещин методами микроиндентирования можно определить прямым и косвенным методами. В основе прямого метода лежат измерения минимальной нагрузки P_i , при которой образовался герцевский конус от исходной трещины глубиной l_k при выполнении N нагружений. Результаты экспериментов по герцевскому разрушению обрабатываются статистически. Плотность поверхностных микротрещин определяется функцией

$$\lambda(l_k) = n(l_k) / \sum_{i=1}^N S_i(l_k),$$

где $n(l_k)$ — число трещин, приводящих к образованию конуса, S_i — площадь, подверженная нагружению при однократном воздействии индентора. Косвенный метод основан на том, что в модели образования хрупкой трещины заложена некоторая статистическая функция распределения плотности микротрещин различных размеров. Если экспериментально определить критическое значение силы, можно расчетом получить неизвестные параметры выбранного распределения, как описано у Г. Гамильтона и Х. Роусона [23].

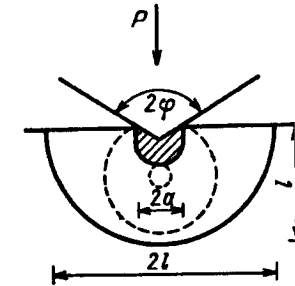


Рис. 4

Из приведенных формул для критической силы можно получить вязкость разрушения, выполнив индентирование до образования хрупкой трещины. Сознвая приближенность таких подходов, их можно применять, так как это неразрушающие методы контроля, не требующие вырезания специальных образцов, с их помощью могут быть получены характеристики трещиностойкости тонких поверхностных слоев, подвергнутых специальной обработке. Аналогичным образом формулы, содержащие остаточные напряжения, можно использовать для оценки этих напряжений.

Б. А. Галанов и О. Н. Григорьев [5] выявили аналогичное влияние перечисленных выше основных факторов на механизм хрупкого разрушения при использовании инденторов в форме пирамиды.

3. Зарождение и развитие трещин при упругопластическом индентировании. В отличие от условий упругого нагружения, когда возникает коническая трещина, появление пластических деформаций материала способствует образованию других систем трещин, см. рис. 1, в-д. Большая часть объема материала под индентором находится в состоянии, близком ко всестороннему сжатию. В зоне действия высоких давлений процессы скольжения затруднены, всестороннее сжатие материала препятствует процессу трещинообразования. На границе пластической и упругой зон при нагружении и при разгрузке возникают большие растягивающие напряжения, которые стимулируют процесс трещинообразования.

Образование и развитие *медианных* трещин экспериментально изучено полнее других. Поэтому могут быть построены относительно точные модели этих процессов, как например, в работе Б. Лоуна и А. Эванса [24]. Методами механики разрушения могут быть определены такие критические условия, когда из микротрещины на границе пластической и упругой зоны образуется начальная медианная макротрещина дискообразной формы (на рис. 4 это — маленькая окружность, очерченная штриховой линией). Развитие такой дисковой трещины неустойчиво. При достижении пороговой нагрузки $P_c \sim K_c^4/H^3$ (твердость $H = P/\pi a^2$) края медианной трещины скачком прорастают вплоть до поверхности полу-

пространства (большая окружность, очерченная штриховой линией). Медианная трещина превращается в полудисковую (изображенную на рис. 4 сплошной линией и называемую иногда осевой трещиной) и начинает распространяться устойчивым образом (критическая сила пропорциональна длине трещины). Диаграмма «сила–радиус» медианной трещины качественно соответствует подобной диаграмме развития конической трещины (см. рис. 3).

Радиальные и боковые трещины возникают лишь после появления пластической деформации и последующей разгрузки. Возникающие остаточные растягивающие напряжения способствуют появлению радиальных трещин. С учетом критерия Ирвина получено, что длина *радиальной* трещины l , отсчитываемая от края контактной площадки, прямо пропорциональна максимальной нагрузке P , прикладываемой к шару при внедрении. Этот результат находится в хорошем соответствии с опытами. Для *боковых* трещин, применения критерия Ирвина, Д. Маршалл, Б. Лоун и А. Эванс [26] получили следующее соотношение между длиной развивающейся трещины (после снятия нагрузки от действия остаточных напряжений) и первоначально приложенной силой: $l \sim P^{5/8} K_{IC}^{-1/2}$.

Практические приложения моделей упругопластического индентирования построены на тех же принципах, что и для упругого индентирования. Зависимость для определения характеристик трещиностойкости сверхтвердых материалов по результатам внедрения пирамиды Виккерса имеет вид

$$K_{IC} = \left(\frac{2,3 \sin(\varphi/2)}{C} \right) \frac{P}{a^{3/2}} \lg \left(\frac{4,5a}{l_R} \right),$$

где $\varphi = 68^\circ$, l_R — длина радиальной трещины, образующейся вдоль диагонали пирамиды a . Более совершенный способ определения трещиностойкости материалов высокой твердости изложен в работах Н. В. Новикова с соавторами [12, 13]. Способ состоит в двухступенчатом нагружении с последующим определением критического коэффициента интенсивности напряжений для медианной полудисковой трещины по формуле

$$K_{IC} = \frac{6}{\pi^{3/2}} \frac{P_c}{l_M^{1/2} a^2 \operatorname{tg} \varphi} \left[l_M - \frac{1}{2} (l_M^2 - a^2)^{1/2} - \frac{l_M^2}{2a} \arcsin \frac{a}{l_M} \right]$$

и по формуле

$$K_{IC} = P_c f(l_R/a) \sqrt{l_R} / (a^2 \sqrt{2\pi^3})$$

для радиальной трещины, где функция $f(l_R/a)$ табулирована.

Остаточные напряжения в поверхностных слоях можно определять по методике С. Видерхорна и Б. Лоуна [28]. Приравнивается сумма коэффициентов интенсивности напряжений (от действия остаточных напряжений и от напряжений при индентировании полупространства без остаточных напряжений) критическому значению коэффициента интенсивно-

сти напряжений. Если из экспериментов по внедрению индентора в материал с остаточными напряжениями и без них определить длину полудисковой медианной трещины, то можно вычислить (осредненные по глубине порядка длины трещины) остаточные напряжения по формуле $\bar{\sigma} = (P^r - P) / (l^2 \pi^{3/2} \operatorname{tg} \varphi)$, где P^r — нагрузка, вызывающая полудисковую трещину диаметра $2l$ в материале с остаточными напряжениями.

4. Динамическое нагружение. Описанные выше типы трещин (конус Герца, радиальные, медианные, боковые) образуются и при динамическом контактном нагружении. Однако последовательность образования трещин, их количество и величина могут значительно отличаться в зависимости от сочетания свойств материалов соударяемых тел и режимов нагружения (скоростей соударения). Влияет также соотношение энергетических затрат на обратимые и необратимые эффекты деформирования, причем для проявления последних необходимо некоторое время удержания материала в нагруженном состоянии. Волновые процессы, играющие преобладающую роль при высокоскоростном ударе также вызывают появление трещин. Возможен выброс разрушенных фрагментов материала и образование кратеров. При сильном ударе капли жидкости по поверхности также могут появляться аналогичные трещиноподобные дефекты. Многие из этих вариантов разрушения и соответствующие расчетные модели проанализированы в нашей работе [11]. При этом подчеркивается преимущество современных численных методов, основанных на дискретизированном представлении нагружаемого объема материала, как например, в монографии Б. Л. Глушака с соавторами [6].

Разрушение при динамической нагрузке будет хрупким, если критерий зарождения и развития трещин в упругой зоне растягивающих напряжений достигается ранее соответствующих критериев в пластической зоне. Такое разрушение характерно для преимущественно упругого характера контактирования при наличии поверхностных микротрещин. В этом случае, как и при статическом нагружении, образуется одна или система кольцевых поверхностных или конических трещин. Для формирования конуса Герца требуется определенное критическое напряжение или соответствующая ему скорость соударения, так называемая, критическая скорость удара. Упрощенные модели в рамках квазистатического приближения аналогичны рассмотренным моделям для упругого статического нагружения и приводят к формуле для критической скорости

$$v_c = K_{IC}^{5/3} \left(\frac{4k}{5m} \right)^{1/2} \left(\frac{R}{EB_2} \right)^{5/6},$$

в которой m — масса ударника, B_2 — эмпирическая постоянная.

При упругопластическом динамическом разрушении длина медианных трещин на 40 % больше, чем при статическом. Наибольшие трудности представляет объяснение закономерностей образования и роста бо-

ковых трещин при контактном ударе. В основу модели положена гипотеза о возникновении больших напряжений растяжения в плоскости вблизи границы упругой и пластической зон, в результате отражения от этой границы упругой волны разгрузки. Используя это обстоятельство и экспериментальные данные по глубине внедрения при ударе, А. Эванс, М. Гульден и М. Розенблатт [21] получили зависимость глубины залегания боковых трещин b_L от скорости удара шара. Показано, что $(b_L/R)^2 \sim v_0(\rho/H)^{1/2}$, где ρ — плотность, а H — твердость материала полупространства.

Установлено также, что при ударе длина боковых трещин пропорциональна длине медианных. Использование этого факта позволяет построить модели поверхностного растрескивания хрупких материалов при соударении. Образующиеся при ударе радиальные трещины также значительно больше возникающих при статическом нагружении с эквивалентным размером площадки контакта радиальных трещин. Тем не менее, при построении приближенных динамических моделей можно использовать некоторые положения статических методов решения. Например, А. Рафф и С. Видерхорн [16] предположили, что размер трещины связан с величиной нагрузки так же, как и при статическом нагружении, и получили соотношение

$$l_{max} \sim m^{4/9} H^{2/9} v_0^{8/9} K_{IC}^{-2/3}.$$

Практически все приближенные подходы подтверждают существенное влияние вязкости разрушения. Одна из таких моделей, изложенная в статье Ю.В. Колесникова, Е. М. Морозова и Г. М. Сорокина [10], основана на энергетическом критерии разрушения и приводит к формуле для радиуса образовавшейся трещины

$$l^3 = \frac{8m^2 v^4}{d^2 K_{ID}^2} = 32 \left(\frac{U_k}{dK_{ID}} \right)^2$$

(d — диаметр отпечатка, U_k — кинетическая энергия удара). Видно, что размер образующейся трещины сильно зависит от динамической вязкости разрушения. Несмотря на ряд сильных допущений, положенных в основу этой модели, экспериментальные результаты неплохо соответствуют расчетным.

Практические приложения механики контактного разрушения при динамическом воздействии нацелены, главным образом, на построение моделей некоторых видов изнашивания (например, эрозионного). Кроме того, возможна оценка динамической вязкости разрушения. Например, согласно модели из статьи [10], испытуемый материал подвергают динамическому нагружению коническим или пирамидальным индентором с массой m и скоростью v до получения на поверхности материала отпечатка размером d и поверхностных трещин размером l . Критическое значение динамического коэффициента интенсивности напряжений можно оценить по формуле $K_{ID} = 1,2mv^2/(nd\sqrt{l^3})$, где n — число трещин.

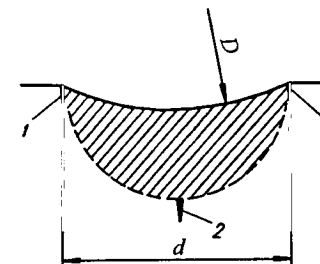


Рис. 5

5. Зарождение и развитие трещин при многократном воздействии индентора. Наиболее развиты в настоящее время модели повреждения поверхностного слоя при многократном воздействии системы частиц или капель жидкости, приводящем к эрозионному или кавитационному изнашиванию. При этом применяются как упрощенные аналитические модели, так и более современные и перспективные, основанные на дискретном представлении повреждаемой поверхности.

Остановимся на одной из приближенных моделей разрушения стальных поверхностей при многократном ударном нагружении «тупыми» инденторами, изложенной в статье [10]. При таком нагружении материал находится преимущественно в пластическом состоянии, под остаточным отпечатком имеется пластическая зона, на границе которой при многократном деформировании образуются зародышевые микротрещины (рис. 5). По мере упрочнения материала они подрастают и переходят в магистральные медианные трещины (2 на рис. 5). В результате воздействия растягивающих напряжений на поверхности около кольцевой границы отпечатка образуются дуговые или кольцевые трещины (1 на рис. 5). Возможно слияние этих трещин с образованием сегментного фрагмента выкрашивания (на рис. 5 заштрихован).

Наличие макропластического деформирования материала позволяет предположить, что в этом случае разрушение соответствует механизму малоциклового усталости. Поэтому для анализа процесса можно воспользоваться модифицированным уравнением Мэнсона–Коффина $\epsilon N_f^m = C_\psi$, где ϵ — относительная деформация за первый цикл нагружения, N_f — долговечность материала,

$$C_\psi = 0,5 \ln \left(\frac{1}{1-\psi} \right),$$

ψ — сужение образца, m — постоянная, величина которой для контактной усталости может быть принята равной 0,4. Условие равенства энергии последнего удара ($N = N_f + 1$), при котором происходит отделение фрагмента, и энергии образования сферического фрагмента выкрашивания позволяют

оценить размеры откалывающихся фрагментов и соответствующее число циклов $N = N_f$. Сопоставление расчетных и экспериментальных данных подтвердило работоспособность этой приближенной модели.

6. Построение моделей изнашивания на основе механики контактного разрушения подробнейшим образом проанализировано в нашей работе [11]. Приведены примеры построения критериев для ранжирования по износостойкости различных материалов при различных видах изнашивания. Показана целесообразность введения в такие критерии параметров трещиностойкости материала. В случае эрозионного воздействия частиц на поверхность образуются боковые трещины и дискообразный фрагмент выкрашивания. Объем такого фрагмента

$$V \sim (E/H)^{5/4} K_{IC}^{-1} H^{-1/6} U_k^{7/6},$$

где U_k — кинетическая энергия единичного удара, как это показано Д. Маршаллом, Б. Лоуном и А. Эвансом [26].

Критерий ударно-абразивного изнашивания Ю. В. Колесников [8] предложил строить на основе оценки объема отделяемого фрагмента при динамическом внедрении сферической частицы диаметром D :

$$V \sim \sqrt{HW_k^3 / (K_{IC}^2 D^{1/2})},$$

где параметр W_k связывает диаметр отпечатка с диаметром шара. Видно, что трещиностойкость влияет на износостойкость в большей степени, чем твердость. Более строгие критерии механики упругопластического усталостного повреждения использованы в модели кавитационного изнашивания, приведенной в статье В. М. Волкова и А. Н. Петухова [4].

Механику разрушения начинают использовать для анализа практически всех видов изнашивания, так как типичной ее задачей является описание образования и отделения фрагментов выкрашивания (частиц износа). Повышенная сложность задач механики контактного разрушения сдерживает развитие указанного направления, но применение численных методов позволит разрешить большинство возникающих проблем. Некоторые модели изнашивания, основанные на подходах механики разрушения, описаны в наших работах [9, 11]: повреждение при скольжении поверхностей, появление ямок питтинга и изнашивания отслаиванием, зарождение и развитие трещин фреттинг-усталости.

Для случаев одновременного протекания процессов объемной усталости и износостойкого повреждения поверхности применяют системные подходы, такие как трибофатика, основные положения которой изложены в статье Л. А. Сосновского и Н. А. Махутова [18]. Существует некоторое различие в степени проработки проблем моделирования процессов усталости и износа. Относительное отставание в области моделирования процессов изнашивания объясняется большей сложностью условий эксплуа-

тации материала и большим числом влияющих факторов по сравнению с объемной усталостью материала.

В качестве варианта численного моделирования долговечности узлов трения можно рассматривать изложенную М. В. Зерниным в статье [7] методику оценки долговечности подшипников скольжения, учитывающую комплекс воздействий и критериев отказа. Методика основана на пространственной и временной дискретизации процессов накопления повреждений различного вида. Основа моделирования состоит в описании накопления микротрещин в нагружаемых объемах. Для различных дискретных участков возможно применение различных моделей накопления повреждений, описывающих различные виды износа и механическую усталость. В итоге моделируется зарождение коротких трещин, их подрастание до размеров макротрещин, развитие макротрещин, повышенная скорость повреждения приповерхностных слоев, удаление поверхностных слоев материала вследствие износа.

Другой пример комплексного моделирования изложен в работе В. М. Богданова с соавторами [3]. Модель использована для решения задач контактирования колеса с рельсом с учетом изнашивания поверхностей. Случайными являются параметры единичного акта — однократного прохождения колеса по рельсу. Характеристики взаимодействия колеса с рельсом в течение каждого единичного акта неизменны, но назначаются случайным образом с использованием соответствующих функций распределения. Единичный акт взаимодействия дает вполне конкретное расчетное приращение износа. Помимо пошаговой процедуры отыскания изношенного профиля обеих деталей, предусмотрен переход от одного вида изнашивания к другому в соответствии со специально сформулированным условием. Оценивается также накопление усталостных повреждений в рельсе, для чего выполняется расчет его напряженного состояния и по амплитуде касательных напряжений в каждой точке сечения рельса оценивается уровень накопленных усталостных повреждений за каждое единичное воздействие с колесом. Суммарное значение поврежденности сравнивается с некоторым допустимым уровнем для оценки критического состояния.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В. М. Контактное взаимодействие упругих тел с учетом зон локального разрушения // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 1. С. 34–38.
2. Александров В. М., Китнис Л. А. Линия скольжения в конце штампа, вдавливаемого в полуплоскость // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 2. С. 266–271.
3. Богданов В. М., Горячев А. П., Горячева И. Г. и др. Моделирование процессов контактирования, изнашивания и накопления повреждений в сопряжении колесо-рельс // Трение и износ. 1996. Т. 17. № 6. С. 12–26.
4. Волков В. М., Петухов А. Н. Моделирование разрушения металлических поверхностей при воздействии ультразвуковой кавитации // В межвузовском сб.

- научных трудов: Механика разрушения, надежность и техническая диагностика тонкостенных конструкций: Нижний Новгород: НГТУ, 1996. С. 36–41.
5. *Галанов Б. А., Григорьев О. Н.* Деформация и разрушение сверхтвердых материалов при сосредоточенном нагружении // Проблемы прочности. 1986. № 10 С. 36–42.
 6. *Глушаков Б. Л., Новиков С. А., Рузанов А. И., Садырин А. И.* Разрушение деформируемых сред при импульсных нагрузках. Нижний Новгород: НГУ, 1992. 193 с.
 7. *Зернин М. В.* Дискретное моделирование повреждений подшипников скольжения с учетом комплекса воздействий и критериев отказа. Сообщение 1. Общая схема расчета долговечности // Трение и износ. 1996. Т. 17. № 6. С. 747–755.
 8. *Колесников Ю. В.* Уточнение прочностных критериев оценки износа сталей при ударе. // Вестник машиностроения. 1994. № 6. С. 25–27.
 9. *Колесников Ю. В., Морозов Е. М.* Механика контактного разрушения. М.: Наука, 1988. 224 с.
 10. *Колесников Ю. В., Морозов Е. М., Сорокин Г. М.* Образование фрагментов выкрашивания на стальной поверхности при контактном ударе // Проблемы прочности. 1989. № 2. С. 49–53.
 11. *Морозов Е. М., Зернин М. В.* Контактные задачи механики разрушения. М.: Машиностроение, 1998. 544 с.
 12. *Новиков Н. В., Дуб С. Н., Буличев С. И.* Определение вязкости разрушения для малопластичных металлов индентированием // Заводская лаборатория. 1988. № 7. С. 60–67.
 13. *Новиков Н. В., Майстренко А. Л.* Трещиностойкость кристаллических и композиционных сверхтвердых материалов // Физ.-хим. механика материалов. 1983. № 4. С. 46–53.
 14. *Пинегин С. В., Орлов А. В., Гудченко В. М.* Контактная прочность ситаллов. М.: Наука, 1970. 80 с.
 15. *Пономорев С. В.* Внедрение жесткого штампа в эластичный материал / В книге: Механика деформируемого твердого тела. Томск: ТГУ, 1987. С. 147–152.
 16. *Рафф А. У., Видерхорн С. М.* Эрозия при ударе твердых частиц // Эрозия. Сб. статей под ред. К.Прис. М.: Мир, 1982. С. 80–139.
 17. *Солнцев С. С., Морозов Е. М.* Разрушение стекла. М.: Машиностроение, 1978. 152 с.
 18. *Сосновский Л. А., Махутов Н. А.* Методологические проблемы комплексной оценки поврежденности и предельного состояния силовых систем // Заводская лаборатория. 1991. № 5. С. 27–40.
 19. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
 20. *Черепанов Г. П., Соколинский В. В.* О разрушении хрупких тел при соударении // Контактные задачи и их инженерные приложения. - М.: НИИМАШ, 1969. С. 168–178.
 21. *Evans A. G., Gulden M. E., Rozenblatt M.* Impact damage in brittle materials in the elastic/plastic response regime // Proc. Roy. Soc., London, Ser. A. 1978. V. 361. № 1706. P. 343–365.
 22. *Frank F. C., Lawn B. R.* On the theory of Hertzian fracture. // Proc. Roy. Soc., Lond., Ser. A. 1967. V. 299. № 1458. P. 20–306.
 23. *Hamilton G., Rawson H.* The determination of the flow distributions on various glass surfaces from Hertz fracture experiments // J. Mech. Phys. Solids. 1970. V. 18. № 2. P. 127–147.
 24. *Lawn B. R., Evans A. G.* A model for crack initiation in elastic/plastic indentation fields // J. Mater. Sci. 1977. V. 12. № 11. P. 2195–2199.

25. *Lawn B. R., Wilshaw T. R.* Indentation fracture: principles and application // J. Mater. Sci. 1975. V. 10, № 6. P. 1049–1081.
26. *Marshall D. B., Lawn B. R., Evans A. G.* Elastic-plastic indentation damage in ceramics: the lateral crack system // J. Amer. Ceram. Soc. 1982. V. 65. № 11. P. 561–566.
27. *Ostojic P., McPherson R.* A review of indentation fracture theory: its development, principles and limitations // Int. J. of Fracture. 1987. V. 33. № 4. P. 297–312.
28. *Wiederhorn S. M., Lawn B. R.* Strength degradation of glass resulting from impact with spheres // J. Amer. Ceram. Soc. 1977. V. 60. № 9–10. P. 451–458.

§ 2. ОБ ЭРОЗИОННОМ РАЗРУШЕНИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Н. Ф. Морозов, В. И. Смирнов, Ю. В. Петров

1. Введение. Исследование различных видов разрушения деталей машин и устройств предполагает, в частности, изучение процессов эрозии металлов, сплавов и покрытий для разработки рациональных методов повышения эрозионной стойкости материалов, подверженных воздействию твердых, жидких и газообразных частиц. В частности, проблема повышения эрозионной стойкости конструкционных материалов становится все более актуальной на транспорте в связи с постоянным стремлением повышать скорость перемещения транспортных средств.

При движении жидких и газообразных потоков в таких распространенных устройствах как компрессоры, двигатели внутреннего сгорания, турбореактивные и реактивные двигатели, происходит эрозионное разрушение различных деталей. Особенно следует отметить газопылевую эрозию сопловых устройств и газовых эжекторов, используемых в авиационной и ракетной технике. Также подвергаются эрозионному разрушению лопатки паровых и газовых турбин авиационных и ракетных жидкостных двигателей, которые работают при высоких температурах газовых потоков [15].

Процесс эрозионного разрушения материалов является многостадийным и многоуровневым. Его адекватное моделирование требует привлечения самых современных средств экспериментальной и вычислительной техники. В то же время, чрезвычайно актуальной является задача формулировки приемлемых для инженерной практики принципов, позволяющих прогнозировать и проводить качественный анализ соответствующих эффектов. Эта задача может быть решена только на основе исследования фундаментальных физико-механических закономерностей данного процесса. В этой работе рассматриваются соответствующие проблемы моделирования разрушения конструкционных материалов на примере газопылевой эрозии.

Исследование эрозии поверхностей при ударе твердых частиц неизбежно приводит к необходимости привлечения аппарата механики разрушения материалов. К сожалению, использование традиционных квазистатических моделей механики разрушения не позволяет объяснять многие наблюдаемые эффекты. Во многих случаях это связано с тем, что применяемые классические критерии разрушения не соответствуют специфике эрозионного процесса. Эрозионное разрушение — процесс сугубо динамический, поэтому он не может быть эффективно проанализирован на основе традиционных статических критериальных соотношений, каким является, например, критерий критического напряжения.

Важнейшей особенностью эрозионного процесса является то, что при этом поверхность подвергается воздействию очень коротких динамиче-

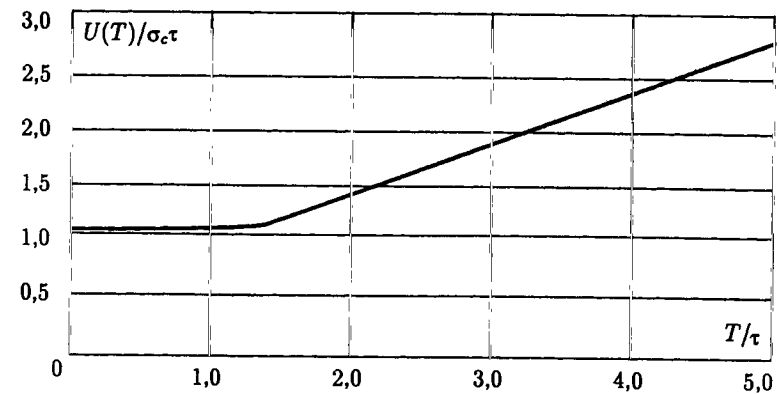


Рис. 1

ских импульсов напряжения. Оценка возможности разрушения в таких условиях может быть проведена только на основе критериев, учитывающих специфику скоростного динамического разрыва твердых тел. Эффективным средством анализа процессов быстрого разрушения является структурно-временной критерий [5, 8, 19]

$$\frac{1}{\tau} \int_{t'-\tau}^{t'} dt \frac{1}{d} \int_0^d \sigma(t, r) dr \leq \sigma_c, \quad (1)$$

где τ и d — структурное время и структурный размер разрушения, σ_c — статическая прочность материала, $\sigma(t, r)$ — максимальное растягивающее напряжение у вершины трещины ($r = 0$). Структурный размер d определяется по данным квазистатических испытаний образцов с трещинами и в случае обобщенного плоского деформированного состояния может быть выражен [19] через статическую вязкость разрушения и прочность простой формулой $d = 2K_{Ic}^2 / (\pi\sigma_c^2)$. В соответствии с данным подходом σ_c , K_{Ic} и τ образуют систему определяющих параметров, описывающих прочностные свойства материала. Согласно критерию, основной характеристикой динамического разрыва материалов является инкубационное время τ , характеризующее процессы микроразрушения структуры. Критерий (1) отражает дискретную природу динамического разрушения твердых тел [8].

При анализе разрушения «бездефектных» сред критерий принимает форму

$$\int_{t'-\tau}^{t'} \sigma(t) dt \leq \sigma_c \tau. \quad (2)$$

На рис. 1 показана получаемая при помощи структурно-временного критерия зависимость величины полного порогового импульса разруша-

ющего напряжения от его длительности в условиях откола [7]. Эта зависимость показывает, что, зная пороговые значения очень коротких импульсов нагрузки, можно определить соответствующее данному материалу инкубационное время разрушения. Это приводит к возможности связать динамическое разрушение с явлением эрозии поверхностей в потоках газа, несущих твердые частицы.

Положим* $\tau = d/c$, где c — максимальная скорость упругих волн и обратимся к проблеме эрозии.

2. Моделирование хрупкого разрушения. Фрактографический анализ показывает [13], что при эрозионном разрушении определяющим фактором является образование хрупких кольцевых трещин, производимых контактным динамическим взаимодействием летящих твердых частиц с поверхностью. Применяемые в экспериментах по эрозионному разрушению мелкие частицы радиусом порядка нескольких десятков или сотен микрон при контактном взаимодействии с поверхностью производят чрезвычайно короткие разрывающие импульсы. Зная их характеристики, а также значение пороговой скорости удара (потока), при которой начинается эрозионное разрушение поверхности, можно определить элементарный «квант» разрушения [8, 9] и соответствующее ему инкубационное время. С другой стороны, зная определяющие параметры критерия разрушения, можно рассчитывать принципиальные характеристики эрозионного процесса. Покажем, как данная схема может быть реализована в простейшем приближении на основе классической задачи механики контактного удара [4]. Пусть сферическая твердая частица радиуса R со скоростью v падает на поверхность упругого полупространства. Считаем, что уравнение движения частицы (индентора) записывается в виде

$$m \frac{d^2 h}{dt^2} = -P, \quad (3)$$

где h — сближение, P — контактная сила, m — масса частицы. Согласно квазистатической теории удара Герца соотношение между контактной силой и сближением при ударе остается таким же, как в статике. Это соотношение может быть представлено в виде

$$P(t) = kh^{3/2}, \quad (4)$$

где

$$k = \frac{4}{3} \sqrt{R} \frac{E}{(1-\nu^2)}, \quad (5)$$

* В [7] показано, что данный выбор параметра τ обеспечивает хорошее согласие расчетов по критерию (2) с экспериментальными результатами по откольному разрушению металлов и сплавов [1].

E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона. В начальный момент $dh/dt = v$, тогда, интегрируя (3), получаем

$$\frac{dh}{dt} = \sqrt{v^2 - \frac{4kh^{5/2}}{5m}}. \quad (6)$$

Максимальное сближение h_0 достигается при $dh/dt = 0$, откуда

$$h_0 = \left[\frac{5mv^2}{4k} \right]^{2/5}. \quad (7)$$

Для определения зависимости длительности удара от сближения проинтегрируем (6) и введем безразмерную величину $\eta = h/h_0$, тогда

$$t = \frac{h_0}{v} \int \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^{5/2}}}, \quad (8)$$

откуда продолжительность удара t_0 составит

$$t_0 = \frac{2h_0}{v} \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^{5/2}}} = 2,9432 \frac{h_0}{v}. \quad (9)$$

Численное интегрирование уравнения (8) позволяет построить зависимость функции сближения от времени $h(t)$. Эта зависимость с высокой точностью аппроксимируется [16, 20] выражением

$$h(t) \approx 0,995 h_0 \sin \left(\frac{\pi t}{t_0} \right). \quad (10)$$

Зависимость от времени максимального (радиального) разрывающего напряжения в точках поверхности, примыкающих к контактной площадке, вычисляется (в цилиндрической системе координат) [17] по формуле

$$\sigma_r(v, R, t) = \frac{1-2\nu}{2} \frac{P(t)}{\pi r_0^2(t)}, \quad (11)$$

где радиус контактной площадки $r_0(t)$ определяется

$$r_0(t) = \left[3P(t)(1-\nu^2) \frac{R}{4E} \right]^{1/3}, \quad (12)$$

а контактная сила $P(t)$ находится при помощи (4)–(10). Подставляя (12) в (11), находим

$$\sigma_r(v, R, t) = \frac{1-2\nu}{2} \frac{k\sqrt{h(t)}}{\pi R}. \quad (13)$$

Пусть v — пороговая скорость частицы, при которой происходит разрыв материала. Введем функцию

$$f(v, R, \tau) = \max_{t'} \int_{t'-\tau}^{t'} \sigma(v, R, t) dt - \sigma_c \tau. \quad (14)$$

В соответствии со структурно-временным критерием определим инкубационное время τ как положительный корень уравнения

$$f(v, R, \tau) = 0 \quad (15)$$

при заданных значениях v и R .

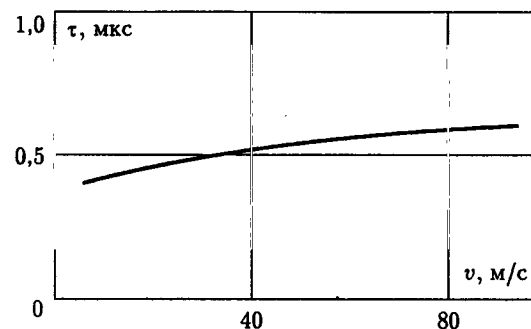


Рис. 2

Приведенные формулы могут быть использованы для расчета инкубационного времени на основе экспериментальных данных о пороговых скоростях эрозионного разрушения поверхностей.

Пусть алюминиевый сплав В95 с механическими параметрами $E = 73$ ГПа, $\nu = 0,3$, $\sigma_c = 456$ МПа подвергается эрозионному разрушению при характеристиках эродента $R = 150$ мкм, $\rho = 2400$ кг/м³ ($m = 4\pi\rho R^3/3$).

На рис. 2 показана рассчитанная при указанных параметрах зависимость инкубационного времени τ от пороговой скорости эрозионного разрушения. Видно, что в достаточно широком диапазоне скоростей, реально наблюдаемых для алюминиевых сплавов, методика дает адекватные опытам результаты.

Действительно, пороговая скорость частиц, при которой начинается процесс эрозионного разрушения поверхности данного материала, должна быть определена экспериментально. Для алюминиевого сплава с указанными механическими свойствами она оказывается [14] $v = 33$ м/с. Расчет по приведенным выше формулам дает следующие значения характеристик ударного взаимодействия частиц с поверхностью: $t_0 = 0,29$ мкс, $h_0 = 3,46$ мкм. Исследование показывает, что функция $f(v, R, \tau)$ имеет единственный положительный корень (рис. 3). Вычисленное при полученных данных инкубационное время материала оказывается равным: $\tau \approx 0,71$ мкс. Примечательно, что примерно то же значение для структурного времени может быть получено при помощи простой формулы ($\sigma_c = 456$ МПа, $K_{Ic} = 37$ МПа · м^{1/2}; $c = 6500$ м/с): $d/c = 2K_{Ic}^2/(\pi c \sigma_c^2) \approx 0,65$ мкс.

Полученное значение инкубационного времени позволяет построить диаграмму временной прочности для указанного сплава, соответствующую условиям задачи об отколе. На рис. 4 приведена «откольная» кривая, рассчитанная при значении инкубационного времени, найденном из опытов «по эрозии». Видно, что зависимость времени разрушения t_* от пороговых амплитуд P_* импульсов, вызывающих откол, включает как

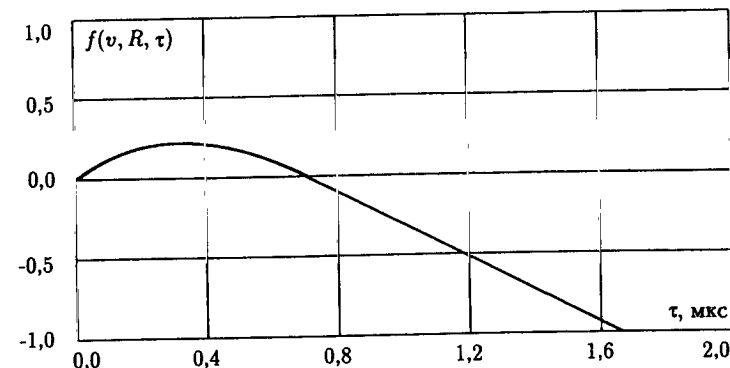


Рис. 3

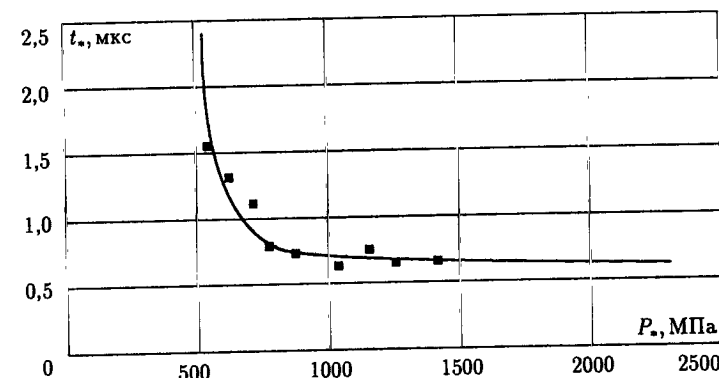


Рис. 4

статическую, так и динамическую ветви. Приведенные на том же рисунке точки, взятые из экспериментов по откольному разрушению алюминиевого сплава [1], показывают эффективность приведенной методики оценки структурного времени на основе данных об эрозии.

Справедливо и обратное — зная инкубационное время материала (например, из испытаний по отколу), можно определять принципиальные характеристики эрозионного процесса. На рис. 4 (кривая 1) представлена рассчитанная при $\tau = 0,71$ мкс зависимость пороговой скорости эрозионного разрушения сплава В95 от радиуса частиц эродента. Эта зависимость также характеризуется статической и динамической ветвями. Статический участок (горизонтальный) имеет слабую зависимость пороговой скорости от диаметра частиц эродента. Динамическая ветвь свидетельствует о быстром (степенном) росте пороговых скоростей с уменьшением их размера. Причем, имеется некоторый характерный размер — в рассмотренном слу-

чае порядка сотен микрон, — которому отвечает достаточно быстрый переход от квазистатического к динамическому режиму. Построенная теоретическая кривая качественно соответствует известным экспериментальным наблюдениям [12]. Заметим, что расчет по приведенной схеме с использованием традиционного критерия критического напряжения не дает объяснения наблюдаемому поведению пороговых скоростей эрозионного разрушения.

3. Моделирование вязкого разрушения. Представляет практический интерес рассмотреть возможность вязкого разрушения в области контакта абразивной частицы с поверхностью полупространства. Для анализа разрушения в этом случае воспользуемся динамическим критерием текучести [6]:

$$\frac{1}{\tau} \int_{t'-\tau}^{t'} \left[\frac{T(t)}{\sigma_Y} \right]^\alpha dt = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad (16)$$

где $T(t)$ — интенсивность касательных напряжений [2],

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{[\sigma_r(t) - \sigma_\theta(t)]^2 + [\sigma_\theta(t) - \sigma_z(t)]^2 + [\sigma_z(t) - \sigma_r(t)]^2}, \quad (17)$$

$\sigma_z, \sigma_r, \sigma_\theta$ — компоненты тензора напряжений в цилиндрической системе координат, α — экспериментально определяемая постоянная материала, σ_Y — предел текучести.

Максимум интенсивности касательных напряжений на поверхности полупространства достигается в точке, совпадающей с началом координат [11]. В этом случае $\sigma_r = \sigma_\theta$ и выражение (17) упрощается:

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma_z(t) - \sigma_r(t)),$$

где $\sigma_z(t)$ и $\sigma_r(t)$ определяются как

$$\begin{aligned} \sigma_z(0, 0, t) &= -\frac{3}{2} \frac{P(t)}{\pi r_0^2(t)}, \\ \sigma_\theta(0, 0, t) = \sigma_r(0, 0, t) &= -\frac{3(1+2\nu)}{4} \frac{P(t)}{\pi r_0^2(t)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Подставляя в (18) значения $P(t)$ и $r_0(t)$ согласно (4) и (12), получаем

$$\sigma_\theta = \sigma_r = -\frac{(1+2\nu)E}{1-\nu^2} \frac{\sqrt{h(t)}}{\pi\sqrt{R}}, \quad \sigma_z = -\frac{2E}{1-\nu^2} \frac{\sqrt{h(t)}}{\pi\sqrt{R}},$$

откуда

$$T(v, R, t) = \frac{3(1-2\nu)}{4\sqrt{3}} \frac{k\sqrt{h(t)}}{\pi R}, \quad (19)$$

где $h(t)$ определяется по формуле (10).

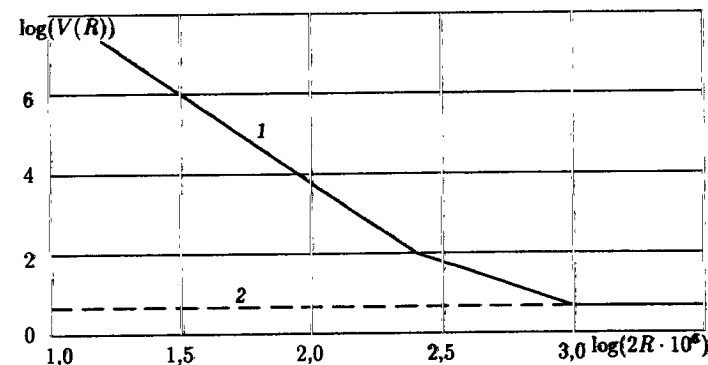


Рис. 5

Для сплава В95 в случае вязкого разрушения примем $\alpha = 8$ [18] и $\tau = 10$ мкс. Аналогично, (14) введем функцию

$$F(v, R, \tau) = \max_{t'} \int_{t'-\tau}^{t'} \left[\frac{T(v, R, t)}{\sigma_Y} \right]^\alpha dt - \frac{\tau}{\sqrt{3}},$$

откуда численно определяем пороговую скорость вязкого разрушения в зависимости от радиуса частиц эродента. Для сравнения на рис. 5 приведены зависимости пороговых скоростей для хрупкого (кривая 2) и вязкого (кривая 1) типов разрушения в зависимости от радиуса абразивных частиц. Как видно из рисунка, для заданных механических характеристик увеличение скорости удара приводит сначала к текучести материала, дальнейшее увеличение скорости вызывает появление трещин. С ростом размеров частиц наблюдается сближение типов разрушения.

Построенные теоретические кривые показывают существенное влияние размеров изнашивающих частиц на пороговые скорости эрозионного разрушения и, следовательно [13], на интенсивность эрозионного износа.

4. Удар цилиндрической частицы. Для оценки влияния геометрической формы эродента на характеристики ударного взаимодействия, рассмотрим нормальный удар торцом частицы в виде жесткого кругового цилиндра о поверхность упругого полупространства. Здесь приведем лишь выражения для основных расчетных характеристик — глубины внедрения, продолжительности удара и радиального напряжения на границе контактной площадки.

В данном случае соотношение между контактной силой и сближением будет иметь вид

$$P(t) = kh(t), \quad k = \frac{2r_0 E}{1-\nu^2}, \quad (20)$$

где r_0 — радиус цилиндра.

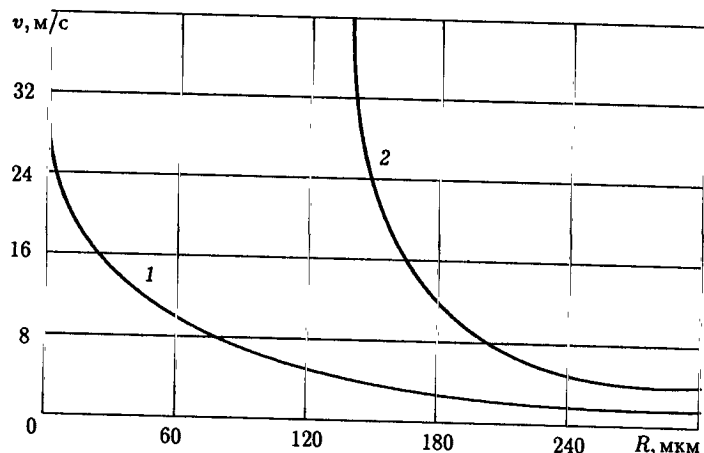


Рис. 6

Далее, выполняя те же преобразования, что и в случае сферической частицы, можно получить формулы для вычисления максимальной глубины внедрения

$$h_0 = \sqrt{\frac{mv^2}{k}},$$

и продолжительности удара

$$t_0 = \pi h_0 / v. \quad (21)$$

Зависимость сближения от времени теперь дается точным выражением

$$h(t) = h_0 \sin\left(\frac{\pi t}{t_0}\right).$$

Как видно из формул (9) и (21), в случае цилиндра продолжительность удара на 6,7% больше, чем при ударе шарика (при одинаковых h_0 и v).

Радиальное напряжение на границе контактной площадки можно определить [10] по формуле

$$\sigma_r(r_0, 0, t) = \frac{1-2\nu}{2} \frac{P(t)}{\pi r_0^2},$$

где контактная сила $P(t)$ определяется согласно выражению (20).

Дальнейшие вычисления могут быть выполнены в порядке, аналогичном случаю воздействия сферической частицы.

Заключение. Изложенный подход к анализу процессов эрозионного разрушения материалов на примере удара единичной абразивной частицы имел целью продемонстрировать эффективность структурно-временного

критерия динамического разрушения твердых тел. Приведенные результаты показывают, что применение критериального условия, адекватного динамической специфике процесса, позволяет уже в простейшем классическом приближении контактного удара получать эффекты, наблюдаемые в экспериментах, но не имеющие трактовки в рамках моделей, использующих традиционные критерии прочности и текучести. Включающаяся в модель новая временная характеристика (инкубационное время) позволяет дать единую трактовку таким разным, на первый взгляд, процессам, как процессы откольного и эрозионного разрушения твердых тел. Важнейшим следствием этой взаимосвязи является возможность развития экспериментальных методов эрозионного разрушения в направлении использования данных об эрозии для получения временных зависимостей прочности и текучести, т.е. для тестирования динамических прочностных свойств твердых тел.

Дальнейшее развитие приведенной схемы применительно к проблеме эрозионного уноса материала требует ее обобщения на случай воздействия многих частиц и учета угла их падения. При необходимости следует принять во внимание температурный фактор. Другой подход к процессу эрозионного разрушения изложен в работе [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Златин Н. А., Пугачев Г. С., Мочалов С. М., Брагов А. М. Временная зависимость прочности металлов при долговечностях микросекундного диапазона // Физика тверд. тела, 1975, 17, № 9. С.2599–2602.
2. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 324 с.
3. Крагельский И. В., Добычин М. Н., Комбалов В. С. Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977. 526 с.
4. Морозов Е. М., Колесников Ю. В. Механика контактного разрушения. М.: Наука, 1989. 219 с.
5. Морозов Н. Ф., Петров Ю. В. Динамическая вязкость разрушения в задачах иницирования роста трещин // Изв.АН СССР, МТТ, 1990, № 6. С. 108–111.
6. Морозов Н. Ф., Петров Ю. В. Проблемы динамики разрушения твердых тел. С.-Петербург: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1997. 132 с.
7. Морозов Н. Ф., Петров Ю. В., Уткин А. А. Об анализе откола с позиций структурной механики разрушения // Докл. АН СССР, 1990, 313, № 2. С. 276–279.
8. Петров Ю. В. О “квантовой” природе динамического разрушения хрупких сред // Докл. АН СССР, 1991, 321, № 1. С. 66–68.
9. Петров Ю. В. Квантовая аналогия в механике разрушения твердых тел // Физика тверд. тела, 1996, 38, № 11, С. 3385–3393.
10. Петров Ю. В., Смирнов В. И. Об определении контактной прочности хрупких конструкционных материалов // Транспорт: наука, техника, управление, 1998, № 10. С. 16–23.
11. Пинегин С. В. Контактная прочность и сопротивление качению. 2-е изд. М.: Машиностроение, 1969. 243 с.
12. Полежаев Ю. В. Теплогазодинамическая обработка летательных аппаратов. М.: Изд-во МАИ, 1986. 68 с.

13. Эрозия / Под ред. К. Присс. М.: Мир, 1982. 464 с.
14. Урбанович Л. И., Крамченков Е. М. Влияние режимных факторов на пороговую скорость соударения при газоабразивной эрозии // Исследования по упругости и пластичности. Вып. 18. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1999. С. 263–265.
15. Урванцов Л. А. Эрозия и защита металлов. М.: Машиностроение, 1966. 235 с.
16. Hunter S. C. Energy Absorbed by Elastic Waves During Impact // J. Mech. Phys. Solids, 1957. V. 5. № 3. P. 162–171.
17. Lawn B. R., Wilshaw T. R. Indentation Fracture: Principles and Applications // J. Mater. Sci., 1975. V. 10. № 6. P. 1049–1081.
18. Meyers M. A. Dynamic Behavior of Materials. N.Y. e.o.: John Wiley and Sons, 1994. 668 p.
19. Petrov Y. V., Morozov N. F. On the Modeling of Fracture of Brittle Solids // ASME Journal of Applied Mechanics, 1994, V. 61. P. 710–712.
20. Tsai Y. M. A Note on the Surface Waves Produced by Hertzian Impact // J. Mech. Phys. Solids, 1968, 16, № 2. P. 133–136.

§ 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОКРАТНОГО РАЗРУШЕНИЯ ПРИ ИЗНАШИВАНИИ

О. Г. Чекина

Вопросам разрушения при контактном взаимодействии посвящен параграф данной книги, написанный М. В. Зерниным и Е. М. Морозовым. Обычно при исследовании вопросов разрушения речь идет об анализе поля напряжений для тела с трещиной, определяются условия начала роста трещины, реже рассчитывается траектория развития трещины; в большинстве приложений разрушение рассматривается как однократный, катастрофический процесс.

Другой подход применяется к анализу изнашивания — специфического вида разрушения, при котором с макроскопической точки зрения формоизменение поверхностей за счет разрушения можно считать непрерывным. Класс контактных задач с учетом износа как непрерывного процесса рассмотрен в параграфе И. Г. Горячевой и И. А. Солдатенкова.

В действительности формоизменение при изнашивании является дискретным процессом и реализуется за счет отделения частиц конечных размеров или перемещения конечных объемов материала при пластическом деформировании.

Для современных технологий обработки поверхностей и методов мониторинга работы узлов машин становится актуальным построение моделей, описывающих многократное разрушение и позволяющих проанализировать изменение микрорельефа при изнашивании, а также определить геометрические характеристики частиц износа.

Очевидны трудности построения моделей такого рода, связанные с необходимостью рассмотрения контактных задач для тел сложной формы, моделирования элементарного акта разрушения и отделения частицы, а также с большим объемом расчетов при воспроизведении многократного разрушения.

1. Работы [1], [3] показывают возможность построения такого рода моделей (эти модели описаны также в [4]). В обеих моделях описывается усталостное разрушение поверхностей. Первая работа посвящена анализу одномерной задачи в случае, когда осредненное поле напряжений в упругом полупространстве при контактировании с движущимся по его поверхности индентором зависит только от глубины. Этим же свойством обладает и поврежденность, накопление которой до некоторого критического значения вызывает разрушение. В силу специфики геометрии рассматриваемой задачи, если критическое значение достигается на некоторой глубине, разрушение имеет характер отслаивания. После отслаивания материал с накопленной ранее поврежденностью вновь вступает в контакт. Достижение критического значения поврежденности на нулевой глубине приводит к непрерывному отделению материала с поверхности.

В работе [1] проанализировано влияние на ход процесса внешней нагрузки, а также закона накопления поврежденности; исследовано соотношение процессов поверхностного разрушения и отслаивания и возможность возникновения стационарного режима изнашивания.

Более общая модель процесса построена в работе [3], в которой в качестве механизма накопления поврежденности рассматривается термоки-

нетический механизм [2]. При этом скорость накопления поврежденности Q задается соотношением

$$\frac{dQ(x, y, z, t)}{dt} = \frac{1}{\tau_*} \exp\left(-\frac{U - \gamma\sigma(x, y, z, t)}{kT(x, y, z, t)}\right),$$

где U — энергия активации, τ_* и γ — характеристики материала, k — постоянная Больцмана, $\sigma(x, y, z, t)$ — некая характеристика поля напряжений в точке (x, y, z) внутри деформируемого тела в момент времени t . Используя различные характеристики поля напряжений или их комбинации в качестве σ , в рамках данного подхода можно воспроизвести различные типы разрушения. Расчеты, результаты которых представлены в [3,4], проведены для $\sigma(x, y, z, t) = \tau_{\max}(x, y, z, t)$.

При таком подходе наряду с полем напряжений необходимо рассчитывать и поле температур, что усложняет работу, однако позволяет в явном виде учитывать влияние фрикционного разогрева на ход процесса изнашивания.

Для уменьшения объема счета задача рассматривается в двумерной постановке, однако аналогичным образом процесс изнашивания может быть описан и в пространственном случае.

Предполагается, что разрушение начинается в момент времени t^* в точке (x^*, z^*) , в которой достигается критическое значение поврежденности Q^*

$$Q(x^*, z^*, t^*) = Q^*.$$

Наиболее сложным моментом при моделировании является описание самого акта разрушения. В данной модели считается, что отделение частицы происходит за счет мгновенного развития трещины из точки (x^*, z^*) , а траектория развития трещины в каждой точке совпадает с направлением наиболее медленного убывания поврежденности. После разрушения, тело с формой, изменившейся в результате отделения частицы, вновь вступает в контакт.

На рис. 1 для иллюстрации показаны изолинии поля поврежденности для периодической задачи (a — $\mu = 0,2$, $K = 0$, b — $\mu = 0,2$, $K = 1$, где μ — коэффициент трения, K — коэффициент разделения тепловых потоков). Значения приведены в единицах Q^* ; треугольником обозначены точки, в которых выполняется условие разрушения; траектория трещины показана стрелками. В случае a фрикционный разогрев, фактически, не влияет на процесс накопления поврежденности, условие разрушения выполняется на некоторой глубине, разрушение происходит в результате отделения фрагментов конечного размера. В случае b влияние фрикционного разогрева приводит к возникновению максимума поврежденности на поверхности, здесь и начинается разрушение, имеющее характер поверхностного изнашивания.

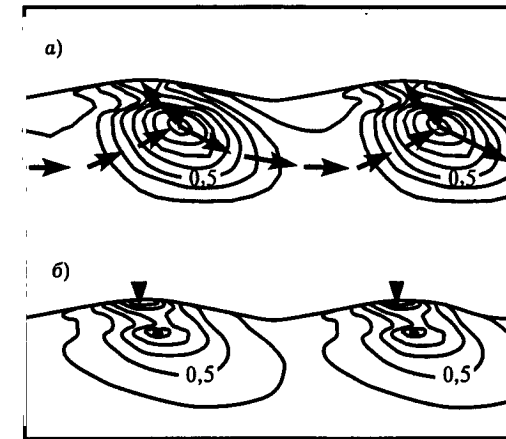


Рис. 1

Параметрами, определяющими ход процесса в данной модели, являются механические и теплофизические характеристики контактирующих тел, условия нагружения, коэффициент трения и исходная макро- и микроформа контактирующих тел. Проведенные расчеты позволили исследовать влияние параметров модели на интенсивность разрушения, размеры отделяющихся частиц и изменение микрогеометрии. Кроме того, данная работа подтвердила принципиальную возможность построения модели многократного разрушения при контактном взаимодействии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горячева И. Г., Чекина О. Г. Модель усталостного разрушения поверхностей. // Трение и износ 1990. Т. 11. № 3. С. 389–400.
2. Регель Р. В., Слуцкер А. И., Томашевский Э. Е. Кинетическая природа прочности твердых тел. М.: Наука, 1974. 560 с.
3. Чекина О. Г. Моделирование разрушения приповерхностных слоев при контактировании шероховатых тел // Труды 9-ой Конференции по прочности и пластичности, Москва 22–26 января 1996 г., т. 1, С. 186–191.
4. Goryacheva I. G. Contact mechanics in tribology. Kluwer Academic Publisher, 1998. 344 p.

§ 4. КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ РАСКЛИНИВАНИЯ УПРУГИХ ТЕЛ

И. В. Симонов

Расклинивание упругого тела тонкой жесткой вставкой (клином) относится к своеобразному классу явлений, сочетающих контакт штампа со свободной поверхностью и разделение тела на части трещиной, вызванной действием вставки. При сверхзвуковом движении клина трещина отсутствует, а его взаимодействие со средой приобретает черты до-или-сверхзвукового обтекания тел идеальной сжимаемой жидкостью. Помимо теоретического интереса, оценки воздействия инструмента на различные материалы при резании и расклинивании важны для приложений. Так, объяснение, почему колун, предназначенный для колки дров, обычно незаострен, стало классическим.

Основополагающие идеи теории расклинивания заложены в 50-е годы С. А. Христиановичем и Г. И. Баренблаттом [2]. Была предложена модель разрушения упругой среды забивкой полубесконечного затупленного клина с образованием трещины неизвестной длины впереди клина. Эта постановка, но уже с учетом влияния формы и сухого трения, затем была перенесена на случай движения клина с постоянной скоростью [3]. Обнаружен интересный резонансный эффект: длина трещины l уменьшается с ростом скорости тела s и, более того, исчезает: $l \rightarrow 0$ при $s \rightarrow c_R$, где c_R — скорость поверхностной волны Рэлея. Следом, И. А. Маркузон рассмотрел статический случай вставки конечной длины с симметричной трещиной [11]. Дальнейшее развитие теории шло по пути вариации краевых условий (Г. П. Черепанов [26] — жестко сцепленный со средой клин, М. Р. Галаджева, В. Х. Сирунян, Б. И. Сметанин [8] — расклинивание упругой полуплоскости) и исследования влияния формы клина при движении в различных диапазонах скоростей (А. Л. Павленко, А. В. Звягин [16] — дозвуковое движение, Г. И. Баренблатт, Р. В. Гольдштейн [6], А. В. Звягин [10] — сверхзвуковский дозвуковой режим, А. Л. Павленко, Ж. Г. Аликян [15] — сверхзвуковой режим, И. В. Симонов [18] — межзвуковое движение клина, Л. И. Слепян [22] — сравнение расклинивания при различных скоростях). Также затронуты вопросы влияния анизотропии (Г. И. Баренблатт, Г. П. Черепанов [4]), возникновения автоколебаний (Г. И. Баренблатт, Р. Л. Салганик [5]) и учета волновых эффектов при страгивании клина в упругой среде (В. А. Егорычев, В. В. Третьяков [9]). Метод решения перечисленных проблем для упругой однородной плоскости заключается в приведении задачи к обобщенной скалярной задаче Римана или Римана–Гильберта теории функций комплексного переменного [13]. Нетрадиционный вариант возник только в случае сцепленного со средой клина [26]. Эти вопросы, в основном, нашли отражение в книгах [12, 22, 27].

Качественно более сложным для математического рассмотрения оказались задачи расклинивания вдоль прямой границы раздела кусочно-однородной упругой плоскости. Проблема сводится к обобщенной векторной задаче Римана–Гильберта с несколькими особыми точками, общее решение которой неизвестно. Аналитические решения одного частного класса таких задач построены И. В. Симоновым [21] и нашли обобщение в работе Е. Л. Нахмейна и Б. М. Нуллера [14] на случаи произвольного числа участков и большего числа типов условий контакта упругих полуплоскостей. Подробно изучены две задачи расклинивания: о несимметричном клине конечной длины, нагруженном силой и моментом и вставленном без трения в разрез между двумя сцепленными различными упругими полуплоскостями, [19] и об установившемся движении несимметричного клина по линии склейки с образованием трещины и каверны (дорэлевский режим) [20]. Методом сращива-

емых асимптотических разложений проведено устранение физически неприемлемых осциллирующих особенностей в вершинах трещин. Известные результаты для вставки нулевой толщины на границе раздела [17] и для симметричного клина в однородной среде [11] являются предельными по отношению к найденному решению в статике.

Б. И. Сметаниным изучен ряд задач для неклассических упругих областей. Симметричное расклинивание упругой полосы гладкой вставкой рассмотрено при различных условиях закрепления ее граней [23]. Проблема сведена к решению интегрального уравнения первого рода. Асимптотически точное решение построено с помощью метода «больших λ ». Как и ранее, длина образующейся трещины определяется из критерия разрушения Ирвина–Орвана.

Задача о симметричном внедрении тонкой вставки в вершину угла упругого бесконечного клина также сводится к решению интегрального уравнения [24]. Частный случай клиновидной жесткой пластины, раскалывающей полуплоскость, изучен отдельно, с тем отличием, что граница области контакта не известна заранее.

Динамические задачи об установившемся движении жесткого клина в упругой полосе в дорэлевском и сверхзвуковом диапазонах скоростей изучены Б. И. Сметаниным [25] и В. М. Александровым и Б. И. Сметаниным [1]. Форма клина выбиралась сообразно физической постановке задачи. Так, при малых скоростях движения впереди вставки бежит трещина, т.е. клин может быть «тупым». При сверхзвуковом движении среда обтекает носовую часть тела безотрывно и для сохранения гипотез линейной теории упругости клин выбирается заостренным. Решение первой из этих задач о подвижной полубесконечной вставке постоянной толщины весьма сходно с упомянутым выше случаем статического расклинивания полосы. Оно построено как методом «больших λ », так и в виде разложения по полиномам Чебышева I рода, которое оказалось эффективным во всем диапазоне параметра λ . Изучено поведение коэффициента интенсивности напряжений в вершине трещины в зависимости от параметров задачи.

Ниже в пунктах 1–4 последовательно рассмотрены задачи статического, дорэлевского (кусочно-однородная плоскость), межзвукового (однородная плоскость) и сверхзвукового (полоса) расклинивания, не нашедшие ранее отражения в литературе.

1. Тонкий жесткий несимметричный клин ($|x| < 1$, $y = 0$) вставлен без трения в разрез ($a < x < b$, $|a| > 1$, $b > 1$) на прямой линии соединения двух упругих полуплоскостей $y > 0$ (среда 1) и $y < 0$ (среда 2), нагружен нормальной силой P и моментом M , а берега разреза вне клина свободны от усилий (рис. 1). Поля напряжений σ_{km}^j и смещений u_m^j удовлетворяют следующим (снесенным на невозмущенную линию раздела) краевым условиям и неравенствам:

$$\begin{aligned} (u_2^j)' &= h_j'(x) + \varphi, & \tau^j &= 0, & \sigma^j &\leq 0 & (|x| < 1), \\ \sigma^j = \tau^j &= 0, & [u] &\geq 0 & (a < x < -1 \cup 1 < x < b), \\ [\sigma_{2m}] &= [u_m] = 0 & (x > b \cup x < a; j, m = 1, 2), \\ [u]_{x=1} &= h(1), & \int_{-1}^1 [\sigma] \left\| \frac{1}{x} \right\| dx &= - \left\| \frac{P}{M} \right\|, \end{aligned} \quad (1)$$

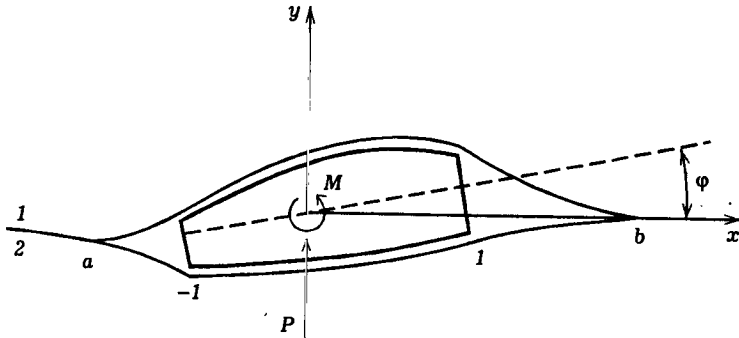


Рис. 1

где $h_1(x), h_2(x)$ — функции формы вставки относительно некоторой условной оси (ее выбор несущественен, так как смещения определяются с точностью до линейной функции — перемещения тела как жесткого целого); $h(x) = h_1(x) - h_2(x) \ll 1$ — переменная толщина клина такая, что $|h'_j(x)| \ll 1$; штрих отмечает дифференцирование; индекс j фиксирует среду; φ — угол поворота клина; $\sigma^j = \sigma_{22}^j$, $\tau^j = \sigma_{21}^j$; квадратные скобки означают скачок величины при пересечении границы раздела.

Введем комплексные потенциалы $\chi_m^j(z)$, $z = x + iy$ такие, что при $y = \pm 0$

$$\begin{aligned} (u_1^j)' &= -\operatorname{Re}\{b_j \chi_1^j + a_j \chi_2^j\}, & (u_2^j)' &= \operatorname{Im}\{a_j \chi_1^j + b_j \chi_2^j\}, \\ \tau^j &= \operatorname{Im} \chi_1^j, & \sigma^j &= \operatorname{Re} \chi_2^j \quad (4\mu_j a_j = 1 - \kappa_j, \quad 4\mu_j b_j = 1 + \kappa_j), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\kappa_j = 3 - 4\nu_j$ (плоская деформация), $\kappa_j = (3 - \nu_j)(1 + \nu_j)^{-1}$ (плоское напряженное состояние); μ_j, ν_j — модули сдвига и коэффициенты Пуассона. Функции $\chi_m^j(z)$ голоморфны в плоскости z кроме прямой $y = 0$, почти всюду имеют предел при $y \rightarrow \pm 0$. Они линейно связаны с функциями Колосова–Мухелишвили. Из условий однозначности смещений и равновесия клина, а также из энергетических соображений следует асимптотическое поведение искомых функций на бесконечности и в особых точках

$$\chi_m^j = \frac{iy_{mj}P}{\pi sz} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad z \rightarrow \infty, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} y_{11} = y_{12} &= -a_1 b_2 - a_2 b_1, & y_{21} &= a_2 d + b_2 q, & y_{22} &= b_1 q - a_1 d, \\ d &= a_1 - a_2, & q &= b_1 + b_2, & s &= d^2 - q^2 < 0. \end{aligned}$$

$$|\chi_m^j| < \operatorname{const} |z - z_*|^{-1/2}, \quad z \rightarrow z_*, \quad z_* = a, b, \pm 1. \quad (4)$$

Для определенности и без ограничения общности полагаем $d \leq 0$.

Предварительно рассматривается вспомогательная задача для функций $\chi^j(z)$ с целью снятия неоднородности в первом из условий (1):

$b_j \operatorname{Im} \chi^j(x) = h'_j(x) + \varphi$, $|x| < 1$; $\operatorname{Re} \chi^j(x) = 0$, $|x| > 1$, $y = \pm 0$. Затем из (1)–(4) получаем основную краевую задачу Римана–Гильберта: определить вектор-функцию $\chi = (\chi_1, \chi_2) \equiv (\chi_1^1, \chi_2^1 - \chi_1^1)$, аналитическую в верхней полуплоскости z , по условиям на оси $y = +0$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(H\chi) &= (f(x), 0), \quad x > b \cup x < a; & \operatorname{Im} \chi_1 &= \operatorname{Im} \chi_2 = 0, \quad |x| < 1; \\ \operatorname{Im} \chi_1 &= \operatorname{Re} \chi_2 = 0, & a < x < -1 \cup 1 < x < b; \\ H &= \begin{vmatrix} d & q \\ iq & id \end{vmatrix}, & f &= \frac{\operatorname{sign} x}{\pi \sqrt{x^2 - 1}} \int_{-1}^1 \frac{h'(t) \sqrt{1 - t^2}}{x - t} dt \end{aligned} \quad (5)$$

с оценками, следующими из (3), (4). Функции, определенные в нижней полуплоскости, затем вычисляются при помощи аналитического продолжения

$$\chi_1^2(z) = -\overline{\chi_1^1(\bar{z})}, \quad \chi_2^2(z) = \overline{\chi_2^1(\bar{z})} + \chi^2(z). \quad (6)$$

Метод решения обобщенной связанной векторной задачи Римана–Гильберта с несколькими точками разрыва краевых условий неизвестен. Для частного класса задач типа (5) путь к аналитическому решению был найден: при использовании аналитического продолжения и конформного преобразования области векторная задача приводится к виду, когда факторизация становится возможной [21]. В процессе решения определяются шесть действительных постоянных. Для этого имеются четыре независимых условия на бесконечности (3), второе уравнение равновесия клина (отсутствие вращения) и условие на приращение смещения берегов трещины из (1), ибо задача ставится в производных от смещений. Минимальные значения координат концов разреза-трещины $a, |b|$ определяются из энергетического критерия разрушения.

Ввиду громоздкости, общее решение здесь не приводится. Для клина постоянной толщины ($h(x) \equiv h$, $a = -b$) интегралы в общем решении пропадают и оно расщепляется на задачу о нагруженной бесконечно тонкой вставке [17] и задачу о расклинивании, в которую параметры P, M и φ уже не входят. Решение дается формулами

$$\chi^j = \frac{i\varphi}{b_j} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 - 1}}\right) + \frac{iC_j}{\sqrt{z^2 - 1}}, \quad \chi_m = \frac{R_1 \Phi_1 + e_m R_2 \Phi_2}{2\sqrt{z^2 - 1}}, \quad (7)$$

$$\pi(b_1 + b_2)(C_1, C_2) = -P(b_2, b_1), \quad 0 \leq \arg(z^2 - 1), \arg(b^2 - z^2) \leq 2\pi,$$

$$\varphi = \frac{2b_1 b_2 M}{\pi(b_1 + b_2)}, \quad \Phi_m = \frac{1}{\sqrt{b^2 - z^2}} \left(\frac{\sqrt{b^2 - 1} - \sqrt{z^2 - 1}}{\sqrt{b^2 - 1} + \sqrt{z^2 - 1}} \right)^{ie_m \alpha},$$

$$\alpha = \frac{\ln \lambda}{2\pi} \leq 0,175, \quad \lambda = \frac{q - d}{q + d} \geq 1, \quad R_m = 2r_1 \sqrt{z^2 - 1} - ie_m r_0,$$

$$r_0 = \frac{h}{I}, \quad I = \int_{-1}^b \frac{[q + O(\alpha^2)] dx}{\sqrt{(x^2 - 1)(b^2 - x^2)}}, \quad r_1 = \frac{\gamma_{11} \lambda^{1/2} P}{2\pi q(q - d)}, \quad e_m = -(-1)^m.$$

В области контакта и на продолжении трещины напряжения равны

$$\begin{aligned} \sigma^j &= \frac{(-1)^j(2Mx+P)}{\pi(b_j b_k^*+1)\sqrt{1-x^2}} + \frac{2r_1\sqrt{1-x^2}\operatorname{sh}(\alpha\theta_*)-r_0\operatorname{ch}(\alpha\theta_*)}{\sqrt{(b^2-x^2)(1-x^2)}} \quad (|x| < 1), \\ \theta_* &= 2 \operatorname{arctg} \frac{2B\sqrt{1-x^2}}{B^2-1}, \quad B = b + \sqrt{b^2-1}, \quad k \neq j = 1, 2, \\ \sigma + i\tau &= \lambda + 1 \sqrt{\lambda(x^2-b^2)} \left(\frac{r_0}{2\sqrt{x^2-1}} + ir_1 \right) e^{i\alpha\psi} \sim \frac{K_2 \exp(i\alpha\psi)}{\sqrt{2\pi(x-b)}} \quad (x \rightarrow b), \\ \psi &= \ln \frac{2B\sqrt{x^2-1}-B^2+1}{2B\sqrt{x^2-1}+B^2+1}, \quad K_2 = (\lambda+1) \sqrt{\frac{\pi}{\lambda b}} \left[\frac{r_0}{2\sqrt{b^2-1}} + ir_1 \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь, как и в общем случае, условия типа неравенств $\sigma^j \leq 0$ ограничивают допустимые значения P и M . Для вставки, не имеющей толщины ($h=0$) и $P^2+M^2 \neq 0$, одно из них обязательно нарушится. При $h \neq 0$ допустимое множество нетривиальных значений P и M не пусто.

Берега разреза перекрываются вблизи его вершин вследствие осциллирующей особенности при $\alpha \neq 0$ ($d \neq 0$). Однако зона осцилляций сильно локализована: ее размер не превышает $\sim 10^{-3}$. Для корректности методом сращиваемых асимптотических разложений построено внутреннее разложение при учете малого участка скользящего контакта берегов вблизи концов разреза [19]. Оценена длина этого участка и совершен переход от комплекснозначных коэффициентов интенсивности напряжений (5) к их действительным аналогам при сохранении потока энергии в вершину прорастающей трещины. При этом $|K_2|$ определяет коэффициент интенсивности у вершины трещины сдвига.

Предельные случаи. При $d=0$ (в частности, однородная среда) имеем $\alpha=0$. Осцилляции пропадают, а формула для напряжений на продолжении разреза упрощается:

$$\sigma + i\tau = [2ir_1\sqrt{x^2-1} + r_0][(x^2-b^2)(x^2-1)]^{-1/2}. \quad (9)$$

В случае жесткого основания контактные напряжения равны

$$\sigma^1 = \frac{-r_0 \operatorname{ch}[\alpha\theta_*(x)]}{\sqrt{(1-x^2)(b^2-x^2)}}, \quad \sigma^2 = \frac{2Mx+P}{\pi\sqrt{1-x^2}} + \sigma^1. \quad (10)$$

2. Пусть клин движется с постоянной дорзлеевской скоростью c вдоль границы раздела упругих сред с образованием трещины длины $a-1$ впереди клина и каверны $-\infty < x < -1$ (рис. 2). Берега трещины и каверны не взаимодействуют и свободны от усилий, а щеки клина полностью соприкасаются со средой (априорные предположения). Граничные условия задачи по определению полей напряжений, смещений и (нормированных) скоростей $U_m^j = c^{-1} (u_m^j)'$ полностью повторяют условия (1) на соответствующих участках. Используем общие комплексные решения

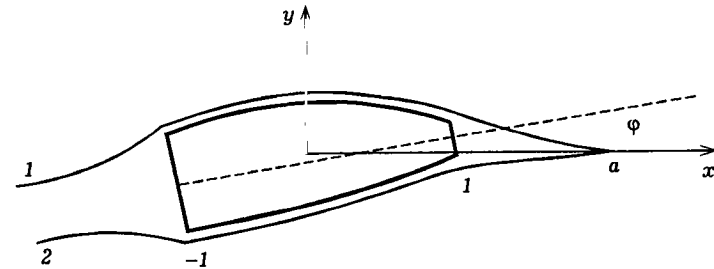


Рис. 2

$\chi_m^j(z_m^j)$, $j, m=1, 2$; $z_m^j = x + i\beta_{mj}y$ [20], близкие к представлениям Галина. Они связаны с искомыми функциями на границе $y = \pm 0$ соотношениями

$$\begin{aligned} \tau^j &= \operatorname{Im} \chi_1^j, \quad \sigma^j = \operatorname{Re} \chi_2^j, \quad U_1^j = \operatorname{Re} \{b_{2j}\chi_1^j + a_j\chi_2^j\}, \quad U_2^j = -\operatorname{Im} \{a_j\chi_1^j + b_{1j}\chi_2^j\}, \\ 2\mu_j R_j(a_j, b_{mj}) &= (\gamma_j, \beta_{mj}(1-\beta_j)), \quad \gamma_j = \beta_{1j}\beta_{2j} - \beta_j, \\ \beta_{mj} &= \sqrt{1-c^2/c_{mj}^2}, \quad 2\beta_j = 1 + \beta_{2j}^2, \quad \alpha_j = 1 + \beta_{1j}^2 - \beta_j, \end{aligned} \quad (11)$$

где c_{1j} и c_{2j} — скорости продольных и сдвиговых волн в материале 1 ($j=1$) и 2 ($j=2$); $R_j = \beta_{1j}\beta_{2j} - \beta_j^2$ — функции Рэлея, (c_{Rj} — положительные корни уравнений $R_j(c) = 0$).

Решение задачи ищем в классе функций h_0 [12] с оценками поведения в конечных особых точках (4) и убывающих на бесконечности сильнее, чем $1/z$. Аналогично предыдущему, для приведения задачи к стандартной форме снимем неоднородность в скачках смещений на участке $|x| < 1$ рассмотрением вспомогательной задачи для функций χ^j . Затем для функций $\chi_1 = \chi_1^1$, $\chi_2 = \chi_2^1 - \chi_1^1$ в верхней полуплоскости z возникает задача, сходная с задачей (5), (6). Изменение сводится к замене элемента q в верхней строке матрицы H на элемент $p = b_{11} + b_{12}$, а элемент q в нижней строке этой матрицы вычисляется теперь как: $q = b_{21} + b_{22}$. Две действительные постоянные — угол φ и постоянная C_0 , входящая в общее решение соответствующей однородной задачи, — определяются из условия равенства нулю момента сил, приложенных со стороны среды к клину, и задания скачка смещений в каком-либо его сечении. Дополнительные условия в форме неравенств подлежат проверке *апостериори* и являются, в частности, ограничениями на форму клина. При их нарушении следует, как и в статике, изменить постановку задачи введением неизвестных точек отрыва среды от щек клина.

Нужно отметить некоторые (не такие громоздкие) результаты для прямоугольного клина: $h = \text{const}$. Контактные давления, одинаковые на верхней и нижней щеках клина ($|x| < 1$), и удельные потоки энергии w в кромки

клина (особые точки) равны

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{eC_0}{\sqrt{2(a-x)(1-x^2)}} + O(\alpha^2) \sim \frac{N(\pm 1)}{\sqrt{1 \mp x}} \quad (x \rightarrow \pm 1 \neq 0), \\ w(\pm 1) &= \mp \frac{\pi}{2} cpN^2; \quad N(\pm 1) = \frac{eC_0}{2\sqrt{a \mp 1}}, \quad e = \sqrt{\frac{q}{p}}, \quad C_0 = -\frac{h}{l}, \\ I &= \int_1^a \left(\frac{pq}{2(a-x)(x^2-1)} \right)^{1/2} \cos(\alpha\psi) dx, \quad \psi = \ln \left| \frac{A-x-\sqrt{x^2-1}}{A-x+\sqrt{x^2-1}} \right|, \\ \alpha &= \frac{\ln \lambda}{2\pi}, \quad \lambda = \frac{(\sqrt{pq}-d)^2}{s} > 1, \quad s = pq - d^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Потоки $w(1)$ и $w(-1)$ имеют разные знаки, так как энергия поступает из кромки $x = 1$ в среду и частично расходуется в кромке $x = -1$. Сумма этих потоков энергии поглощается в кончике трещины (поток в бесконечность равен нулю) и, кроме того, определяет оценку снизу величины горизонтальной силы Q , которую необходимо приложить к клину, чтобы поддерживать заданное стационарное движение, из энергетического неравенства

$$cQ > -w(1) - w(-1) \implies Q > \frac{qC_0^2}{4(a^2-1)}. \quad (13)$$

Для обеспечения равенств в правую часть первого неравенства (13) следует добавить мощности, расходуемые на необратимые процессы. Физическое объяснение появлению потоков энергии разных знаков в углы клина опирается на рассмотрение клина с «заглаженными» углами (напряжения непрерывны в точках отрыва), для которого нормальные к поверхности клина напряжения будут совершать работу разных знаков над средой около передней и задней точек отрыва, а клин будет испытывать лобовое сопротивление. Величина Q пропорциональна квадрату деформации, т.е. относится к разряду величин, пренебрегаемых при постановке линейной задачи теории упругости и определяется *апостериори*. По этой причине остается справедливым утверждение о равенстве нулю главного вектора внешних сил, приложенных к границе. Напряжения на продолжении трещины имеют асимптотику ($x \rightarrow a+0$, $y = 0$)

$$\sigma + i\tau \sim \frac{-K_2 \{e \cos(\alpha \ln \psi) + i \sin(\alpha \ln \psi)\}}{\sqrt{2\pi(x-a)}}, \quad K_2^2 = \frac{\pi pq C_0^2}{s(a^2-1)}. \quad (14)$$

Аналогичную структуру имеют формулы для скоростей при $x \rightarrow a-0$. Берега разреза перекрываются как вблизи вершины трещины, так и на удалении от клина в сторону $-\infty$ вследствие осциллирующей особенности в точках $z = a, \infty$ ($\alpha \neq 0$, $d \neq 0$). Если скорость c не слишком близка к c_R , области, где происходит нарушение условия $[u_2] \geq 0$, локализованы в зоне кончика трещины и далеко от клина в области каверны. Поэтому полученное решение можно рассматривать и как внешнее разложение по отношению к решению в окрестностях особых точек. По комплексным

коэффициентам интенсивности и убывания напряжений в особых точках $z = a, \infty$ методом сращиваемых асимптотических разложений построены внутренние решения, лишенные физических недоразумений, и оценены «длины» областей скользящего контакта берегов трещины (l) и каверны (L) «вблизи» этих точек, а также действительные коэффициенты интенсивности [20].

Перейдем к анализу предельных ситуаций. Влияние параметров a и h непосредственно следует из приведенных формул: $\sigma(|x| < 1) \sim h(a-x)^{-1/2}$, $w \sim h^2(a \mp 1)^{-1/2}$. При $c \rightarrow c_R$ из (12)–(14) следует: $Q, K_2, w(\pm 1), w(a) \rightarrow 0$, если длина трещины фиксирована. Если же ограничить снизу $K_2 < K_d$, то $a \rightarrow 1$ при $c \rightarrow c_R$. Это находится в качественном согласии с результатами для подвижного клина в однородной среде. К выводам для неоднородной среды следует относиться с осторожностью, ибо при $c \rightarrow c_R$ имеем $\lambda, \alpha \rightarrow \infty, L, l \rightarrow O(1)$ и решение теряет силу. При околорэлеевских скоростях необходимо рассматривать задачу с учетом контакта берегов трещины и каверны в главном. Однако область этих скоростей весьма мала. Так, например, в «худшем» случае жесткой среды 2 вычисления дают $L \approx 6,3$ при $\nu_1 = 0,3, c/c_{21} = 0,9$ (скорость клина очень близка к рэлеевской скорости). Можно утверждать, что найденное приближенное решение имеет силу точного решения при $0 < c < c_R(1-\varepsilon)$, $\varepsilon \approx 0,05$, так как дальнейшее уточнение лишено практического смысла.

Сопоставим решения для однородной среды и предельного случая: среда 2 жесткая. При варьировании упругих параметров среды 2 длины L и l изменяются от значений $L = \infty, l = 0$ (одинаковые среды) до значений $l_* = \max l, L_* = \min L$ (среда 2 жесткая). Пусть a фиксировано. Тогда контактные давления, потоки w и сила Q в случае однородной среды будут в два раза меньше. Если же зафиксировать поток энергии $w(a)$, то контактные давления, потоки $w(\pm 1)$ и сила Q будут одинаковыми, а длины трещин — разными (длина трещины меньше для однородной среды). При $d \rightarrow 0$ (в частности, однородная плоскость) имеем $\alpha, l \rightarrow 0, L \rightarrow \infty$, осцилляции пропадают, участки контакта берегов вырождаются в точки, а решение для кусочно-однородной среды становится качественно подобным решению для однородной среды. Поскольку d зависит и от скорости, уравнение $d = 0$ соответствует некоторой поверхности в области допустимых значений параметров $c/c_{12}, \mu_1/\mu_2, \nu_1, \nu_2$.

Перейдем теперь в решении для прямоугольного клина (12)–(14) к пределу $h \rightarrow 0, h(a-1)^{-1/2} = O(1)$, т.е. толщина вставки и длина трещины исчезают так, что коэффициент интенсивности напряжений K_2 остается конечным. Это — случай расклинивания упругой среды бесконечно тонким лезвием. Тогда потоки $w(1; a)$ и сила Q также остаются конечными, $w(-1) \rightarrow 0$. Поля напряжений и смещений исчезают почти всюду, однако требуется мощность для поддержания движения, расходуемая на разрушение.

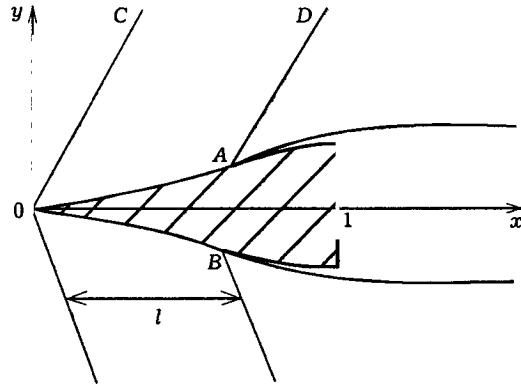


Рис. 3

3. В межзвуковом диапазоне скоростей $c_2 < c < c_1$ физическая картина движения тонкого заостренного симметричного клина в однородной упругой плоскости имеет сходство со случаями обтекания тела дозвуковым потоком идеальной сжимаемой жидкости или упругой средой при скоростях $c_R < c < c_2$ (рис. 3). В зависимости от профиля клина $f(x)$ ($f(0) = 0$, $|f'(x)| \ll 1$, $|f'''(x)| < \infty$) и скорости, точка отрыва совпадает с задней кромкой тела ($l = 1$) или является промежуточной ($l < 1$). Снесенные на прямую $y = 0$ смешанные краевые условия этой задачи для определения полей напряжений, смещений (u , v) и скоростей (U , V) в верхней полуплоскости $y > 0$ и дополнительные условия в форме неравенств следующие:

$$\begin{aligned} v = 0 \quad (-\infty < x \leq 0), & \quad v = f(x) \quad (0 \leq x \leq l), \\ \sigma_y = 0 \quad (l < x < \infty), & \quad \tau_{xy} = 0 \quad (-\infty < x < \infty), \\ \sigma_y \leq 0 \quad (0 < x < l), & \quad v(x) \geq f(x) \quad (l \leq x \leq 1). \end{aligned} \quad (15)$$

А замыкают задачу условие излучения и обычные ограничения на поведение решения в особых точках $x = 0$, l , $y = 0$. Потенциалы смещений φ , ψ должны удовлетворять уравнениям разных типов: эллиптическому и гиперболическому, соответственно. Общими решениями являются гармоническая функция и решение Даламбера. С целью расщепления задачи вводятся новые комплексная и действительная функции Φ и Ψ

$$\begin{aligned} \Phi(z) = \varphi_{,xx} - i\beta_1^{-1}\varphi_{,xy}, & \quad \Psi(\zeta) = \Psi_1''(\zeta), \quad \Psi_1(\zeta) \equiv \psi(x, y), \\ z = x + i\beta_1 y, & \quad \zeta = x - \beta_2 y, \quad \beta_j^2 = |1 - c^2/c_j^2|, \end{aligned} \quad (16)$$

Для аналитической функции Φ возникает отдельная обобщенная задача Гильберта. С учетом ограничений на поведение в особых точках ее

решение суть

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= A \frac{(l-z)^\gamma}{\pi} \int_0^l \frac{f'(t) dt}{(l-t)^\gamma(t-z)}, \\ A &= \frac{\beta}{\beta_1(1-\beta)}, \quad \gamma = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\beta^2}{\beta_1\beta_2}, \quad \beta = 1 - \frac{c^2}{2c_2^2} < \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (17)$$

На верхнем берегу разреза $l < x < \infty$, $y = 0$ однозначная ветвь функции $(z-l)^\gamma$ принимает положительные значения, а функция $(l-z)^\gamma = e^{-i\pi\gamma}(z-l)^\gamma$. Фронты поперечных волн, выходящие из точек $\zeta = 0$, l (OC и AD , рис. 3), разграничивают всю полуплоскость на три подобласти, в каждой из которых искомые функции определены по-своему, так как

$$\begin{aligned} \Psi &= 0 \quad (\zeta < 0), & \Psi &= (\beta-1)^{-1} f'(\zeta) \quad (0 < \zeta < l), \\ \Psi &= \frac{\sin(\pi\gamma)(\zeta-l)^\gamma}{\pi(1-\beta)} \int_0^l \frac{f'(t) dt}{(l-t)^\gamma(t-\zeta)} \quad (\zeta > l). \end{aligned} \quad (18)$$

В окрестности вершины клина напряжения и скорости, нормированные на 2μ и c , имеют логарифмическую особенность или ограничены:

$$\begin{aligned} \sigma_x &\sim (2-\beta-\frac{c^2}{c_1^2})U, & \sigma_y &\sim \beta\xi A \ln r - \beta, & \tau_{xy} &\sim \beta_1\xi A(\theta - \pi), \\ U &\sim C - \xi A \ln r, & V &\sim \beta_1\xi A(\theta - \pi) \quad (\pi \leq \theta < \theta_0); \\ \tau_{xy} &\sim \beta_1\xi A\theta, & V &\sim \xi(\pi + \beta_1 A\theta) \quad (0 \leq \theta < \theta_0), \\ z &= re^{i\theta}, & \theta_0 &= \operatorname{arctg}(\beta_1\beta_2^{-1}), \quad \xi = \pi^{-1} f'(0), \end{aligned} \quad (19)$$

где C — вычисляемая постоянная [18], а к выражениям для функций σ_x , σ_y и U при $0 \leq \theta \leq \theta_0$ добавляются постоянные слагаемые — скачки на фронте поперечной волны $\Delta\sigma_x = -\Delta\sigma_y = \Delta U = \pi\beta_2\xi(1-\beta)^{-1}$. Напряжение σ_y будет сжимающим в малой окрестности нуля, а знак σ_x зависит от знака β : при $\beta > 0$ ($c_2 < c < \sqrt{2c_2}$) оно растягивающее; при $\beta < 0$ ($\sqrt{2c_2} < c < c_1$) — сжимающее. Вырожденный случай $\beta = 0$ будет рассмотрен отдельно. Потоки мощности в другие особые точки $z = 0$, l и в бесконечность от продольной составляющей поля равны нулю, а мощность, расходуемая на движение лезвия, равна мощности, излучаемой в бесконечность поперечными волнами. Сила сопротивления Q и контактное напряжение вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} Q &= -4\mu \int_0^l \sigma_y(x, 0) f'(x) dx, \quad \sigma_y(x, 0) = \frac{\beta}{\pi} A(l-x)^\gamma G(x) \quad (0 < x \leq l), \\ G(x) &= \int_0^l \frac{f'(t) - f'(x)}{(l-t)^\gamma(x-t)} dt - \int_{-\infty}^0 \frac{f'(x) dt}{(l-t)^\gamma(x-t)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Форма каверны за клином имеет асимптотику $y(x) \sim x^\gamma$ ($x \rightarrow \infty$), а ее ширина растет неограниченно, если $\gamma \neq 0$. Резкий отрыв на кромке ($l = 1$)

характеризуется тем, что сами функции непрерывны в точке отрыва, а производные терпят разрыв второго рода. При этом кривизна профиля каверны и ускорение не ограничены при $x \rightarrow l+0, y=0$; свободная линия тока у кромки изгибается внутрь каверны. Для сравнения укажем, что при дорэлевских скоростях сами напряжения и скорости в аналогичном случае будут не ограничены.

При нарушении неравенства $\sigma_y \leq 0$ ($0 < x < l$) отрыв произойдет в промежуточной точке. Любопытно, что в отличие от статики или дозвукового движения клина условие $\sigma_y = 0$ теперь не определяет положение точки отрыва потока, оно выполнено *априори* в решении. Можно доказать следующие утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Необходимым условием гладкого отрыва в некоторой точке $x = l$ ($0 < l \leq 1$) является обращение в нуль функции $G(l)$. Достаточность обеспечивается выполнением неравенства $G'(l) > 0$.*

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Кривизна профиля каверны непрерывна и равна кривизне обтекаемого контура в точке гладкого отрыва.*

Доказательство следует из требования асимптотического выполнения условий типа неравенств из (15) слева и справа от искомой точки отрыва. Вообще говоря, решение уравнения $G(l) = 0$ неединственно и, если обнаружатся дополнительные корни в интервале $0 < l < 1$, то это будет физически означать существование точек присоединения и вторичных точек отрыва потока.

Утверждение 2 известно как условие Бриллюэна–Вилла в задачах обтекания тел идеальной сжимаемой жидкостью [7]. Совпадение не является удивительным, ибо только в данном диапазоне скоростей предельным переходом $c_2 \rightarrow 0$ можно перейти к случаю дозвукового движения тела в жидкости. Однако, другой вырожденный случай $\beta = 0$ ($c = \sqrt{2}c_2$) не имеет аналога при обтекании жидкостью — продольная составляющая поля тогда вырождается, т.е. тождественно обращается в нуль, а граничные условия удовлетворяются набором поперечных волн, отсутствующих в случае с жидкостью: $\Psi(\zeta) = -N(\zeta)H(l-\zeta)f'(\zeta)$. Фронты волн при этом направлены под углом 45° , напряжения и скорости принимают ненулевые значения только в коридоре $0 \leq x-y \leq l$ при условии отрыва $f'(x) > 0$, так как теперь $\sigma(x, 0) = -f'(x)$, а каверна имеет постоянную ширину.

4. Пусть тонкая клиновидная жесткая вставка единичной длины с постоянной сверхзвуковой скоростью c рассекает заземленную по основаниям упругую полосу симметрично на две части (рис. 4). Трение отсутствует, среда обтекает клин безотрывно, а движение поддерживается толкающей силой Q .

Решение вспомогательной задачи о подвижной сосредоточенной нагрузке на свободной поверхности полосы позволяет получить связь нормального перемещения поверхности полосы с распределенной подвижной

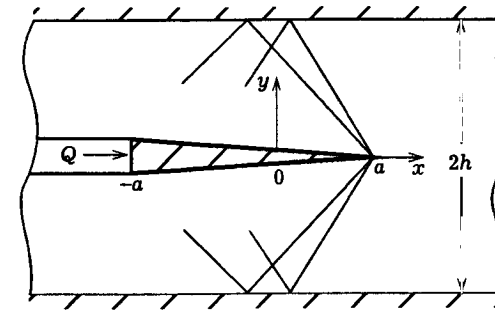


Рис. 4

нагрузкой. Подстановка этого результата в смешанные краевые условия основной задачи приводит к следующему интегральному уравнению для неизвестных контактных усилий $q(x)$ ($|x| \leq a$):

$$\int_{-a}^a q(\xi) [\delta(x-\xi) - D_1 \delta(x+2\beta h - \xi) - D \delta(x+\Lambda h - \xi)] d\xi = \Theta \alpha, \quad (21)$$

$$D = D_2, \quad \Lambda = \beta + \gamma, \quad (22)$$

$$D = D_3, \quad \Lambda = 4\beta, \quad (23)$$

$$\Theta = \mu \frac{4\gamma(B+1)}{\gamma^2+1}, \quad D_1 = 2B \frac{\beta\gamma-1}{A}, \quad D_2 = 4 \frac{\gamma^2-1}{A},$$

$$D_3 = 2B(\beta\gamma-1)^2(1-B)A^{-2}, \quad A = (\beta\gamma+1)(B+1), \quad \beta^2 = \eta - 1,$$

$$B = \frac{(\gamma^2-1)^2}{4\beta\gamma}, \quad \gamma^2 = \frac{\eta}{\varepsilon} - 1, \quad \varepsilon = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} < 1/2, \quad \eta = \frac{c^2}{c_1^2}.$$

Здесь $\delta(x)$ — дельта-функция, 2α — угол клина при вершине и справедливы определения (22), если относительная толщина полосы $\lambda = h/a > \gamma^{-1}$, когда $2\beta > \gamma$, а также при $\lambda > (2\beta)^{-1}$, когда $3\beta > \gamma > 2\beta$, и определения (23), если $\lambda > 2(\beta+\gamma)^{-1}$, когда $5\beta > \gamma > 3\beta$, или если $\lambda > (3\beta)^{-1}$, когда $\gamma > 5\beta$.

Если $\lambda > \beta^{-1}$, то для усилий $q(x)$ и толкающей силы Q получаются простые выражения

$$q(x) = \Theta \alpha, \quad Q = 2\alpha \int_{-a}^a q(\xi) d\xi = 4a\Theta\alpha^2. \quad (24)$$

Установлено [1], что берега каверны пересекаются при некоторых соотношениях между параметрами, однако, учет соударения берегов не приводит к изменению контактных давлений из-за сверхзвукового характера движения.

Если $2(\beta+\gamma)^{-1} < \lambda < \beta^{-1}$ в случае (21), (22) или $\lambda > (2\beta)^{-1}$ в случае

(21), (23), то

$$q(x) = \Theta\alpha \times \begin{cases} 1 & \text{при } x_1 \leq x \leq 0, \\ (1 + D_1) & \text{при } -a \leq x < x_1, \end{cases} \quad (25)$$

$$Q = 4a\Theta\alpha^2[1 + D_1(1 - \beta\lambda)].$$

Согласно этой формуле, контактное давление положительно на щеках клина, если $1 + D_1 > 0$, а в точке $x = x_1 = a - 2\beta h$ при $D_1 \neq 0$ имеется скачок. При $1 + D_1 \leq 0$ в точке $x = x_1$ наступает отрыв среды от клина. Начало отрыва ($1 + D_1 = 0$) реализуется, например, при значениях параметров $\varepsilon = 1/4$, $\eta \approx 1,0189$ и $\varepsilon = 1/3$, $\eta \approx 1,0092$. Изменяя граничные условия для этого случая, находим

$$q(x) = \Theta\alpha \quad (-a < x_1 \leq x \leq a), \quad Q = 4a\Theta\alpha^2\lambda\beta. \quad (26)$$

Если в случае (21), (22) величина $\lambda < (2\beta)^{-1}$, но $\lambda > 2(\beta + \gamma)^{-1}$, когда $5\beta > \gamma > 3\beta$, или $\lambda > (3\beta)^{-1}$, когда $\gamma > 5\beta$, то появляется еще один скачок усилий на щеках клина в точке $x_2 = a - 4\beta h$ и тогда

$$q(x) = \Theta\alpha \times \begin{cases} 1 & \text{при } x_1 \leq x \leq a, \\ (1 + D_1) & \text{при } x_2 \leq x \leq x_1, \\ [D_1(1 + D_1) + 1 + D_3] & \text{при } -a \leq x < x_2. \end{cases} \quad (27)$$

Если в случае (21), (22) величина $\lambda < 2(\beta + \gamma)^{-1}$, но $\lambda > \gamma^{-1}$, когда $2\beta > \gamma$, или $\lambda > (2\beta)^{-1}$, когда $3\beta > \gamma > 2\beta$, то получаются следующие соотношения, отличающиеся от (27), в частности, заменой x_2 на $x_3 = a - \beta h - \gamma h$:

$$q(x) = \Theta\alpha \times \begin{cases} 1 & \text{при } x_1 \leq x \leq a, \\ (1 + D_1) & \text{при } x_3 \leq x \leq x_1, \\ (1 + D_1 + D_2) & \text{при } -a \leq x \leq x_3. \end{cases} \quad (28)$$

Из формул (27) и (28) видно, что контактное давление $q(x)$ всюду в области контакта $|x| \leq a$ положительно, если $1 + D_1 > 0$ и, соответственно, $1 + D_1 + D_3 > -D_1^2$ или $1 + D_1 + D_2 > 0$. Эти условия при $\eta \geq 1 + \varepsilon$ всегда выполняются. Аналогично предыдущему могут быть получены выражения, определяющие толкающее усилие Q и проведено исследование условий отрыва упругой среды от клина.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В. М., Сметанин Б. И. Сверхзвуковое расклинивание упругой полосы // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 5. С. 825–830.
2. Баренблатт Г. И., Христианович С. А. Об обрушении кровли при горных выработках // Изв. АН СССР. ОНТ. 1955. № 11. С. 73–86.
3. Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П. О расклинивании хрупких тел // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 4. С. 667–682.
4. Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П. О равновесии и распространении трещин в анизотропной среде // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 1. С. 46–55.

5. Баренблатт Г. И., Салганик Р. Л. О расклинивании хрупких тел. Автоколебания при расклинивании // ПММ. 1963. Т. 42. Вып. 3. С. 436–449.
6. Barenblatt G. I., Goldstein R. V. Wedging of an elastic body by a slender wedge moving with a constant super-rayleigh subsonic velocity // Int. J. Fract. Mech. 1972. V. 8. No 4. P. 427–434.
7. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы, каверны. М.: Мир, 1964. 466 с.
8. Галаджиева М. Р., Сирунян В. Х., Сметанин Б. И. О расклинивании упругой полуплоскости // Изв. АрмССР. Механика. 1974. Т. 27. № 2. С. 38–45.
9. Егорычев В. А., Третьяков В. В. Внезапное движение клина в упругой среде // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. No 3. С. 151–152.
10. Звягин А. В. Дозвуковое движение твердых тел в упругой среде // Вестник МГУ. Мат. и мех. 1979. № 3. С. 60–64.
11. Маркузон И. А. О расклинивании хрупкого тела клином конечной длины // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 2. С. 356–361.
12. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
13. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
14. Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М. О дозвуковом стационарном движении штампов и гибких накладок по границе упругой полуплоскости и составной плоскости // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 1. С. 134–144.
15. Павленко А. Л., Апилян Ж. Г. Сверхзвуковое обтекание жесткого клина линейно-упругой средой // Изв. АН УзССР. Сер. техн. наук. 1969. № 2. С. 18–23.
16. Павленко А. Л., Звягин А. В. О движении тонких тел в линейно-упругой среде // В сб.: Газовая и волновая динамика. М.: МГУ, 1979. Вып. 2. С. 57–67.
17. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
18. Симонов И. В. Трансзвуковое обтекание тонкого твердого тела упругой средой // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 1. С. 114–122.
19. Симонов И. В. Трещина на границе раздела двух упругих сред при расклинивании // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. No 3. С. 105–112.
20. Симонов И. В. О расклинивании кусочно-однородной упругой среды // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 2. С. 275–283.
21. Симонов И. В. Об интегрируемом случае краевой задачи Римана-Гильберта для двух функций и решении некоторых смешанных задач для составной упругой плоскости // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 6. С. 951–960.
22. Слепян Л. И. Механика трещин. Л.: Судостроение, 1981. 296 с.
23. Сметанин Б. И. Об одной смешанной задаче теории упругости для клина // ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 4. С. 708–714.
24. Сметанин Б. И. О расклинивании упругого бесконечного клина // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 5. С. 935–940.
25. Сметанин Б. И. Задачи о расклинивании упругих тел // Статические и динамические смешанные задачи теории упругости. Ростов н/Д.: Изд-во Рост. ун-та, 1983. С. 151–152.
26. Черепанов Г. П. Решение одной краевой задачи Римана для двух функций и ее приложение к некоторым смешанным задачам плоской теории упругости // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 5. С. 907–912.
27. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.

CONTENTS

INTRODUCTION	6
CHAPTER 1. METHODS FOR SOLVING CONTACT PROBLEMS	9
§ 1. Asymptotic Methods in Mechanics of Contact Interaction. <i>V. M. Alexandrov</i>	10
§ 2. Two-Sided Asymptotic Method for Solving Contact Problems. <i>S. M. Aizikovich</i>	20
§ 3. Asymptotic Methods in Nonstationary Dynamic Contact Problems. <i>V. B. Zelentsov</i>	30
§ 4. On One Asymptotic Method in Contact Problems for Anisotropic Solids. <i>L. I. Manevich</i>	55
§ 5. Method of Matching Asymptotic Expansions for Problems With Small Contact Zones. <i>I. I. Argatov and S. A. Nazarov</i>	73
§ 6. Method of Fictitious Absorption in Dynamic Contact Problems. <i>V. A. Babeshko and O. D. Pryakhina</i>	83
§ 7. Method of Variational Inequalities in Contact Problems. <i>A. S. Kravchuk</i>	93
§ 8. Method of Dual Equations in Contact Problems. <i>A. N. Zlatin and I. N. Zlatina</i>	116
§ 9. Development of the Method of Orthogonal Functions. <i>E. V. Kovalenko</i>	125
CHAPTER 2. STATIC CONTACT PROBLEMS	137
§ 1. Contact Problems for Half-Space: Complex Contact Areas. <i>A. A. Shmatkova</i>	138
§ 2. Contact Problems for Bodies of Finite Dimension. <i>M. I. Chebakov</i> ..	157
§ 3. Spatial Contact Problems for Elastic Bodies of Complex Geometry. <i>D. A. Pozharskii</i>	181
§ 4. Static Contact Problems for Depth-Inhomogeneous Foundation. <i>S. M. Aizikovich</i>	199
§ 5. Static Contact Problems for Multilayer Elastic Bodies. <i>V. S. Nikishin</i>	213
§ 6. Static Contact Problems for Prestressed Solids. <i>T. I. Belyankova and L. M. Filippova</i>	233
§ 7. Contact Problems With Adhesion and Refined Condition of Contact. <i>I. A. Soldatenkov</i>	242
§ 8. Interaction of Base Plates With Linear Elastic Foundation. <i>G. N. Pavlik</i>	254

CHAPTER 3. STATIONARY DYNAMIC CONTACT PROBLEMS	277
§ 1. High-Frequency Asymptotics in Dynamic Contact Problems. <i>M. A. Sumbatyan</i>	278
§ 2. Dynamic Contact Problems for Prestressed Solids. <i>V. V. Kalinchuk</i> .	289
§ 3. Dynamic Contact Problems for Anisotropic Solids. <i>A. O. Vatulian</i> .	303
§ 4. Dynamic Contact Problems for Multilayer Media With Defects. <i>M. G. Seleznev</i>	311
§ 5. Isolated Resonances in Contact Interaction of Massive Bodies With Semibounded Media. <i>O. D. Pryakhina, E. I. Vorovich, and O. M. Tukodova</i>	320
§ 6. Interaction of Moving Punches With Elastic and Viscoelastic Bodies. <i>A. V. Belokon and A. V. Nasedkin</i>	331
CHAPTER 4. NONSTATIONARY DYNAMIC CONTACT PROBLEMS	349
§ 1. Nonstationary Vibration of Elastic Half-Space Under Surface Loads. <i>A. G. Gorshkov and D. V. Tarlakovskii</i>	350
§ 2. Contact Problems With Fixed Boundaries. <i>A. G. Gorshkov and D. V. Tarlakovskii</i>	369
§ 3. Contact Problems With Moving Boundaries. <i>A. G. Gorshkov and D. V. Tarlakovskii</i>	378
§ 4. Interaction of Elastic Bodies With Elastic Half-Space. <i>A. G. Gorshkov and D. V. Tarlakovskii</i>	389
§ 5. Impact and Penetration of Bodies Into Liquid. <i>A. G. Gorshkov and D. V. Tarlakovskii</i>	395
§ 6. Impact Against Ground. <i>A. G. Gorshkov and D. V. Tarlakovskii</i> . . .	409
CHAPTER 5. CONTACT PROBLEMS IN TRIBOLOGY	417
§ 1. Mechanics of Discrete Contact. <i>I. G. Goryacheva and O. G. Chekina</i>	418
§ 2. Contact Problems With Wear. <i>I. G. Goryacheva and I. A. Soldatenkov</i>	438
§ 3. Contact Problems for Coated Solids. <i>E. V. Kovalenko</i>	459
§ 4. Contact Problems With Frictional Heat Release. <i>E. V. Kovalenko</i> . .	476
§ 5. Frictional Contact Problems With Unilateral Constraints. <i>A. S. Kravchuk</i>	491
§ 6. Plane and Spatial Problems of Contact-Hydrodynamic Lubrication Theory. <i>M. Ya. Panovko</i>	499
CHAPTER 6. CONTACT PROBLEMS FOR COMPLEX MEDIA	523
§ 1. Elastoplastic Dynamic Contact of Solids. <i>I. G. Kadomtsev</i>	524
§ 2. Contact Problems in Nonlinear Creep Theory (Power Law Nonlinearity). <i>S. A. Grishin</i>	539
§ 3. Contact Problems for Inhomogeneous Aging Viscoelastic Solids. <i>A. V. Manzhirov</i>	549

§ 4. Contact Problems of Consolidation Theory. <i>V. B. Glagovskii</i> and <i>B. M. Nuller</i>	566
§ 5. Contact Problems of Electroelasticity. <i>D. Ya. Bardzokas</i> and <i>N. A. Senik</i>	583
§ 6. Contact Problems in Mechanics of Accreted Solids. <i>A. V. Manzhurov</i>	607
CHAPTER 7. FRACTURE IN CONTACT INTERACTION	623
§ 1. Fracture Mechanics of Solids in Contact Interaction. <i>M. V. Zernin</i> and <i>E. M. Morozov</i>	624
§ 2. On Erosive Fracture of Solids. <i>N. F. Morozov, V. I. Smirnov,</i> and <i>Yu. V. Petrov</i>	640
§ 3. Modeling of Multiple Fracture in Wearing. <i>O. G. Chekina</i>	651
§ 4. Contact Problems of Wedging of Elastic Bodies. <i>I. V. Simonov</i>	654

Научное издание

МЕХАНИКА КОНТАКТНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Под редакцией

И. И. Воровича и В. М. Александрова

Редактор: *Н. А. Носова*

Оригинал-макет изготовлен авторами

ЛР №071930 от 06.07.99

Подписано в печать 10.09.01. Формат 60×90/16

Бумага офсетная №1. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 42. Уч.-изд. л. 43,4

Тираж 400 экз. Заказ № 4543

Издательская фирма

«Физико-математическая литература»

МАИК «Наука/Интерпериодика»

117864 Москва, Профсоюзная ул., 90

Отпечатано с диапозитивов

в ППП «Типография «Наука»

121099, Москва Г-99, Шубинский пер., 6

Налоговая льгота — общероссийский классификатор продукции

ОК-005-93, том 2; 953000 — книги, брошюры