
R&C
Dynamics

MECHANIK

von

Arnold Sommerfeld

ZWEITE,

REVIDIERTE AUFLAGE

1944

А. ЗОММЕРФЕЛЬД

МЕХАНИКА

Перевод с немецкого

Т. Е. Тамм

под редакцией

Д. В. Сивухина

R&C
Dynamics

РХД

Москва • Ижевск

2001

УДК 531

Интернет-магазин
MAFFESS

<http://shop.rcd.ru>

Интересующие Вас книги, выпускаемые нашим издательством, дешевле и быстрее всего приобрести через интернет-магазин. Регистрация в магазине позволит вам

- приобрести книги по наиболее низким ценам;
 - подписаться на регулярную рассылку сообщений о книгах;
 - самое быстрое приобретение новых книг до поступления их в магазин.
-

Зоммерфельд А.

Механика. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, 368 стр.

Книга Зоммерфельда является хорошим введением в механику как отдел теоретической физики. Написанная с большим педагогическим мастерством, она, несмотря на небольшой объем, отличается богатством содержания. Много внимания автор уделяет выяснению физического смысла законов и понятий механики, чему способствует большое количество оригинальных физических примеров и задач.

Наряду с курсами механики советских авторов (Бухгольц, Суслов, Хайкин, Лойцянский и Лурье и т. д.), книга Зоммерфельда явится ценным пособием по механике для студентов вузов и преподавателей высшей и средней школ.

ISBN 5-93972-051-X

© НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001

<http://rcd.ru>

Содержание

Введение	11
ГЛАВА I. Механика точки	12
§ 1. Аксиомы Ньютона	12
§ 2. Пространство, время и система отсчета	19
§ 3. Прямолинейное движение материальной точки	29
<i>Примеры</i>	32
§ 4. Переменные массы	45
§ 5. Кинематика и статика материальной точки на плоскости и в пространстве	50
1. Кинематика на плоскости	51
2. Понятие момента в статике и кинематике на плоскости	54
3. Кинематика в пространстве	55
4. Статика в пространстве. Момент силы относительно точки и относительно оси	56
§ 6. Динамика (кинетика) свободно движущейся материальной точки. Задача Кеплера	58
ГЛАВА II. Механика системы, принцип виртуальной работы и принцип Даламбера	68
§ 7. Степени свободы и виртуальные перемещения механической системы, голономные и неголономные связи	68
§ 8. Принцип виртуальной работы	72
§ 9. Примеры на применение принципа виртуальной работы	75
1. Рычаг (Архимед)	75
2. Распределение нагрузки: велосипед, мост	77
3. Полиспасть (известный еще грекам)	78
4. Кривошипно-шатунный механизм	79
5. Момент силы относительно оси и работа при виртуальном вращении	80
§ 10. Принцип Даламбера. Введение сил инерции	81

§ 11. Простейшие примеры на применение принципа Даламбера	85
1. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси . . .	85
2. Связь между вращательным и поступательным дви- жениями	87
3. Качение шара по наклонной плоскости	88
4. Движение материальной точки по заданному пути . .	89
§ 12. Уравнения Лагранжа первого рода	90
§ 13. Законы сохранения импульса и момента импульса (закон движения центра тяжести и закон площадей)	95
О числе выполнимых в общем виде интеграции уравнений движения замкнутой системы	107
§ 14. Добавление: о законах трения	109
1. Трение покоя	109
2. Трение при движении	112
Глава III. Колебания	117
§ 15. Математический маятник	117
§ 16. Физический маятник	122
<i>Добавление:</i> Теорема о моменте инерции	124
§ 17. Циклоидальный маятник	126
§ 18. Сферический маятник	129
<i>Добавление:</i> Когда можно говорить о потенциальной энергии в поле сил?	134
§ 19. Различные типы колебаний. Свободные и вынужденные, затухающие и незатухающие колебания	136
§ 20. Симпатические маятники	142
§ 21. Двойной маятник	150
Глава IV. Твердое тело	158
§ 22. Кинематика твердого тела	158
§ 23. Статика твердого тела	167
1. Условия равновесия	167
2. Эквивалентность сил и моментов. Приведение системы сил	168
3. Изменение точки отсчета	170
4. Сравнение кинематики со статикой	170
<i>Добавление:</i> О динамах и винтах	172

§ 24. Импульс и момент импульса твердого тела. Их связь со скоростью поступательного и вращательного движений	173
§ 25. Динамика твердого тела. Общий обзор различных видов движения твердого тела	178
1. Свободный шаровой волчок	179
2. Свободный симметричный волчок	179
3. Свободный несимметричный волчок	181
4. Тяжелый симметричный волчок	182
5. Тяжелый волчок с трехосным эллипсоидом инерции	184
§ 26. Уравнения Эйлера. Количественная теория свободного волчка	185
1. Эйлеровы дифференциальные уравнения движения	185
2. Регулярная прецессия свободного симметричного волчка и эйлерова теория колебаний полюса	189
3. Движение трехосного волчка. Исследование устойчивости неизменных вращений его вокруг главных осей инерции	195
§ 27. Демонстрационные опыты по теории волчка и технические применения этой теории	198
1. Прибор для стабилизации торпеды	202
2. Успокоитель качки корабля и аналогичные приборы	203
3. Гирокомпас	204
4. Гироскопические эффекты у колес железнодорожных вагонов и велосипедов	207
5. Деривация (отклонение вправо) снарядов	209
<i>Добавление: Механика игры на бильярде</i>	<i>212</i>
Глава V. Относительное движение	217
§ 28. Вывод силы Кориолиса для одного из частных случаев	217
§ 29. Общие дифференциальные уравнения относительного движения	221
§ 30. Свободное падение на вращающейся Земле. Особенность гироскопических членов	223
§ 31. Маятник Фуко	228
§ 32. Проблема трех тел (частный случай Лагранжа)	233

Глава VI. Интегральные принципы механики и общие уравнения Лагранжа	242
§ 33. Принцип наименьшего действия Гамильтона	242
§ 34. Общие уравнения Лагранжа	247
§ 35. Примеры на применение общих уравнений Лагранжа	256
1. Циклоидальный маятник	256
2. Сферический маятник	257
3. Двойной маятник	259
4. Тяжелый симметричный волчок	261
§ 36. Другой вывод уравнений Лагранжа	266
§ 37. Принцип наименьшего действия Мопертюи	271
Глава VII. Дифференциальные принципы механики	279
§ 38. Принцип наименьшего принуждения Гаусса	279
§ 39. Принцип «прямейшего пути» Герца	281
§ 40. Некоторые сведения о геодезических линиях	284
Глава VIII. Теория Гамильтона	288
§ 41. Обыкновенные дифференциальные уравнения Гамильтона	288
§ 42. Уравнения Рауса и циклические системы	296
§ 43. Дифференциальное уравнение Гамильтона в частных производных	300
§ 44. Теорема Якоби об интегрировании дифференциального уравнения Гамильтона в частных производных	306
§ 45. Задача Кеплера в классическом и квантовом рассмотрении	308
Приложения	
<i>Задачи к главе I</i>	
1. Упругий удар	315
2. Упругий удар в случае неравных масс	315
3. Упругий удар в случае неравных масс	315
4. Неупругое соударение электрона с атомом	315
5. Ракета для полета на Луну	316
6. Падение водяной капли в насыщенной атмосфере	316
7. Падающая цепь	316
8. Падающий канат	316
9. Ускорение Луны под действием земного притяжения	316
10. Момент силы как векторная величина	317

11. Годограф движения планеты	317
12. Траектории параллельного пучка электронов в поле иона и огибающая этих траекторий	317
13. Эллиптическая траектория в поле центральной силы, прямо пропорциональной расстоянию	317
14. Расщепление ядра атома лития	318
15. Центральное соударение нейтронов с атомными ядрами; действие парафинового блока	318
16. Уравнение Кеплера	318

Задачи к главе II

1. Неголономные связи при качении колеса	320
2. Приближенный расчет маховика одноцилиндровой поршневой паровой машины двойного действия	320
3. Центробежная сила при увеличенной скорости вращения Земли	321
4. Поггендорфа опыт с весами	321
5. Ускоренно движущаяся наклонная плоскость	322
6. Центробежные моменты при равномерном вращении несимметричного тела вокруг оси	322
7. Теория игрушки йо-йо	322
8. Отрыв материальной точки от шаровой поверхности, по которой она движется	322

Задачи к главе III

1. Сферический маятник в случае бесконечно малых отклонений	322
2. Положение резонансного максимума при вынужденном затухающем колебании	323
3. Процесс включения гальванометра	323
4. Маятник, точка подвеса которого движется заданным образом	323
5. Легко выполнимая модель симпатических маятников	324
6. Успокоитель колебаний	325
7. Баллистический маятник	325

Задачи к главе IV

1. Моменты инерции плоского распределения масс	326
2. Вращение волчка вокруг своих главных осей	326

3. Удары «высокие» и «низкие», «с накатом» и «с оттяжкой» в бильярдной игре 326
4. Параболическое движение бильярдного шара 326

Задачи к главе V

1. Относительное движение на плоскости 327
2. Движение вращающейся материальной точки по вращающейся прямой 327
3. Сани как простейший пример неголономной системы 327

Задачи к главе VI

1. Пример на применение принципа Гамильтона 328
2. Относительное движение в плоскости и движение по вращающейся прямой 329
3. Свободное падение на вращающейся Земле и маятник Фуко 329
4. «Маятникообразное» качение цилиндра по плоскому основанию 330
5. Дифференциальная передача автомобиля 330

Указания к решению задач 331

Предметный указатель 363

Введение

Механика представляет собой остов математической физики. В прошлом столетии считали, что задача физики заключается в том, чтобы все явления свести к механическим моделям. Хотя мы теперь и не разделяем этой точки зрения, все же мы убеждены в том, что принципы механики — закон сохранения импульса, закон сохранения энергии, принцип наименьшего действия — охватывают все области физики.

Наши лекции носят название «Механика», а не «Аналитическая механика», как это предпочитают делать математики. Последнее название заимствовано у Лагранжа из его фундаментального труда, вышедшего в 1788 г. Лагранж хотел облечь в единый язык формул всю систему механики и гордился тем, что «в его труде нельзя будет найти ни одного чертежа». Напротив, в наших лекциях мы стремимся возможно больше обращаться к наглядным представлениям и будем рассматривать не только астрономические, но также физические и, в известной степени, технические приложения механики.

Более точным названием наших лекций было бы: «Механика систем с конечным числом степеней свободы»; в соответствии с этим механику сплошных сред следовало бы назвать: «Механика систем с бесконечным числом степеней свободы». Но так как понятие степени свободы не является общеизвестным и может быть объяснено только в начале второй главы наших лекций, то мы оставляем за нашей книгой издавна употребляемое название «Механика», которое едва ли вызовет недоразумения.

Мы начинаем изложение с ньютоновых основ механики: «*Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*» (Лондон, 1687 г.). У Ньютона, правда, было много крупных предшественников (назовем хотя бы только Архимеда, Галилея Кеплера, Гюйгенса), но им первым был заложен надежный фундамент общей механики. Хотя этот фундамент и испытывал некоторые изменения и дополнения, все же и теперь именно Ньютон открывает нам наиболее естественный и с дидактической стороны наиболее простой путь к общей механике.

ГЛАВА I

МЕХАНИКА ТОЧКИ

§ 1. АКСИОМЫ НЬЮТОНА

Мы приведем законы движения в аксиоматической форме, рассматривая их как обобщение и уточнение всей совокупности опытных фактов.

Аксиома первая. *Каждое тело пребывает в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока действующие на него силы не заставят его изменить это состояние.*

Не останавливаясь пока на разъяснении употребленного выше понятия силы, отметим, что этой аксиомой утверждается равноправие состояний покоя и равномерного прямолинейного движения, которые рассматриваются как естественные состояния тела. Закон постулирует способность тел пребывать в этих естественных состояниях. Эту способность называют также *инертностью* или *инерцией тела*. Первую аксиому Ньютона называют иногда «законом инерции Галилея». При этом нужно заметить, что хотя Галилей и пришел к этому закону раньше Ньютона, но сформулировал его только как следствие из проведенных им опытов по падению тел по наклонной плоскости для предельного случая исчезающего наклона (т. е. горизонтальной плоскости), тогда как Ньютон поставил этот закон во главу всей своей системы. Вместо ньютоновского термина «тело» мы в дальнейшем будем пользоваться термином «точечное тело» или «материальная точка».

Чтобы дать закону математическую формулировку, воспользуемся теми определениями 1 и 2, которые у Ньютона предшествуют этому закону. Определение 2 гласит:

Количество движения есть мера такового, устанавливаемая пропорционально скорости и количеству материи.

Таким образом, «количество движения» является произведением двух сомножителей: скорости, являющейся геометрически наглядной

величиной¹, и «количества материи», которое является понятием, требующим физического определения. Ньютон пытался дать его в своем определении 1, в котором он говорит: «Количество материи есть мера таковой, устанавливаемая пропорционально плотности и объему ее». Это определение, очевидно, является бессодержательным, так как плотность в свою очередь может быть определена только как количество материи в единице объема. В этом же определении Ньютон указывает, что в дальнейшем он будет употреблять термин «масса» вместо термина «количество материи». Мы также будем пользоваться этим термином, но одновременно заметим, что мы должны будем вернуться к физическому определению массы (как и к физическому определению силы).

В дальнейшем под количеством движения мы будем понимать произведение массы на скорость. Оно, так же как и скорость, является направленной величиной — «вектором». Обозначая количество движения через \mathbf{G} ,² массу через m , скорость через \mathbf{v} , мы можем написать:

$$\mathbf{G} = m\mathbf{v} \quad (1.1)$$

и окончательно сформулировать первый закон движения следующим образом:

$$\mathbf{G} = \text{const} \quad \text{«при отсутствии сил»}. \quad (1.2)$$

Уточненный таким образом закон инерции, который мы ставим во главу угла нашей механики, является в действительности плодом многовекового развития науки. Насколько этот закон не тривиален, видно из следующего факта. В своем сочинении «Об истинном определении живых сил» в 1747 г., т. е. много позже Ньютона, молодой Кант говорит: «Существуют движения двоякого рода: такие, которые прекращаются после определенного времени, и такие, которые продолжаются». Движения, которые, по мнению Канта, прекращаются сами по себе, являются по нашим теперешним (и по ньютоновским) воззрениям такими движениями, которые замедляются силами трения и в конце концов прекращаются.

¹Поскольку фиксирована система отсчета, в которой должна измеряться скорость (ср. § 2).

²Мы предполагаем, что читатель знаком с элементами векторного исчисления. Но так как возникновение векторного исчисления теснейшим образом связано с механикой (включая механику жидкостей), то одновременно с механическими понятиями мы будем объяснять и векторные понятия.

Для обозначения векторов мы будем пользоваться, где это удобно, прямым жирным шрифтом. Наравне с этим мы будем пользоваться также и обозначениями стрелкой, например, бесконечно малый поворот будем обозначать через $\vec{\delta\phi}$ в тех случаях, когда он рассматривается как (аксиальный) вектор.

Термин «количество движения» неудачен, так как он не учитывает векторного характера этой величины. Такой величине лучше соответствует термин «импульс», все больше и больше входящий в употребление в последние десятилетия. В его основе лежит представление, что произведение $m\mathbf{v}$ по направлению и величине означает тот «толчок» который может перевести тело из состояния покоя в данное состояние движения. Поэтому мы будем, как правило (в последних главах этой книги даже исключительно), употреблять вместо термина «количество движения» термин «импульс», сохраняя для него обозначение \mathbf{G} . В соответствии с этим, мы можем вместо «закон инерции» или «первый закон движения Ньютона» говорить «закон сохранения импульса».

Переходим ко второй аксиоме, которая, в сущности, является законом движения Ньютона:

Аксиома вторая. *Изменение движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует.*

Под «изменением движения», без сомнения, понимается изменение определенного выше количества движения \mathbf{G} , т. е. величина $\dot{\mathbf{G}}$ (точка сверху является ньютоновским обозначением «флюксии» $\dot{\mathbf{G}} = \frac{d\mathbf{G}}{dt}$). Если силу обозначить через \mathbf{F} (от латинского слова *foris*), то второй закон можно записать в виде:

$$\dot{\mathbf{G}} = \mathbf{F}. \quad (1.3)$$

Так как \mathbf{G} — импульс, то это уравнение выражает закон изменения импульса или просто *закон импульса*.

К сожалению, вместо этого наименования обычно употребляется, особенно в математической литературе, наименование: *закон ускорения Ньютона*. Конечно, если m считать постоянной, то (1.3) и (1.1) эквивалентны уравнению

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} : \text{ «масса} \times \text{ ускорение} = \text{силе} \text{»}. \quad (1.3a)$$

Но масса не всегда постоянна; например, она не постоянна в теории относительности, в которой ньютоновская формулировка закона [уравнение (1.3)] оправдалась прямо-таки пророчески. В §4 мы рассмотрим ряд примеров движения с изменяющейся массой, причем подробно разберем соотношения между формулировками (1.3) и (1.3a). Однако

уже уравнение движения вращающегося твердого тела, являющегося простейшей механической системой после материальной точки, должно быть сформулировано в смысле уравнения (1.3): «изменение момента импульса равно моменту силы»; попытка же сформулировать этот закон с помощью понятия углового ускорения в смысле уравнения (1.3а) ни к чему не привела бы. Причина этого, как и в теории относительности, заключается в том, что момент инерции, играющий при вращении роль массы, может изменяться при изменении положения оси вращения в теле.

Попытаемся внести ясность в столь часто дискутировавшееся понятие силы. Кирхгоф¹ хотел низвести это понятие в ранг простого определения, согласно которому сила есть произведение массы на ускорение. Также и Герц² в своем посмертном труде стремился исключить понятие силы и заменить его связью между рассматриваемой системой и другими, вообще говоря, скрытыми, системами, находящимися с ней во взаимодействии. Герц провел эту программу с мастерской последовательностью. Но его метод едва ли дал плодотворные результаты; в частности, для начинающих он совершенно не пригоден.

Мы полагаем, что наши мускульные ощущения дают нам непосредственное, по крайней мере *качественное*, представление о понятии силы. Сверх того, всюду на Земле в нашем распоряжении имеется в качестве мерила сила тяжести, при помощи которой мы можем *количественно* измерять все другие силы. Для этого нужно только уравновесить действие данной силы соответствующим весом (при помощи ролика и нитки мы можем перевести вертикальное направление силы тяжести в направление, противоположное направлению данной силы). Изготовив, сверх того, определенное количество одинаковых тел — «набор разновесов», — мы можем использовать их в качестве временной шкалы для количественного измерения сил.

О понятии силы мы можем сказать то же самое, что и о всех физических понятиях и наименованиях: словесные определения бессодержательны, истинные же определения даются указанием способа измерения, которое, вообще говоря, может быть осуществимо только теоретически и не обязательно практически.

После того как мы таким путем придали правой части нашего закона импульса (1.3) конкретный смысл, этот закон стал действительно

¹Gustav Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik, Bd. I, S. 22.

²Heinrich Hertz, Gesammelte Werke, Bd. III. — Principien der Mechanik.

физическим утверждением. Однако в его левую часть входит еще масса m , которой до сих пор не было дано определения. Не надо думать, что определение массы m является единственным содержанием закона импульса. Напротив, этим законом подчеркивается, что силой определяется именно $\dot{\mathbf{G}}$, а не сам импульс \mathbf{G} или $\ddot{\mathbf{G}}$. В § 4 на примере релятивистской массы мы увидим, как нужно определить понятие массы в случае ее непостоянства.

Аксиома третья. *Действие всегда равно противодействию, или иначе — действия двух тел друг на друга всегда равны и противоположно направлены.*

Для каждого давления существует противодействие. В природе силы встречаются всегда попарно. Падающий камень притягивает Землю точно с такой же силой, как и Земля притягивает камень. Этот закон делает возможным переход от механики отдельной материальной точки к механике сложных систем; в частности, он лежит в основе всей статики строительных сооружений.

В качестве *аксиомы четвертой*, которая, впрочем, у Ньютона встречается только как добавление к законам движения (как королярый), мы будем рассматривать *правило параллелограмма сил*. Согласно этой аксиоме, две силы, приложенные к одной и той же точке, складываются по направлению диагонали образованного ими параллелограмма. *Силы складываются векторно.*

Это становится само собою понятным после того, как во втором законе мы отождествили силу \mathbf{F} с вектором $\dot{\mathbf{G}}$. В этом законе, как подчеркивает Мах, действительно заключается аксиома, что каждая сила производит соответствующее ей изменение движения материальной точки, *независимо* от того, действуют ли на эту точку одновременно и другие силы. Таким образом, эта *независимость действия сил друг от друга*, или, если сформулировать в более общем смысле, *принцип суперпозиции действия сил*, аксиоматически устанавливается законом параллелограмма сил. Конечно, этот закон, как и предшествующие законы движения, является идеализацией и обобщением всего опытного материала.

Введем уже здесь, наряду с понятием силы, понятие работы с помощью определения:

$$dA = (\mathbf{F}ds) = F \cdot ds \cdot \cos(\mathbf{F}, ds). \quad (1.4)$$

Следовательно, работа есть не «сила \times путь», как часто говорят, а «слагающая силы \times путь» или «сила \times слагающую пути».

Тогда из закона: «Силы складываются векторно» непосредственно вытекает дополняющая его теорема: «Работы складываются алгебраически». Действительно, из уравнения

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots = \mathbf{F}$$

(\mathbf{F} = равнодействующей силе) после умножения его скалярно на путь ds следует:

$$(\mathbf{F}_1 ds) + (\mathbf{F}_2 ds) + \dots = (\mathbf{F} ds). \quad (1.5)$$

Поскольку мы определили скалярное умножение с помощью формулы (1.4), само собою разумеется, что, например, и первое произведение входит только слагающая пути ds , пройденная в направлении силы \mathbf{F}_1 . Итак, вместо (1.5) можно также писать

$$dA_1 + dA_2 + \dots = dA, \quad (1.6)$$

что и требовалось доказать.

С понятием работы связано понятие мощности: *мощность есть работа за единицу времени*.

Чтобы покончить с этими вводными пояснениями, договоримся относительно точного *измерения* механических величин. Существуют две соперничающие системы единиц измерения этих величин: *физическая* и *техническая*. Различие между ними заключается в том, что в физической системе единиц g (или kg) служит единицей *массы*, тогда как в технической системе kg (или g) означает единицу *силы*. В последнем случае мы говорим о *кг-весе*, причем

$$1 \text{ кг-вес} = g \cdot \text{кг-масса},$$

где g — ускорение силы тяжести. Но так как это ускорение зависит от местоположения на земном шаре (на полюсе оно больше, чем на экваторе, из-за меньшего расстояния от центра Земли и меньшего центробежного действия), то значение *кг-веса* зависит от места. Поэтому техническая система единиц не пригодна для точных измерений; напротив, физическая система получила почетное название «абсолютной системы единиц измерения». Насколько глубоко укоренилась техническая система единиц в нашем научном языке, видно из того факта, что

во многих случаях, когда надо было бы употребить термин «масса», говорят «вес». Мы говорим об *удельном весе* в тех случаях, когда следовало бы говорить об *удельной массе* или *плотности*; мы говорим об атомных и молекулярных весах, которые, конечно, не имеют никакого отношения к земному тяготению.

Гаусс, родоначальник абсолютных измерений, остановился после некоторых колебаний на «физической» системе единиц. Вначале он был склонен ввести силу в качестве основной единицы, так как в его измерениях земного магнетизма она играла более непосредственную роль, чем масса. Но так как, с другой стороны, магнитные измерения должны были охватить весь земной шар, то он был вынужден принять единицу, не зависящую от места.

Сравним обе системы друг с другом и введем при этом производные единицы: *дину, эрг, джоуль, ватт, лошадиную силу*.

Физическая система единиц (CGS) *Техническая система единиц*

см, г-масса, сек.

м, кг-вес, сек.

$$1 \text{ кг-вес} = 9,81 \cdot 10^5 \frac{\text{г} \cdot \text{см}}{\text{сек}^2} = 9,81 \cdot 10^5 \text{ дин}$$

$$1 \text{ г-масса} = \frac{1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ сек}^2}{1000 \text{ г} \cdot \text{м}}$$

$$1 \text{ эрг} = 1 \text{ дин} \cdot 1 \text{ см}$$

$$\text{Единица работы} = 1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ м}$$

$$1 \text{ джоуль} = 10^7 \text{ эрг}$$

$$1 \text{ м} \cdot \text{кг-вес} = 1000 \cdot \text{г} \cdot 100 \text{ эрг} = 9,81 \cdot 10^7 \text{ эрг} = 9,81 \text{ джоуля}$$

$$1 \text{ ватт} = 1 \text{ джоуль} \cdot \text{сек}^{-1}$$

$$\text{Единица мощности} = 1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$$

$$1 \text{ киловатт} = 1000 \text{ джоулей} \cdot \text{сек}^{-1} = \frac{1 \text{ лош. сила}}{0,736}$$

$$1 \text{ лош. сила} = 75 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{сек}} = 75 \cdot 1000 \cdot 100 \times$$

$$= 1,36 \text{ лош. силы.}$$

$$\begin{aligned} & \times 981 \frac{\text{эрг}}{\text{сек.}} = \\ & = 75 \cdot 9,81 \text{ ватта} = \\ & = 0,736 \text{ киловатта.} \end{aligned}$$

Здесь уместно заметить, что, согласно решению соответствующих международных комиссий, система CGS должна, начиная с 1940 г., быть заменена системой MKS; вместо *см* вводится *м*, вместо *г* вводится *кг* в качестве единицы массы, а единицей времени остается *сек*.

Это соответствует предложению, сделанному Джорджи, основное содержание которого, впрочем, заключается во введении четвертой независимой электрической единицы измерения. В механике предложенное изменение имеет то преимущество, что в определении *джоуля* и *ватта* отпадают докучливые множители (степени десяти). В новых больших единицах М и К единицей работы и мощности становится

$$1\text{M}^2\text{KS}^{-2} = 10^7 \text{ см}^2 \cdot \text{г} \cdot \text{сек}^{-2} = 1 \text{ джоуль},$$

$$1\text{M}^2\text{KS}^{-3} = 10^7 \text{ см}^2 \cdot \text{г} \cdot \text{сек}^{-3} = 1 \text{ ватт}.$$

Следовательно, в новой системе единицей силы, которую мы назовем «Дина» (с большой буквы), будет:

$$1 \text{ Дина} = 1\text{MKS}^{-2} = 10^5 \text{ см} \cdot \text{г} \cdot \text{сек}^{-2} = 10^5 \text{ дин}.$$

Одним из преимуществ системы Джорджи является сближение новой единицы силы с удобной технической единицей силы *кг-весом*, тогда как прежняя единица силы «дина» по своей малости неудобна для практического употребления.

§ 2. ПРОСТРАНСТВО, ВРЕМЯ И СИСТЕМА ОТСЧЕТА¹

В настоящее время воззрения Ньютона относительно пространства и времени кажутся нам очень схоластичными и стоящими в противоречии с его повторными утверждениями, что он хочет опираться только на факты. Ньютон говорит:

«*Абсолютное пространство* по самой своей сущности, безотносительно к чему бы то ни было внешнему, остается всегда одинаковым и неподвижным».

«*Абсолютное, истинное математическое время* само по себе и по самой своей сущности, без всякого отношения к чему-либо внешнему, протекает равномерно и иначе называется длительностью».

Судя по этому, кажется, что Ньютона нисколько не заботил вопрос о том, откуда он берет свое абсолютное время и как он может отличить

¹Начинающий читатель, которому эти несколько абстрактные рассуждения могут показаться трудными, может отложить на некоторое время изучение этого параграфа и некоторых частей § 4.

свое «неподвижное» абсолютное пространство от пространства, равномерно движущегося по отношению к «неподвижному». Это тем более удивительно, что в своей первой аксиоме Ньютон считает «состояние покоя» и «равномерное движение» равноправными. С другой стороны, Ньютон пытается выявить различие между абсолютным и относительным движением с помощью своего знаменитого «опыта с ведром»: вода наливается в ведро, которое висит на закрученной веревке и внезапно приводится этой веревкой во вращение вокруг своей оси. Вначале поверхность воды остается плоской, несмотря на то, что относительная скорость ведра и воды велика. Только по мере того, как вследствие трения вода приводится в движение, она поднимается у стенок вверх, и ее поверхность принимает параболическую форму. Относительное движение между ведром и водой теперь прекратилось, но возникло «абсолютное» движение воды в пространстве, а вместе с ним образовалась и вогнутость поверхности воды.

На самом деле этот опыт показывает только, что вращающееся ведро является неподходящей системой отсчета для того, чтобы понять движение воды¹. Является ли Земля такой системой отсчета? Она также вращается и вдобавок движется еще и вокруг Солнца. Какие вообще требования надо предъявлять к *идеальной системе отсчета механики*? Под системой отсчета мы понимаем пространственно-временную систему, с помощью которой можно определять положение материальных точек и течение времени, как, например, прямоугольную систему координат x, y, z и шкалу времени t .

На практике мы полагаемся в этих вопросах на астрономов, которые дают нам в системе неподвижных звезд достаточно неподвижные оси и в средних солнечных сутках достаточно постоянную единицу времени. Но с теоретической точки зрения мы, к сожалению, приходим к тавтологии: правильной является та система отсчета, в которой закон инерции Галилея оказывается в достаточной степени справедливым для достаточно свободного тела. Таким образом, закон инерции низводится к чисто формальному определению; в качестве положительного неформального содержания закона остается только следующее утверждение:

¹Имеется в виду: «понять на основе ньютоновых законов механики». Если бы закон инерции был справедлив, когда в качестве системы отсчета взято «вращающееся» ведро, то поверхность воды в нем была бы плоской. Поскольку опыт дает иной результат, мы должны сделать заключение, что в системе отсчета, связанной с вращающимся ведром, закон инерции не имеет места. (*Прим. ред.*)

существуют системы отсчета, обладающие требуемым свойством. Согласно всему нашему опыту, такая система приближенно задается астрономическими определениями места и времени.

В сущности, именно это имеют в виду, когда в основу механики кладут понятие *инерциальной системы*, т. е. воображаемой системы, образованной траекториями тел, движущихся по инерции¹.

Теперь возникает вопрос: в какой мере определена эта идеальная система? Является ли такая система x, y, z, t *единственной* или существует *бесконечное множество* таких систем? Из закона инерции, который не делает различия между состоянием покоя и состоянием равномерного движения, непосредственно следует, что системе x, y, z, t равноправна любая система x', y', z', t' , отличающаяся от нее только равномерным поступательным движением. Математически это выражается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + \alpha_0 t, \\ y' &= y + \beta_0 t, \\ z' &= z + \gamma_0 t, \\ t' &= t. \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Преобразование (2.1) можно обобщить на случай поворота системы пространственных координат x, y, z . Это сводится к замене x, y, z в формулах (2.1) новыми пространственными координатами ξ, η, ζ , удовлетворяющими условию.

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = x^2 + y^2 + z^2. \quad (2.2)$$

Это условие определяет произвольное *ортогональное преобразование*, которое можно охарактеризовать направляющими косинусами согласно следующей схеме:

	x	y	z	
ξ	α_1	α_2	α_3	(2.3)
η	β_1	β_2	β_3	
ζ	γ_1	γ_2	γ_3	

¹В оригинале соответствующая фраза гласит: «Im Grunde dasselbe meint man, wenn man der Mechanik ein *Inertial-System* zugrunde legt, d. h. ein von Trägheitsbahnen gebildetes Gedankending». Эта фраза представляет затруднения для понимания, а следовательно, и для перевода. Всякая система отсчета образуется не траекториями, а *телами*. В соответствии с этим, и определение инерциальной системы должно сводиться к указанию тела, служащего в качестве тела отсчета. (*Прим. ред.*)

Эту схему можно читать как слева направо, так и сверху вниз. При этом, ввиду (2.2), α , β , γ удовлетворяют известным условиям

$$\sum \alpha_k^2 = \sum \beta_k^2 = \sum \gamma_k^2 = 1, \quad \sum \alpha_k \beta_k = \dots = 0 \quad \text{и т. д.} \quad (2.4)$$

Заменив в правой части (2.1) x, y, z через ξ, η, ζ и воспользовавшись (2.3), получим обобщенную схему преобразования:

	x	y	z	t	
x'	α_1	α_2	α_3	α_0	
y'	β_1	β_2	β_3	β_0	
z'	γ_1	γ_2	γ_3	γ_0	
t'	0	0	0	1	

(2.5)

Тот факт, что штрихованная система x', y', z', t' столь же пригодна в качестве системы отсчета классической механики, как и нештрихованная система x, y, z, t , называется *принципом относительности классической механики*. В дальнейшем преобразование (2.5) мы будем называть преобразованием Галилея. Оно линейно относительно четырех координат, ортогонально относительно первых трех координат и оставляет координату времени инвариантной ($t' = t$). Последнее означает, что принцип относительности классической механики оставляет незатронутым абсолютный характер времени, постулированный Ньютоном.

Не так, однако, обстоит дело в области электродинамики и, в частности, в одном из ее отделов — в оптике. Уравнения Максвелла, которые управляют областью электродинамики, показывают, что процесс распространения света в вакууме со скоростью c не зависит от системы отсчета. Фронт шаровой волны, выходящей из начала координат, определяется уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad \text{или} \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2, \quad (2.6)$$

в зависимости от того, пользуемся ли мы штрихованной или нештрихованной системой отсчета. Здесь удобно изменить обозначение координат следующим образом:

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3, \quad ict = x_4, \quad (2.7)$$

понимая под i мнимую единицу; соответственные обозначения вводим и для штрихованных координат. Тогда уравнения (2.6) принимают следующий вид:

$$\sum_1^4 x_k^2 = 0, \quad \sum_1^4 x'_k{}^2 = 0. \quad (2.8)$$

Независимость распространения света от системы отсчета требует¹, чтобы

$$\sum_1^4 x'_k{}^2 = \sum_1^4 x_k^2. \quad (2.9)$$

Уравнение (2.2) определяло ортогональное преобразование в трехмерном пространстве, тогда как уравнение (2.9) относится к ортогональному преобразованию в *четырёхмерном* пространстве, причем мнимость четвертой координаты не нарушает справедливости уравнений, аналогичных уравнениям (2.3), (2.4), (2.5). Соответствующее преобразованию (2.5) соотношение между x_k и x'_k называется *преобразованием Лоренца* (по имени великого голландского физика-теоретика Гендрика Антона Лоренца). Записываем это преобразование в виде следующей общей схемы:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x'_1	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	
x'_2	α_{21}	α_{22}	α_{23}	α_{24}	
x'_3	α_{31}	α_{32}	α_{33}	α_{34}	
x'_4	α_{41}	α_{42}	α_{43}	α_{44}	(2.10)

Эта схема указывает на то, что при изменении системы отсчета изменяются не только пространственные координаты, но и координаты времени (в мнимой форме x_4). Таким образом, требование инвариантности (2.9) с необходимостью ведет к отказу от абсолютности времени.

Значительно нагляднее общего преобразования частное преобразование Лоренца, которое мы получим, если оставим без изменения две пространственные координаты, например, x_1 и x_2 , и преобразуем только x_3 и x_4 .

¹А именно, одно из уравнений (2.8) должно быть следствием другого. Ввиду линейности связи между штрихованными и нештрихованными координатами, это означает, что одно из выражений (2.8) должно быть пропорционально другому; коэффициент пропорциональности должен равняться 1 ввиду взаимности соотношений.

Тогда в первом и втором горизонтальных и вертикальных рядах схемы (2.10) должны исчезнуть все α , кроме

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = 1.$$

Это следует из равенств $x'_1 = x_1$, $x'_2 = x_2$, которые можно прочитать в схеме (2.10) как слева направо, так и сверху вниз. Далее, из условий, аналогичных условиям (2.4), получаем

$$\alpha_{33}^2 + \alpha_{34}^2 = \alpha_{33}^2 + \alpha_{43}^2 = \alpha_{43}^2 + \alpha_{44}^2 = \alpha_{34}^2 + \alpha_{44}^2 = 1; \quad (2.11)$$

таким образом,

$$\alpha_{33}^2 = \alpha_{44}^2, \quad \alpha_{34}^2 = \alpha_{43}^2.$$

Если мы положим здесь

$$\alpha_{33} = +\alpha_{44},$$

то должны выбрать

$$\alpha_{34} = -\alpha_{43},$$

чтобы удовлетворить условию ортогональности

$$\alpha_{33}\alpha_{34} + \alpha_{43}\alpha_{44} = 0.$$

Если еще ради сокращения ввести обозначения α и β , положив

$$\alpha_{33} = \alpha_{44} = \alpha, \quad \alpha_{34} = -\alpha_{43} = i\alpha\beta, \quad (2.12)$$

то схема (2.10) перейдет в

	x_1	x_2	x_3	x_4
x'_1	1	0	0	0
x'_2	0	1	0	0
x'_3	0	0	α	$i\alpha\beta$
x'_4	0	0	$-i\alpha\beta$	α

Отсюда получаем следующие соотношения между двумя последними координатами (отныне мы будем применять для них первоначальные обозначения z и t):

$$\left. \begin{aligned} z' &= \alpha(z - \beta ct), \\ t' &= \alpha\left(t - \frac{\beta}{c}z\right). \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Из уравнений (2.11) и (2.12) следует, что

$$\alpha^2(1 - \beta^2) = 1, \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (2.13a)$$

Далее мы положим

$$\beta c = v, \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad (2.13б)$$

Согласно первому из уравнений (2.13), введенная нами величина v означает скорость, с которой ось z' движется по отношению к нештрихованной системе¹. Скорость эта параллельна оси z и направлена вдоль положительного направления этой оси. Подстановка (2.13а, б) в (2.13) окончательно дает двумерное преобразование Лоренца:

$$\left. \begin{aligned} z' &= \frac{z - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ t' &= \frac{t - \frac{vz}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Отсюда в пределе при $c \rightarrow \infty$ получается преобразование Галилея (2.1) с $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, $\gamma_0 = -v$, а именно

$$z' = z - vt, \quad t' = t. \quad (2.14a)$$

Относительность времени в (2.14) и изменение масштаба пространственной координаты z (выражаемое знаменателем $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$) обусловлены, как мы видим, конечностью скорости света c , с которой несоместим принцип относительности классической механики.

¹ Действительно, если некоторая точка покоится относительно штрихованной системы координат, то ее координаты x' , y' , z' остаются постоянными. Значит, на основании первого из уравнений (2.13), координата z этой точки должна удовлетворять уравнению

$$\alpha(z - \beta ct) = \text{const.}$$

или

$$z = vt + \text{const.}$$

Отсюда следует, что рассматриваемая точка, а следовательно, и штрихованная система координат, движется равномерно вдоль оси z со скоростью v относительно нештрихованной системы. (*Прим. ред.*)

Тот факт, что при конечной скорости распространения c всех электродинамических воздействий преобразования Галилея должны быть заменены преобразованиями Лоренца [в общей их форме (2.10) или в специализированной форме (2.14)], называют *принципом относительности электродинамики*. Однако ясно, что и механика должна быть приведена в согласие с фактом конечности скорости распространения света. Только вследствие того, что все скорости, встречающиеся в обычной механике, очень малы по сравнению с c , для целей механики можно почти всегда не принимать во внимание изменение масштаба пространственных и временных координат, предписываемое уравнениями (2.14).

Все многообразие физических следствий, вытекающих из преобразований Лоренца, может быть рассмотрено лишь в электродинамике. Здесь же мы еще рассмотрим только те изменения в понимании одной из важнейших механических величин — *количества движения или импульса* \mathbf{G} , которые вытекают из принципа относительности.

Мы назвали \mathbf{G} вектором. Под этим понимается только то, что при изменении координатной системы три составляющих \mathbf{G} изменяются так же, как и сами координаты (т. е. как слагающие радиуса-вектора $\mathbf{r} = x, y, z$). Это утверждение выражают словами: \mathbf{G} ковариантно с \mathbf{r} .

Однако это утверждение справедливо только с точки зрения преобразования Галилея, т. е. при условии, что время рассматривается как абсолютное. С точки зрения преобразований Лоренца *радиус-вектор* является *четырёхкомпонентной* величиной, а именно *четырёхмерным вектором*:

$$\mathbf{r} = x_1, x_2, x_3, x_4. \quad (2.15)$$

Также и импульс — в дальнейшем мы будем обозначать его через \mathfrak{G} — надо рассматривать как четырёхмерный вектор; иными словами, чтобы иметь «права гражданства» в теории относительности, он должен быть ковариантным с \mathbf{r} . Мы приходим к этому четырёхмерному вектору следующим путем:

а) Координатное расстояние между двумя соседними точками

$$d\mathbf{r} = dx_1, dx_2, dx_3, ic dt \quad (2.16)$$

так же, как и радиус-вектор (2.15), несомненно, является четырёхмерным вектором.

б) Величина этого расстояния, конечно, *инвариантна* по отношению к преобразованиям Лоренца. С точностью до множителя ic , эта величина дается следующей формулой:

$$d\tau = \sqrt{dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)}. \quad (2.17)$$

По введенной Минковским терминологии $d\tau$ называется элементом *собственного времени*; $d\tau$, в отличие от dt , релятивистски инвариантно. Если мы в (2.17) вынесем dt за скобки и введем обыкновенную трехмерную скорость v , то получим:

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = dt \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (2.17a)$$

[Ср. (2.13)].

в) Путем деления четырехмерного вектора (2.16) на инвариант (2.17a) мы, конечно, получим опять четырехмерный вектор; назовем его *четырёхмерным вектором скорости*.

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}, ic \right). \quad (2.18)$$

г) Подобно тому, как мы получили прежний вектор импульса \mathbf{G} из трехмерного вектора скорости путем умножения этого последнего на массу m , не зависящую от системы отсчета, мы получим четырехмерный вектор импульса \mathfrak{G} из четырехмерного вектора скорости (2.18) путем умножения этого последнего на не зависящий от системы отсчета коэффициент. Назовем этот коэффициент *массой покоя* m_0 . Тогда получим:

$$\mathfrak{G} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}, ic \right). \quad (2.19)$$

Выражение, стоящее перед скобками, целесообразно назвать *массой движения* (так как оно для $\beta = 0$ переходит в массу покоя) или просто *массой*. Следовательно, мы утверждаем, что

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (2.20)$$

Этот закон впервые был выведен Лоренцом в 1904 г. при весьма специальных предположениях (деформируемый электрон); вышеприведенный вывод из принципа относительности делает подобные специальные предположения излишними. Справедливость уравнения (2.20) подтверждена многочисленными точными опытами с быстрыми электронами; вместе с оптическими опытами, особенно с опытом Майкельсона, они являются тем фундаментом, на котором покоится теория относительности. Если мы в нашем изложении, следуя в обратной последовательности и исходя из принципа относительности, пришли к уравнению (2.20) очень формальным путем, то логически это допустимо и способствует краткости наших вводных пояснений. В § 4 мы рассмотрим, какие изменения в применениях законов движения Ньютона вытекают из зависимости массы от скорости.

Теперь, чтобы довести до конца рассмотрение вопроса о допустимых системах отсчета, хотя бы в виде кратких указаний, мы перейдем от *специальной теории относительности*, которую мы рассматривали до сих пор, к *общей теории относительности* (Эйнштейн, 1915 г.). В специальной теории относительности имеются правомерные системы отсчета, преобразующиеся друг в друга путем преобразований Лоренца, и неправомерные системы отсчета, например, системы, движущиеся ускоренно относительно правомерных. В общей же теории относительности допускаются всевозможные системы отсчета; преобразование между ними не должны, подобно (2.10), быть линейными или ортогональными, а могут быть заданы произвольными функциями $x'_k = f_k(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Таким образом, речь идет о системах отсчета, произвольно движущихся и произвольно деформированных по отношению друг к другу. При этом пространство и время утрачивают последние черты той абсолютности, которой они обладали в основоположениях Ньютона. При подобных рассмотренных даже евклидова геометрия оказывается недостаточной для этой цели и должна быть заменена значительно более общей геометрией, основание которой было заложено Риманом. При этом возникает задача придать физическим законам такую форму, которая делала бы их справедливыми для всех рассматриваемых систем отсчета, другими словами, придать им форму, инвариантную по отношению к любым «точечным преобразованиям» $x'_k = f_k(x_1, \dots, x_4)$ четырехмерного пространства. В разрешении этой задачи и заключается положительное содержание общей теории относительности. Очень сложная в математическом отношении форма,

которую при этом принимают законы механики, не может быть нами рассмотрена в этих лекциях. Упомянем только, что этот путь автоматически приводит к обоснованию и вместе с тем к уточнению ньютоновского закона тяготения.

В заключение скажем несколько слов о термине «теория относительности». Заслугой этой теории является не полная релятивизация пространства и времени, а доказательство независимости законов природы от выбора системы отсчета, т. е. доказательство инвариантности явлений природы по отношению ко всякому изменению точки зрения наблюдателя. Поэтому термин «теория инвариантности явлений природы» удачнее характеризовал бы эту теорию, чем обычный термин «общая теория относительности».

§ 3. ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Допустим, что движение происходит по оси x . При таком движении проявляется действие только слагающих сил в направлении оси x , сумму которых мы обозначим через X .

В рассматриваемом случае $v = v_x = \frac{dx}{dt}$ и $G = G_x = m \frac{dx}{dt}$. Закон движения гласит:

$$\dot{G} = X, \quad (3.1)$$

а при постоянном m

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X. \quad (3.2)$$

Рассмотрим интегрирование этого уравнения движения в тех случаях, когда X является функцией либо только времени [$X = X(t)$], либо координаты [$X = X(x)$], либо скорости [$X = X(v)$].

а)
$$X = X(t).$$

Непосредственное интегрирование дает:

$$v - v_0 = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t X(t) dt = \frac{1}{m} Z(t). \quad (3.3)$$

Таким образом, интеграл силы по времени $Z(t)$ равен *изменению импульса* за время от t_0 до t .¹

Вторичное интегрирование дает уравнение пути:

$$x - x_0 = v_0(t - t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t Z(t) dt. \quad (3.4)$$

б) $X = X(x)$.

Этот пример является типичным случаем *силового поля*, заданного в пространстве. Интегрирование производится с помощью закона сохранения энергии. Умножаем обе части уравнения (3.2) на $\frac{dx}{dt}$:

$$m \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = X \frac{dx}{dt}. \quad (3.5)$$

Теперь слева стоит полная производная

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right\}.$$

В соответствии с общим определением (1.4), пишем справа $dA = X dx$ и называем dA работой, произведенной на пути dx . Получаемое таким образом уравнение гласит: *изменение кинетической энергии равно произведенной работе*.

Действительно, назовем по определению величину

$$T = E_{\text{кин}} = \frac{m}{2} v^2 \quad (3.6)$$

кинетической энергией или *энергией движения*; более старый термин «живая сила» (Лейбниц) отражает многозначность термина «сила» (противоположение *vis viva* и *vis motrix*; еще Гельмгольц дал своему сочинению, написанному в 1847 г., название «О сохранении силы»).

¹ Часто термином «импульс» обозначают интеграл действующей силы по времени, а равную ему величину $mv - mv_0$ называют изменением количества движения. (Прим. ред.)

Наряду с кинетической энергией, определим потенциальную энергию V как

$$dV = -dA = -X dx, \quad V = E_{\text{потенц.}} = - \int^x X dx. \quad (3.7)$$

В одномерной механике точки это определение достаточно; соответствующая же функция V для двух- и трехмерных силовых полей существует только в том случае, если эти поля удовлетворяют определенным условиям (ср. добавление к § 18). Согласно (3.7), V определено с точностью до аддитивной постоянной.

Воспользовавшись этими определениями, из проинтегрированного уравнения (3.5) получаем закон сохранения энергии:

$$T + V = \text{const} = W, \quad (3.8)$$

где W — постоянная энергии или «полная энергия».

Закон сохранения энергии имеет не только выдающееся физическое значение, но обладает еще и замечательной математической силой. Он позволяет, как мы видели, не только произвести первое интегрирование, но непосредственно выполнить также и второе интегрирование, по крайней мере в рассматриваемом нами случае б). А именно, если мы запишем (3.8) в форме

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}[W - V(x)],$$

то, разрешая это уравнение относительно dt , получим:

$$dt = \sqrt{\frac{m}{2(W - V)}} dx$$

и отсюда

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{W - V}}. \quad (3.9)$$

Таким образом, нам известно t как функция x , а следовательно, и x как функция t . В соответствии с этим уравнение (3.9) представляет собой полностью проинтегрированное уравнение движения.

в) $X = X(v).$

Теперь уравнение движения гласит:

$$m \frac{dv}{dt} = X(v).$$

Перепишем его в виде

$$dt = \frac{m dv}{X},$$

откуда получим

$$t - t_0 = m \int_{v_0}^v \frac{dv}{X} = F(v). \quad (3.10)$$

Этим уравнением определяется также v как функция t :

$$v = f(t).$$

Итак, мы имеем

$$\frac{dx}{dt} = f(t),$$

откуда следует

$$x - x_0 = \int_{t_0}^t f(t) dt.$$

Примеры

1. Свободное падение вблизи земной поверхности

Направим ось x вверх. Сила

$$X = -mg \quad (3.11)$$

постоянна, т. е. не зависит от t и v . Следовательно, применимы все три способа интегрирования: а), б), в).

Мы проведем интегрирование способами а) и б) и при этом предположим, что «тяготеющая» масса и «инертная» масса равны друг другу:

$$m_{\text{тяг.}} = m_{\text{ин.}} \quad (3.12)$$

$m_{\text{ин.}}$ — масса, определяемая второй аксиомой, $m_{\text{тяг.}}$ — масса, фигурирующая в законе тяготения, а потому также и в выражении силы тяжести (3.11).

Уже Бесселем была понята необходимость экспериментально проверить равенство (3.12) на опытах с маятником¹.

Значительно более точное экспериментальное доказательство этого равенства дал Этвёш с помощью своих крутильных весов. Позднее соотношение (3.12) дало первый толчок к теории тяготения Эйнштейна.

а) $\ddot{x} = -g$. При соответствующем выборе постоянной интегрирования ($v = 0$ и $x = h$ при $t = 0$) получаем:

$$\dot{x} = -gt \quad x = h - \frac{g}{2}t^2.$$

б) Из $dA = -mg dx$ получаем

$$V = mgx \quad \text{и} \quad T + mgx = W.$$

Если $v = 0$ при $x = h$, то $W = mgh$; следовательно,

$$\frac{m}{2}v^2 + mgx = mgh.$$

В частности, для $x = 0$ получается $x^2 = 2gh$,

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (3.13)$$

Обратив это уравнение, получим

$$h = \frac{v^2}{2g}. \quad (3.13a)$$

Эта величина называется «скоростным напором». Она определяет ту высоту h , до которой должна быть поднята (произвольная) масса, чтобы

¹Отметим, что уже у Ньютона в начале его механики, а именно в пояснении к «Определению I», мы находим следующее интересное положение: «Определяется масса по весу тела, ибо она пропорциональна весу, что мною найдено опытами над маятниками, произведенными точнейшим образом».

приобрести при падении в поле тяжести с этой высоты заданную скорость v . Введение этого «скоростного напора» вместо скорости в особенности удобно при рассмотрении ряда технических вопросов, например, высоты подъема воды в трубках Пито, величины давления в центрифугах и т. д. Разница в высоте уровней воды в ньютоновском «опыте с ведром» также дается формулой (3.13а).

2. Свободное падение с большой высоты (метеор)

В этом случае сила притяжения не является уже постоянной, а определяется законом тяготения (m — масса метеора, M — масса Земли, G — постоянная тяготения):

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = - \frac{mMG}{r^2}. \quad (3.14)$$

Здесь вместо координаты x мы ввели расстояние r , отсчитываемое от центра Земли. Так как сила зависит от r , то теперь может быть применен только способ интегрирования б).

В частности, из (3.14) получается следующее выражение для силы тяжести на земной поверхности:

$$mg = \frac{mMG}{a^2},$$

где a означает радиус Земли. Это соотношение позволяет исключить mMG из (3.14):

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -g \frac{a^2}{r^2}.$$

Из (3.7) получаем:

$$dV = -dA = mga^2 \frac{dr}{r^2}.$$

Таким образом, для потенциальной энергии, если положить ее равной нулю на бесконечности, получим выражение:

$$V(r) = -mg \frac{a^2}{r}. \quad (3.15)$$

Поэтому из (3.8) следует:

$$\frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{mga^2}{r} = W = - \frac{mga^2}{R},$$

где R — гипотетическое начальное расстояние падающей массы от центра Земли, на котором она находилась в состоянии покоя. Таким образом, имеем:

$$\frac{dr}{dt} = a\sqrt{2g}\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{R}} \quad (3.16)$$

и, соответственно уравнению (3.9),

$$t = \frac{1}{a\sqrt{2g}} \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{R}}}. \quad (3.16a)$$

Мы не станем вычислять значение входящего в (3.16a) интеграла, так как нас интересуют только два частных случая уравнения (3.16):

а)
$$R = \infty, \quad r = a.$$

Метеор достигает Земли со скоростью

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{2ga}.$$

Стало быть, при свободном падении с бесконечной высоты в поле тяготения тело приобрело бы на поверхности Земли ту же скорость, как и при свободном падении с высоты $h = a$ при постоянном ускорении силы тяжести g [см. уравнение (3.13)].

б)
$$R = a + h, \quad h \ll a, \quad r = a.$$

Здесь речь идет о первой поправке к определяемой формулой (3.13) скорости падения, обусловленной уменьшением ускорения силы тяжести при удалении от Земли; предполагается, что падение происходит с не слишком большой высоты. Из (3.16) следует:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \sqrt{2ga} \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \frac{h}{a}}} = \sqrt{2ga} \left(\frac{h}{a} - \frac{h^2}{a^2} + \dots \right)^{1/2} = \\ &= \sqrt{2ga} \sqrt{\frac{h}{a}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{h}{a} + \dots \right) = \sqrt{2gh} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{h}{a} + \dots \right). \end{aligned}$$

3. Свободное падение при учете сопротивления воздуха

Примем, что сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости. Это допущение, восходящее еще к Ньютону, достаточно хорошо согласуется с данными наблюдений в тех случаях, когда падающее тело не слишком мало и когда его скорость мала по сравнению со скоростью звука, но при этом не исчезающе мала. При таком допущении полная действующая сила равна

$$X(v) = -mg + av^2.$$

Знак последнего члена соответствует тому, что сопротивление воздуха противодействует силе тяжести [ср. выше случай в)]. Уравнение движения будет иметь вид

$$\frac{dv}{dt} = -g + \frac{a}{m}v^2. \quad (3.17)$$

Если положить $\frac{a}{mg} = b^2$, то оно переходит в

$$\frac{dv}{dt} = -g(1 - b^2v^2).$$

Отсюда, как и при выводе уравнения (3.10), положив $t_0 = 0$, получаем:

$$-g dt = \frac{dv}{2} \left(\frac{1}{1-bv} + \frac{1}{1+bv} \right), \quad -gt = \frac{1}{2b} \lg \frac{1+bv}{1-bv}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1+bv}{1-bv} &= e^{-2bgt}, \\ bv &= \frac{e^{-2bgt} - 1}{e^{-2bgt} + 1} = -\frac{\text{sh}(bgt)}{\text{ch}(bgt)} = -\text{th}(bgt). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Здесь sh, ch, th означают гиперболические функции. Таким образом, bv все время увеличивается от 0 и при $t = \infty$ приближается к единице. Предел, к которому стремится само v , равен

$$|v| = \frac{1}{b} = \sqrt{\frac{mg}{a}}.$$

Этот результат можно прямо получить из уравнения (3.17), так как при таком предельном значении скорости производная $\frac{dv}{dt}$ обращается в нуль.

Воспользуемся уравнением (3.18), чтобы получить первую поправку на сопротивление воздуха к формуле, выведенной для безвоздушного пространства. Из разложения в ряд

$$\operatorname{th} a = \frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} a} = \frac{a + \frac{a^3}{6}}{1 + \frac{a^2}{2}} = a \left(1 - \frac{a^2}{3} \right),$$

полагая на основании (3.18) $a = bgt$, получим:

$$v = -gt \left(1 - \frac{(bgt)^2}{3} \right).$$

4. Гармонические колебания

Гармонические колебания возникают при действии на материальную точку m силы X , направленной к положению равновесия и пропорциональной отклонению x от этого положения. Если мы обозначим коэффициент пропорциональности через k , то

$$X = -kx,$$

и уравнение движения при постоянном m будет

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx. \quad (3.19)$$

Так как сила задана как функция координаты [случай б), стр. 30], то, согласно общему правилу для этого случая, при интегрировании мы применим закон сохранения энергии. Для этого нам необходимо прежде всего определить потенциальную энергию гармонической связи. Имеем

$$dA = X dx = -\frac{k}{2} d(x^2)$$

и, следовательно, согласно (3.7), при соответствующем выборе нулевого значения V ,

$$V = - \int_0^x dA = \frac{k}{2} x^2.$$

Поэтому закон сохранения энергии в нашем случае гласит:

$$mv^2 + kx^2 = 2W.$$

В качестве начальных условий полагаем, например,

$$\text{при } t = 0 \quad \begin{cases} x = a \\ v = \dot{x} = 0. \end{cases} \quad (3.19a)$$

Тогда $2W$ оказывается равным ka^2 и

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{k}{m}(a^2 - x^2), \quad \sqrt{\frac{k}{m}} dt = \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Следовательно, принимая во внимание начальные условия (3.19a),

$$\omega t = \arcsin \frac{x}{a} - \frac{\pi}{2}, \quad \text{где } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (3.20)$$

Разрешая это уравнение относительно x , получим:

$$x = a \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = a \cos \omega t. \quad (3.21)$$

Теперь становится ясным физический смысл введенной нами величины ω . Она означает «круговую частоту», т. е. число колебаний в 2π единиц времени. Если τ означает период колебания, а ν — число колебаний в единицу времени¹, то

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} = 2\pi\nu. \quad (3.22)$$

Пользуясь этим обозначением, можно вместо (3.19) написать также:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (3.23)$$

¹В отличие от ω , буквой ν обозначают число колебаний за одну единицу времени (секунду). Вместо «число колебаний» часто говорят просто «частота».

Закон сохранения энергии имеет то преимущество, что он всегда приводит к цели, каким бы образом сила X ни зависела от x . Для нашего же случая, в котором X линейно зависит от x , существует другой, значительно более изящный, способ решения уравнения движения. Он основывается на непосредственно очевидном положении, что однородное линейное дифференциальное уравнение любого порядка с постоянными коэффициентами (x — искомая функция, t — независимая переменная) всегда имеет решение вида:

$$x = Ce^{\lambda t}, \quad (3.24)$$

если только в качестве λ выбрать корень некоторого алгебраического уравнения, получающегося из данного дифференциального уравнения. Выражение (3.24) является частным решением дифференциального уравнения; общее же его решение получается путем суперпозиции всех таких частных решений:

$$x = \sum C_j e^{\lambda_j t}. \quad (3.24a)$$

В случае нашего уравнения (3.23) алгебраическое уравнение для λ оказывается квадратным:

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0; \quad \text{корни его } \lambda = \pm i\omega.$$

Поэтому общее решение имеет вид:

$$x = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}. \quad (3.24б)$$

Постоянные C_1, C_2 определяются из начальных условий (3.19а):

$$\dot{x} = 0 \quad \text{дает:} \quad C_1 i\omega - C_2 i\omega = 0; \quad C_1 = C_2.$$

$$x = a \quad \text{дает:} \quad a = C_1 + C_2 = 2C_1; \quad C_1 = \frac{a}{2}.$$

Итак, в согласии с (3.21), окончательное решение задачи гласит:

$$x = a \cos \omega t.$$

В дальнейшем (гл. III, § 19) мы будем часто пользоваться этим методом для рассмотрения затухающих, вынужденных, связанных и других колебаний, поскольку эти колебания могут быть описаны линейными дифференциальными уравнениями. Заглавие «гармонические колебания», которое мы дали этому параграфу, указывает на линейный

закон упругой силы, из которого следует, что движение может быть охарактеризовано одной определенной частотой ω . Для «ангармонической», т. е. нелинейной связи, этот метод непригоден; в таких случаях приходится пользоваться менее изящным методом, основанным на применении закона сохранения энергии.

5. Соударение двух материальных точек

Допустим, что перед ударом (рис. 1) материальные точки m и M имеют скорости v_0 и V_0 ; скорости после удара будут v и V .

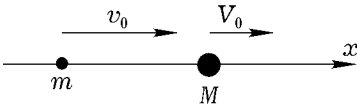


Рис. 1. Соударение двух масс M и m ; скорости до удара V_0, v_0 ; после удара V, v

Как бы ни происходил удар в каждом отдельном случае — упруго или неупруго, — аксиома Ньютона: действие равно противодействию, всегда будет справедлива для сил взаимодействия между m и M , а стало быть, и для интеграла этих сил по времени. Поэтому, согласно уравнению (3.3),

$$m(v - v_0) = Z = -M(V - V_0) \quad (3.25)$$

и, следовательно,

$$mv + MV = mv_0 + MV_0. \quad (3.25a)$$

Это уравнение выражает сохранение общего импульса системы.

Если ввести координату центра тяжести

$$\xi = \frac{mx + MX}{m + M}, \quad (3.25b)$$

то уравнение (3.25a) можно написать в виде:

$$\dot{\xi} = \dot{\xi}_0.$$

Таким образом, этот закон движения центра тяжести утверждает, что удар не оказывает никакого влияния на скорость движения центра тяжести.

Например, центр тяжести вылетевшей из ствола орудия гранаты продолжает беспрепятственно описывать (в безвоздушном пространстве) параболическую траекторию брошенного тела даже в том случае,

если граната в какой-либо точке траектории разорвалась на осколки, траектории которых кажутся независимыми друг от друга.

Для полного решения проблемы удара надо сделать еще один шаг, так как для определения двух неизвестных v и V мы имеем лишь одно уравнение (3.25а). «Упругий удар» мы определяем как такое взаимодействие, при котором сохраняется не только импульс, но и кинетическая энергия системы. Таким образом, мы требуем, чтобы

$$\frac{m}{2}v^2 + \frac{M}{2}V^2 = \frac{m}{2}v_0^2 + \frac{M}{2}V_0^2. \quad (3.26)$$

Следовательно,

$$m(v^2 - v_0^2) = M(V_0^2 - V^2).$$

С другой стороны, согласно (3.25),

$$m(v - v_0) = M(V_0 - V).$$

Путем почленного деления последних двух уравнений получим:

$$v + v_0 = V_0 + V;$$

следовательно,

$$V - v = -(V_0 - v_0). \quad (3.26a)$$

Это уравнение гласит, что *относительные скорости* обеих масс после удара и до удара равны между собою, но противоположны по направлению.

Путем сопоставления уравнений (3.25а) и (3.26а) получаем

$$\begin{aligned} mv + MV &= mv_0 + MV_0, \\ v - V &= -v_0 + V_0. \end{aligned}$$

Отсюда однозначно определяются скорости после удара. Именно,

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{m - M}{m + M}v_0 + \frac{2M}{m + M}V_0, \\ V &= \frac{M - m}{m + M}V_0 + \frac{2m}{m + M}v_0. \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

Следует заметить, что определитель Δ этого «преобразования» от начальных значений v_0, V_0 к конечным значениям v, V по абсолютной величине равен 1. Действительно,

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{m-M}{m+M} & \frac{2M}{m+M} \\ \frac{2M}{m+M} & \frac{M-m}{m+M} \end{vmatrix} = -\left(\frac{M-m}{m+M}\right)^2 - \frac{4mM}{(m+M)^2} = -1.$$

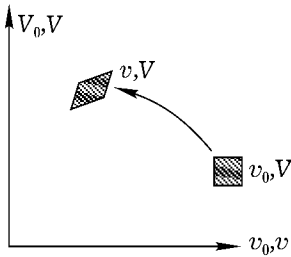


Рис. 2а. Области изменения скоростей до и после удара. Преобразование не искажает площадей

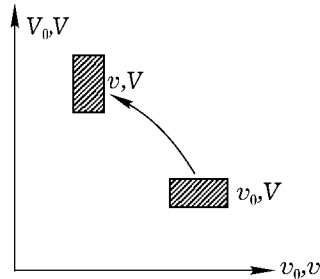


Рис. 2б. При равных массах $m = M$ преобразование не искажает ни площадей, ни углов

В применении к какому-либо интервалу значений скоростей это означает, что преобразованный элемент (на плоскости v, V) равновелик начальному элементу (на плоскости v_0, V_0). Другими словами, рассматриваемое преобразование не изменяет площадей (рис. 2а). Это положение играет важную роль при рассмотрении процессов соударения в кинетической теории газов и тесно связано с теоремой Лиувилля¹.

¹У читателя, знакомого с теоремой Лиувилля, может возникнуть вопрос: почему в рассматриваемом случае преобразования от v_0, V_0 к v, V якобиан Δ равен минус единице?

Если бы вычислить якобиан преобразования импульсов p_0, P_0 к p, P , то он оказался бы равным также минус единице. Между тем, по теореме Лиувилля якобиан преобразования равен плюс единице. Между этими утверждениями нет противоречия, так как в теореме Лиувилля речь идет о преобразовании не только импульсов, но и координат. В применении к случаю удара упругих шаров теорема Лиувилля

Для двух равных масс $m = M$, например, для двух бильярдных шаров, уравнения (3.27) переходят в

$$v = V_0, \quad V = v_0. \quad (3.27a)$$

В этом случае преобразование не искажает ни площадей, ни углов (рис. 2б), так как преобразованный прямоугольник получается из исходного путем перестановки сторон. В частности, если при игре на бильярде один из шаров находится в состоянии покоя, то другой шар при центральном ударе передает первому шару всю свою скорость и приходит сам в состояние покоя [см. (3.27a) при $V_0 = 0$].

С другой стороны, если одна масса значительно больше другой $M \gg m$, то большая масса при соударении сохраняет почти неизменной свою первоначальную скорость, тогда как малая масса следует за большой со скоростью, отличающейся от скорости последней на величину первоначальной относительной скорости обеих масс. Действительно, при $m \ll M$ уравнения (3.27) упрощаются и принимают вид:

$$v = -v_0 + 2V_0 = V_0 - (v_0 - V_0), \quad V = V_0. \quad (3.27б)$$

гласит:

$$\frac{D(x, X, g, G)}{D(x_0, X_0, g_0, G_0)} = +1, \quad (a)$$

где x_0, X_0, g_0, G_0 — координаты и импульсы шаров в момент времени t_0 , а x, X, g, G в момент времени t . Если исключить из рассмотрения время удара, когда шары взаимодействуют между собой, то импульсы g, G не будут зависеть от x_0, X_0 , так что:

$$\frac{D(x, X, g, G)}{D(x_0, X_0, g_0, G_0)} = \frac{D(x, X)}{D(x_0, X_0)} \cdot \frac{D(g, G)}{D(g_0, G_0)} = +1.$$

Если между моментами времени t_0 и t не было столкновения, то $g = g_0, G = G_0$. Поэтому

$$\frac{D(g, G)}{D(g_0, G_0)} = +1; \quad \frac{D(x, X)}{D(x_0, X_0)} = +1. \quad (б)$$

Если же было столкновение, то, как легко проверить,

$$\frac{D(g, G)}{D(g_0, G_0)} = -1; \quad \frac{D(x, X)}{D(x_0, X_0)} = -1.$$

В обоих случаях равенство (а) остается справедливым. (Прим. ред.)

В виде дополнения к вопросу об упругом ударе скажем несколько слов о неупругих ударах. В атомной физике исследуются неупругие удары, так наз. «удары второго рода», при которых ударяющая частица (например, электрон) затрачивает часть своей энергии на то, чтобы *возбудить* «ударяемый атом», т. е. «поднять» его из его основного состояния на более высокий энергетический уровень. Так как при этом энергия движения после удара меньше начальной энергии, то это движение нельзя рассчитывать по формулам упругого удара (ср. задачи I. 1–I. 4).

Мы ограничиваемся случаем «совершенно неупругого удара», который часто рассматривается в технических проблемах. Такой удар по определению характеризуется тем, что после удара обе массы m и M движутся вместе, так что

$$v = V.$$

Закон сохранения импульса, который, как мы уже подчеркивали, остается справедливым во всех случаях, в данном случае гласит:

$$(m + M)v = mv_0 + MV_0. \quad (3.28)$$

Он достаточен для определения теперь уже единственной неизвестной v . Рассмотрим потерю энергии при неупругом ударе:

$$\frac{m}{2}v_0^2 + \frac{M}{2}V_0^2 - \frac{m + M}{2}v^2.$$

С помощью (3.28) эту величину можно привести к виду

$$\frac{\mu}{2}(v_0 - V_0)^2. \quad (3.28a)$$

Следовательно, она равна *кинетической энергии некоторой «приведенной» массы μ , движущейся с первоначальной относительной скоростью соударяющихся тел*. При этом μ определяется условием

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m} + \frac{1}{M}; \quad \text{таким образом,} \quad \mu = \frac{mM}{m + M}. \quad (3.28б)$$

Закон, содержащийся в уравнениях (3.28а, б), был установлен генералом Лазарем Карно (математик и организатор всеобщей воинской повинности во время Французской революции, дядя Сади Карно, имя которого останется бессмертным в термодинамике).

§ 4. ПЕРЕМЕННЫЕ МАССЫ

В нижеследующих примерах речь идет о критическом толковании второй аксиомы Ньютона. Мы высказали ее в форме уравнения (1.3): «изменение импульса равно силе», и отклонили для общего случая форму (1.3а): «масса \times ускорение = силе».

Теперь мы поясним, что надо понимать под изменением импульса. При этом окажется, что даже справедливая при всех условиях форма закона (1.3) при известных обстоятельствах сводится к (1.3а).

Рассмотрим пример из обыденной жизни: летом по асфальтированной мостовой движется автомобиль для поливки улиц. Сила тяги мотора как раз достаточна для преодоления трения об асфальт, а также трения о воздух и в осевых подшипниках. Таким образом, внешние силы на автомобиль не действуют. Пусть m будет сумма массы воды, содержащейся в данный момент в резервуаре, и постоянной массы самого автомобиля. Обозначим количество воды, выбрасываемое в единицу времени, через $\mu = -\dot{m}$. Скорость истечения воды по отношению к автомобилю пусть будет q ; так как вода выбрасывается назад, то ее скорость по отношению к улице будет $v - q$.

Если механически применить формулу (1.3), то она дала бы

$$\dot{G} = \frac{d}{dt}(mv) = 0, \quad (4.1)$$

откуда следовало бы

$$m\dot{v} = \mu v. \quad (4.1a)$$

Таким образом, ускорение автомобиля не зависело бы от скорости истечения q . Это парадоксально, ибо отдача, происходящая от выброса воды (сравните пушку), должна сказаться на движении автомобиля.

На самом деле изменение импульса, подразумевавшееся в уравнении (1.3), было выражено нами неправильно. Оно состоит не только из члена, учтенного в (4.1), но и из импульса водяных струй, уносящих за единицу времени импульс $\mu(v - q)$. Запишем это подробно:

$$G_t = mv, \quad G_{t+dt} = (m + dm)(v + dv) + \mu dt(v - q).$$

Следовательно, истинное изменение импульса равно

$$\dot{G} = \frac{d}{dt}(mv) + \mu(v - q) = 0, \quad (4.2)$$

так как $\mu = -\dot{m}$, то отсюда после сокращения получим:

$$m\dot{v} = \mu q. \quad (4.3)$$

Таким образом, если толковать это уравнение в смысле (1.3а), то задача μq вытекающей водяной струи действует как ускоряющая сила, подобно тому, как в *сегнеровом* водяном колесе.

Вместо примера с автомобилем для поливки улиц можно было бы привести пример «ракеты для полета в мировое пространство», при помощи которой хотели достигнуть Луны. Пороховые газы ракеты должны двигать ее вперед (см. задачу 1.5).

Обобщим полученные результаты в виде двух утверждений, соответствующих уравнениям (4.2) и (4.3) нашего примера.

1) Можно стать на точку зрения уравнения (1.3), но при этом нужно прибавить к изменению импульса рассматриваемого тела импульс, конвективно отданный или воспринятый им в единицу времени. Этот импульс нужно измерять в той же системе отсчета, что и импульс рассматриваемого тела; правильный знак этого импульса обеспечивается выбором знака \dot{m} . Тогда уравнение движения имеет следующий вид:

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) - \dot{m}\mathbf{v}' = \mathbf{F}. \quad (4.4)$$

где \mathbf{v}' — конвективная скорость. В нашем случае $-\dot{m} = \mu$ и $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{q}$.

2) Можно также стать на точку зрения уравнения (1.3а). В этом случае мы должны дополнительно учесть силу отдачи импульса, отданного или полученного телом в единицу времени, рассматривая эту силу в некотором смысле как внешнюю силу. Таким образом, мы получим уравнение движения в форме, аналогичной уравнению (4.3):

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} + \dot{m}\mathbf{v}_{\text{отн.}}. \quad (4.5)$$

Здесь $\mathbf{v}_{\text{отн.}}$ — относительная скорость конвективного импульса по отношению к рассматриваемому телу. В нашем примере было $\mathbf{v}_{\text{отн.}} = -\mathbf{q}$ и $-\dot{m} = \mu^1$.

¹Пусть система состоит из двух тел, массы которых равны m и m' и которые

Необходимо остановиться на двух частных случаях:

а) $\mathbf{v}' = 0$. Отводимые или подводимые элементы массы имеют скорость, равную нулю, и поэтому не уносят с собой импульса. В этом случае уравнение движения имеет ньютонову форму $\dot{\mathbf{G}} = \mathbf{F}$. Пример: водяные капли, цепь (см. задачи 1.6 и 1.7).

б) $\mathbf{v}' = \mathbf{v}$, или, что то же самое, $\mathbf{v}_{\text{отн.}} = 0$. Уравнение движения, несмотря на переменную массу, имеет форму «масса \times ускорение = = силе». Пример: канат, свешивающийся с горизонтальной подставкой¹ (см. задачу 1.8).

двигутся со скоростями \mathbf{v} и \mathbf{v}' . Массы m и m' могут меняться с течением времени, однако сумма их должна оставаться постоянной:

$$m + m' = \text{const.} \quad (\text{а})$$

Полный импульс такой системы равен:

$$\mathbf{G} + \mathbf{G}' = m\mathbf{v} + m'\mathbf{v}'.$$

Поэтому если \mathbf{F} — равнодействующая всех внешних сил, действующих на систему, то

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} + \frac{d\mathbf{G}'}{dt} = \mathbf{F}.$$

Подставляя сюда $\mathbf{G}' = m'\mathbf{v}'$ и принимая во внимание, что в силу (а) $\dot{m}' = -\dot{m}$, получим:

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} - \dot{m}\mathbf{v}' + m'\dot{\mathbf{v}}' = \mathbf{F}. \quad (\text{б})$$

Если в рассматриваемый момент времени $m' = 0$, то для этого момента уравнение (б) гласит:

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} - \dot{m}\mathbf{v}' = \mathbf{F}, \quad (\text{в})$$

что совпадает с формулой (4.4). Но уравнение (в) справедливо и при $m' \neq 0$, если только под \mathbf{F} понимать равнодействующую всех сил, действующих на массу m , включая и силы, с которыми действует на нее масса m' . Действительно, в любой момент времени можно из нашей системы тел выделить подсистему двух тел, масса одного из которых в рассматриваемый момент времени равна нулю. Рассматривая остальную часть системы как «внешние тела» по отношению к выделенной подсистеме, мы и получим уравнение (в). (*Прим. ред.*)

¹Уравнение движения имеет такую форму для свешивающейся части каната и для части, лежащей на горизонтальной плоскости. Однако при этом необходимо принять во внимание все силы, действующие на рассматриваемую часть каната. Уравнение движения свешивающейся части каната гласит:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{g} + \mathbf{F},$$

где m — масса этой части каната, а \mathbf{F} — сила, с которой действует на нее другая часть каната. Обозначая соответствующие величины для этой другой части через m'

В случае б) потеря энергии по Карно [уравнение (3.28а)] равна нулю; поэтому закон сохранения энергии действителен в обычной форме. В случае а) нужно в каждой отдельной конкретной проблеме находить применимую к нему форму закона сохранения энергии, в зависимости от поставленной задачи.

В заключение рассмотрим проблему релятивистского изменения массы. При этом мы будем говорить специально об электроне, хотя формула массы (2.20) справедлива не только для электрона, но и для любой другой массы. Изменение массы является «внутренним свойством» электрона и отнюдь не связано с передачей ему импульса извне. Поэтому, как и в случае а), уравнение движения гласит $\dot{\mathbf{G}} = \mathbf{F}$ или, принимая во внимание (2.20),

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = \mathbf{F}. \quad (4.6)$$

Рассмотрим сначала прямолинейное движение электрона; пусть, следовательно, \mathbf{F} действует «продольно», т. е. в направлении \mathbf{v} .

Приведем уравнение (4.6) к форме: «масса \times ускорение = сила», как это (нецелесообразно) делалось прежде (около 1900 г.). Для этого произведем дифференцирование в левой стороне уравнения и получим:

$$\frac{m_0 \dot{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} + m_0 v \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left(\dot{v} + \frac{v \beta \dot{\beta}}{1 - \beta^2} \right). \quad (4.6a)$$

Так как $\beta = \frac{v}{c}$, то

$$\dot{\beta} = \frac{\dot{v}}{c} \quad \text{и поэтому} \quad v \beta \dot{\beta} = \beta^2 \dot{v}.$$

и \mathbf{F}' , получим

$$m' \frac{dv'}{dt} = \mathbf{F}'.$$

Так как $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}'(t)$ и $\mathbf{F} = -\mathbf{F}'$, то путем сложения находим уравнение движения всего каната:

$$(m + m') \frac{dv}{dt} = mg.$$

В этом уравнении масса всего каната $(m + m')$, конечно, постоянна. (*Прим. ред.*)

Следовательно, уравнение (4.6а) приводится к следующему виду:

$$\frac{m_0 \dot{\mathbf{v}}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left(1 + \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \right) = \frac{m_0}{(1 - \beta^2)^{3/2}} \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}. \quad (4.6б)$$

Таким образом, «продольную» массу, определяемую как коэффициент при $\dot{\mathbf{v}}$ в уравнении движения, нужно положить равной

$$m_{\text{прод.}} = \frac{m_0}{(1 - \beta^2)^{3/2}}. \quad (4.7)$$

Однако, если \mathbf{F} действует в «поперечном» направлении, т.е. нормально к траектории, то скорость изменяется не по величине, а только по направлению. Тогда $\dot{\beta}$ равно 0, и из (4.6) непосредственно следует:

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \dot{\mathbf{v}}_{\text{норм.}} = \mathbf{F}.$$

Поэтому была введена отличная от продольной «поперечная» масса

$$m_{\text{поп.}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (4.8)$$

Мы, однако, подчеркиваем, что это различие пропадает, если пользоваться законом движения в рациональной форме (4.6).

Познакомимся теперь с формой закона сохранения энергии в теории относительности. Для этой цели помножим (4.6) на $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} = \beta c \frac{\mathbf{v}}{v}$.

В правой части получим:

$$\frac{\mathbf{F} d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dA}{dt} = \text{произведенной работе}. \quad (4.9)$$

В левой части получим:

$$m_0 c^2 \beta \frac{d}{dt} \left(\frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = m_0 c^2 \beta \dot{\beta} (1 - \beta^2)^{-3/2}.$$

Но это выражение, как легко убедиться, является полной производной по t , а именно, оно равно

$$m_0 c^2 \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (4.10)$$

Так как выражение (4.10) равно произведенной работе [уравнение (4.9)], то оно означает скорость изменения кинетической энергии T . Таким образом, имеем:

$$T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \text{const.} \right).$$

Здесь следует положить const равной -1 , так как T по смыслу должно обращаться в нуль при $\beta = 0$. Таким образом, в теории относительности кинетическая энергия выражается в виде

$$T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right). \quad (4.11)$$

Принимая во внимание (2.20), можем также написать

$$T = c^2(m - m_0). \quad (4.12)$$

Разность энергии движущегося и покоящегося электрона (а это и есть кинетическая энергия или «живая сила») *равна помноженной на c^2 разности масс движущегося и покоящегося электронов*. Этим мы подтвердили в нашем простейшем случае общий закон инерции энергии, который охватывает всю область определения атомных весов, физику атомного ядра, а в дальнейшем развитии и космологию.

Для полноты укажем, что при малом β из выражения (4.11) путем разложения его в ряд получается, как и следовало ожидать, элементарное выражение для T :

$$\begin{aligned} T &= m_0 c^2 \left(\frac{1}{2} \beta^2 - \frac{3}{8} \beta^4 + \dots \right) = \\ &= \frac{m_0}{2} c^2 \beta^2 \left(1 - \frac{3}{4} \beta^2 + \dots \right) \longrightarrow \frac{m_0}{2} v^2. \end{aligned}$$

§ 5. КИНЕМАТИКА И СТАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Кинематика изучает геометрию движений, не касаясь условий их физической реализации. Статика¹ есть учение о силах, их сложении и эквивалентности, не касающееся вызываемых ими движений.

¹Собственно говоря, термин «статика» неудачен, так как он односторонне указывает на вопросы равновесия, тогда как вопросы статики имеют отношение как

1. Кинематика на плоскости

Прежде всего приведем формулы для разложения и сложения скоростей и ускорений в прямоугольных координатах.

Скорость:

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = (\dot{x}, \dot{y}), \quad (5.1)$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = v. \quad (5.2)$$

Ускорение:

$$\dot{\mathbf{v}} = (\dot{v}_x, \dot{v}_y) = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2} \right) = (\ddot{x}, \ddot{y}), \quad (5.3)$$

$$|\dot{\mathbf{v}}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}. \quad (5.4)$$

Вместо того, чтобы разлагать скорость и ускорение по прямоугольным координатам, мы можем разлагать их также по «естественным координатам» кривой, описываемой нашей материальной точкой. Пусть s будет длина дуги и пусть индекс s означает изменяющееся вдоль кривой направление траектории, а индекс n — нормаль к ней. Тогда

$$v_s = \pm v, \quad v_n = 0. \quad (5.5)$$

Это тривиально. Существенным же является разложение $\dot{\mathbf{v}}$ на \dot{v}_s и \dot{v}_n ¹.

Если α — угол между касательной к траектории и направлением оси x , то прежде всего получаем следующее выражение для *касательного ускорения*:

$$\dot{v}_s = \dot{v}_x \cos \alpha + \dot{v}_y \sin \alpha \quad (5.6)$$

к проблемам движения, так и к проблемам равновесия. Более правильный термин «динамика» неприменим, так как он исторически установлен для движений, вызываемых силами.

¹Под \dot{v}_n Зоммерфельд понимает не производную проекции v_n , как это принято, а проекцию производной вектора \mathbf{v} по времени на направление нормали n . Иными словами, сначала следует продифференцировать вектор \mathbf{v} , а затем взять его проекцию. Результат не зависит от порядка выполнения этих операций только тогда, когда направление прямой n , на которую производится проектирование, не изменяется по мере движения точки вдоль траектории. (*Прим. ред.*)

и для нормального ускорения:

$$\dot{v}_n = -\dot{v}_x \sin \alpha + \dot{v}_y \cos \alpha. \quad (5.7)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{dx}{ds} = \frac{\dot{x}}{\dot{s}} = \frac{v_x}{v}, \\ \sin \alpha &= \frac{dy}{ds} = \frac{\dot{y}}{\dot{s}} = \frac{v_y}{v}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\dot{v}_s = \frac{1}{v}(v_x \dot{v}_x + v_y \dot{v}_y) = \frac{1}{2v} \frac{d}{dt}(v_x^2 + v_y^2) = \frac{1}{2v} \frac{d}{dt} v^2 = \frac{dv}{dt} = \dot{v}. \quad (5.8)$$

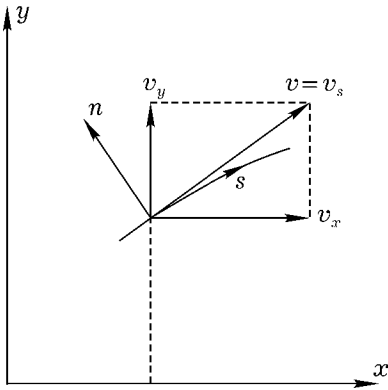


Рис. 3. Разложение вектора скорости при движении на плоскости; естественные координаты s и n

Если, в частности, $\frac{dv}{dt} = 0$, то ускорение перпендикулярно к скорости, а, следовательно, и к траектории.

Дадим еще прямой дифференциально-геометрический вывод этих же соотношений с помощью введенного Гамильтоном *годографа*¹.

Эта формула гласит: касательное ускорение есть изменение величины скорости; изменение направления не имеет для него значения.

С другой стороны, согласно (5.7),

$$\begin{aligned} \dot{v}_n &= \frac{1}{v}(v_x \dot{v}_y - v_y \dot{v}_x) = \\ &= \frac{1}{v}(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}) = \\ &= v^2 \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{v^2}{\rho}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

где $\frac{1}{\rho}$ — кривизна траектории.

Таким образом, нормальное ускорение зависит не от изменения величины скорости, а только от *самой скорости* и от *формы траектории*.

¹Термин «годограф» («записыватель пути») неточен, правильнее было бы применить термин «записыватель скорости» или еще лучше — «полярная диаграмма скорости».

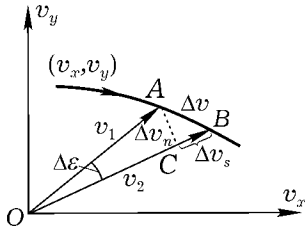


Рис. 4а. Голограф движения на плоскости. Скорости \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 откладываются в полярной диаграмме от полюса O

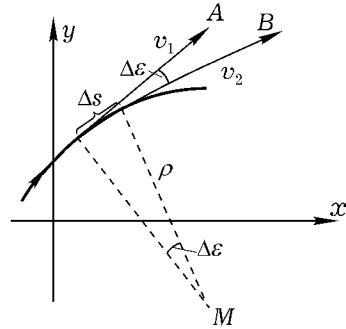


Рис. 4б. Траектория движения на плоскости и ее радиус кривизны

Что надо понимать под голографом, видно из сравнения рис. 4а с рис. 4б. Рис. 4б представляет траекторию в плоскости xy . В двух соседних точках этой траектории, находящихся друг от друга на расстоянии Δs , начерчены скорости по касательным к траектории; угол между ними равен $\Delta\epsilon$. На рис. 4б угол $\Delta\epsilon$ отмечен также из центра кривизны M ; если под ρ понимать радиус кривизны, то

$$\Delta s = \rho \Delta\epsilon. \quad (5.10)$$

С другой стороны, на рис. 4а обе эти скорости перенесены параллельно самим себе в полюс O . Рассмотрим два соседних вектора \overline{OA} и \overline{OB} ; они образуют друг с другом угол $\Delta\epsilon$. Проектируя точку A на прямую OB , получим точку C ; $\Delta\mathbf{v} = \overline{AB}$ разлагается на $\Delta\mathbf{v}_s = \overline{CB}$ и $\Delta\mathbf{v}_n = \overline{AC}$. Соответственно этому, получаем в подтверждение равенств (5.8) и (5.9):

$$\dot{v}_s = \frac{CB}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt};$$

$$\dot{v}_n = \frac{AC}{\Delta t} = \frac{\Delta\epsilon \cdot v}{\Delta t} = \frac{\Delta\epsilon}{\Delta s} v^2 = \frac{v^2}{\rho}.$$

В последнем уравнении мы воспользовались соотношением (5.10) [см. задачу I.9].

2. Понятие момента в статике и кинематике на плоскости

Момент вектора \mathbf{V} относительно данной точки O определяется как *векторное произведение* радиус-вектора \mathbf{r} , проведенного из O в точку приложения P вектора, и самого вектора:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}\mathbf{V}]. \quad (5.11)$$

Следовательно, \mathbf{M} равно площади параллелограмма, образованного \mathbf{r} и \mathbf{V} . Направление \mathbf{M} соответствует кратчайшему повороту, приводящему \mathbf{r} в совпадение с \mathbf{V} (если \mathbf{r} и \mathbf{V} отложены из одной и той же точки); на рис. 5 это направление поворота отмечено стрелкой. Если ввести «плечо рычага» l , то по абсолютной величине

$$|\mathbf{M}| = l|\mathbf{V}| = r|\mathbf{V}| \sin \alpha. \quad (5.11a)$$

Если положить \mathbf{V} равным силе \mathbf{F} , то получим «момент силы»

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}\mathbf{F}]. \quad (5.12)$$

Момент силы является одним из основных понятий статки, введенным еще Архимедом. Если мы обозначим проекции \mathbf{F} на оси координат через X и Y , то по правилам элементарного векторного исчисления получим

$$M = xY - yX. \quad (5.12a)$$

Понятие момента важно также для кинематики и кинетики. Ограничиваясь сначала плоской задачей, введем:

$$\text{момент скорости} = [\mathbf{r}\mathbf{v}],$$

$$\text{момент ускорения} = [\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}}].$$

$$\text{Момент количества движения} = \text{моменту импульса} = [\mathbf{r}\mathbf{G}] = m[\mathbf{r}\mathbf{v}].$$

По образцу уравнения (5.12a), получаем в прямоугольных координатах

$$\begin{aligned} |[\mathbf{r}\mathbf{v}]| &= |x\dot{y} - y\dot{x}|, \\ |[\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}}]| &= |x\ddot{y} - y\ddot{x}|. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Между моментом скорости и моментом ускорения существует следующее соотношение:

$$[\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}}] = \frac{d}{dt} [\mathbf{r}\mathbf{v}]. \quad (5.14)$$

Приняв во внимание, что $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$ и $[\mathbf{v}\mathbf{v}] = 0$, его можно доказать путем следующего простого вычисления:

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}\mathbf{v}] = \left[\mathbf{r} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right] + [\mathbf{v}\mathbf{v}] = [\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}}]. \quad (5.14a)$$

Обычное доказательство, использующее координатную форму записи, проводится совершенно аналогично:

$$\frac{d}{dt}(x\dot{y} - y\dot{x}) = x\ddot{y} + \dot{x}\dot{y} - y\ddot{x} - \dot{y}\dot{x} = x\ddot{y} - y\ddot{x}. \quad (5.14б)$$

Если отождествить произвольный вектор \mathbf{V} (рис. 5) со скоростью \mathbf{v} точки P , описывающей произвольную траекторию, то можно получить еще одно простое соотношение между моментом импульса и так называемой *секториальной скоростью*. А именно, описанный радиусом-вектором из O бесконечно малый элемент площади dS равен половине параллелограмма $[\mathbf{r}d\mathbf{s}]$; следовательно, секториальная скорость равна

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}[\mathbf{r}\mathbf{v}].$$

Отсюда для момента импульса следует соотношение

$$[\mathbf{r}\mathbf{G}] = 2m \frac{dS}{dt}. \quad (5.15)$$

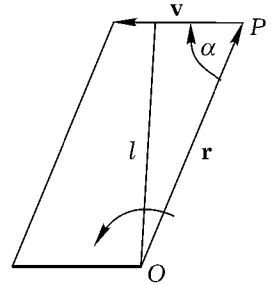


Рис. 5. Момент произвольного вектора \mathbf{V} относительно произвольной точки O

3. Кинематика в пространстве

Если разложить скорость и ускорение по направлениям \mathbf{s} (касательная), \mathbf{n} (главная нормаль) и \mathbf{b} (бинормаль) пространственной траектории, то получим следующие слагающие:

$$\mathbf{v} = (v, 0, 0),$$

$$\dot{\mathbf{v}} = (\dot{v}, \frac{v^2}{\rho}, 0),$$

где ρ есть введенный в (5.9) или (5.10) радиус кривизны, построение которого теперь надо производить в соприкасающейся плоскости траектории.

Момент скорости и момент ускорения в пространстве определяются, как и на плоскости, через векторные произведения $[\mathbf{r}\mathbf{v}]$, $[\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}}]$. Отметим, однако, что рис. 5 теперь надо понимать как пространственную. Изображенный на рис. 5 параллелограмм характеризуется, помимо величины и направления вращения, еще и *положением в пространстве*. Для наглядности это положение обычно характеризуется нормалью к плоскости параллелограмма. При этом по общей договоренности выбирают то направление нормали, которое образует с направлением момента вращения *правовинтовую систему*. Тогда векторным изображением момента будет направленная по этой нормали стрелка, длина которой равна величине момента. В гл. IV, § 23, мы подробно остановимся на таком способе изображения и на различии между аксиальными и полярными векторами.

Здесь мы рассмотрели момент относительно (произвольно выбираемой) точки O . В следующем разделе мы разъясним, что мы будем понимать под моментом относительно заданной оси.

4. Статика в пространстве. Момент силы относительно точки и относительно оси

Момент силы \mathbf{F} относительно заданной точки O полностью определяется выражением:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}\mathbf{F}], \quad (5.16)$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор, проведенный из точки O в точку приложения P силы \mathbf{F} , т. е.

$$\mathbf{r} = (x, y, z), \quad (5.16a)$$

если мы примем O за начало координат. Согласно только что приведенному правилу (правило правого винта, стрелка длиной $|\mathbf{M}|$), \mathbf{M} можно изобразить вектором момента. Требуется найти *слагающие \mathbf{M} по осям координат*. Мы можем их определить как проекции вектора момента на эти оси, например:

$$M_z = |\mathbf{M}| \cos(\mathbf{M}, z). \quad (5.17)$$

Но так как $|\mathbf{M}|$ есть площадь параллелограмма, построенного на \mathbf{r} и \mathbf{F} , то правая часть уравнения (5.17) означает в то же время площадь параллелограмма, спроектированную на площадь xy . Эта площадь имеет стороны

$$\mathbf{r}_{\text{пр.}} = x, y; \quad \mathbf{F}_{\text{пр.}} = X, Y.$$

Поэтому из (5.17) в согласии с (5.12а) следует

$$M_z = xY - yX, \quad (5.17а)$$

а также

$$M_x = yZ - zY, \quad M_y = zX - xZ. \quad (5.17б)$$

Эти слагающие M_x , M_y , M_z называют также моментами силы \mathbf{F} *относительно* осей x , y , z (см. задачу I. 10).

Все сказанное здесь относительно осей координат применимо также и к любой оси a . Стало быть, в соответствии с уравнением (5.17), *момент силы \mathbf{F} относительно оси a* определяется следующим образом: надо образовать момент относительно какой-либо точки O , лежащей на оси a , и спроектировать вектор этого момента на ось a . Можно также, в соответствии с уравнениями (5.17а, б), спроектировать площадь, соответствующую моменту относительно точки O , на плоскость, перпендикулярную оси a . Третий способ состоит в следующем: мы определяем кратчайшее расстояние точки приложения силы от оси a , которое называем плечом силы l , и разлагаем силу \mathbf{F} на три слагающие: \mathbf{F}_a параллельно оси a , \mathbf{F}_l в направлении l и \mathbf{F}_n в направлении, перпендикулярном к a и l . Тогда

$$M_a(\mathbf{F}) = M_a(\mathbf{F}_a) + M_a(\mathbf{F}_l) + M_a(\mathbf{F}_n). \quad (5.18)$$

Два первых члена справа равны нулю: *сила, параллельная оси a , и сила, пересекающая эту ось, не дают момента относительно оси a .*

Таким образом, в уравнении (5.18) остается только третий член, происходящий от силы, перпендикулярной оси a , плечо которой равно l . Таким образом, уравнение (5.18) сводится к

$$M_a(\mathbf{F}) = M_a(\mathbf{F}_n) = F_n l. \quad (5.18а)$$

Здесь уместно сказать несколько слов относительно различных обозначений произведений двух векторов. Помещаемая ниже таблица показывает, что по историческим и национальным обстоятельствам эти обозначения, к сожалению, очень различны¹.

¹В русской литературе приняты обозначения, соответствующие первому столбцу таблицы; иногда употребляются также обозначения Гиббса. (*Прим. ред.*)

Наименование	в данной Гиббсе	Хивисайде	Итальянцы	Грассман	
Скалярное или внутреннее произведение . . .	(\mathbf{AB})	\mathbf{AB}	\mathbf{AB}	$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$	$\mathbf{A B}$
Векторное или внешнее произведение . . .	$[\mathbf{AB}]$	$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$	$\mathbf{V} \mathbf{AB}$	$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$	\mathbf{AB} или $ \mathbf{AB}$

Для пояснения. Великий термодинамик Виллард Гиббс составил для своих студентов краткий очерк векторного анализа, в то время еще мало известного. Обозначения, введенные в этом очерке, применяются большинством американцев и англичан. Введенное Хивисайдом обозначение векторного произведения, в котором \mathbf{V} означает начальную букву слова «вектор», было после этого вообще оставлено. Итальянская схема обозначений ведет свое начало от Марколонго. Герман Грассман установил в своем «Учении о притяжении» (1844 г. и 1862 г.) последовательную систему исчисления отрезков и точек. Простейшим сочетанием двух отрезков a и b он считает «площадь», т. е. построенный на a и b параллелограмм; поэтому он обозначает его через ab (иногда также через $[ab]$). Вертикальная черта означает у Грассмана «дополнение», т. е. переход к вектору, перпендикулярному к площади параллелограмма.

§ 6. ДИНАМИКА (КИНЕТИКА) СВОБОДНО ДВИЖУЩЕЙСЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ. ЗАДАЧА КЕПЛЕРА

Приводимый ниже простейший пример — движение планет — является в то же время и важнейшим для нашего мировоззрения. Это — плоская задача, так как движение происходит в плоскости эклиптики, если планетой является Земля. Мы считаем Солнце неподвижным и об-

основываем это допущение ссылкой на подавляющую массу Солнца:

$$\text{Солнце } 330\,000, \quad \text{Юпитер } 320, \quad \text{Земля } 1, \quad \text{Луна } \frac{1}{81}.$$

Движение самого Солнца будет рассмотрено в конце этого параграфа. Обозначим массу Солнца через M , массу планеты через m . Ньютонова сила притяжения равна:

$$|\mathbf{F}| = G \frac{mM}{r^2}, \quad (G - \text{постоянная тяготения})$$

или в векторной форме:

$$\mathbf{F} = -G \frac{mM}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (6.1)$$

Направление этой силы проходит через неподвижную точку O — центр Солнца, из которого проводится радиус-вектор \mathbf{r} .

Поэтому $[\mathbf{r}\mathbf{F}] = 0$, и, следовательно, согласно второй аксиоме,

$$[\mathbf{r}\dot{\mathbf{G}}] = 0 \quad \text{и ввиду (5.14)} \quad [\mathbf{r}\mathbf{G}] = \text{const.}$$

Момент импульса относительно Солнца постоянен, и, следовательно, согласно уравнению (5.15), постоянна также секториальная скорость. В этом состоит второй закон Кеплера:

«Радиус-вектор, проведенный от Солнца к планете, описывает в равные времена равные площади».

Удвоенную постоянную секториальную скорость мы называем постоянной площадью C :

$$2 \frac{dS}{dt} = C. \quad (6.2)$$

Введем (рис. 6) полярный угол φ — центральную или истинную аномалию, по терминологии астрономов. Имеем:

$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\varphi, \quad \frac{dS}{dt} = r^2 \dot{\varphi} = C,$$

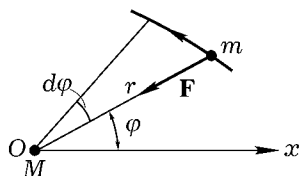


Рис. 6. Полярные координаты в задаче Кеплера; площадь, описанная радиусом-вектором; в начале координат находится Солнце

и, следовательно,

$$\dot{\varphi} = \frac{C}{r^2}. \quad (6.3)$$

Чтобы прийти к первому закону Кеплера, а именно к уравнению траектории, перейдем к координатной форме записи. Уравнения движения после сокращения на m примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\dot{x}}{dt} &= -\frac{GM}{r^2} \cos \varphi, \\ \frac{d\dot{y}}{dt} &= -\frac{GM}{r^2} \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

Умножая на $\frac{1}{\dot{\varphi}}$ и приняв во внимание (6.3), получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{x}}{d\varphi} &= -\frac{GM}{C} \cos \varphi, \\ \frac{d\dot{y}}{d\varphi} &= -\frac{GM}{C} \sin \varphi. \end{aligned}$$

Эти уравнения можно проинтегрировать, что дает

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{GM}{C} \sin \varphi + A, \\ \dot{y} &= \frac{GM}{C} \cos \varphi + B, \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

где A и B — постоянные интегрирования. Словами это означает: *годограф движения планеты есть окружность*:

$$(\dot{x} - A)^2 + (\dot{y} - B)^2 = \left(\frac{GM}{C}\right)^2. \quad (6.5a)$$

К этому годографу мы вернемся в задаче I.11. Теперь преобразуем левые части уравнения (6.5) к полярным координатам. Так как

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

то

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \varphi = -\frac{GM}{C} \sin \varphi + A,$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi = \frac{GM}{C} \cos \varphi + B.$$

Исключим \dot{r} путем умножения первого уравнения на $-\sin \varphi$, второго — на $\cos \varphi$ и последующего их сложения. Сначала получаем:

$$r\dot{\varphi} = \frac{GM}{C} - A \sin \varphi + B \cos \varphi$$

или, приняв во внимание (6.3),

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{C^2} - \frac{A}{C} \sin \varphi + \frac{B}{C} \cos \varphi. \quad (6.6)$$

Это уравнение конического сечения в полярной системе координат, полюс которой совпадает с фокусом конического сечения. Таким образом, мы пришли к первому закону Кеплера:

«Планета описывает эллипс, в одном из фокусов которого находится Солнце».

Отметим при этом, что другие возможные типы траекторий — гипербола и парабола — относятся, очевидно, только к кометам, а не к планетам; поэтому мы можем их здесь не рассматривать (ср., однако, задачу I. 12).

Приведенный здесь вывод первого закона Кеплера отличается от вывода, обычно приводимого в учебниках и основывающегося на законе сохранения энергии. Чтобы вывести этот закон для нашего случая, вернемся к уравнению (6.4), заменив в нем справа $\cos \varphi$ на $\frac{x}{r}$ и $\sin \varphi$ на $\frac{y}{r}$. Умножаем первое из уравнений (6.4) на \dot{x} , второе на \dot{y} и складываем. Получаем:

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = -\frac{1}{2} \frac{GM}{r^3} \frac{d}{dt} (x^2 + y^2) = -\frac{GM}{r^2} \frac{dr}{dt}.$$

Интегрирование по t дает:

$$\frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{GM}{r} + W. \quad (6.7)$$

Слева стоит кинетическая энергия, деленная на m , а первый член справа с точностью до знака равен потенциальной энергии, деленной на m . Поэтому W означает постоянную энергии, также деленную на m . Наше уравнение (6.7) имеет ту же форму, что и закон сохранения энергии при одномерном движении [уравнение (3.8)].

Чтобы как можно проще получить из уравнения (6.7) уравнение траектории (6.6), вспомним, что квадрат элемента длины в полярных координатах выражается следующим образом:

$$dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

Следовательно,

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \left\{ \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2 \right\}.$$

На основании (6.3) это выражение можно записать так:

$$C^2 \left\{ \left(\frac{1}{r} \frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \right\}$$

или, полагая $s = \frac{1}{r}$,

$$C^2 \left\{ \left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2 + s^2 \right\}.$$

Теперь закон сохранения энергии (6.7) принимает вид:

$$\frac{1}{2} C^2 \left\{ \left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2 + s^2 \right\} - GMs = W.$$

Дифференцируя это равенство по φ , получаем:

$$\frac{ds}{d\varphi} \left\{ C^2 \left(\frac{d^2s}{d\varphi^2} + s\right) - GM \right\} = 0.$$

Так как $\frac{ds}{d\varphi} \neq 0^1$, то выражение в скобках должно обращаться в нуль. Это дает для s линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2 s}{d\varphi^2} + s = \frac{GM}{C^2}.$$

Общий интеграл такого уравнения равен сумме какого-либо частного интеграла неоднородного уравнения и общего интеграла однородного

¹Операция дифференцирования повышает порядок дифференциального уравнения. В соответствии с этим, число произвольных постоянных в общем решении уравнения увеличивается на единицу. Значит, такая операция приводит к появлению новых решений. В рассматриваемом здесь случае дифференциальное уравнение, полученное после дифференцирования уравнения

$$\frac{1}{2}C^2 \left\{ \left(\frac{ds}{d\varphi} \right)^2 + s^2 \right\} - GMs = W, \quad (a)$$

распадается на два уравнения:

$$\frac{ds}{d\varphi} = 0; \quad (б)$$

$$C^2 \left(\frac{d^2 s}{d\varphi^2} + s \right) - GM = 0. \quad (в)$$

Общее решение уравнения (б) есть $s = C'$, где C' — произвольная постоянная. Оно соответствовало бы круговому движению. Однако оно является лишним, так как исходное уравнение (а) имеет решение такого вида лишь при вполне определенном значении C' и притом при вполне определенном соотношении между W и C .

В самом деле, в случае круговой траектории $\frac{ds}{d\varphi}$ обращается в нуль в каждой точке траектории. В общем же случае, как показывает уравнение (а), $\frac{ds}{d\varphi} = 0$ лишь в двух точках, а именно

$$s = \frac{GM \pm \sqrt{G^2 M^2 + 2WC}}{C^2}.$$

Чтобы траектория была круговой, необходимо, чтобы оба корня s были равны между собой. Это дает

$$s = \frac{GM}{C^2}.$$

Но это выражение является частным решением уравнения (в). Следовательно, отбрасывая уравнение (в), мы не теряем никаких решений уравнения (а). (*Прим. ред.*)

уравнения. Один из частных интегралов неоднородного уравнения равен, очевидно,

$$r = \text{const} = \frac{GM}{C^2}.$$

Общий интеграл однородного уравнения является линейной комбинацией $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$. Поэтому можем написать:

$$s = \frac{GM}{C^2} - \frac{A}{C} \sin \varphi + \frac{B}{C} \cos \varphi,$$

где $\frac{A}{C}$ и $\frac{B}{C}$ — постоянные интегрирования. Но это как раз и есть наше прежнее уравнение (6.6).

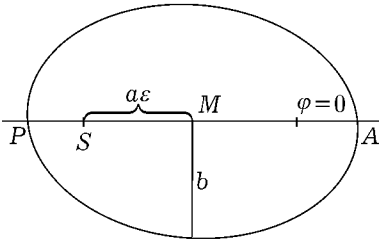


Рис. 7. Кеплеров эллипс с большой и малой осями; перигелий, афелий, численный эксцентриситет

Теперь запишем это уравнение для того специального случая, когда луч $\varphi = 0$, исходящий из одного фокуса, проходит также через другой фокус, или, иначе выражаясь, он вместе с лучом $\varphi = \pi$ образует главную ось эллипса (рис. 7). На этой оси лежат точки P — «перигелий» (вблизи Солнца) и A — «афелий» (вдали от Солнца), в которых радиус-вектор r должен быть минимальным и, соответственно, максимальным. Отсюда вытекает условие: $\frac{dr}{d\varphi} = 0$ при $\varphi = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$.

Из него на основании (6.6) вытекает требование $A = 0$.

Из рис. 7, кроме того, следует, что в перигелии

$$r = SP = a(1 - \varepsilon), \quad \varphi = \pi$$

и в афелии

$$r = SA = a(1 + \varepsilon), \quad \varphi = 0,$$

где через ε обозначен численный эксцентриситет. Таким образом, согласно уравнению (6.6), в перигелии

$$\frac{1}{a(1 - \varepsilon)} = \frac{GM}{C^2} - \frac{B}{C},$$

в афелии

$$\frac{1}{a(1 + \varepsilon)} = \frac{GM}{C^2} + \frac{B}{C}.$$

Отсюда получим путем сложения и вычитания:

$$\frac{GM}{C^2} = \frac{1}{a(1 - \varepsilon^2)}, \quad \frac{B}{C} = -\frac{\varepsilon}{a(1 - \varepsilon^2)}. \quad (6.8)$$

Выразим еще постоянную площадей C через период обращения T . Из (6.2) непосредственно получаем

$$C = \frac{2S}{T}, \quad \text{где } S = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

S — полная площадь, описываемая радиусом-вектором за период обращения. Следовательно,

$$C^2 = \frac{4\pi^2 a^4 (1 - \varepsilon^2)}{T^2}. \quad (6.9)$$

Если мы подставим это выражение в первое из уравнений (6.8), то получим:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}.$$

Так как G и M одинаковы для траекторий всех планет, то уравнение (6.10) выражает третий закон Кеплера:

«Квадраты времен обращений планет относятся как кубы больших осей».

Кеплер приветствовал¹ открытие этого закона следующими полными энтузиазма словами: «Наконец-то я выявил и, сверх моих надежд и ожиданий, нашел истинным, что вся природа гармонии в полном своем объеме и во всех своих деталях существует в небесных движениях, правда, не таким образом, как я раньше предполагал, а совсем другим, вполне совершенным образом».

Однако третий закон Кеплера в форме (6.10) еще не вполне точен. Он справедлив лишь постольку, поскольку можно пренебречь массой планеты m по сравнению с массой Солнца M . Теперь мы откажемся от этого пренебрежения и обратимся к собственно астрономической проблеме двух тел, которая лишь незначительно труднее, чем рассматривавшаяся нами до сих пор проблема одного тела.

¹«Harmonia mundi», 1619 г. Первые два закона Кеплера были опубликованы в 1609 г. в «Astronomia nova».

Учет движения Солнца

Пусть x_1, y_1 — координаты Солнца, а x_2, y_2 — координаты планеты.

Так как по третьему закону Ньютона сила, приложенная в точке S , противоположна силе, приложенной в точке P , то полная система уравнений движения будет иметь вид:

$$\begin{array}{ll} \text{для Солнца} & \text{для планеты} \\ M \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{mMG}{r^2} \cos \varphi; & m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\frac{mMG}{r^2} \cos \varphi; \\ M \frac{d^2 y_1}{dt^2} = \frac{mMG}{r^2} \sin \varphi; & m \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -\frac{mMG}{r^2} \sin \varphi. \end{array}$$

Введем относительные координаты

$$x_2 - x_1 = x, \quad y_2 - y_1 = y; \quad (6.11a)$$

далее введем координаты центра тяжести

$$\frac{mx_2 + Mx_1}{m + M} = \xi, \quad \frac{my_2 + My_1}{m + M} = \eta. \quad (6.11b)$$

Тогда вычитание соответственных уравнений движения дает:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{(M + m)G}{r^2} \cos \varphi, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{(M + m)G}{r^2} \sin \varphi. \end{array} \right\} \quad (6.12)$$

С другой стороны, сложение их дает:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 \eta}{dt^2} = 0. \quad (6.13)$$

Сравнение уравнений (6.12) с прежними уравнениями (6.4) непосредственно показывает, что оба первые закона Кеплера остаются без изменения, т. е. что они справедливы также и для относительного движения, тогда как третий закон принимает форму:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M + m)}. \quad (6.14)$$

Таким образом, отношение $\frac{T^2}{a^3}$ не является более универсальной константой, а имеет несколько различные значения для каждой планеты. Однако, ввиду относительно большой массы Солнца, эти различия крайне незначительны.

Далее, уравнения (6.13) показывают, что центр тяжести Солнца и планеты движется с постоянной скоростью. Если пользоваться системой отсчета, неподвижно связанной с этим центром тяжести, то эту скорость, равно как и координаты центра тяжести ξ, η , нужно положить равными нулю.

При этом уравнения (6.11б) упрощаются, и с помощью их и уравнений (6.11а) можно выразить через относительные координаты x, y координаты Солнца x_1, y_1 и координаты планеты x_2, y_2 :

$$x_1, y_1 = -\frac{m}{M+m}(x, y),$$

$$x_2, y_2 = \frac{m}{M+m}(x, y).$$

Отсюда следует, что траектории Солнца и планеты в системе координат центра тяжести являются также эллипсами; при этом траектория планеты почти тождественна с рассматривавшейся до сих пор, тогда как траектория Солнца представляет собою эллипс, чрезвычайно малый по сравнению с эллипсом, по которому движется планета. Солнце движется по эллипсу таким образом, что оно всегда находится на стороне, противоположной месту нахождения планеты.

Если изменить закон тяготения, придав ему вид $F = kr^n$, где n произвольно, то хотя второй закон Кеплера и останется при этом в силе, но траектории станут трансцендентными и, вообще говоря, незамкнутыми кривыми. Только в случае $n = +1$, как и в случае тяготения $n = -2$, получаются эллипсы (см. задачу I. 13).

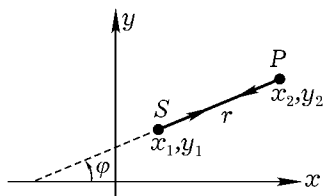


Рис. 8. Учет движения Солнца в задаче Кеплера

ГЛАВА II

МЕХАНИКА СИСТЕМЫ, ПРИНЦИП ВИРТУАЛЬНОЙ РАБОТЫ И ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

§ 7. СТЕПЕНИ СВОБОДЫ И ВИРТУАЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, ГОЛОНОМНЫЕ И НЕГОЛОНОМНЫЕ СВЯЗИ

Материальная точка имеет *одну* степень свободы, если она может перемещаться только вдоль некоторой прямой или кривой; *две* степени свободы, если она принуждена оставаться в плоскости или на заданной поверхности. Материальная точка, свободно движущаяся в пространстве, имеет *три* степени свободы.

Две материальные точки, связанные между собою невесомым жестким стержнем, имеют пять степеней свободы, ибо первую точку можно считать свободной, тогда как вторая должна находиться на шаровой поверхности, описанной вокруг первой точки радиусом, равным длине стержня.

В случае n материальных точек, на координаты которых наложено r условий связи, число степеней свободы равно

$$f = 3n - r. \quad (7.1)$$

При бесконечном множестве материальных точек, связанных бесконечным множеством условий, подобный подсчет числа степеней свободы, естественно, невыполним. Как нужно поступать в таких случаях, мы покажем на примере твердого тела.

а) *Свободно движущееся твердое тело.* Возьмем какую-нибудь точку твердого тела. Эта точка имеет три степени свободы. Так как произвольная вторая точка находится на постоянном расстоянии от первой,

§ 7. Степени свободы и виртуальные перемещения механической системы 69

то она может двигаться только по шаровой поверхности вокруг первой точки, что дает дальнейшие две степени свободы. Наконец, третья точка может описывать круговую траекторию вокруг оси, проходящей через первые две точки, что дает одну степень свободы. Этим однозначно определены траектории всех остальных материальных точек твердого тела. Таким образом,

$$f = 3 + 2 + 1 = 6.$$

б) *Волчок на плоскости.* Предположим, что волчок в нижней своей части оканчивается острием, и примем в нашем подсчете это острие за первую точку тела; острие имеет две степени свободы. Вторая точка может двигаться по полусфере относительно первой точки, третья точка — по окружности вокруг прямой, соединяющей первые две точки. В целом для волчка

$$f = 2 + 2 + 1 = 5.$$

в) *Волчок с закрепленной точкой.* Обе степени свободы первой точки теряются при ее закреплении, так что

$$f = 2 + 1 = 3.$$

г) *Твердое тело с неподвижной осью и маятник.* Здесь

$$f = 1.$$

Если центр тяжести тела не лежит на оси вращения, то такое тело называют *физическим маятником*. Если это тело стянуть в точку, то из физического получается математический маятник. Для *сферического маятника* (материальная точка, принужденная двигаться по шаровой поверхности)

$$f = 2.$$

д) *Бесконечное число степеней свободы.* У деформируемого твердого тела или жидкости

$$f = \infty.$$

В этом случае уравнения движения являются *дифференциальными уравнениями в частных производных*. Напротив, система с конечным числом степеней свободы описывается *обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка*, число которых равно числу степеней свободы.

е) *Кривошипно-шатунный механизм как пример машины с предписанным движением.* Машина с предписанным движением имеет одну степень свободы. Она состоит из ряда практически твердых тел, соединенных друг с другом шарнирно или посредством каких-либо направляющих. Классическим примером машины с предписанным движением является *кривошипно-шатунный механизм* (рис. 9). Если, однако, снабдить машину центробежным регулятором (предусмотренным еще Уаттом), то этим добавляется *вторая* степень свободы.

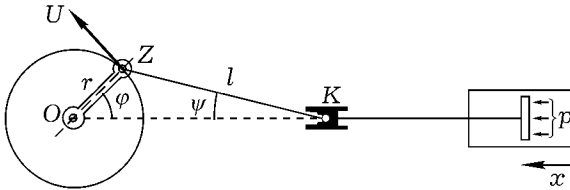


Рис. 9. Схематическое изображение кривошипно-шатунного механизма

В вышеприведенных примерах число степеней свободы равно числу независимых координат, необходимых для определения положения системы. Эти координаты отнюдь не обязаны быть прямоугольными. Например, в случае кривошипно-шатунного механизма можно вместо координаты x , характеризующей положение поршня, выбрать в качестве координаты угол φ , определяющий положение кривошипа. В общем случае при f степенях свободы мы будем обозначать координаты, выбор которых в значительной мере произволен, через

$$q_1, q_2, \dots, q_f; \quad (7.2)$$

r «условий связи между координатами», которые имеются в виду в уравнении (7.1), могут быть тождественно удовлетворены выбором координат q , так что они выпадают из дальнейшего рассмотрения системы.

Существенная заслуга механики Герца (упомянутой на стр. 15) заключается в том, что в ней было обращено внимание на *условия связи, выраженные в дифференциальной форме*, которые не могут быть тождественно удовлетворены выбором координат q . Подобное условие свя-

зи можно сформулировать так:

$$\sum_{k=1}^f F_k(q_1 \dots q_f) dq_k = 0. \quad (7.3)$$

При этом предполагается, что не все F_k имеют вид $\frac{\partial F}{\partial q_k}$; таким образом, выражение (7.3) не является полным дифференциалом некоторой функции $F(q_1 \dots q_f)$ и не может быть сделано таковым путем умножения на надлежащий интегрирующий множитель.

Условия связи вида $F(q_1 \dots q_f) = \text{const}$ называют, по Герцу *голономными* (греческое holos = латинскому integer = цельный, интегрируемый), условия же связи вида (7.3), которые не могут быть проинтегрированы в общем виде, называются *неголономными*. Простейшим примером неголономной связи является колесо с острыми краями на плоском основании (см. задачу II. 1; сюда относятся также сани и шарнирный механизм велосипеда). Поступательное движение такого колеса ограничено тем, что оно может происходить только в направлении самого колеса (т. е. что точка касания колеса с основанием может перемещаться только по направлению касательной к колесу). Несмотря на это, колесо может достигнуть любой точки плоского основания хотя для этого может оказаться необходимым движение по траектории с острием (точкой возврата). Таким образом, колесо обладает при конечных движениях *большим числом степеней свободы, чем при бесконечно малом движении*. Вообще, система, подчиненная r неголономным условиям связи и имеющая f степеней свободы при конечных движениях, имеет только $f - r$ степеней свободы при бесконечно малом движении. Об этом более подробно см. задачу II. 1.

Это различие имеет важное значение для понятия *виртуального перемещения*. Под виртуальным перемещением мы понимаем *произвольное, совместимое с условиями связи, бесконечно малое изменение положения системы*. Истинное перемещение, происходящее под действием данных сил и в данных условиях, мы обозначаем через

$$dq_1, dq_2, \dots, dq_f,$$

тогда как виртуальное перемещение мы будем обозначать через

$$\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_f.$$

Величины δq не имеют никакого отношения к процессу движения; они вводятся лишь *пробным порядком* для того, чтобы выявить имеющиеся в системе соотношения и силы, действующие на систему.

Однако при чисто голономных связях величины δq независимы друг от друга (каждой степени свободы соответствует одно δq), в то время как в случае неголономных связей приходится вводить в рассмотрение *избыточное число* виртуальных смещений δq , связанных между собою дифференциальными условиями вида (7.3). Эти условия подобны уравнению (7.3):

$$\sum_{k=1}^f F_k(q_1 \dots q_f) \delta q_k = 0. \quad (7.4)$$

При этом f означает число степеней свободы для конечных движений, которое, как мы уже подчеркивали, больше числа степеней свободы при бесконечно малом движении.

§ 8. ПРИНЦИП ВИРТУАЛЬНОЙ РАБОТЫ

Рассмотрим механическую систему, которая, несмотря на воздействие внешних сил, находится в равновесии. Силы могут быть приложены к различным частям системы и действовать в любых направлениях; нет необходимости предполагать, что эти силы такие, какие они должны были бы быть для поддержания равновесия лишь одного твердого тела. Находятся ли силы, приложенные к рассматриваемой системе, в равновесии или нет, зависит в такой же степени от самой системы, как и от сил.

В духе элементарной механики точки мы должны были бы поставить вопрос о *реакциях*, вызванных внешними силами и действующих между отдельными частями системы. Так поступают, например, в технической механике при рассмотрении кривошипно-шатунного механизма (см. рис. 9). Давление пара, действующее на поршень, передается поршневым штоком на крейцкопф K и от него на шатун (посредством нормального давления, исходящего от направляющих). Шатун действует на цапфу кривошипа Z с силой, направленной вдоль шатуна. Но только перпендикулярная к кривошипу (т. е. касательная к окружности кривошипа) слагающая U этой силы должна в случае равновесия уравновешиваться внешним противодействием. Слагающая же силы в на-

правлении кривошипа уравновешивается сопротивлением подшипника кривошипа O ; она только нагружает подшипник кривошипа, но не имеет значения для вопроса о равновесии.

Таким образом, равновесие создается реакциями внутри системы. Хотя в простейших случаях и можно проследить действие каждой из этих реакций в отдельности, но, вообще говоря, это очень кропотливо. Не зная каждой из реакций в отдельности, можно утверждать, что *они не совершают над системой никакой работы*. В нашем случае давление в направляющих направлено перпендикулярно движению кривошипа, а сила, переданная на кривошип через его цапфу Z , проходит через неподвижную точку O подшипника кривошипа. *В общем случае производят пробные виртуальные смещения системы из ее положения равновесия. Совершаемая при этом силами реакций «виртуальная работа» равна нулю.*

Проверим это утверждение на примере твердого тела, в отношении которого мы должны представить себе, что каждая его точка i связана с любой другой его точкой k реакциями \mathbf{R}_{ik} и \mathbf{R}_{ki} , приложенными соответственно в точках i и k . Рассматривая две такие точки обособленно от остальных, получим упомянутую в начале § 7 систему двух материальных точек, соединенных между собой невесомым жестким стержнем. Действующие в этом стержне реакции удовлетворяют третьему закону Ньютона:

$$\mathbf{R}_{ik} = -\mathbf{R}_{ki}. \quad (8.1)$$

Подобно тому, как мы это делали в § 7 при подсчете степеней свободы, разложим виртуальное перемещение на общее для обеих точек поступательное перемещение $\delta \mathbf{s}_i$ и на вращение точки k вокруг смещенного положения точки i , происходящее перпендикулярно соединяющему их стержню, перемещение точки i , соответствующее этому вращению, обозначим через $\delta \mathbf{s}_n$. Таким образом, мы полагаем

$$\delta \mathbf{s}_k = \delta \mathbf{s}_i + \delta \mathbf{s}_n.$$

Для виртуальной работы поступательного перемещения, ввиду (8.1), получим:

$$\delta A_{\text{пост.}} = (\mathbf{R}_{ik} \delta \mathbf{s}_i) + (\mathbf{R}_{ki} \delta \mathbf{s}_i) = 0;$$

для виртуальной работы вращения, при котором точка i неподвижна, а точка k смещается перпендикулярно к стержню, имеем:

$$\delta A_{\text{вр.}} = (\mathbf{R}_{ki} \delta \mathbf{s}_n) = 0.$$

Из этого примера нужно заключить, что ньютоновский закон равенства действия и противодействия имеет решающее значение при переходе от механики точки к механике системы.

Мы обобщим теперь полученные нами в предыдущих примерах результаты в следующий общий постулат: *для каждой механической системы виртуальная работа реакций равна нулю*. Мы не собираемся доказывать этот постулат в общем виде¹; напротив, мы рассматриваем его скорее как *определение понятия «механическая система»*.

Нам остается теперь сделать лишь один небольшой шаг до общей формулировки принципа виртуальной работы. Мы рассуждаем следующим образом: каждая внешняя сила находится в равновесии с реакциями, вызванными ею в ее точке приложения; поэтому сумма работ внешней силы и этих реакций при каждом виртуальном перемещении точки приложения силы равна нулю. Это относится и к сумме всех внешних сил, и к сумме всех вызванных ими реакций. Но реакции, взятые в отдельности, не производят никакой виртуальной работы. *Поэтому и виртуальная работа взятых в отдельности внешних сил равна нулю, если система, к которой они приложены, находится в равновесии*. Этот принцип делает излишним кропотливое определение реакций.

В немецкой литературе употребителен термин «принцип виртуальных перемещений» или «смещений»². Мы приняли итальянское наименование — «принцип виртуальной работы», так как оно, по нашему мнению, лучше всего выражает сущность дела. Термин «принцип виртуальных скоростей», введенный Иоганном Бернулли и часто употребляемый в математической литературе, кажется нам неподходящим.

Исторически этот принцип был намечен уже Галилеем и развит дальше Стевином, Яковом и Иоганном Бернулли, а также Даламбером. Однако доминирующее положение наиболее общего принципа равновесия он получил только в «Аналитической механике» Лагранжа.

¹В первом отделе своей «Аналитической механики» Лагранж пытается доказать этот постулат с помощью надлежащим образом построенной системы полиспастов. См. Лагранж, Аналитическая механика, т. I, ГОНТИ, 1938, стр. 24–26.

²В русской литературе также наиболее распространен термин «принцип виртуальных (возможных) перемещений». (*Прим. ред.*)

Для применения принципа виртуальной работы не имеет большого значения, являются ли наложенные на систему связи голономными или неголономными. В самом деле, принимая во внимание какое-либо из условий связи вида (7.3), можно исключить одно из δq из выражения виртуальной работы, вне зависимости от того, интегрируемо это условие или нет.

Вместо термина «силы реакции» можно пользоваться более ясным выражением «силы геометрического происхождения». Они задаются геометрическими связями, существующими между различными частями системы, или, как в случае твердого тела, между отдельными материальными точками. «Силам реакции» мы противопоставляем то, что мы называли «внешними силами». Вместо этого можно пользоваться более ясным термином «силы физического происхождения» или же «сторонние силы, приложенные извне». Причина их лежит в физических воздействиях; таковы, например, сила тяжести, давление пара, напряжение каната, действующее на систему извне, и т. д. Физическое происхождение этих сил проявляется в том, что в их математическом выражении содержатся особые, поддающиеся лишь опытному определению константы (постоянная тяготения, отсчитываемые по манометру или барометру деления шкалы и т. п.). Трение, о котором мы будем говорить в § 14, нужно отнести частично к силам реакции, частично к «сторонним» силам; к первым — если оно является *трением покоя*, к последним — если оно является *трением движения* (в частности, трением скольжения). Трение покоя автоматически исключается принципом виртуальной работы, трение же скольжения нужно причислить к «сторонним» силам. Внешне это проявляется в том, что в закон трения скольжения [уравнение (14.4)] входит определяемый экспериментально коэффициент трения f .

§ 9. ПРИМЕРЫ НА ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ВИРТУАЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Рычаг (Архимед)

Рычаг имеет одну степень свободы $f = 1$ и поэтому также одно линейное перемещение δq , соответствующее виртуальному изменению угла $\delta\varphi$.

Равновесие имеет место тогда и только тогда, когда виртуальная работа при повороте рычага на $\delta\varphi$ равна нулю. Если δs_P и δs_Q означают виртуальные перемещения точек приложения сил A и B , то это условие гласит:

$$A \delta s_P + B \delta s_Q = 0.$$

Однако, согласно рис. 10а,

$$\delta s_P = a \cdot \delta\varphi, \quad \delta s_Q = -b \cdot \delta\varphi.$$

Следовательно,

$$(Aa - Bb)\delta\varphi = 0$$

и поэтому

$$Aa = Bb.$$

Таким образом, моменты сил относительно точки вращения O равны между собою, иначе говоря, алгебраическая сумма моментов равна нулю.

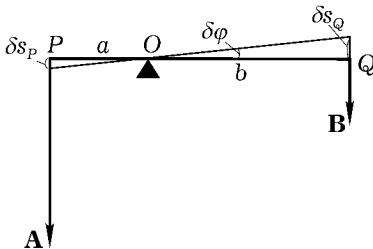


Рис. 10а. Рычаг с плечами a и b при нагрузках A и B , действующих перпендикулярно

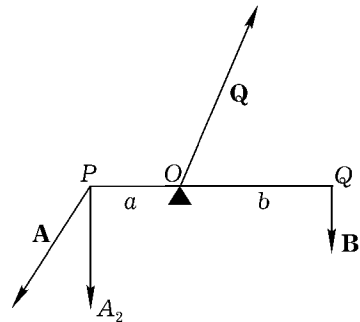


Рис. 10б. Рычаг при нагрузке, действующей наклонно. Реакция в точке опоры

Если сила A не перпендикулярна к плечу рычага, как это изображено на рис. 10б, то из двух ее слагающих A_1 (направленной вдоль плеча рычага) и A_2 (перпендикулярной плечу рычага) слагающая A_1 не оказывает действия, так что условие равновесия гласит:

$$A_2 \cdot a = B \cdot b.$$

Чтобы определить нагрузку на опору O , нужно в случае рис. 10а приложить в O направленную вертикально вверх силу противодействия, равную $Q = A + B$; нагрузка на опору O равна этой силе Q , но противоположна по направлению. В случае рис. 10б имеет место векторное соотношение $\mathbf{Q} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, причем опять-таки нагрузка в точке O противоположна этой силе \mathbf{Q} . Впрочем, вопрос о нагрузке на опору, в сущности, выходит за рамки принципа виртуальной работы. В рассматриваемой механической системе (рычаг) точка вращения O неподвижна; поэтому ее виртуальное перемещение и произведенная в этой точке виртуальная работа равны нулю. Чтобы определить Q или, соответственно, \mathbf{Q} с помощью принципа виртуальной работы, нужно было бы рассмотреть совсем другую механическую систему. А именно, следовало бы наделить точку опоры O двумя степенями свободы и определить условие равновесия при возможности, помимо рассматривавшегося до сих пор вращения, также и параллельного смещения всего рычага.

2. Распределение нагрузки: велосипед, мост

При езде на велосипеде земля противодействует нагрузке в двух точках — H (заднее колесо) и V (переднее колесо) (рис. 11а). При этом заднее колесо подвергается большему давлению, так как общий вес Q велосипеда и седока приложен ближе к H , чем к V . Поэтому велосипедист накачивает заднее колесо сильнее, чем переднее. Нагрузка заднего колеса $A = \frac{b}{a+b}Q$, нагрузка переднего колеса $B = \frac{a}{a+b}Q$.

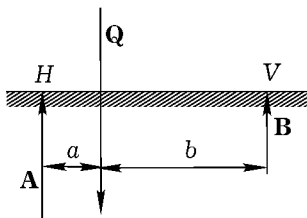


Рис. 11а. Распределение нагрузки на переднее и заднее колеса велосипеда

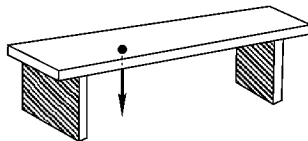


Рис. 11б. Схема моста. Распределение нагрузки на опоры

Такие же соотношения справедливы и для односторонне нагруженного моста (рис. 11б).

3. Полиспаст (известный еще грекам)

Допустим, что число блоков на нижнем и верхнем концах полиспаста равно n . Обозначим поднимаемый груз через Q , а прилагаемую к концу каната силу через P . Пусть при виртуальной работе полиспаста точка приложения силы P проходит путь δp , точка приложения силы Q проходит путь δq при указанном на рис. 12 выборе положительного направления δp и δq .

Равновесие имеет место, если

$$+P \delta p - Q \delta q = 0. \quad (9.1)$$

Когда груз Q поднимается на δq , то $2n$ канатов между верхними и нижними блоками сокращаются каждый на δq , в целом же, следовательно, на $2n \delta q$. На такую же величину удлиняется свешивающаяся часть каната в месте приложения силы P . Таким образом

$$\delta p = 2n \delta q$$

и, ввиду (9.1),

$$(Q - 2nP) \delta q = 0.$$

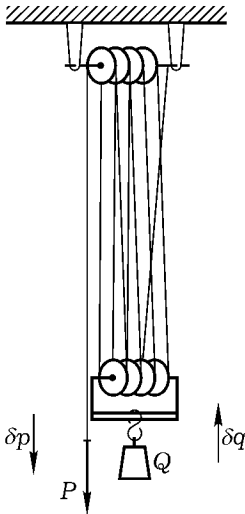
Следовательно,

$$P = \frac{Q}{2n}. \quad (9.2)$$

Рис. 12. Полиспаст. Виртуальное смещение груза и силы

Конечно, этот простой пример можно рассматривать элементарным методом, определяя натяжение в канатах, что в данном случае дает, пожалуй, даже более наглядное представление о взаимодействии различных сил.

Пусть S — натяжение каната (взятое по всему его поперечному сечению). Если не принимать во внимание трения, то натяжение в канате будет всюду одинаковым; это значит, что в каком бы месте мы



ни перерезали канат, всюду мы обнаружили бы одинаковое натяжение, равное S , действующее на место разреза с обеих сторон. Сначала мысленно рассечем канат слева над P . Условие равновесия отсеченного куска каната, на который P действует вниз, а S вверх, дает:

$$P = S.$$

Теперь сделаем мысленный разрез через правую часть полиспаста над Q ; при этом «вскрываются» $2n$ поперечных сечений каната. Для равновесия отрезанной справа нижней части полиспаста необходимо, чтобы

$$Q = 2nS.$$

Таким образом, мы опять приходим к уравнению

$$P = \frac{Q}{2n}.$$

Рассмотрение верхней части полиспаста приводит к определению нагрузки балки, на которой висит полиспаст. Эта нагрузка равна, очевидно, $P + Q$.

4. Кривошипно-шатунный механизм

Возвращаясь к рис. 9, обозначим общее давление пара на поршень через P ; таким образом, $P \delta x$ есть виртуальная работа на поршне. Пусть Q — сила, действующая на кривошип в направлении, противоположном силе U , и уравнивающая в итоге силу P . Ее виртуальная работа будет равна $-Qr \delta \varphi$. Принцип виртуальной работы требует:

$$Qr \delta \varphi = P \delta x, \quad Q = P \frac{\delta x}{r \delta \varphi}. \quad (9.3)$$

Таким образом, вычисление Q сводится к чисто кинематической задаче определения отношения δx к $\delta \varphi$.

Согласно рис. 9, проекция на ось x равна:

$$r \cos \varphi + l \cos \psi = \text{const} - x, \quad (9.4)$$

$$r \sin \varphi \delta \varphi + l \sin \psi \delta \psi = \delta x. \quad (9.4a)$$

Из треугольника OZK следует:

$$\begin{aligned} \sin \psi &= \frac{r}{l} \sin \varphi, \\ \delta \psi &= \frac{r}{l} \frac{\cos \varphi}{\cos \psi} \delta \varphi = \frac{r}{l} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2 \varphi}} \delta \varphi. \end{aligned} \quad (9.4б)$$

Подставив это в (9.4а), получим:

$$r \sin \varphi \delta \varphi \left(1 + \frac{r}{l} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2 \varphi}} \right) = \delta x. \quad (9.4в)$$

Из этого уравнения находим искомую кинематическую величину $\frac{\delta x}{r \delta \varphi}$.

Подставив ее в (9.3), получаем:

$$Q = P \sin \varphi \left(1 + \frac{r}{l} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2 \varphi}} \right). \quad (9.5)$$

Этим выражением определяется также для каждого положения кривошипа φ окружная сила $U = Q$, переданная на цапфу Z . Точное знание этой силы важно для суждения о степени неравномерности хода машины и для подбора необходимого махового колеса. Так как $\frac{r}{l}$ — малая правильная дробь, то выражение (9.5) можно разложить в хорошо сходящийся ряд по степеням $\frac{r}{l}$ (см. также задачу II. 2).

Для целей дальнейшего применения выразим еще путь поршня x в виде ряда по степеням $\frac{r}{l}$, написав, согласно (9.4) и (9.4б),

$$x + r \left(\cos \varphi - \frac{1}{2} \frac{r}{l} \sin^2 \varphi + \dots \right) = \text{const.} \quad (9.6)$$

5. Момент силы относительно оси и работа при виртуальном вращении

Пусть точка P находится на расстоянии l по перпендикуляру от оси a . В точке P приложена сила \mathbf{F} произвольного направления. При

виртуальном повороте $\delta\varphi$ вокруг оси a точка P перемещается на

$$\delta s_P = l \delta\varphi.$$

Какую работу δA совершает при этом сила \mathbf{F} ?

Разложим силу \mathbf{F} , как в уравнении (5.18), на взаимно перпендикулярные слагающие \mathbf{F}_a , \mathbf{F}_l , \mathbf{F}_n . Работа совершается только слагающей \mathbf{F}_n , а именно

$$\delta A = F_n \delta s_P = F_n l \delta\varphi.$$

Сравнивая это выражение с (5.18а), приходим к следующей теореме.

Момент силы относительно оси может быть определен как деленная на $\delta\varphi$ виртуальная работа, совершаемая этой силой при повороте ее точки приложения вокруг оси на угол $\delta\varphi$:

$$M_a(\mathbf{F}) = \frac{\delta A}{\delta\varphi} = l F_n. \quad (9.7)$$

Таким образом, устанавливается связь основного статического понятия «момент» с основным для всех вопросов равновесия понятием «виртуальная работа».

При этом нужно заметить, что размерность момента (сила \times плечо) такая же, как и размерность работы (сила \times путь); это согласуется с равенством (9.7), если, как это принято, считать измеренный в радианах угол безразмерной величиной.

§ 10. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА. ВВЕДЕНИЕ СИЛ ИНЕРЦИИ

Инерцию тел можно понимать как сопротивление изменениям движения, или, короче, как силу инерции. Соответственно этому, определение *силы инерции* материальной точки будет

$$\mathbf{F}^* = -\dot{\mathbf{G}}, \quad (10.1)$$

и основной закон движения $\dot{\mathbf{G}} = \mathbf{F}$ принимает вид:

$$\mathbf{F}^* + \mathbf{F} = 0. \quad (10.2)$$

Этот закон гласит: *сила инерции векторно уравновешивает внешнюю силу.*

В то время как \mathbf{F} означает силу, определяемую физическими условиями, сила \mathbf{F}^* является *фиктивной силой*. Мы вводим ее для того, чтобы свести вопросы движения к вопросам равновесия, что часто оказывается очень удобным.

Силы инерции хорошо известны нам из повседневной жизни. Приводя в движение тяжелую вращающуюся дверь, мы преодолеваем не силу тяжести или трение, а инерцию двери.

Самой известной формой силы инерции является *центробежная сила*, проявляющаяся при всяком криволинейном движении. Она также является *фиктивной силой*. Центробежная сила соответствует нормальному ускорению \dot{v}_n криволинейного движения, которое направлено *центростремительно* (по направлению к центру кривизны). На основании уравнения (5.9) центробежная сила равна:

$$Z = -m\dot{v}_n = -m\frac{v^2}{\rho}, \quad (10.3)$$

причем знак минус означает, что эта сила направлена наружу.

К силам инерции относятся также *сила Кориолиса*, или *поворотная центробежная сила* (см. § 28), и гироскопические силы (см. § 27).

Впрочем, «фиктивная» центробежная сила проявляется весьма реально, например, в железнодорожном движении. Превышение наружного рельса над внутренним на криволинейном участке пути подбирается всегда так, чтобы при средней скорости поезда равнодействующая силы тяжести и центробежной силы проходила как раз посередине между обоими рельсами. Этим устраняется не только опасность опрокидывания, но также и вредная односторонняя нагрузка одного из рельсов.

Удивительно, что Генрих Герц в прекрасном введении к своей «Механике» возражает против пользования понятием центробежной силы (Ges. Werke, Bd. III, S. 6):

«Мы вращаем по кругу камень на веревке; при этом мы ощущаем воздействие на камень с некоторой силой. Эта сила непрерывно отклоняет камень от прямого пути; если мы изменяем эту силу, массу камня и длину веревки, то обнаруживаем, что движение камня действительно происходит в согласии со вторым законом Ньютона. Однако третий закон требует наличия силы, противодействующей той силе, которая передается нашей рукой камню. Ответ на вопрос об этой силе противодействия общеизвестен: говорят, что камень производит обратное действие на руку вследствие центробежной силы и что эта центробежная

сила действительно точно равна, но противоположна по направлению силе нашего воздействия. Допустим ли этот способ выражения? Будет ли то, что мы теперь называем центробежной силой, чем-либо иным, чем инерция камня?».

На этот вопрос мы должны категорически ответить «нет»: согласно нашему определению (10.3), центробежная сила действительно есть то же самое, что и инерция камня. Но силой, противодействующей силе, с которой мы действуем на камень, или, точнее говоря, на веревку, является тянущее усилие, которое оказывает веревка на нашу руку.

Далее Герц пишет: «Нам не остается ничего иного, как заявить: центробежная сила не является силой в собственном смысле этого слова; этот термин так же, как термин «живая сила», имеет историческое происхождение, и сохранение его можно скорее извинить соображениями полезности, чем оправдать». По поводу этого замечания Герца мы хотели бы сказать, что термин «центробежная сила» не нуждается ни в каком оправдании, так как он так же, как и более общий термин «сила инерции», основан на ясном определении.

Впрочем, как раз эта мнимая неясность понятия силы побудила Герца построить его «Механику», освобожденную от этого понятия (см. § 1), которая хотя и очень интересна, но мало плодотворна.

Переходим теперь к научному наследию Даламбера (математик, философ, астроном, физик, энциклопедист; его «Трактат по динамике» опубликован в 1758 г.).

Если материальная точка k , к которой приложена внешняя сила F_k , входит в состав произвольной механической системы, то к ней применимо не уравнение (10.2), а уравнение

$$\mathbf{F}_k^* + \mathbf{F}_k + \sum_l \mathbf{R}_{lk} = 0. \quad (10.4)$$

Здесь \mathbf{R}_{lk} есть сила реакции, с которой действует на точку k связанная с ней материальная точка l . Однако, как мы постулировали на стр. 73, реакции \mathbf{R}_{lk} в своей совокупности не производят никакой работы, как бы мы виртуально (т. е. без нарушения внутренних связей) ни перемещали систему. Поэтому и виртуальная работа всех сил ($\mathbf{F}^* + \mathbf{F}$) тоже равна нулю:

$$\sum_k (\mathbf{F}_k^* + \mathbf{F}_k, \delta \mathbf{s}_k) = 0. \quad (10.5)$$

Принимая во внимание принцип виртуальной работы, можно сформулировать уравнение (10.5) в следующих словах: *силы инерции находятся в равновесии со «сторонними» силами физического происхождения*; при этом нам не нужно знать реакций.

Это и есть *принцип Даламбера* в его наиболее естественной и простой формулировке. Чтобы придти к другой интересной формулировке этого принципа, рассмотрим величину

$$\mathbf{F}_k + \mathbf{F}_k^* = \mathbf{F}_k - \dot{\mathbf{G}}_k.$$

Она является той частью силы \mathbf{F}_k , которая не затрачивается на движение точки k . Мы назовем ее «потерянной силой» и сформулируем уравнение (10.5) следующим образом:

Совокупность действующих на систему потерянных сил находится в равновесии.

В учебниках очень распространена формулировка принципа Даламбера в прямоугольных координатах. Обозначим через X_k, Y_k, Z_k слагающие силы \mathbf{F}_k , а слагающие $\delta \mathbf{s}_k$ через $\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k$. Если, кроме того, вести расчет для постоянных масс m_k , то для системы, состоящей из n материальных точек, можно написать вместо (10.5):

$$\sum_{k=1}^n \{ (X_k - m_k \ddot{x}_k) \delta x_k + (Y_k - m_k \ddot{y}_k) \delta y_k + (Z_k - m_k \ddot{z}_k) \delta z_k \} = 0. \quad (10.6)$$

Но при этом необходимо подчинить $\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k$ наложенным на систему связям. В общем случае неголономных связей нужно потребовать, в соответствии с уравнением (7.4), в котором мы заменяем обобщенные координаты q прямоугольными, чтобы выполнялись соотношения:

$$\sum_{\mu=1}^n [F_{\mu}(x_1 \dots z_n) \delta x_{\mu} + G_{\mu}(x_1 \dots z_n) \delta y_{\mu} + H_{\mu}(x_1 \dots z_n) \delta z_{\mu}] = 0. \quad (10.6a)$$

Таких условий для $\delta x, \delta y, \delta z$ имеется $3n - f$, где f есть число степеней свободы при бесконечно малом движении (ср. стр. 71). В случае голономных связей $F_{\mu}, G_{\mu}, H_{\mu}$ являются частными производными по $x_{\mu}, y_{\mu}, z_{\mu}$ одной и той же функции координат.

Мы хотели бы, однако, обратить особое внимание на то, что не следует усматривать в тяжеловесной формулировке (10.6), (10.6a) подлинное содержание принципа Даламбера. Значительно более удобно и, вви-

ду его инвариантной формы, более естественно уравнение (10.5) или эквивалентное ему условие равновесия.

§ 11. ПРОСТЕЙШИЕ ПРИМЕРЫ НА ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ДАЛАМБЕРА

1. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Здесь мы имеем дело с одной степенью свободы — углом поворота φ . Назовем $\dot{\varphi} = \omega$ угловой скоростью, $\ddot{\varphi} = \dot{\omega}$ — угловым ускорением. Реакции в осевых опорах нас пока не интересуют.

Пусть на тело действуют произвольные внешние силы \mathbf{F} произвольного направления. Виртуальная работа их определяется, согласно § 9 [уравнение (9.7)], суммой их моментов относительно оси вращения:

$$M_a \delta\varphi, \tag{11.1}$$

где M_a — сумма моментов сил \mathbf{F} относительно оси вращения. Требуется определить работу сил инерции \mathbf{F}^* . Разделим тело на элементы массы dm . Перпендикулярной к оси слагающей силы инерции, действующей на dm , является, согласно (10.3), центробежная сила $dm \frac{v^2}{r} = dm \omega v$. (При круговом движении радиус кривизны ρ траектории, очевидно, равен расстоянию r от оси вращения; скорость v каждой материальной частицы равна $r\omega$, ускорение \dot{v} вдоль траектории равно $r\dot{\omega}$.) Но центробежная сила не производит никакой работы. С другой стороны, слагающая силы инерции по направлению траектории равна

$$-dm \dot{v} = -dm r \dot{\omega}. \tag{11.2}$$

Таким образом, полная виртуальная работа всех сил инерции равна

$$\sum (-dm \cdot \dot{v}) \delta s = \sum -dm \cdot r \cdot \dot{\omega} \cdot r \delta\varphi = -\delta\varphi \dot{\omega} \int r^2 dm = -d\varphi \dot{\omega} \Theta. \tag{11.2}$$

Величина

$$\Theta = \int r^2 dm \tag{11.3}$$

называется *моментом инерции*. Размерность Θ в физической системе единиц равна $г \cdot см^2$, в технической же системе единиц $кг \cdot м \cdot сек^2$.

Согласно (11.1) и (11.2), принцип Даламбера требует, чтобы выполнялось равенство:

$$\delta\varphi(M_a - \Theta\dot{\omega}) = 0.$$

Отсюда получается *основное уравнение вращательного движения*:

$$\Theta\dot{\omega} = M_a. \quad (11.4)$$

Сравним это уравнение с *основным уравнением для поступательного движения* с одной степенью свободы, например, в направлении оси x :

$$m\ddot{x} = F_x.$$

Мы видим, что при вращательном движении Θ играет роль m . Такую же роль Θ играет и в выражении кинетической энергии. При вращательном движении твердого тела эта энергия равна

$$E_{\text{кин.}} = T = \int \frac{dm}{2} v^2 = \int \frac{dm}{2} r^2 \omega^2 = \frac{\omega^2}{2} \int r^2 \cdot dm = \frac{\omega^2}{2} \Theta, \quad (11.5)$$

что точно соответствует элементарному выражению кинетической энергии в механике точки

$$E_{\text{кин.}} = T = \frac{\dot{x}^2}{2} m. \quad (11.5a)$$

Момент инерции Θ твердого тела при неподвижной оси вращения не зависит от времени, тогда как для шарнирных механизмов и живых существ Θ переменен. В § 13 мы покажем, что все спортивные занятия, в особенности гимнастика, основаны на изменчивости момента инерции человеческого тела.

Зависимость момента инерции твердого тела от положения оси вращения мы рассмотрим в § 22.

Укажем еще на связь кинетической энергии с основным уравнением движения. Подобно тому, как в механике точки из закона живых сил

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dA}{dt}, \quad \text{где} \quad dA = F_x dx,$$

можно (при постоянной массе) получить уравнение движения $m\ddot{x} = F_x$, так и при вращательном движении можно с помощью уравнения (11.5) получить из

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dA}{dt},$$

где $dA = M_a d\varphi$ [уравнение (9.7)], уравнение движения (11.4) (при постоянном Θ).

Момент инерции входит также в выражение для *момента количества движения или момента импульса* вращающегося тела. Если мы обозначим этот момент через N , то, очевидно,

$$N = \sum dm v r = \omega \sum dm r^2 = \omega \Theta. \quad (11.6)$$

2. Связь между вращательным и поступательным движениями

Представим себе подъемную клеть в руднике или лифт. Канат, несущий лифт, намотан на окружность барабана радиуса r и приводится в движение силой P . Два виртуальных перемещения этой системы (рис. 13) связаны соотношением:

$$\delta z = r \cdot \delta \varphi. \quad (11.7)$$

Принцип Даламбера требует, чтобы

$$(-Q - M\ddot{z})\delta z + (rP - \Theta\dot{\omega})\delta \varphi = 0. \quad (11.7a)$$

Удобно представить себе массу барабана сосредоточенной на его окружности, т. е. ввести понятие так наз. «приведенной массы» $M_{\text{прив.}}$, определяемое следующим равенством:

$$\Theta = M_{\text{прив.}} \cdot r^2. \quad (11.8)$$

Тогда, принимая во внимание (11.7), можно переписать уравнение (11.7a) в виде:

$$(P - Q - M\ddot{z} - M_{\text{прив.}} r \dot{\omega}) \delta z = 0.$$

Отсюда, ввиду того, что $r\omega = \dot{z}$, $r\dot{\omega} = \ddot{z}$, получаем уравнение движения

$$(M + M_{\text{прив.}})\ddot{z} = P - Q. \quad (11.9)$$

Таким образом, влияние инерции барабана приводит попросту к прибавлению $M_{\text{прив.}}$ к массе лифта.

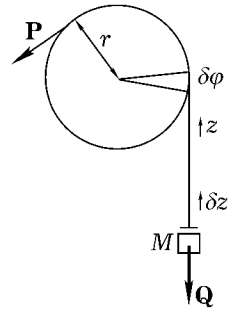


Рис. 13. Связь между вращательным и поступательным движениями (лифт, подъемная клеть)

3. Качение шара по наклонной плоскости

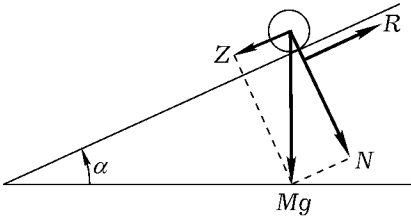


Рис. 14. Шар на наклонной плоскости. Трение покоя R обуславливает чистое качение, однако не входит в принцип Даламбера

тостью, а эта точка в каждый данный момент покоится. Условие чистого качения гласит:

$$\dot{z} = r\omega \quad (11.10)$$

или, если его записать через виртуальные перемещения,

$$\delta z = r \delta\varphi. \quad (11.10a)$$

По принципу Даламбера требуется, чтобы

$$\delta z(Mg \sin \alpha - M\ddot{z}) + \delta\varphi(-\Theta\dot{\omega}) = 0. \quad (11.11)$$

Вычисление величины Θ является задачей интегрального исчисления. Не приводя доказательства, укажем, что для однородного эллипсоида с полуосями a , b , c момент инерции относительно оси c (и соответственно относительно других главных осей) равен:

$$\Theta_c = \frac{M}{5}(a^2 + b^2). \quad (11.12)$$

В частном случае шара эта формула принимает вид:

$$\Theta = \frac{2}{5}Mr^2. \quad (11.12a)$$

Если ввести по аналогии с (11.8) «приведенную к расстоянию r массу» шара, то из (11.12a) следует:

$$M_{\text{прив.}} = \frac{2}{5}M. \quad (11.126)$$

Здесь также идет речь о связи поступательного движения (соскальзывание шара) с вращательным (вращение шара вокруг оси, перпендикулярной к плоскости рисунка и проходящей через его центр). Действующей компонентой силы тяжести будет $Z = Mg \sin \alpha$; указанную на рисунке силу трения покоя R при пользовании принципом Даламбера учитывать не нужно, так как эта сила R приложена к точке касания шара с плоскостью.

Внося это выражение в (11.11) и учитывая при этом соотношение (11.10а), легко получаем:

$$\ddot{z} = \frac{5}{7}g \sin \alpha. \quad (11.13)$$

Коэффициент $\frac{5}{7}$ показывает, как замедляется падение по наклонной плоскости вследствие качения шара и обусловленного этим качением увеличения инерции.

В то время как в случае свободного падения мы нашли [ср. (3.13)], что конечная скорость равна $v = \sqrt{2gh}$, где h — высота падения, мы теперь получаем из (11.13) конечную скорость

$$v = \sqrt{2 \cdot \frac{5}{7}gh}.$$

Различие конечных скоростей объясняется тем, что потенциальная энергия тяжелого шара превращается теперь не только в энергию падения, но также и в энергию вращения катящегося шара.

4. Движение материальной точки по заданному пути

Если принять, что это движение происходит без трения, то принцип Даламбера, примененный у единственной имеющейся здесь степени свободы (смещение δs в направлении траектории), приводит к соотношению:

$$\delta s(F_s^* + F_s) = 0,$$

т. е., согласно (5.8),

$$m\dot{v}_s = m\dot{v} = F_s \quad (11.14)$$

при произвольном направлении внешней силы \mathbf{F} . Перпендикулярная к движению слагающая F_n (которую мы будем считать положительной, если она направлена центростремительно) должна в сумме с реакцией (положительное направление которой мы будем считать таким же) уравновешивать центробежную силу Z . Таким образом,

$$R_n + F_n = Z = m \frac{v^2}{\rho}. \quad (11.15)$$

Вообще говоря, особенно если направление осуществляется материальным желобом, совершенно необходимо учитывать также и касательную к траектории слагающую реакции R_s , т. е. трение. Если считать положительное направление силы трения противоположным приращению пути ds , то соответствующее обобщение уравнения (11.14) запишется так:

$$m\dot{v} = F_s - R_s. \quad (11.16)$$

Однако в то время, как R_s определяется уравнением (11.15), слагающая реакции R_s остается в уравнении (11.16) «статически и динамически неопределенной»; ее можно определить только экспериментальным, физическим путем. Как это нужно делать, мы рассмотрим в приложении к этой главе.

§ 12. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ПЕРВОГО РОДА

Рассмотрим систему дискретных материальных точек m_1, m_2, \dots, m_n , на которые наложены r голономных условий связи

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \dots, F_r = 0. \quad (12.1)$$

Следовательно, число степеней свободы $f = 3n - r$. Будем вести рассмотрение в прямоугольных координатах и воспользуемся формулировкой (10.6) принципа Даламбера. Чтобы упростить запись входящих в (10.6) громоздких сумм, пронумеруем координаты $x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n$ следующим образом:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{3n-1}, x_{3n}.$$

Так же поступим и со слагающими сил X, Y, Z . Тогда уравнение (10.6) примет вид:

$$\sum_{k=1}^{3n} (X_k - m_k \ddot{x}_k) \delta x_k = 0. \quad (12.2)$$

Ввиду наличия r условий (12.1), на значения вариаций δx_k наложены ограничения

$$\delta F_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (12.3)$$

которые также могут быть записаны в виде:

$$\sum_{k=1}^{3n} \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \delta x_k, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (12.4)$$

Пмножим каждую из δF_i на пока произвольный множитель λ_i (множитель Лагранжа) и прибавим полученные произведения к даламберовой формуле (12.2). В результате получим сначала:

$$\sum_{k=1}^{3n} \left(X_k - m_k \ddot{x}_k + \sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right) \delta x_k = 0. \quad (12.5)$$

Однако из $3n$ перемещений δx только f независимы друг от друга; остальные r перемещений зависят от них. Пусть, например, зависимыми будут величины $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_r$. С другой стороны, у нас есть как раз r величин $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, которыми мы можем распоряжаться по произволу. Выберем значения λ_i , так, чтобы

$$X_k - m_k \ddot{x}_k + \sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_k} = 0; \quad k = 1, 2, \dots, r. \quad (12.6)$$

Тогда (12.5) сведется к уравнению

$$\sum_{k=r+1}^{3n} \left(X_k - m_k \ddot{x}_k + \sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right) \delta x_k = 0, \quad (12.7)$$

в котором λ_r имеют уже определенные значения, а вариации δx_k , число которых равно $f = 3n - r$, совершенно независимы. Таким образом, если мы, например, положим

$$\delta x_{r+\nu} \neq 0;$$

$$\delta x_{r+1} = \delta x_{r+2} = \dots = \delta x_{r+\nu-1} = \delta x_{r+\nu+1} = \dots = \delta x_{3n} = 0, \quad (12.8)$$

то из (12.7) будет следовать, что выражение в скобках при $\delta x_{r+\nu}$ должно обращаться в нуль. Заставив ν пробегать значения $1, 2, \dots, f$, увидим, что каждая скобка должна равняться нулю:

$$X_k - m_k \ddot{x}_k + \sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_k} = 0; \quad k = r + 1, r + 2, \dots, 3n.$$

Эти последние уравнения вместе с уравнениями (12.6) дают $3n$ дифференциальных уравнений, так называемых уравнений Лагранжа первого рода:

$$m_k \ddot{x}_k = X_k + \sum_{i=1}^{i=r} \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_k} = 0; \quad k = 1, 2, \dots, 3n. \quad (12.9)$$

При этом, конечно, каждые три последовательные величины m_k равны между собой, например $m_1 = m_2 = m_3$, так как речь идет об одной и той же материальной точке m_1 с тремя ее координатами $x_1 = x_1$, $x_2 = y_1$, $x_3 = z_1$.

Мы считали условия связи (12.1) голономными, но можно легко убедиться в том, что все изложенное справедливо с небольшим видоизменением также и для *неголономных условий связи*. Единственная разница заключается в том, что коэффициенты $\frac{\partial F_i}{\partial x_k}$ в уравнении (12.4) нужно заменить произвольными функциями координат F_{ik} , которые могут быть представлены в форме частных производных. Произведя эту замену и в уравнениях (12.9), получаем непосредственно уравнения Лагранжа первого рода для *неголономных систем*:

$$m_k \ddot{x}_k = X_k + \sum_{i=1}^{i=r} \lambda_i F_{ik}. \quad (12.9a)$$

Более интересным является следующее обобщение: допустим, что условия (12.1) *меняются с течением времени*, т. е. что функции F_i явно зависят не только от x_k , но и от t . В этом случае необходимо оговорить, что при образовании выражений (12.4) время *не должно* варьироваться, что мы вправе сделать и что вполне естественно, так как наше виртуальное перемещение не имеет ничего общего с протеканием движения во времени. Эта оговорка не отражается на выводе уравнения (12.9). Однако зависимость F_i от t приводит к важным следствиям в отношении *формы закона сохранения энергии*.

Если мы хотим вывести этот закон при *не зависящих от времени* условиях связи, то мы должны поступить следующим образом: умножаем (12.9) на dx_k и суммируем по k . Слева получаем:

$$dt \sum m_k \dot{x}_k \ddot{x}_k = dt \frac{d}{dt} \sum \frac{m_k}{2} \dot{x}_k^2 = dt \cdot \frac{dT}{dt} = dT.$$

Первый член справа дает работу внешних сил, произведенную за время dt :

$$\sum dx_k X_k = dA.$$

Второй член справа обращается в нуль, так как

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i \sum_{k=1}^{3n} \frac{\partial F_i}{\partial x_k} dx_k = \sum_{i=1}^r \lambda_i dF_i = 0.$$

Действительно, если F_i зависит только от x_k , то из $F_i = 0$ следует:

$$dF_i = \sum \frac{\partial F_i}{\partial x_k} dx_k = 0.$$

Иначе обстоит дело, если F_i зависит также и от t . В этом случае надо в последнем и в предпоследнем уравнениях заменить нуль соответственно на:

$$-\frac{\partial F_i}{\partial t} dt \quad \text{и на} \quad -\sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial t} dt.$$

Закон сохранения энергии не будет более иметь вида

$$dT = dA, \tag{12.10}$$

что имеет место при условиях связи, не зависящих от времени, а предмет вид

$$dT = dA - dt \sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial t}. \tag{12.10a}$$

Это означает, что *связи, зависящие от времени, производят над системой работу.*

В качестве примера приведем ракетку для игры в теннис. Когда игрок держит ракетку неподвижно, она отражает мяч с неизменной энергией. Если же ракетка отодвигается назад при ударе мяча или, наоборот, ударяет навстречу мячу, то она поглощает энергию или, наоборот, передает энергию мячу.

В случае неголономных систем явная зависимость входящих в (12.9а) функций F_{ik} от t была бы совместима с законом сохранения

энергии в форме (12.10)¹. Если же, однако, неголономное условие связи, в противоположность (7.4), имело бы вид:

$$\sum F_{ik} dx_k + G_i dt = 0,$$

то к выражению (12.10) прибавились бы дополнительные члены, зависящие от G_i , и уравнение энергии приняло бы вид, аналогичный выражению (12.10а):

$$dT = dA - dt \sum_{i=1}^r \lambda_i G_i. \quad (12.10б)$$

¹Если голономные связи (12.1) явно не зависят от времени, то любое бесконечно малое действительное перемещение системы можно рассматривать также как одно из виртуальных перемещений. Это справедливо и для неголономных связей вида

$$\sum_k F_{ik} \delta x_k = 0$$

как в том случае, когда F_{ik} явно зависят от времени, так и в том случае, когда F_{ik} от времени явно не зависят. Поэтому для связей такого вида работа реакций связей при любом бесконечно малом действительном перемещении системы равна нулю. Этого достаточно, чтобы показать, что в рассматриваемом случае справедлив закон сохранения энергии в форме (12.10). Действительно, обозначив реакции связей через R_k , мы можем написать:

$$m_k \ddot{x}_k = X_k + R_k.$$

Поскольку $\sum_k R_k dx_k = 0$, отсюда следует:

$$\sum_k m_k \ddot{x}_k dx_k = \sum_k X_k dx_k.$$

Так как dx_k действительное перемещение, то это уравнение приводится к виду (12.10).

Если же связи (12.1) явно зависят от времени, то действительные перемещения dx_k удовлетворяют уравнениям

$$\sum_k \frac{\partial F_i}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial F_i}{\partial t} dt = 0,$$

тогда как виртуальные перемещения δx_k — уравнениям

$$\sum_k \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \delta x_k = 0.$$

Работа реакций связей на действительных перемещениях в общем случае не равна нулю, и уравнение (12.10) не имеет места. (*Прим. ред.*)

В следующей главе на примере сферического маятника мы убедимся, что величины λ_i можно толковать как «реакции системы на воздействие (голономных и неголономных) связей». Там же мы увидим также, что фактическое определение величин λ должно производиться, исходя не из r произвольно выделенных уравнений, как это мы временно сделали при выводе уравнения (12.6), а из совокупности всех $3n$ уравнений Лагранжа. Нужно подчеркнуть, что метод лагранжевых множителей играет существенную роль не только для уравнений Лагранжа первого рода, но также и для уравнения значительно более общего типа (ср. гл. VI, § 34); с другой стороны, этот метод встречается уже в элементарной теории максимумов и минимумов.

§ 13. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА И МОМЕНТА ИМПУЛЬСА (ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ И ЗАКОН ПЛОЩАДЕЙ)

Мы выведем эти законы для системы дискретных материальных точек, которую можно перемещать и вращать в пространстве, как целое. Законы эти могут быть, однако, путем предельного перехода распространены на свободно движущееся твердое тело или на произвольную механическую систему, подвижность которой не ограничена внешними связями.

Мы подразделим действующие силы на силы *внешние и внутренние*¹. Внешнюю силу, приложенную к точке k , мы будем обозначать через \mathbf{F}_k , внутренние силы — через \mathbf{F}_{ik} , чтобы указать на то, что они являются силами взаимодействия двух точек системы и поэтому удов-

¹Подразделение сил на «внешние и внутренние» ничего не говорит о происхождении сил и поэтому ни в коем случае не совпадает с приведенным на стр. 75 подразделением сил на «сторонние силы физического происхождения и силы реакции». Например, внутренние силы планетной системы являются сторонними силами физического происхождения, именно, силами тяготения; с другой стороны, внешняя сила, приводящая в движение поезд, является, как мы убедимся (см. стр. 115), силой реакции, именно силой трения сцепления вращающихся колес. Подразделение сил на внешние и внутренние производится только в зависимости от того, удовлетворяется или не удовлетворяется в пределах данной системы закон равенства действия и противодействия.

летворяют в пределах системы закону равенства действия и противодействия:

$$\mathbf{F}_{ik} = -\mathbf{F}_{ki}. \quad (13.1)$$

В планетной системе существуют только внутренние силы.

А. Применяем *принцип Даламбера* в форме (10.5). Силу \mathbf{F}_k в этом уравнении мы заменяем через $\mathbf{F}_k + \sum_i \mathbf{F}_{ik}$, силу же \mathbf{F}^* , согласно ее определению, заменяем через $-\dot{\mathbf{G}}_k$ и полагаем все $\delta \mathbf{s}_k$ равными друг другу. Таким образом, мы сообщаем всем материальным точкам системы одно и то же виртуальное перемещение. Согласно (13.1), все внутренние силы \mathbf{F}_{ik} взаимно уничтожаются при суммировании по i и k , так что мы получаем:

$$\left(\delta \mathbf{s} \sum_k \mathbf{F}_k - \sum_k \dot{\mathbf{G}}_k \right) = 0. \quad (13.2)$$

Суммирование по k мы обозначим черточкой сверху; из равенства (13.2), ввиду произвольности $\delta \mathbf{s}$, получим:

$$\dot{\overline{\mathbf{G}}} = \overline{\mathbf{F}}, \quad (13.3)$$

$\overline{\mathbf{G}}$ есть полный импульс системы, равный векторной сумме импульсов всех материальных точек системы.

Введем понятие «скорости центра тяжести» \mathbf{V} с помощью соотношения

$$M\mathbf{V} = \overline{m\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{G}}, \quad M = \overline{m}.$$

Тогда уравнение (13.3) можно записать в виде:

$$M\dot{\mathbf{V}} = \overline{\mathbf{F}}. \quad (13.3a)$$

Выберем в качестве начала отсчета радиусов-векторов \mathbf{r}_k всех точек системы произвольную, но неподвижную точку O и назовем «центром тяжести» системы такую точку, радиус-вектор \mathbf{R} которой определяется соотношением

$$M\mathbf{R} = \overline{m\mathbf{r}}. \quad (13.36)$$

Уравнения (13.3а, б) гласят: *центр тяжести свободно движущейся механической системы движется так же, как материальная точка, в которой сосредоточена вся масса системы и к которой приложена равнодействующая \mathbf{F} всех внешних сил.*

Б. Сообщим системе виртуальный поворот $\delta\varphi$ вокруг произвольной оси, проходящей через точку O . В этом случае перемещения δs_k различных точек m_k системы будут различными, а именно:

$$\delta s_k = [\delta\varphi \mathbf{r}_k]. \quad (13.4)$$

Для доказательства рассмотрим рис. 15, на которой виртуальный поворот $\delta\varphi$ изображен двояко: 1) в виде вектора, направленного по оси вращения, и 2) в виде круговой стрелки вокруг этой оси, образующей с ней правовинтовую систему. В силу определения векторного произведения абсолютная величина δs_k равна:

$$\delta s_k = \delta\varphi |r_k| \sin \alpha = \delta\varphi \rho_k,$$

как это и должно иметь место в рассматриваемом случае. Направление вектора δs_k также правильно определяется выражением (13.4). Этот вектор направлен за плоскость чертежа перпендикулярно к ней, что соответствует направлению изображенной на рис. 15 круговой стрелки.

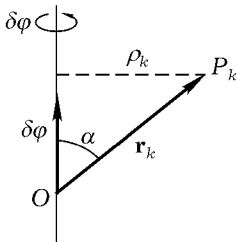


Рис. 15. Виртуальное смещение δs , связанное с виртуальным смещением $\delta\varphi$

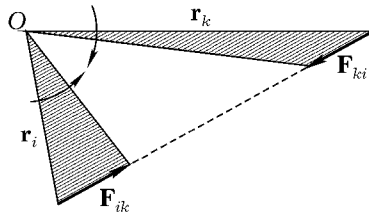


Рис. 16. Моменты внутренних сил попарно уравниваются друг друга

Внеся выражение (13.4) в уравнение (10.5) и преобразовав \mathbf{F}^* и \mathbf{F} так же, как в п. А, получаем:

$$\sum_k \left(\mathbf{F}_k + \sum_i \mathbf{F}_{ik} - \dot{\mathbf{G}}_k [\delta\varphi \mathbf{r}_k] \right) = 0. \quad (13.5)$$

Используем теперь правило элементарной векторной алгебры

$$(\mathbf{A} [\mathbf{BC}]) = (\mathbf{B} [\mathbf{CA}]) = (\mathbf{C} [\mathbf{AB}]), \quad (13.6)$$

которое гласит, что объем параллелепипеда, построенного на каких-либо трех векторах \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , остается неизменным при циклической перестановке обозначений трех его ребер.

На этом основании можно вместо уравнения (13.5) написать:

$$\left(\delta\varphi, \sum_k [\mathbf{r}_k \mathbf{F}_k] + \sum_i \sum_k [\mathbf{r}_k \mathbf{F}_{ik}] - \sum_k [\mathbf{r}_k \dot{\mathbf{G}}_k] \right) = 0. \quad (13.7)$$

Таким образом, вектор $\delta\varphi$ выделен в виде отдельного сомножителя. Вектор, на который умножается $\delta\varphi$ в уравнении (13.7), должен, ввиду произвольности $\delta\varphi$, обращаться в нуль. Для упрощения записи введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_k &= [\mathbf{r}_k \mathbf{F}_k], \quad \text{как в (5.12),} \\ \mathbf{M} &= \sum \mathbf{M}_k, \end{aligned} \quad (13.7a)$$

$$\mathbf{N}_k = [\mathbf{r}_k \mathbf{G}_k], \quad [\mathbf{r}_k \dot{\mathbf{G}}_k] = \frac{d}{dt} [\mathbf{r}_k \mathbf{G}_k] = \dot{\mathbf{N}}_k, \quad (13.7б)$$

как в (5.14),

$$\bar{\mathbf{N}} = \sum \mathbf{N}_k, \quad \dot{\bar{\mathbf{N}}} = \sum \dot{\mathbf{N}}_k. \quad (13.7в)$$

Таким образом, $\bar{\mathbf{M}}$ означает векторную сумму моментов всех внешних сил относительно общей для всех них точки отсчета O , а $\bar{\mathbf{N}}$ — векторную сумму моментов импульсов всех материальных точек системы относительно той же точки отсчета O , или, короче, *полный вращательный импульс* (момент импульса) *системы*.

Далее, из рассмотрения рис. 16 убеждаемся, что все члены двойной суммы, входящей в уравнение (13.7), попарно взаимно уничтожаются, т. е.

$$[\mathbf{r}_k \mathbf{F}_{ik}] + [\mathbf{r}_i \mathbf{F}_{ki}] = 0. \quad (13.8)$$

Это соотношение является следствием того, что внутренние силы по определению удовлетворяют принципу равенства действия и противодействия [уравнение (13.1)].

Из соотношения (13.8) следует, что двойная сумма в уравнении (13.7) обращается в нуль. Поэтому, используя обозначения (13.7a), (13.7б) и (13.7в), мы из уравнения (13.7) непосредственно получаем:

$$\dot{\bar{\mathbf{N}}} = \bar{\mathbf{M}}. \quad (13.9)$$

Это уравнение вполне аналогично уравнению (13.3). Оно гласит: *производная по времени полного момента импульса системы равна сумме внешних сил*, подобно тому, как по уравнению (13.3) *производная по времени полного импульса системы равна равнодействующей внешних сил*.

Фундаментальное уравнение (13.9) принято называть исторически сложившимся термином — «закон площадей». Мы предпочитаем называть его «законом момента импульса (или вращательного импульса)» и, в соответствии с этим, называть уравнение (13.3) «законом импульса».

Термин «закон площадей» возник в связи с задачей Кеплера. Но в то время, как в случае *одной* планеты секториальная скорость пропорциональна моменту импульса и вектор момента импульса направлен по нормали к площади, описываемой радиусом-вектором, в случае проблемы многих тел (многих планет) это уже не имеет места. В этом случае имеет место соотношение

$$\bar{\mathbf{N}} = \sum 2m_k \frac{d\mathbf{S}_k}{dt}, \quad (13.10)$$

в которое не только входят сомножителями отличающиеся друг от друга массы различных планет, но в котором секториальные скорости отдельных планет складываются векторно. Получающаяся таким способом секториальная скорость замкнутой планетной системы определяет, как известно, *неизменяемую* плоскость (плоскость, перпендикулярную к $\bar{\mathbf{N}}$). Она неизменяема в силу того, что в замкнутой планетной системе нет внешних сил; поэтому $\bar{\mathbf{M}} = 0$ и, согласно уравнению (13.9),

$$\bar{\mathbf{N}} = \text{const.} \quad (13.10a)$$

Вообще при $\bar{\mathbf{M}} = 0$ из закона (13.9) получается в качестве частного его случая *закон сохранения момента импульса*.

Представление о площадях, описываемых радиусами-векторами, становится еще менее наглядным в случае системы, состоящей из бесконечного числа материальных точек, например, в случае твердого тела.

Равным образом, неудачен термин «центр тяжести», так как здесь речь идет не о «тяготеющих», а об «инертных» массах. Более подходящим был бы термин «центр инерции».

Чтобы некоторым образом пойти навстречу широко распространенной привычке к прямоугольным координатам, которым отдавалось

предпочтение в старых учебниках, мы приводим доказательства законов импульса и момента импульса методом координат.

Исходными являются уравнения:

$$\left. \begin{aligned} m_k \ddot{x}_k &= X_k + \sum_i X_{ik}, \\ m_k \ddot{y}_k &= Y_k + \sum_i Y_{ik}, \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (13.11)$$

Произведя суммирование по k первой группы этих уравнений и имея ввиду, что $X_{ik} = -X_{ki}$, получим «закон движения центра тяжести» для x -компоненты

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_k m_k x_k = \sum_k X_k. \quad (13.12)$$

Умножая уравнения второй группы на x_k , а уравнения первой группы на $-y_k$, получим:

$$\sum_k m_k (x_k \ddot{y}_k - y_k \ddot{x}_k) = \sum_k (x_k Y_k - y_k X_k) + \dots \quad (13.13)$$

Не выписанные здесь члены мы группируем в пары с индексами ik и ki и записываем их так, чтобы явно выразить направление внутренних сил $k \rightarrow i$ и $i \rightarrow k$. Получаем:

$$\begin{aligned} & x_k Y_{ki} - y_k X_{ki} + x_i Y_{ik} - y_i X_{ik} = \\ &= \frac{|\mathbf{F}_{ik}|}{r_{ik}} [x_k (y_i - y_k) - y_k (x_i - x_k) + x_i (y_k - y_i) - y_i (x_k - x_i)]. \end{aligned}$$

По это выражение, как показывает рис. 16, равно нулю. Поэтому правая часть уравнения (13.13), если учесть соотношение (5.17а), сводится к

$$\sum_k M_{kz} = \bar{M}_z.$$

Левая же часть уравнения (13.13) на основании соотношения (5.14б) равна

$$\frac{d}{dt} \sum_k m_k (x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k) = \sum_k \dot{N}_{kz} = \dot{\bar{N}}_z.$$

Таким образом, уравнение (13.13) совпадает с «законом площадей» (13.9) для z -компоненты.

Между законом движения центра тяжести и законом площадей существует глубокое различие. Мы разберем его на частном случае системы, на которую *не действуют внешние силы*.

В этом случае, согласно уравнению (13.3а), скорость центра тяжести остается постоянной, ибо полная масса M , входящая в это уравнение в качестве множителя, также постоянна (хотя бы внутри системы и происходили относительные перемещения). Таким образом, если центр тяжести вначале находился в состоянии покоя, то он и будет пребывать в нем. *Внутренние силы* никогда не могут привести в движение центр тяжести, даже в шарнирном механизме или в теле животного (коса Мюнхгаузена!). Для того, чтобы привести в движение свой центр тяжести, необходимо от чего-либо оттолкнуться, т. е. необходима *внешняя сила*.

Так как при отсутствии внешних сил, очевидно, и $\overline{\mathbf{M}} = 0$, то из (13.9) следует

$$\overline{\mathbf{N}} = \text{const.} \quad (13.14)$$

Если момент импульса вначале был равен нулю, то он и останется равным нулю, даже если внутри системы и возможны относительные перемещения. Из этого, однако, еще не следует, что ориентация системы должна оставаться неизменной. Напротив, она может претерпевать произвольные изменения под воздействием одних только *внутренних сил*, без какого-либо отталкивания от внешнего тела.

Примером может служить кошка, которая при падении всегда становится на лапы. Это достигается посредством соответствующего поворота передних конечностей и противоположно направленного поворота задних конечностей. В «Comptes Rendus» Парижской академии за 1894 г. (стр. 714) помещены моментальные снимки, наглядно демонстрирующие это.

Сущность этого процесса можно легко проследить на примере вращающейся скамьи (скамьи Жуковского), представляющей собой горизонтальную площадку, которая может вращаться с возможно малым трением вокруг вертикальной оси. Человек, производящий опыт, стоит на площадке и находится вначале в покое:

$$\mathbf{N}_0 = 0.$$

Он поднимает правую руку, протягивает ее вперед и затем отводит назад. «Описанная при этом площадь» должна быть скомпенсирована поворотом в обратную сторону остальных частей тела и площадки, или, выражаясь точнее, момент импульса \mathbf{N}_1 руки, производящей движение, вызывает появление момента импульса \mathbf{N}_2 туловища и площадки, так что

$$\mathbf{N}_2 = -\mathbf{N}_1.$$

Затем человек опускает руку, что не вызывает изменения \mathbf{N} . Этим вновь восстанавливается исходное положение, и процесс можно начинать снова. При каждом его повторении происходит тот же самый поворот в обратную сторону \mathbf{N}_2 . После n повторений человек, производящий опыт, замечает, что он повернулся лицом в направлении, прямо противоположном первоначальному. Таким образом, ориентация тела (в противоположность его центру тяжести) отнюдь не определяется исходным состоянием покоя.

Этот опыт можно еще более «усилить», если дать в руки лицу, производящему опыт, тяжелый груз. Этим, так сказать, увеличивается «описанная площадь», и поэтому заметно увеличивается поворот в обратную сторону.

Еще два опыта. 1) Человек, производящий опыт, стоит с опущенными руками на вращающейся скамье и получает момент импульса \mathbf{N}_0 ; затем он поднимает руки (в руках могут быть грузы), разводя их в стороны. При этом вращение внезапно замедляется. 2) Человек с разведенными в стороны руками приводится во вращательное движение; затем он опускает руки и при этом большей частью падает со скамьи, потому что скорость вращения (особенно, если в руках у человека были грузы) внезапно значительно увеличивается.

В обоих случаях начальный и конечный вращательные импульсы равны между собой:

$$\mathbf{N}_0 = \mathbf{N}_1$$

и поэтому, согласно уравнению (11.6),

$$\Theta_0 \omega_0 = \Theta_1 \omega_1.$$

Но в первом случае

$$\Theta_0 \ll \Theta_1 \quad \text{и, следовательно,} \quad \omega_1 \ll \omega_0,$$

тогда как во втором случае

$$\Theta_0 \gg \Theta_1 \text{ и, следовательно, } \omega_1 \gg \omega_0.$$

Изменяемость момента инерции тела при одновременном сохранении момента импульса используется также при всех гимнастических упражнениях, особенно на турнике. Рассмотрим, например, «стойку передним махом» на турнике. Вначале при раскачивании тело гимнаста вытянуто, его момент инерции велик, скорость вращения вокруг турника невелика. При качании вперед непосредственно перед «стойкой передним махом» гимнаст подтягивает ноги, уменьшая тем самым свой момент инерции относительно турника, вследствие чего скорость вращения его становится большей. Центр тяжести гимнаста перебрасывается через перекладину турника, и гимнаст приходит наверху в положение вертикальной стойки. При этом следует обратить внимание на то, что реакции, вызванные руками, хватающими турник, не оказывают заметного влияния на момент импульса гимнаста, так как, вследствие малого диаметра перекладины турника, плечо этих реакций исчезающе мало.

Аналогично обстоит дело и с другими гимнастическими снарядами («конь», «козел» и т. д.). Вообще, гимнастика, катание на коньках, ходьба на лыжах являются прекрасной иллюстрацией к курсам прикладной и теоретической механики.

В заключение рассмотрим пример большого масштаба — *уравновешивание масс* в судовых поршневых машинах по *методу Шлика*.

Примерно в конце прошлого столетия, при переходе к современным быстроходным пароходам, судостроение переживало кризис. Скорость вращения вала судового двигателя по техническим причинам составляла около 100 об/мин. С такой же частотой изменяются и инерционные воздействия поршневых машин, которые должны восприниматься корпусом корабля. По мере увеличения длины корабля уменьшалась «собственная частота» его колебаний, которая, таким образом, оказалась в опасной близости к частоте инерционных воздействий. Здесь мы употребим уже термин «резонанс», на выяснении смысла которого мы подробно остановимся в следующей главе. Этот термин заимствован из акустики, где резонансные явления проявляются наиболее непосредственно и где они раньше всего были изучены.

На быстроходных судах, в целях экономии места, цилиндры паровых машин устанавливаются в вертикальном положении. Поэтому силы

инерции действуют также в вертикальном направлении. Рассмотрим, например, случай, когда четыре поршня (рис. 17) работают на один и тот же коленчатый вал, расположенный вдоль корабля (по оси z). Мы увидим, что при меньшем числе поршней уравнивание масс невозможно, даже в первом приближении, которым мы здесь ограничимся. При выборе осей координат, указанном на рис. 17, силы инерции направлены по оси x ; они дают моменты только относительно оси y . Инерционные воздействия уравниваются реакциями корпуса корабля, который при этом приходит в ритмическое колебание.

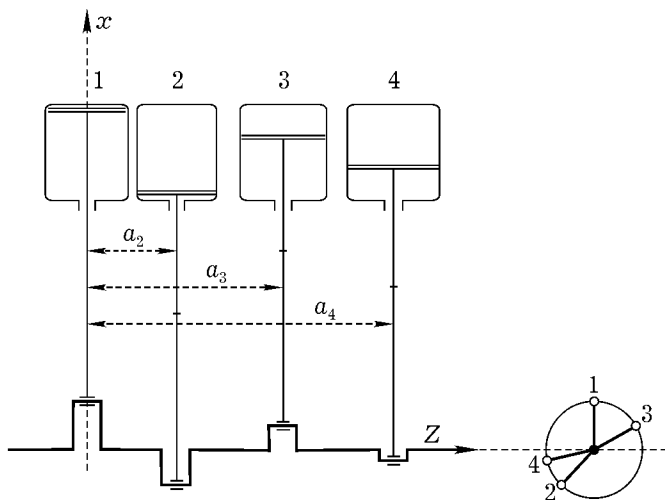


Рис. 17. Уравнивание масс в вертикальной «четырёхцилиндровой» поршневой машине (по Шлику). Справа внизу: взаимное расположение четырёх кривошипов (вид сбоку)

Это хорошо видно на моделях. Идеализированной схемой корпуса корабля здесь служит продолговатый брус, подвешенный на спиральных пружинах, позволяющих ему колебаться и играющих роль подъемной силы воды. Если привести в движение укрепленные на брус модели машин, то брус несколько прогибается. Если, далее, увеличивать число оборотов вала этих машин, то колебания бруса увеличиваются по мере приближения частоты оборотов к частоте главного собственного колебания бруса (рис. 18). Большие амплитуды колебаний оказали бы

вредное влияние на безопасность корабля (а также на состояние пассажиров). Инерционные воздействия машин — враги корпуса корабля. Нужно взаимно скомпенсировать эти воздействия, чтобы разгрузить от них корпус корабля. В этом заключается идея уравнивания масс.

Для *уравнивания сил инерции*, направленных только по оси x , необходимо, если мы сразу же перейдем от ускорений к самим координатам x , чтобы

$$\sum M_k x_k = 0. \quad (13.15)$$

В M_k нужно в первом приближении включить, помимо масс поршней и поршневого штока, также и массы шатуна и частей кривошипа.

По меньшей мере столь же важным является и *уравнивание моментов сил инерции*, причем здесь, как это уже указывалось и что можно видеть из рис. 17, играют роль только моменты относительно оси y . И в этом случае мы также сразу перейдем от ускорений к координатам, что возможно в силу постоянства плеч, на которые действуют силы инерции (расстояния a_k на рис. 17). Таким образом, мы требуем, чтобы

$$\sum M_k a_k x_k = 0. \quad (13.16)$$

Выразим теперь пути поршней x_k через углы поворота кривошипов φ_k . Согласно рис. 9 и уравнению (9.6), в первом приближении имеет место соотношение

$$x_k + r_k \cos \varphi_k = \text{const}. \quad (13.17)$$

«Первое приближение»¹ при этом означает предельный случай бесконечно длинного шатуна, т. е. $\frac{r}{l} \rightarrow 0$. Мы не будем здесь останавливаться на рассмотрении второго приближения, при котором, как и в уравнениях (9.5) и (9.6), учитывается первая степень малой величины $\frac{r}{l}$. Ввиду того, что все кривошипы работают на один и тот же коленчатый вал, все углы φ_k равны между собой с точностью до *постоянного во времени углового сдвига* α_k :

$$\varphi_k = \varphi_1 + \alpha_k (\alpha_1 = 0, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \text{ произвольны}). \quad (13.18)$$

¹ Это первое приближение определяет уравнивание масс первого порядка. Так как мы им только и ограничимся, то мы не станем рассматривать второго приближения.

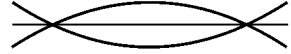


Рис. 18. Собственное колебание свободной балки как модель основного колебания судна

Переменная во времени часть выражения (13.15) и (13.16), которая только и играет роль при рассмотрении колебаний, дает на основании соотношений (13.17) и (13.18)

$$\begin{aligned} \sum M_k r_k \cos(\varphi_1 + \alpha_k) &= 0, \\ \sum M_k r_k a_k \cos(\varphi_1 + \alpha_k) &= 0. \end{aligned} \quad (13.19)$$

Каждый из множителей при $\cos \varphi_1$ и $\sin \varphi_1$ в отдельности должен обращаться в нуль. Таким образом, получаем следующие четыре уравнения, связывающие между собой параметры α_k и a_k

$$\left. \begin{aligned} \sum M_k r_k \cos \alpha_k &= 0, & \sum M_k r_k \sin \alpha_k &= 0, \\ \sum M_k r_k a_k \cos \alpha_k &= 0, & \sum M_k r_k a_k \sin \alpha_k &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13.20)$$

Величины M_k и r_k устанавливаются из конструктивных соображений. Таким образом, можно распорядиться тремя угловыми сдвигами $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ и двумя отношениями отрезков $a_2 : a_3 : a_4$ [абсолютные величины отрезков a не входят в уравнение (13.20)], т. е. в общем пятью параметрами. Следовательно, при выполнении условий (13.20) остается еще известная свобода выбора, что позволяет избежать технически непригодных решений. Таким образом, мы показали, что уравнивание масс выполнимо в первом приближении в случае четырехцилиндровых машин, но невозможно, как мы и утверждали, при меньшем числе цилиндров (ввиду недостатка необходимого числа свободных параметров). Внешний признак уравнивания масс по методу Шлика заключается в том, что расстояния между поршнями четырехцилиндровой машины отнюдь не одинаковы и что их кривошипы расположены не под одинаковыми углами друг к другу; последнее обстоятельство иллюстрируется схемой справа внизу на рис. 17.

Этот метод уравнивания масс оправдался на быстроходных судах линии Гамбург–Америка и позволил предотвратить опасность резонанса. Впрочем, уравнивание масс практически имело лишь переходящее значение для судостроения, так как вскоре повсюду перешли от поршневых машин к турбинам, в которых нет масс, совершающих возвратно-поступательное движение. Но в автомобильных и авиационных моторах, а также и в дизель-моторах подводных лодок уравнивание масс еще и поныне играет важную роль.

О числе выполнимых в общем виде интеграций уравнений движения замкнутой системы

Механическая система называется замкнутой, если она не подвержена воздействию внешних сил и в ней действуют только внутренние силы¹. Закон движения центра тяжести и закон площадей становятся в этом случае законами сохранения импульса и момента импульса. Первый из этих законов содержит 2·3, второй 3 постоянных интегрирования. Далее, имеет место закон сохранения энергии, содержащий одну постоянную. Таким образом, всего имеется

$$2 \cdot 3 + 3 + 1 = 10 \quad (13.21)$$

интегралов уравнения движения.

Это относится к трехмерному случаю. В случае двух измерений, например, в астрономической задаче двух тел, имеется только один момент импульса (направленный перпендикулярно к общей плоскости траектории обоих тел) и 2·2 постоянных, содержащихся в законе движения центра тяжести (это движение происходит в плоскости траектории); таким образом, вместе с одной постоянной из закона сохранения энергии имеется

$$2 \cdot 2 + 1 + 1 = 6 \quad (13.22)$$

интегралов движения.

В случае одного измерения число интегралов сводится, очевидно, к

$$2 \cdot 1 + 0 + 1 = 3. \quad (13.23)$$

Общая формула для n измерений имеет вид:

$$n + 1 + \frac{1}{2}n(n + 1). \quad (13.24)$$

Лучше всего уяснить себе эту формулу релятивистски, положив $n = 3$ и присоединив время в качестве четвертой координаты. В этом случае надо образовать четырехмерный вектор импульса \mathfrak{G} , который получается из уравнения (2.19) путем суммирования по всем точкам системы. Основные уравнения релятивистской механики гласят, что этот четырехмерный вектор остается постоянным, причем его

¹При достаточном расширении системы, а именно, если в систему включить источники внешних сил, всякая система, конечно, станет замкнутой.

временная слагающая (с точностью до множителя $-ic$ и до аддитивной постоянной) совпадает с кинетической энергией. Получающиеся таким образом четыре интеграла (закон сохранения импульса и энергии) учтена в формуле (13.24) членом $(n + 1)$. Второй член этой формулы соответствует попарным комбинациям осей при образовании моментов. Однако в то время, как комбинации двух пространственных осей дают, очевидно, законы площадей в обычном смысле слова, *комбинация оси времени с одной из пространственных осей дает вторые интегралы движения центра тяжести*, выражающие прямолинейность движения этого центра. Действительно, если мы, как на стр. 96, будем обозначать черточкой сверху суммирование по всем материальным точкам, то из формулы (2.19), заменив в ней $\sqrt{1 - \beta^2}$ единицей, получим

$$x_k \mathfrak{G}_4 - x_4 \mathfrak{G}_k = ic(\overline{m_k x_k} - \overline{t m_k \dot{x}_k}), \quad k = 1, 2, 3.$$

Согласно закону сохранения моментов, эта величина постоянна. Если мы положим ее равной $ic\mathbf{A}_k$, то, пользуясь обозначениями (13.3а, б), получим следующее равенство (в трехмерной векторной записи):

$$\mathbf{R} - t\mathbf{V} = \mathbf{A}. \quad (13.25)$$

Поскольку \mathbf{A} и \mathbf{V} постоянны, это равенство означает, что центр тяжести действительно движется прямолинейно и равномерно. Нам представляется, что такое рассмотрение, особенно выигрывающее в ясности благодаря использованию четырехмерной симметрии пространства — времени, достаточно хорошо разъясняет общую формулу (13.24).

Однако мы дополним подсчеты числа интегралов движения (13.21) и (13.22) еще одним замечанием, важным для астрономии. Для полного интегрирования знаменитой задачи трех тел, т. е. для нахождения выражений для $3 \cdot 3$ координат и $3 \cdot 3$ компонент скоростей потребовалось бы

$$2 \cdot 3 \cdot 3 = 18 \quad (13.26)$$

первых интегралов движения, каждый из которых [ср., например, уравнение (13.25)] дает по одному (связанному с одной постоянной интегрирования) соотношению между координатами и компонентами скоростей. Из сравнения подсчета (13.26) с подсчетом (13.21) видно, что для полного интегрирования здесь не хватает 8 интегралов. В продолжение столетий величайшие математики от Лагранжа до Пуанкаре доказывали, что эти недостающие интегралы не могут быть получены в алгебраической форме; окончательное доказательство этого дал Г. Брунс.

Соответствующий подсчет для задачи двух тел (плоской по самому своему существу) показывает, что для полного интегрирования в этом случае необходимо знание не $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$, а лишь

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

интегралов движения, т. е. нам нужно знать лишь на два интеграла больше, чем имеется в нашем распоряжении, согласно подсчету (13.22), для случая плоского движения. Однако эти два интеграла движения действительно могут быть найдены, как это видно из перехода от уравнений (6.4) к уравнениям (6.5). *Поэтому проблема двух тел является разрешимой, а проблема трех тел, вообще говоря, неразрешимой математической задачей (т. е. задачей, разрешимой путем последовательных приближений)*. Только при весьма специальных допущениях относительно рода движения мы сможем дать в § 32 решение этой задачи в законченной форме.

§ 14. ДОБАВЛЕНИЕ: О ЗАКОНАХ ТРЕНИЯ

Мы уже подчеркивали (§ 11, раздел 4), что при передвижении некоторой массы по заданному пути составляющая реакции, направленная вдоль траектории, не может быть определена из общих принципов механики, а подлежит экспериментальному определению. Это было сделано (после ряда подготовительных работ других исследователей) в 1785 г. А. Кулоном (с именем которого навсегда связано установление основных законов электростатики и магнитостатики) в результате проведенных им знаменитых, очень точных для того времени, исследований.

Следуя Кулону, мы различаем:

- а) *трение покоя, или трение сцепления,*
- б) *трение движения, или трение скольжения.*

1. Трение покоя

Если к телу, пребывающему в покое на плоском основании, приложить силу Z , параллельную основанию, то при малой силе Z тело останется неподвижным. Поэтому мы должны предположить, что сила Z уравновешивается силой трения R . Если, однако, сила Z превзойдет некоторую вполне определенную величину, то тело придет в ускоренное движение.

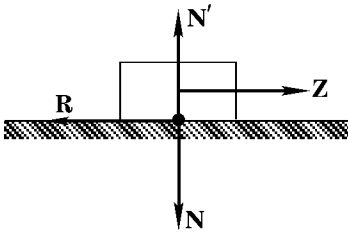


Рис. 19. Трение покоя на плоском основании

Согласно Кулону (а также его предшественникам), эта граница R_{\max} пропорциональна нормальному давлению N , которое в случае тела, пребывающего в состоянии покоя на горизонтальном основании, равно попросту весу G тела. Таким образом,

$$R_{\max} = f_0 \cdot N. \quad (14.1)$$

Множитель пропорциональности f_0 называется *коэффициентом трения покоя*; он зависит от природы и свойств поверхностей соприкасающихся друг с другом материалов. Если эти материалы одинаковы, то коэффициент трения f_0 особенно велик (заедание).

С помощью соотношения

$$f_0 = \operatorname{tg} \varphi \quad (14.2)$$

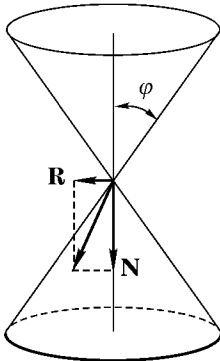


Рис. 20. Построение угла трения и конуса трения

можно ввести угол φ , который можно рассматривать как половину угла при вершине так наз. «конуса трения». До тех пор, пока равнодействующая обеих реакций R и N находится внутри этого конуса, движение не может наступить (рис. 20). Когда же эта равнодействующая лежит на боковой поверхности конуса трения, наступает движение.

Физический смысл угла трения становится весьма наглядным при рассмотрении опытов с наклонной плоскостью, впервые поставленных Галилеем (рис. 21). Без дальнейших пояснений пишем:

$$N = G \cos \alpha, \quad Z = G \sin \alpha = -R.$$

Поэтому из

$$R < R_{\max} = f_0 \cdot N = \operatorname{tg} \varphi \cdot N$$

вытекает следующее условие покоя:

$$G \sin \alpha < \operatorname{tg} \varphi \cos \alpha \cdot G,$$

т. е.

$$\operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \varphi,$$

или

$$\alpha < \varphi. \quad (14.3)$$

Тело пребывает в состоянии покоя на наклонной плоскости до тех пор, пока $\alpha < \varphi$. Таким образом, *угол трения φ означает тот угол наклона плоскости, при котором начинается скольжение.*

Приведем менее тривиальный пример.

К вертикальной оси прикреплен под углом $\frac{\pi}{2} + \alpha$ боковой стержень, на который надета подвижная втулка (рис. 22). Если ось не вращается, то втулка покоится или движется, смотря по тому, имеет ли место $\alpha < \varphi$ или $\alpha > \varphi$. Если же ось привести во вращение, то к силе тяжести mg векторно прибавится центробежная сила $m r \omega^2$.

В результате сложения этих двух сил возникают нормальная сила N и «тянущая» сила Z , равные, согласно чертежу,

$$\begin{aligned} N &= m(g \cos \alpha + r \omega^2 \sin \alpha), \\ Z &= \pm m(g \sin \alpha - r \omega^2 \cos \alpha). \end{aligned}$$

При этом двойной знак у Z означает, что для этой силы мы можем считать положительным как направление вверх, так и направление вниз, т. е. что мы можем рассматривать скольжение втулки как вниз, так и вверх¹.

Согласно соотношениям (14.1) и (14.2), втулка находится в равновесии, если имеет место неравенство

$$\pm(g \sin \alpha - r \omega^2 \cos \alpha) < \operatorname{tg} \varphi (g \cos \alpha + r \omega^2 \sin \alpha).$$

Если здесь заменить знак $<$ знаком $=$, то мы получим «границы» равновесия, т. е. начало скольжения. Определим эти предельные положения равновесия с помощью тригонометрического преобразования отдельно для каждого из знаков $+$ и $-$.

¹То или другое направление скольжения втулки определяется соотношением силы тяжести и центробежной силы. (Прим. ред.)

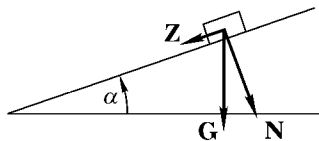


Рис. 21. Равновесие на наклонной плоскости

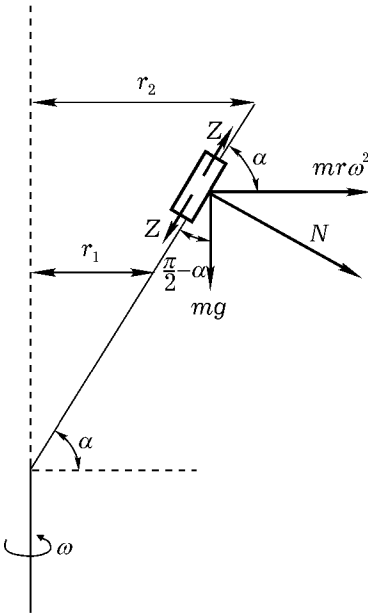


Рис. 22. Подвижная втулка на наклонном вращающемся стержне. Равновесие при учете трения

Равновесие благодаря трению) радиус $r_1 = 0$ (по формуле даже отрицателен), и только радиус r_2 положителен; с возрастанием ω радиус r_2 также приближается к нулю.

2. Трение при движении

В этом случае справедлив закон трения

$$R = fN. \quad (14.4)$$

Коэффициент трения скольжения f в основном не зависит от скорости движения¹ и, подобно коэффициенту трения покоя f_0 , является

¹Опыт эксплуатации железных дорог показал, что при больших скоростях v коэффициент f монотонно убывает с возрастанием v (трение скольжения между колесами и тормозными колодками).

Знак +, скольжение вниз:

$$g \sin(\alpha - \varphi) = r_1 \omega^2 \times \cos(\alpha - \varphi),$$

знак -, скольжение вверх:

$$g \sin(\alpha + \varphi) = r_2 \omega^2 \times \cos(\alpha + \varphi),$$

или, объединяя эти результаты,

$$\left. \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix} \right\} = \frac{g}{\omega^2} \operatorname{tg}(\alpha \mp \varphi).$$

Следовательно, трение определяет конечный интервал радиусов вращения

$$r_1 < r < r_2,$$

внутри которого втулка находится в равновесии.

В случае, если $\alpha > \varphi$ (при $\omega \rightarrow 0$ втулка скользит вниз), оба радиуса r положительны и тем более отличаются друг от друга, чем меньше ω . В случае $\alpha < \varphi$ (при $\omega \rightarrow 0$ втулка находится в равновесии благодаря трению)

радиус $r_1 = 0$ (по формуле даже отрицателен), и только радиус r_2 положителен; с возрастанием ω радиус r_2 также приближается к нулю.

постоянной, зависящей от материала и свойств поверхностей. При этом заслуживает особого внимания тот факт, что

$$f < f_0. \quad (14.5)$$

В случае скольжения по прямолинейной траектории сила нормального давления N равна силе тяжести (или перпендикулярной к траектории слагающей силы тяжести); в случае же искривленной траектории следует, кроме силы тяжести, принимать во внимание также и центробежную силу, в соответствии с уравнением (11.15).

Поясним неравенство (14.5) при помощи крайне примитивного, но поразительного по своему результату опыта: положите трость на указательные пальцы правой и левой рук. Согласно рис. 11а, распределение сил будет таково:

$$A = \frac{b}{a+b}G; \quad B = \frac{a}{a+b}G.$$

Приближайте указательные пальцы друг к другу. Скольжение будет происходить попеременно то на правом, то на левом пальце до тех пор, пока пальцы не соединятся. Спрашивается, где произойдет их соединение? (В дальнейшем ходе рассуждения мы будем буквами A и B обозначать ради краткости не только силы давления трости на оба пальца, но и точки приложения соответствующих сил, т. е. сами пальцы.)

Пусть вначале $A > B$. Таким образом, скольжение начинается у B . Но палец B движется не только до тех пор, пока расстояние a не станет равным расстоянию b , а продолжает скользить до точки $b_1 < a$, где трение скольжения в точке B будет равно трению покоя в точке A . Далее имеем

$$R_{B, \text{ движ.}} = fa \frac{G}{a+b}, \quad R_{A, \text{ пок.}} = f_0 b \frac{G}{a+b}.$$

Приравнивая эти выражения для случая $b = b_1$, получаем

$$fa = f_0 b_1, \quad \frac{a}{b_1} = \frac{f_0}{f} > 1.$$

В этот момент должно начаться скольжение у пальца A . Но так как сила трения $R_{A, \text{ пок.}}$ тотчас же перейдет в $R_{A, \text{ движ.}} < R_{A, \text{ пок.}}$, то сила трения R в точке b_1 будет больше силы трения в точке A , т. е. B перестанет двигаться, и сила трения $R_{B, \text{ движ.}}$ перейдет в $R_{B, \text{ пок.}}$.

Это повторяется в каждой точке «смены движения». При этом пальцы A и B приближаются (так как всякий раз фигурирует частное f_0/f) в геометрической прогрессии к центру тяжести, при достижении которого $a = b = 0$. В конечном состоянии трость находится в равновесии на сошедшихся друг с другом пальцах.

Вернемся к трению покоя, которое в качестве трения сцепления имеет решающее значение при чистом качении. Как ни парадоксально, но именно это трение заставляет поезд двигаться вперед (то же самое нужно сказать и об автомобиле; пешеход на гладком полу также движется вперед лишь благодаря трению сцепления). Давление пара, поскольку оно является внутренней силой, никогда не могло бы привести в движение центр тяжести паровоза. Для этого необходима внешняя сила — реакция между рельсами и колесами, т. е. как раз трение сцепления.

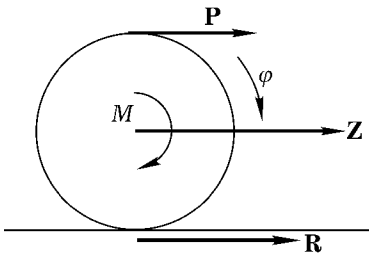


Рис. 23. Реакция между колесом локомотива и рельсом. В случае чистого качения возникающее трение покоя приводит поезд в движение

W — сопротивление движению (сопротивление воздуха, потери на трение в осевых подшипниках и т. д.), Θ — момент инерции колеса, то уравнения движения будут иметь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{z} &= R - W, \\ \Theta\ddot{\varphi} &= M - Rr. \end{aligned} \right\} \quad (14.7)$$

Трение сцепления нельзя установить *a priori*; его можно, однако, определить из вышеприведенных уравнений следующим образом. Сперва

Рассмотрим приведенное в движение колесо паровоза (рис. 23). Паровой двигатель передает посредством шатуна момент M на колесо; первичным действием этого момента было бы приведение колеса в ускоренное вращение. Последнее, однако, не осуществляется ввиду наличия чистого качения, условием которого, согласно уравнению (11.10), является

$$\dot{z} = r\omega. \quad (14.6)$$

Если m — масса поезда, приходящаяся на приведенное в движение колесо,

Если m — масса поезда, приходящаяся на приведенное в движение колесо,

нужно исключить R из уравнений, эквивалентных уравнениям (14.7):

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{z} &= R - W; \\ m_{\text{прив.}}\ddot{z} &= P - R. \end{aligned} \right\} \quad (14.8)$$

Здесь P — окружная сила, соответствующая моменту M , а $m_{\text{прив.}}$, как и в уравнении (11.8), — приведенная масса, соответствующая моменту инерции Θ :

$$M = Pr, \quad \Theta = m_{\text{прив.}} \cdot r^2.$$

Из уравнений (14.8) получаем

$$(m + m_{\text{прив.}})\ddot{z} = P - W \quad (14.9)$$

и, принимая во внимание первое уравнение (14.8),

$$R = W + \frac{m}{m + m_{\text{прив.}}}(P - W) = \frac{mP + m_{\text{прив.}}W}{m + m_{\text{прив.}}}. \quad (14.10)$$

Формулу (14.9) можно было бы, впрочем, написать и прямо на основании принципа Даламбера. Первое из уравнений (14.8) содержит количественное доказательство нашего утверждения, что силой, движущей поезд, является трение сцепления R . В частности, для равномерного движения это уравнение дает

$$R = W.$$

Окружная сила P , обусловленная давлением пара, нужна здесь для того, чтобы, как это показывает второе уравнение (14.8), вызвать трение сцепления между рельсами и колесами паровоза.

Обычный рельсовый путь называют (в отличие от зубчатой железной дороги) *адгезионным путем* (адгезия — молекулярное сцепление). Это название подчеркивает, что здесь главную роль играет сцепление колес с рельсами и, следовательно, трение сцепления. Признаком этого является также непрерывное повышение веса паровозов, сопровождающее увеличение нагрузки или скорости поездов на железнодорожном транспорте. Это обстоятельство прямо указывает на закон трения Кулона [уравнение (14.1)], по которому трение сцепления пропорционально нормальному давлению N . Тот общеизвестный факт, что на слишком скользких рельсах (обледенелых и т. п.) сцепления не получается

и колеса начинают скользить, указывает на роль другого множителя, f_0 , в уравнении (14.1), который, как уже подчеркивалось, зависит от состояния поверхности рельсов. Для увеличения этого коэффициента трения f_0 рельсы в необходимых случаях посыпают песком (чем предотвращается скольжение колес).

ГЛАВА III

КОЛЕБАНИЯ

Эта глава не дает ничего нового в вопросе об основных принципах механики; однако, колебательные процессы, ввиду их большого значения для физики и техники, требуют отдельного систематического рассмотрения.

§ 15. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МАЯТНИК

Колемлющимся телом является в данном случае материальная точка m , связанная невесомым твердым стержнем длины l (называемой длиной маятника) с неподвижной точкой O . Таким образом, траектория материальной точки m будет дугой окружности. Если не принимать во внимание трения в точке подвеса и сопротивления воздуха, то единственной действующей силой будет сила тяжести со слагающей $-mg \sin \varphi$ в направлении возрастания угла φ (рис. 24). Из общего уравнения (11.4) для движения по любой траектории и соотношения $v = l\dot{\varphi}$ (для круговой траектории) получаем точное уравнение маятника:

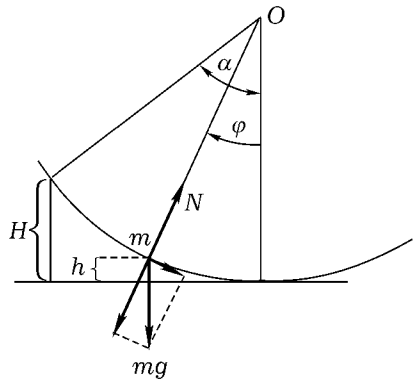


Рис. 24. Математический маятник. Слагающая силы тяжести в направлении траектории

$$ml \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mg \sin \varphi. \quad (15.1)$$

Для достаточно малых колебаний, т.е. при $\varphi \ll 1$, можно принять $\sin \varphi = \varphi$. Тогда, вводя обозначение

$$\frac{g}{l} = \omega^2, \quad (15.2)$$

получим линейное уравнение маятника:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0. \quad (15.3)$$

Это есть дифференциальное уравнение «гармонических колебаний», рассмотренное нами в § 3 (раздел 4), оно совпадает (с точностью до обозначений функций) с уравнением (3.23). Определенная соотношением (3.22) «угловая частота» ω дается теперь вышеприведенным равенством (15.2). Таким образом,

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (15.4)$$

Время τ не зависит от массы m . Последняя выпадает уже из уравнения (15.1), следовательно, материальные точки, различные по массе, имеют при одинаковой длине маятника один и тот же период колебания. Время τ и является полным периодом колебания маятника, т.е. продолжительностью его однократного движения вперед и назад. Часто половину этого времени также называют периодом колебания. Например, говорят о «секундном маятнике», если $\frac{\tau}{2}$ равно одной секунде. Длина такого маятника, согласно уравнению (15.4), равна:

$$l = \frac{g}{\pi^2} \sim 1 \text{ метру.}$$

В пределах применимости уравнения (15.3) период колебания не зависит также и от величины амплитуды. Это выражают словами: *малые колебания маятника изохронны*.

Общее решение уравнения (15.3) можно представить в виде

$$\varphi = a \sin \omega t + b \cos \omega t.$$

Потребуем, чтобы $\varphi = 0$ при $t = 0$ и $\varphi = \alpha$ при $t = \frac{\tau}{4}$. Тогда $b = 0$ и $a = \alpha$, т.е.

$$\varphi = \alpha \sin \omega t. \quad (15.5)$$

Здесь α означает угловую амплитуду, т. е. максимальное отклонение от положения равновесия, выраженное в радианах.

При конечном отклонении φ изохронизм нарушается ввиду нелинейности точного уравнения (15.1). Для интегрирования уравнения (15.1) умножаем его на $\frac{d\varphi}{dt}$, что соответствует переходу от уравнения движения к уравнению энергии. Путем интегрирования получаем

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2\omega^2 \cos \varphi + C. \quad (15.6)$$

Постоянная C определяется из условия, что $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ при $\varphi = \alpha$. Следовательно,

$$C = -2\omega^2 \cos \alpha.$$

Непосредственное применение закона сохранения энергии дало бы [принимая во внимание значение H (рис. 24)]:

$$\frac{m}{2}l^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + mgh = mgH; \quad \left\{ \begin{array}{l} h = l(1 - \cos \varphi), \\ H = l(1 - \cos \alpha), \end{array} \right\} \quad (15.6a)$$

что, очевидно, совпадает с уравнением (15.6).

Принимая во внимание, что

$$\cos \varphi - \cos \alpha = 2 \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right),$$

из уравнения (15.6) выводим:

$$\frac{d\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} = \omega dt; \quad (15.7)$$

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} = \omega t. \quad (15.8)$$

Таким образом, мы пришли к «эллиптическому интегралу первого рода». Для пояснения этого термина нужно коснуться «спрямления» дуг

эллипса (т. е. измерения их длины). В качестве уравнения эллипса мы воспользуемся его представлением в параметрической форме:

$$\begin{aligned}x &= a \sin v, \\y &= b \cos v.\end{aligned}$$

В соответствии с этим получаем:

$$\begin{aligned}ds^2 &= dx^2 + dy^2 = (a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v) dv^2, \\ds &= \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 v} dv.\end{aligned}$$

Полагая

$$k^2 = +\frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad (< 1, \text{ если } a > b),$$

получаем для длины дуги эллипса, заключенной между конечной точкой малой оси $v = 0$ и произвольной точкой v эллипса, следующее выражение

$$s = a \int_0^v \sqrt{1 - k^2 \sin^2 v} dv. \quad (15.9)$$

Это так называемый «эллиптический интеграл второго рода».

Более простой с точки зрения теории функций «интеграл первого рода», если его написать в той же «нормальной форме Лежандра», имеет следующий вид:

$$\int_0^v \frac{dv}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 v}}.$$

К этой форме приводим наш интеграл (15.8) с помощью преобразования

$$\begin{aligned}\sin \frac{\varphi}{2} &= \sin \frac{\alpha}{2} \sin v, \\ \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}} &= \sin \frac{\alpha}{2} \cos v, \\ \frac{d\varphi}{2} &= \frac{dv}{\cos \frac{\varphi}{2}} = \frac{dv}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 v}}.\end{aligned} \quad (15.10)$$

«Модуль» k здесь равен:

$$k = \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (15.11)$$

Чтобы вычислить период колебаний τ , нужно в формуле (15.8) положить $t = \frac{\tau}{4}$ и $\varphi = \alpha$, т. е., согласно (15.10), $v = \frac{\pi}{2}$. Таким путем мы получим так называемый «полный интеграл первого рода», который обозначается через K :

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{dv}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 v}}. \quad (15.12)$$

Итак, формула (15.8) после подстановки ω из равенства (15.2) дает:

$$\tau = 4\sqrt{\frac{l}{g}}K. \quad (15.13)$$

Из определения (15.12) непосредственно следует, что $K = \frac{\pi}{2}$ при $k \rightarrow 0$, т. е., согласно условию (15.11), для достаточно малых амплитуд α ; $K = \infty$ при $k \rightarrow 1$, т. е., согласно условию (15.11), для $\alpha = \pi$ (отклонение до вертикального положения).

В первом случае мы, естественно, снова получаем нашу прежнюю формулу (15.4). В последнем же случае имеет место максимальное отклонение от этой формулы.

В общем случае, путем разложения в ряд по формуле бинома и почленного интегрирования выражения (15.12), находим:

$$K = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{k^2}{4} + \frac{9k^4}{64} + \dots \right).$$

Этому соответствует общее выражение для периода колебания τ :

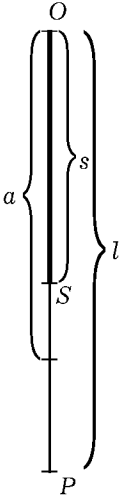
$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \dots \right), \quad (15.14)$$

которым количественно определяется отклонение от изохронизма при конечных амплитудах α .

Астрономические часы снабжены маятником простой конструкции с амплитудой $\alpha \leq 1\frac{1}{2}^\circ$. Для таких часов первый поправочный член в скобках формулы (15.14) равен приблизительно $1/20\,000$.

§ 16. ФИЗИЧЕСКИЙ МАЯТНИК

Эта задача отличается от задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной оси, уже рассмотренной нами в § 11 (раздел 1), только тем, что здесь под внешними силами подразумеваются специально силы тяжести. Обозначим через s расстояние между центром тяжести S и неподвижной осью (здесь термин «центр тяжести» следует понимать в собственном смысле слова — как «центр сил тяжести», тогда как обычно этим термином обозначают, строго говоря, «центр инерции»); через φ — угол, образованный осью OS с вертикалью (мы можем считать массу тела распределенной приблизительно симметрично относительно оси OS). Тогда полный момент (относительно оси O) сил тяжести, приложенных к отдельным элементам массы dm (сумма которых равна массе маятника m), будет, очевидно, равен:



$$M = -mgs \sin \varphi, \quad (16.1)$$

Рис. 25. Физический маятник. Точка подвеса O , центр тяжести S и центр качаний P . Радиус инерции a как среднее геометрическое между длиной маятника l и расстоянием s центра тяжести от точки подвеса

и уравнение движения, согласно формуле (11.4), примет вид:

$$\Theta \ddot{\varphi} = -mgs \sin \varphi. \quad (16.2)$$

Из сравнения этого уравнения с уравнением движения (15.1) математического маятника получаем длину l эквивалентного математического маятника, т. е. математического маятника, имеющего тот же период, что и данный физический маятник:

$$l = \frac{\Theta}{ms}. \quad (16.3)$$

Величина l называется также «приведенной длиной» физического маятника.

Введем еще вместо Θ так называемый «радиус инерции» a , определяемый соотношением

$$\Theta = ma^2. \quad (16.4)$$

Таким образом, радиус инерции означает то расстояние от точки подвеса маятника O , на котором нужно сконцентрировать всю его массу m , чтобы получить тот же момент инерции Θ , как и при истинном распределении масс. При этом следует обратить внимание на следующее противопоставление. При введении с помощью формулы (11. 8) понятия «приведенной массы» задается радиус r , на котором должна быть помещена искомая масса $m_{\text{прив.}}$; напротив, при нашем теперешнем определении «радиуса инерции» [уравнение (16.4)] задается масса m и требуется найти расстояние a , на котором нужно поместить эту массу.

Из сравнения равенств (16.3) и (16.4) видно, что длина a является средним геометрическим длин s и l :

$$a^2 = l \cdot s. \quad (16.5)$$

Отложим из точки O по оси маятника OS приведенную длину маятника l . Полученная таким образом точка P называется (по Гюйгенсу) *центром качаний*. На рис. 25 показано относительное расположение точек O , S и P , а также отрезков s , a и l .

Мы утверждаем далее, что точки O и P «взаимозаменяемы» (или, как часто говорят, O и P — «взаимно сопряженные точки»). До сих пор точка O была точкой подвеса, а P — центром качаний. Теперь сделаем P точкой подвеса и покажем, что тогда точка O станет центром качаний. В этом заключается идея *оборотного маятника*.

В приводимой таблице сопоставлены применявшиеся нами до сих пор обозначения:

Точка подвеса	Центр качаний	Приведенная длина маятника	Момент инерции	Радиус инерции	Расстояние центра тяжести от точки подвеса
O	P	l	Θ	a	s
P	O'	l_P	Θ_P	a_P	$l - s$

Наше утверждение состоит в следующем:

$$l_P = l, \text{ т. е. точки } O' \text{ и } O \text{ совпадают.}$$

Для доказательства выразим l_P с помощью надлежащим образом переписанных уравнений (16.3) и (16.4):

$$l_P = \frac{\Theta_P}{m(l-s)} = \frac{a_P^2}{l-s}. \quad (16.6)$$

Но, согласно уравнению (16.10), приведенному в добавлении,

$$a_P^2 = l(l-s). \quad (16.6a)$$

Следовательно, правая часть равенства (16.6) действительно равна l .

Маятник является прибором для определения ускорения силы тяжести g в различных точках земной поверхности или в недрах Земли. Так как практически мы не располагаем математическим маятником и так как для физического маятника невозможно точно вычислить момент инерции Θ (не только ввиду сложной формы маятника, но также ввиду возможной неоднородности его плотности), мы принуждены удовлетвориться экспериментальным определением его приведенной длины по методу оборотного маятника. Представьте себе на рис. 25 опорную призму (выступающую вперед из плоскости рисунка) не только у точки O , но также и у точки P (ребром кверху); опора у точки P может перемещаться с помощью микрометрического винта. Так как число колебаний за продолжительное время можно сосчитать *чрезвычайно точно*, то равенство и неравенство периодов колебаний маятника при точках опоры O или P можно установить *точнейшим образом* и, в случае необходимости, внести соответствующую поправку при помощи микрометрического винта.

Теорема об оборотном маятнике является первым примером весьма общих соотношений взаимности, справедливых во всех областях физики; вполне аналогична, например, взаимозаменяемость («сопряженность») точек «источка» и «наблюдения» в акустике и электродинамике.

ДОБАВЛЕНИЕ: ТЕОРЕМА О МОМЕНТЕ ИНЕРЦИИ

Речь идет о теореме *Штейнера*; момент инерции тела относительно оси, проходящей через произвольную точку O , равен моменту инерции этого тела относительно параллельной оси, проходящей через его центр тяжести S , увеличенному на ms^2 , где s означает расстояние OS .

Если y — рассматриваемое направление оси, а x — направление от точки O к S , то для некоторого элемента массы dm имеем:

$$r^2 = x^2 + z^2.$$

При этом x отсчитывается от точки O . Если же x отсчитывать от точки S и положить $OS = s$, как на рис. 25, то

$$r^2 = (x + s)^2 + z^2 = x^2 + z^2 + 2xs + s^2.$$

Отсюда, после суммирования по всем dm , следует:

$$\Theta = \Theta_S + 2s \int x dm + ms^2. \quad (16.7)$$

Средний член обращается в нуль [ср., например, уравнение (13.36)], если плоскость $x = 0$ проходит через центр тяжести. Таким образом,

$$\Theta = \Theta_S + ms^2. \quad (16.8)$$

что и требовалось доказать.

Аналогично, принимая во внимание рис. 25, имеем:

$$\Theta_P = \Theta_S + m(l - s)^2. \quad (16.8a)$$

Из соотношений (16.8) и (16.8a) следует:

$$\Theta_P - \Theta = ml^2 - 2mls.$$

Вместо этого на основании (16.4) можно написать:

$$a_P^2 - a^2 = l^2 - 2ls, \quad (16.9)$$

и, подставляя a^2 из условия (16.5), окончательно получим

$$a_P^2 = l^2 - l_S = l(l - s). \quad (16.10)$$

Это уравнение мы уже использовали выше [уравнение (16.6a)].

§ 17. ЦИКЛОИДАЛЬНЫЙ МАЯТНИК

Циклоидальный маятник был изобретен Христианом Гюйгенсом¹, крупным ученым XVII столетия и гениальнейшим часовым мастером всех времен. Этот маятник свободен от недостатка, присущего обычному математическому маятнику неполного изохронизма, благодаря тому, что в этом случае материальная точка движется не по дуге окружности, а по дуге циклоиды. Позже мы увидим, как это можно осуществить практически.

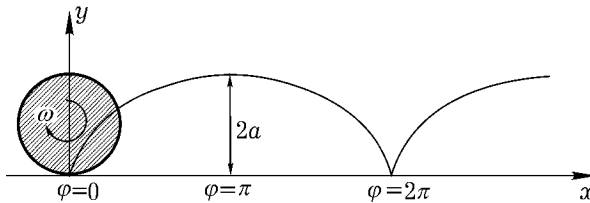


Рис. 26. Качение колеса образует обыкновенную циклоиду. Определение угла качения φ

Параметрическое представление обычной циклоиды имеет вид:

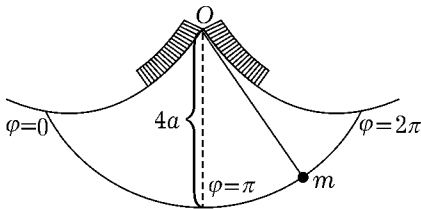


Рис. 27. Циклоидальный маятник Гюйгенса для осуществления изохронизма

$$\left. \begin{aligned} x &= a(\varphi - \sin \varphi), \\ y &= a(1 - \cos \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (17.1)$$

Параметр φ означает угол, на который повернулось от своего исходного положения колесо радиуса a , катящееся по горизонтальной оси x . В случае обычной циклоиды точка, описывающая циклоиду, находится на окружности колеса.

Но для нашего маятника нам нужна циклоида, острия (точки возврата) которой обращены не вниз, а вверх (рис. 27) и которая образуется при качении колеса по нижней стороне оси x . Ее абсцисса x выражается по-прежнему уравне-

¹Horologium Oscillatorium, Paris, 1673 г. — Ges. Werke, Bd. 18, Haag, 1934.

нием (17.1), тогда как ордината y получается вычитанием выражения (17.1) из $2a$:

$$\left. \begin{aligned} x &= a(\varphi - \sin \varphi), \\ y &= a(1 + \cos \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (17.2)$$

Слагающая силы тяжести mg в направлении касательной к кривой (в данном случае к циклоиде) равна

$$F_s = -mg \cos(y, s) = -mg \frac{dy}{ds}.$$

Следовательно, из общего уравнения (11.14) получаем

$$mv = -mg \frac{dy}{ds}, \quad (17.3)$$

причем, как и в случае «кругового» маятника, масса m сокращается. Дифференцируя уравнения (17.2), получаем далее:

$$\begin{aligned} dx &= a(1 - \cos \varphi)d\varphi, & dy &= -a \sin \varphi d\varphi. \\ ds^2 &= a^2(2 - 2 \cos \varphi)d\varphi^2, & ds &= 2a \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi. \end{aligned}$$

Поэтому в нашем случае имеем

$$v = \frac{ds}{dt} = 2a \sin \frac{\varphi}{2} \frac{d\varphi}{dt} = -4a \frac{d}{dt} \cos \frac{\varphi}{2} \quad (17.4)$$

и

$$\frac{dy}{ds} = -\frac{1}{2} \frac{\sin \varphi}{\sin \frac{\varphi}{2}} = -\cos \frac{\varphi}{2}. \quad (17.5)$$

Подставив выражения (17.4) и (17.5) в уравнение движения (17.3), найдем:

$$\frac{d^2}{dt^2} \cos \frac{\varphi}{2} = -\frac{g}{4a} \cos \frac{\varphi}{2}. \quad (17.6)$$

Это уравнение отличается от уравнения (15.3) математического маятника только тем, что теперь функцией является не φ , а $\cos \frac{\varphi}{2}$. Для

интегрирования это, разумеется, безразлично. Поэтому остается полностью справедливым прежнее уравнение (15.4), а именно:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \text{где } l = 4a, \quad (17.7)$$

так как в нашем теперешнем уравнении (17.6) вместо прежнего l стоит $4a$.

Но в то время как прежнее уравнение (15.3) описывало только малые колебания математического маятника и получалось лишь приближенно из точного уравнения (15.1), наше теперешнее уравнение (17.6) и, следовательно, полученная из него путем интегрирования формула (17.7) *точно справедливы для любых амплитуд*. Таким образом, *циклоидальный маятник строго изохронен, т. е. его период колебания вообще не зависит от величины амплитуды*¹.

С методической точки зрения отметим, что в уравнении (17.6) мы представили движение материальной точки отнюдь не с помощью ее прямоугольных координат или какой-либо иной величины, непосредственно измеряемой на циклоиде, а с помощью половины угла поворота φ , фигурирующего при построении циклоиды. Этот параметр, лишь косвенно связанный с циклоидой, дает возможность, как мы убедились, рассмотреть задачу наиболее простым образом. Введение этого параметра уже здесь могло бы подвести нас к общему методу Лагранжа, который будет изложен в гл. VI и даст нам возможность вводить в уравнения движения любые параметры в качестве независимых переменных.

Столь же изумительным, как и открытие Гюйгенсом изохронизма циклоидального маятника, является и его способ реализации движения без трения по циклоиде. Этот способ основан на теореме: «Эволюта циклоиды является также циклоидой, тождественной с исходной». Таким образом, если в точке O (рис. 27), в которой соприкасаются две изображенные там верхние дуги циклоиды, закрепить нить длиной $l = 4a$ и натянуть ее так, чтобы она частично легла на правую (или при отклонении влево — на левую) ветвь циклоиды, то конечная точка P нити

¹Циклоида называется поэтому *тавтохроной* (колебания по ней совершаются «сами собой изохронно»); она называется также *брахистохроной* (при одинаковых начальном и конечном положениях тело при скольжении по циклоиде затрачивает кратчайшее время по сравнению с временем, которое оно затратило бы при скольжении по наклонной плоскости или какой-либо другой кривой). Задача о брахистохроне особенно замечательна тем, что с нее началось развитие вариационного исчисления.

опишет нижнюю дугу циклоиды. Полученное таким образом движение материальной точки по нижней дуге циклоиды будет (приближенно) происходить без трения так же, как и движение по дуге окружности в случае обычного математического маятника.

Впрочем, на практике в конструкциях маятниковых часов идея Гюйгенса не используется; если прикрепить к верхнему концу маятника *пружину* (обычно короткую упругую пластинку), то, согласно исследованиям Бесселя и других, при соответствующем выборе длины этой пружины и массы маятника будет обеспечен достаточный изохронизм.

§ 18. СФЕРИЧЕСКИЙ МАЯТНИК

Подвесим маятник таким образом, чтобы материальная точка m могла свободно двигаться по поверхности шара радиуса l (l называется длиной маятника). В этом случае на маятник будет наложена связь, выражаемая уравнением:

$$F = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 - l^2) = 0 \quad (18.1)$$

(множитель $\frac{1}{2}$ — введен ради удобства).

В соответствии с этим, уравнения Лагранжа первого рода (12.9) (r , т. е. число условий связи, здесь равно 1; кроме того, $X_1 = X_2 = 0$; $X_3 = -mg$) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= \lambda x, \\ m\ddot{y} &= \lambda y, \\ m\ddot{z} &= -mg + \lambda z. \end{aligned} \right\} \quad (18.2)$$

Исключение λ из первых двух уравнений (18.2) дает, в согласии с уравнениями (13.13) и (13.13а), постоянство момента импульса относительно оси z или, что то же самое, неизменность секториальной скорости

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = 2 \frac{dS}{dt} = C. \quad (18.3)$$

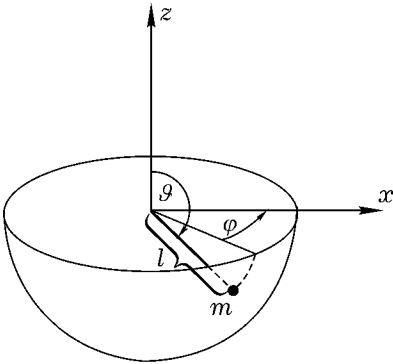


Рис. 28. Сферический маятник как материальная точка m , движущаяся под влиянием силы тяжести по шаровой поверхности радиуса l

С другой стороны, если мы умножим уравнения Лагранжа (18.2) соответственно на \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} , то мы должны получить закон сохранения энергии, так как условие связи (18.1) не зависит от t (см. стр. 92). Сперва получаем:

$$\begin{aligned} m(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) &= \\ &= -mg\dot{z} + \lambda(\dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y} + \dot{z}\dot{z}). \end{aligned} \quad (18.4)$$

Но, согласно условию (18.1), имеет место

$$\frac{dF}{dt} = \dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y} + \dot{z}\dot{z} = 0.$$

С другой стороны,

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt}.$$

Следовательно, путем интегрирования по t уравнения (18.4) получим:

$$\frac{m}{2} v^2 = -mgz + \text{const}, \quad (18.5)$$

что мы запишем в виде:

$$T + V = W, \quad \text{где } V = mgz. \quad (18.5a)$$

Общие соображения по поводу понятия потенциальной энергии V мы приведем в добавлении к этому параграфу.

Если мы, наконец, умножим уравнения Лагранжа соответственно на x , y , z , то, используя условие (18.1), мы сможем вычислить λ :

$$\lambda l^2 - mgz = m(x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z})$$

или

$$\lambda l = mg \frac{z}{l} + m \left(\frac{x}{l} \ddot{x} + \frac{y}{l} \ddot{y} + \frac{z}{l} \ddot{z} \right). \quad (18.6)$$

Но так как нормаль к шаровой поверхности в точке с координатами x , y , z имеет направляющие косинусы $\frac{x}{l}$, $\frac{y}{l}$, $\frac{z}{l}$, то второй член справа

с точностью до знака равен силе инерции F_n^* , нормальной к шаровой поверхности; первый же член справа, также с точностью до знака, равен слагающей силы тяжести F_n в том же направлении. По принципу Даламбера, сумма обеих этих сил должна уравниваться реакцией R_n на шаровой поверхности (с точки зрения физической, натяжением нити маятника). Таким образом, смысл уравнения (18.6) можно кратко выразить формулой

$$\lambda l = -(F_n + F_n^*) = R_n. \quad (18.7)$$

Отсюда видно, что, с точностью до множителя l , λ означает силу реакции, развиваемую связью (18.1) и действующую нормально к направлению движения. Аналогично обстоит дело и в более общих случаях, когда имеется несколько условий связи и соответственное число лагранжевых множителей λ .

Чтобы продолжить интегрирование, введем сферические координаты:

$$\begin{aligned} x &= l \cos \varphi \sin \vartheta, \\ y &= l \sin \varphi \sin \vartheta, \\ z &= l \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Дифференцируя, получим:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= l \cos \varphi \cos \vartheta \cdot \dot{\vartheta} - l \sin \varphi \sin \vartheta \cdot \dot{\varphi}, \\ \dot{y} &= l \sin \varphi \cos \vartheta \cdot \dot{\vartheta} + l \cos \varphi \sin \vartheta \cdot \dot{\varphi}, \\ \dot{z} &= -l \sin \vartheta \cdot \dot{\vartheta}. \end{aligned}$$

Тогда закон площадей (18.3) примет следующий вид:

$$2 \frac{dS}{dt} = x\dot{y} - y\dot{x} = l^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} = C. \quad (18.8)$$

Закон сохранения энергии (18.5a) переписется в виде:

$$\frac{ml^2}{2} (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \cdot \dot{\varphi}^2) + mgl \cos \vartheta = W. \quad (18.9)$$

Вводя обозначения

$$u = \cos \vartheta, \quad \dot{\vartheta} = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dt},$$

получаем из уравнения (18.8):

$$\dot{\varphi} = \frac{C}{l^2(1-u^2)} \quad (18.10)$$

и из уравнения (18.9):

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = U(u) = \frac{2}{ml^2}(W - mglu)(1-u^2) - \frac{C^2}{l^4}. \quad (18.11)$$

Из этого соотношения между t и u можно определить t как функцию от u :

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{U}}. \quad (18.12)$$

Теперь можно проинтегрировать также и уравнение (18.10). Действительно, так как, согласно уравнениям (18.10) и (18.11), имеет место

$$\frac{d\varphi}{du} = \dot{\varphi} \frac{dt}{du} = \frac{C}{l^2(1-u^2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{U}},$$

то получаем

$$\varphi = \frac{C}{l^2} \int \frac{du}{1-u^2} \frac{1}{\sqrt{U}}. \quad (18.13)$$

U есть функция третьей степени от $u = \cos \vartheta$. Величина \sqrt{U} действительна только в том случае, если $U > 0$. Если решение уравнения должно соответствовать действительной физической задаче, то в интервале $-1 < u < +1$ должны существовать такие два значения $u = u_2$ и $u = u_1 > u_2$, между которыми U положительно (рис. 29).

Значения $u_1 = \cos \vartheta_1$ и $u_2 = \cos \vartheta_2$ суть две параллели, между которыми качается материальная точка. Когда интегрирование в формулах (18.12) или (18.13) достигнет одного из этих пределов, направление его должно быть изменено на противоположное, чтобы результат оставался действительным. Последовательные моменты, в которые происходит изменение направления движения, отделены друг от друга промежуточком времени:

$$\frac{\tau}{2} = \int_{u_2}^{u_1} \frac{du}{\sqrt{U}}. \quad (18.14)$$

Однако теперь колебание не является периодическим в пространстве, как в случае плоского маятника, а сопровождается медленной прецессией. «Угол прецессии» $\Delta\varphi$ за время полного периода колебания τ выражается, на основании формулы (18.13), следующим образом:

$$2k\pi + \Delta\varphi = \frac{2C}{l^2} \int_{u_2}^{u_1} \frac{du}{(1-u^2)\sqrt{U}} \quad (18.15)$$

(см. рис. 30, на которой изображен угол прецессии $\Delta\varphi$ для $k = 1$).

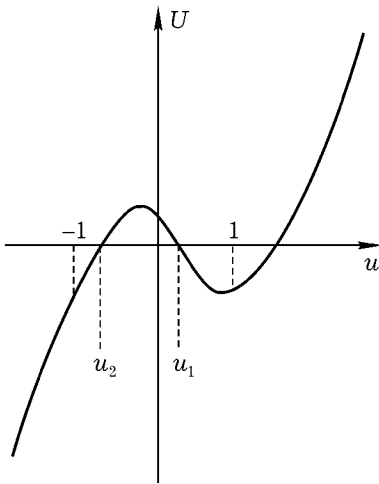


Рис. 29. Кривая третьего порядка $U(u)$ и ее точки пересечения с осью абсцисс $u = u_1$ и $u = u_2$

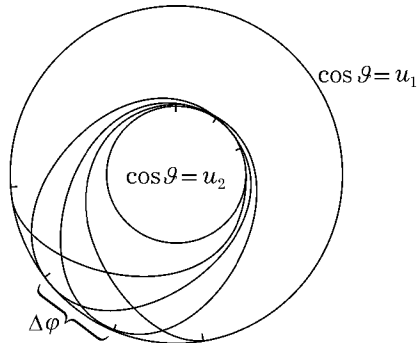


Рис. 30. Вид траектории сферического маятника сверху. Угол прецессии Δ

Интеграл (18.13) так же, как и интеграл (15.8) в случае математического маятника, является «эллиптическим интегралом первого рода». Вообще, так называются все интегралы, содержащие в знаменателе подынтегрального выражения квадратный корень из многочлена третьей или четвертой степени относительно переменной интегрирования.

Это имеет место и для интеграла (15.8), если в качестве переменной интегрирования взять $u = \sin \frac{\varphi}{2}$, благодаря чему этот интеграл принимает вид:

$$\int \frac{du}{\sqrt{(a^2 - u^2)(1 - u^2)}}, \quad \text{где } a = \sin \frac{\alpha}{2}.$$

В частности, выражение (18.14) для τ так же, как и выражение (15.12), является «полным интегралом первого рода». Напротив, интеграл (18.13), содержащий в знаменателе, кроме \sqrt{U} , еще оба множителя $(1 \pm u)$, называют «эллиптическим интегралом третьего рода»; выражение (18.15) есть «полный интеграл третьего рода».

Задача III. 1 показывает, что при бесконечно малом качании сферического маятника эти интегралы могут быть сведены к элементарным функциям, а угол прецессии $\Delta\varphi \rightarrow 0$.

ДОБАВЛЕНИЕ: КОГДА МОЖНО ГОВОРИТЬ О ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ В ПОЛЕ СИЛ?

В то время как для одномерного движения всегда можно, исходя из силы X , ввести потенциальную энергию V , определяемую соотношением (3.7), для двух- или трехмерного движения, как мы уже указывали, это возможно только при определенных условиях. Если через X, Y, Z обозначить прямоугольные слагающие силы \mathbf{F} , то определение потенциальной энергии, аналогичное определению (3.7), должно иметь следующий вид:

$$V = - \int_{xyz} (X dx + Y dy + Z dz). \quad (18.16)$$

Если эта формула должна выражать величину, не зависящую от пути, а зависящую лишь от конечной точки интегрирования (выбор начальной точки интегрирования скажется только на величине аддитивной постоянной, которая и без того произвольна), то сумма

$$X dx + Y dy + Z dz$$

должна быть *полным дифференциалом*, т. е. X, Y, Z должны быть частными производными (соответственно, по x, y, z) некоторой функции

координат (в данном случае производными функции — V). Как известно, условием этого является выполнение равенств

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}. \quad (18.17)$$

Только при выполнении этих условий можно сопоставить точкам пространства (x, y, z) некоторую функцию координат $V(x, y, z)$ и назвать ее «потенциальной энергией» или «потенциалом».

В двухмерном случае, когда $Z = 0$, а X, Y не зависят от z , три уравнения (18.17) сводятся, очевидно, к первому из них.

В «векторном анализе», который широко применяется в последующих разделах теоретической физики¹, доказывается, что условия (18.17) носят инвариантный характер, т.е. выполнение их не зависит от выбора системы координат. Все три условия в векторном анализе объединены в одном векторном уравнении $\text{rot } \mathbf{F} = 0$.

Не представляет труда привести пример слагающих X, Y, Z как функций x, y, z , чтобы условия (18.17) не выполнялись. С другой стороны, мы видим, что в поле тяжести, т.е. при

$$X = Y = 0, \quad Z = -mg$$

эти условия выполняются и приводят к следующему выражению для потенциальной энергии:

$$V = mgz. \quad (18.18)$$

Это же относится и к полям тяготения (подчиняющимся, как известно, закону Ньютона) в общем случае, а равно и к кулоновым полям электростатики и магнитостатики, которые по своему характеру вполне аналогичны гравитационным полям. Вообще безвихревые поля (называемые также потенциальными полями) занимают исключительное место в природе. В общей теории, излагаемой в гл. VI и VIII, они будут играть особую роль.

Механическая система, в которой действуют только потенциальные силы, называется консервативной системой, потому что для нее справедлив закон сохранения (conservatio) энергии. В противоположность этому говорят о неконсервативных или диссипативных системах.

¹В данной книге мы можем ограничиться «векторной алгеброй».

§ 19. РАЗЛИЧНЫЕ ТИПЫ КОЛЕБАНИЙ. СВОБОДНЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ, ЗАТУХАЮЩИЕ И НЕЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ

Свободные незатухающие колебания были нами рассмотрены в § 3 (раздел 4); мы называли их там «гармоническими колебаниями». Теперь мы прежде всего рассмотрим *вынужденные незатухающие колебания*.

Дифференциальное уравнение этих колебаний имеет вид:

$$m\ddot{x} + kx = c \sin \omega t. \quad (19.1)$$

Здесь $\omega = \frac{2\pi}{T}$ есть круговая частота вынуждающей силы.

Таким образом, мы считаем дифференциальное уравнение движения *линейным* относительно переменной x , что вполне допустимо (ср. математический маятник) для случая «малых» колебаний. Это замечание относится и к дальнейшим примерам, приводимым в этом и следующих параграфах.

«Упругая» сила равна $-kx$, как и в уравнении (3.19); величина c в уравнении (19.1) означает амплитуду вынуждающей силы, которая вызывает рассматриваемые колебания.

Ввиду наличия отличной от нуля правой части, уравнение (19.1) является *неоднородным линейным дифференциальным уравнением*. Приравнивая левую часть этого уравнения нулю, получаем, как уже отмечалось при решении уравнения (3.23), соответствующее *однородное дифференциальное уравнение*.

Частным интегралом неоднородного дифференциального уравнения будет

$$x = C \sin \omega t,$$

если значение C удовлетворяет условию

$$C(k - m\omega^2) = c.$$

Полагая, аналогично формуле (3.20),

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (19.2)$$

получим:

$$C = \frac{c}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (19.3)$$

Общий интеграл уравнения (19.1) равен сумме этого частного интеграла и общего интеграла соответствующего однородного уравнения:

$$x = C \sin \omega t + A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t. \quad (19.4)$$

Амплитуда C в первом члене уравнения (19.4) возрастает с увеличением ω и при $\omega = \omega_0$ обращается в бесконечность; в той же точке $\omega = \omega_0$ она испытывает скачок в отрицательную бесконечность и затем при $\omega \rightarrow \infty$ медленно приближается к нулю, оставаясь отрицательной.

Однако эту перемену знака нецелесообразно относить на счет амплитуды, которая по своему смыслу является существенно положительной величиной. Поэтому в дальнейшем мы будем под амплитудой понимать $|C|$, а перемену знака относить к синусу, где она скажется как «сдвиг фаз» $\delta = \pm\pi$.

В соответствии с этим, на рис. 31а и 31б представлены величины $|C|$ и δ как функции ω .

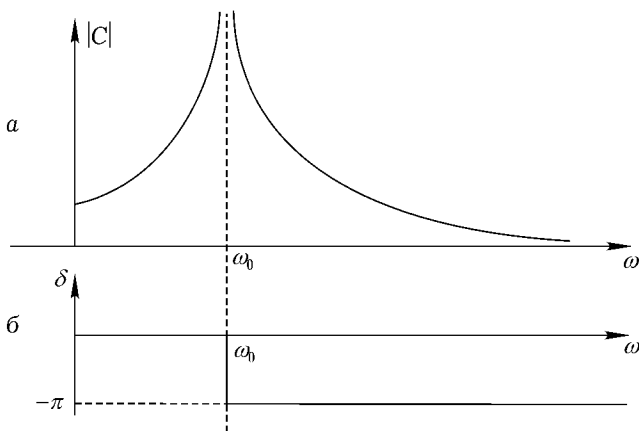


Рис. 31. Амплитуда и фаза вынужденного незатухающего колебания

Рассматривая рис. 31б, нельзя установить, имеем ли мы при $\omega > \omega_0$ опережение или запаздывание по фазе, т. е. нужно ли выбрать

$\delta = +\pi$ или $\delta = -\pi$. Но считая незатухающие колебания предельным случаем затухающих колебаний (см. ниже), мы выбираем величину $-\pi$ и пишем первый член уравнения (19.4) в следующей уточненной форме:

$$(\omega > \omega_0) \quad x = \frac{c}{\omega^2 - \omega_0^2} \sin(\omega t - \pi). \quad (19.4a)$$

Обращение амплитуды в бесконечность при $\omega = \omega_0$ характеризует явление *резонанса* между свободным и вынужденным колебаниями, которое играет важную роль во всех разделах физики. Знаменатель в выражениях (19.3) и (19.4a), обращение которого в нуль приводит к бесконечно большой амплитуде, называется «*резонансным знаменателем*». Образно выражаясь, колеблющаяся система тем «охотнее» поддается воздействию внешней силы, чем ближе ее собственная частота к частоте изменения внешней силы.

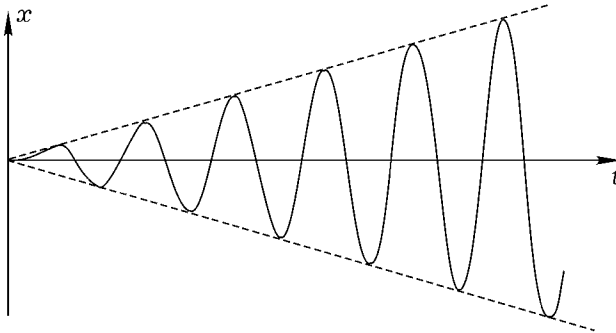


Рис. 32. Резонанс свободного и вынужденного колебаний. Вековое нарастание амплитуды

Впрочем, надо отметить, что наше заключение о появлении бесконечно больших амплитуд при резонансе является *крайней* экстраполяцией, поскольку уравнение колебания можно считать линейным, строго говоря, почти исключительно для бесконечно малых колебаний.

До сих пор мы рассматривали только первый член правой части уравнения (19.4). Оба последующих члена определяются, если мы зададим начальные условия. В качестве таковых выберем, например,

$$t = 0: \quad x = 0, \quad \dot{x} = 0.$$

Подставив эти начальные условия в уравнение (19.4), получим:

$$A = 0, \quad \omega C + \omega_0 B = 0, \quad \text{откуда} \quad B = -\frac{\omega}{\omega_0} C.$$

Следовательно,

$$x = C \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right). \quad (19.5)$$

Выясним смысл этого уравнения для особенно интересного случая, когда вынуждающее и вынужденное колебания совершаются почти в резонансе и, следовательно, обе частоты ω и ω_0 почти равны между собою. Положим

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega.$$

Разлагая в ряд и отбрасывая члены, квадратичные относительно $\Delta\omega$, и члены высших степеней, получаем:

$$\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t = \sin \omega_0 t + t \Delta\omega \cos \omega_0 t - \sin \omega_0 t - \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

Тогда выражение (19.5) запишется в виде:

$$x = C \Delta\omega \left(t \cos \omega_0 t - \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right).$$

Наконец, подставляя вместо C его значение из формулы (19.3), получим в пределе при $\Delta\omega = 0$:

$$x = \frac{c}{2m\omega_0^2} (\sin \omega_0 t - \omega_0 t \cos \omega_0 t). \quad (19.6)$$

Описываемое этим уравнением колебание уже не является периодическим, каким было рассмотренное выше свободное колебание. Признаком этого является то, что время t входит в формулу (19.5) в качестве векового члена (т.е. не только под знаком тригонометрической функции). При $t \rightarrow \infty$ амплитуда колебания приближается к представленной на рис. 31 величине $|C| = \infty$ при $\omega = \omega_0$.

Свободные затухающие колебания описываются дифференциальным уравнением

$$m\ddot{x} + kx = -w\dot{x}. \quad (19.7)$$

Наличие в этом уравнении члена, пропорционального первой степени скорости и соответствующего сопротивлению среды (трению), обосновывается в гидродинамике медленных (ламинарных) течений (возникающих, например, при трении о воздух).

Уравнение (19.7) является однородным линейным дифференциальным уравнением. Как и прежде, введем обозначение:

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad (19.7a)$$

где ω_0 — собственная частота незатухающих колебаний. Кроме того, положим

$$\frac{w}{m} = 2\rho, \quad \rho > 0. \quad (19.76)$$

В этих обозначениях уравнение (19.7) запишется:

$$\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (19.8)$$

Здесь полностью применим метод, введенный при решении уравнения (3.23). Ищем решение в виде

$$x = Ce^{\lambda t} \quad (19.8a)$$

и, подставляя вместо x в уравнение (19.8) выражение (19.8a), получим следующее характеристическое уравнение для λ :

$$\lambda^2 + 2\rho\lambda + \omega_0^2 = 0,$$

которое имеет два корня

$$\lambda = -\rho \pm \sqrt{-\omega_0^2 + \rho^2} = \begin{cases} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{cases}.$$

Таким образом, мы можем обобщить решение (19.8a) в виде линейной комбинации

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (19.86)$$

Мы различаем два случая:

$$1) \rho < \omega_0 \quad \text{и} \quad 2) \rho > \omega_0.$$

Первый случай обычно встречается в приложениях — это случай периодически затухающих колебаний. Второй случай характеризуется наличием «аперiodического затухания». В обоих случаях мы выбираем

одинаковые начальные условия: $x = 0$ при $t = 0$, что при подстановке в выражение (19.86) приводит к равенству $C_2 = -C_1$.

$$1) \rho < \omega_0; \quad \lambda = -\rho \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \rho^2},$$

$$x = 2C_1 e^{-\rho t} \sin \sqrt{\omega_0^2 - \rho^2} t.$$

Период колебания

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \rho^2}}$$

при малом ρ лишь незначительно отличается от периода незатухающего колебания. Множитель $e^{-\rho t}$ характеризует затухание; величину ρt называют логарифмическим декрементом затухания.

2) $\rho > \omega_0$, т. е. λ_1 и λ_2 действительны; решение принимает вид:

$$x = 2C_1 e^{-\rho t} \operatorname{sh} \sqrt{\rho^2 - \omega_0^2} t.$$

Символ sh означает гиперболический синус.

В заключение мы рассмотрим *затухающие вынужденные колебания*, предельными случаями которых, по существу, являются все рассмотренные выше типы колебаний.

Дифференциальное уравнение этих колебаний таково:

$$m\ddot{x} + w\dot{x} + kx = c \sin \omega t.$$

Принимая во внимание обозначения (19.7а, б), перепишем его в виде:

$$\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{c}{2mi} \left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t} \right). \quad (19.9)$$

Теперь к общему интегралу (19.86) однородного уравнения прибавляется частный интеграл неоднородного уравнения, который мы запишем в форме:

$$x = |C| \sin(\omega t + \delta) = \frac{|C|}{2i} \left(e^{i(\omega t + \delta)} - e^{-i(\omega t + \delta)} \right).$$

Подставляя это выражение в уравнение (19.9) и приравнявая коэффициенты при $e^{\pm i\omega t}$ в правой и левой частях уравнения, получим:

$$|C|(-\omega^2 + 2i\rho\omega + \omega_0^2)e^{i\delta} = \frac{c}{m},$$

$$|C|(-\omega^2 - 2i\rho\omega + \omega_0^2)e^{-i\delta} = \frac{c}{m}.$$

Путем почленного перемножения и, соответственно, деления этих двух соотношений найдем:

$$|C|^2 = \left(\frac{c}{m}\right)^2 \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\rho^2\omega^2},$$

$$e^{2i\delta} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\rho\omega}{\omega_0^2 - \omega + 2i\rho\omega}.$$

Отсюда

$$|C| = \frac{c}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\rho^2\omega^2}}, \quad (19.10)$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{1}{i} \frac{e^{2i\delta} - 1}{e^{2i\delta} + 1} = -\frac{2\rho\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (19.11)$$

(см. рис. 33 и ср. его с рис. 31а, б).

Из рис. 33 видно, что благодаря затуханию наш прежний бесконечный резонансный максимум амплитуды уменьшился до конечной величины (причем этот максимум амплитуды достигается не точно при $\omega = \omega_0$, а при несколько меньшей частоте ω ; см. также задачу III. 2).

Рис. 33 в то же время показывает, что при возрастании ω сдвиг фаз δ изменяется от значения $\delta = 0$ при $\omega = 0$ в сторону *отрицательных* значений, при $\omega = \omega_0$ становится в точности равным $-\frac{\pi}{2}$ и далее при $\omega \rightarrow \infty$ приближается к значению $-\pi$. Тем самым казавшийся прежде произвольным выбор между $+\pi$ и $-\pi$ оказывается вполне оправданным и для случая вынужденных колебаний без трения (см. рис. 31). Таким образом, действительно всегда имеет место *запаздывание* фазы колебания по сравнению с фазой вынуждающей силы. Дальнейшие примеры вынужденных колебаний приведены в задачах III. 3 и III. 4.

§ 20. СИМПАТИЧЕСКИЕ МАЯТНИКИ

Рассмотренные до сих пор типы колебаний относились к *одной* материальной точке. Теперь мы рассмотрим типы колебаний *двух* взаимно связанных материальных точек. Подобные колебания уже давно играют важную роль в электроизмерительных устройствах. В состав последних входят так называемые первичные и вторичные цепи, связанные между собой большей частью «индуктивно». Когда первичная

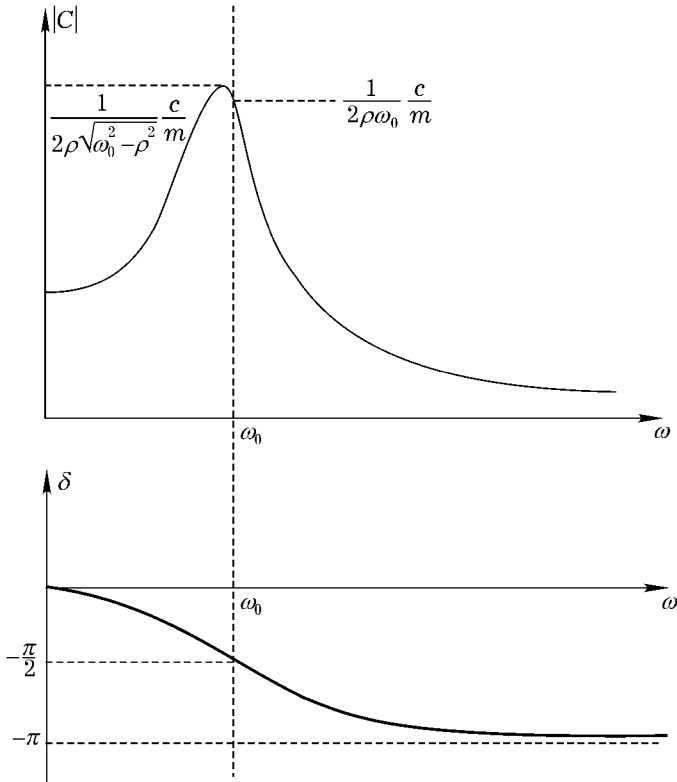


Рис. 33. Амплитуда и фаза вынужденного затухающего колебания

цепь возбуждается, вторичная цепь также приходит в колебание, особенно сильное при наличии *резонанса*. Действительно, схема включения Брауна в радиотелеграфии состоит из первичной и настроенной на нее вторичной цепи. Здесь мы рассмотрим, разумеется, только *механические* связанные колебания, которые часто используются в качестве модели электрических связанных колебаний.

Особенно поучительным примером могут служить симпатические маятники. В случае резонанса так называются два маятника одинаковой длины и одинакового веса. Проще всего представить себе их качающимися в одной и той же плоскости; пусть, далее, связь между ними осуществляется спиральной пружиной, как показано на рис. 35.

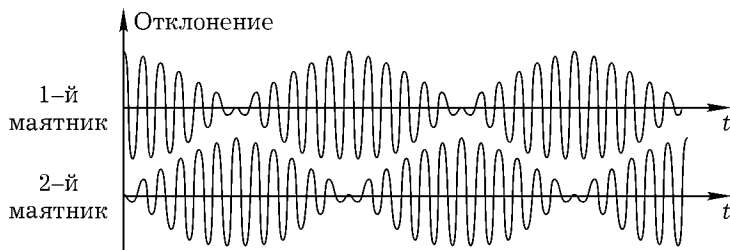


Рис. 34. Симпатические маятники в случае резонанса

Если при взаимном движении обоих маятников в пружине возникают лишь малые напряжения, то говорят о *слабой* связи, при больших же напряжениях в пружине говорят о *сильной* связи. Мы рассмотрим слабую связь симпатических маятников. Если маятники имеют не вполне одинаковую длину или не вполне одинаковый вес, то говорят, что они *расстроены*.

Сначала опишем явления, наблюдаемые в случае резонанса.

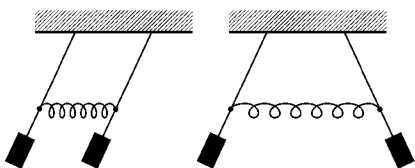


Рис. 35. Два нормальных колебания симпатических маятников в случае резонанса

Если же одинаково возбудить оба маятника в одном и том же направлении (рис. 35 слева) или в противоположных направлениях (рис. 35 справа), то перекачки энергии не будет. Эти два колебания называются *нормальными колебаниями* нашей связанной системы с двумя степенями свободы. В общем случае справедлива теорема:

Если же одинаково возбудить оба маятника в одном и том же направлении (рис. 35 слева) или в противоположных направлениях (рис. 35 справа), то перекачки энергии не будет. Эти два колебания называются *нормальными колебаниями* нашей связанной системы с двумя степенями свободы. В общем случае справедлива теорема:

Колебательная система с n степенями свободы имеет n нормальных колебаний.

Допустим, что первый маятник возбужден, а второй маятник первоначально находится в состоянии покоя. Получается следующая картина колебаний (см. рис. 34).

Каждый из двух маятников совершает *биения*. В процессе этих биений маятники взаимно обмениваются энергией (происходит как бы «перекачка» энергии от одного маятника к другому). Когда один маятник испытывает максимальное отклонение, другой находится в состоянии покоя.

Если же маятники *расстроены*, то, хотя обмен энергией и будет иметь место, он будет совершаться таким образом, что первоначально возбужденный маятник будет иметь минимум, отличный от нуля, и только маятник, первоначально находившийся в состоянии покоя, в процессе движения снова возвратится в состояние покоя. Таким образом, одинаковый характер колебаний маятников нарушается их расстройкой. Сначала мы кратко изложим теорию *полного резонанса* при возможно более простых допущениях (пренебрегая затуханием, а также различием между дугой окружности и касательной к ней в нижней точке траектории, что допустимо при достаточно малых колебаниях). Обозначим через x_1 отклонение маятника *I*, через x_2 — отклонение маятника *II*. Если, далее, обозначить через k «коэффициент связи», т. е. напряжение в пружине при единичном удлинении ее, деленное на массу, то система дифференциальных уравнений нашей задачи примет следующий вид:

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -k(x_1 - x_2), \quad \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = -k(x_2 - x_1). \quad (20.1)$$

Вводя новые переменные

$$z_1 = x_1 - x_2, \quad z_2 = x_1 + x_2, \quad (20.2)$$

получим из уравнений (20.1) путем вычитания и сложения их уравнения обоих нормальных колебаний:

$$\ddot{z}_1 + \omega_0^2 z_1 = -2kz_1 \quad \text{или} \quad \ddot{z} + (\omega_0^2 + 2k)z_1 = 0, \quad \ddot{z}_2 + \omega_0^2 z_2 = 0 \quad (20.3)$$

с частотами

$$\begin{aligned} \text{для } z_1: \quad \omega &= \sqrt{\omega_0^2 + 2k} \sim \omega_0 + \frac{k}{\omega_0}, \\ \text{для } z_2: \quad \omega' &= \omega_0. \end{aligned} \quad (20.4)$$

Уравнения (20.3) имеют следующие общие решения:

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t; \\ z_2 &= a_2 \cos \omega' t + b_2 \sin \omega' t. \end{aligned} \right\} \quad (20.5)$$

Введем начальные условия возбуждения:

$$\text{при } t = 0: \quad x_2 = \dot{x}_2 = 0; \quad \dot{x}_1 = 0; \quad x_1 = C, \quad (20.6)$$

откуда

$$\dot{z}_1 = \dot{z}_2 = 0; \quad z_1 = z_2 = C. \quad (20.7)$$

Отсюда следует:

$$b_1 = b_2 = 0, \quad a_1 = a_2 = C, \quad (20.8)$$

так что

$$z_1 = C \cos \omega t, \quad z_2 = C \cos \omega' t$$

и

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{z_2 + z_1}{2} = C \cos \frac{\omega' - \omega}{2} t \cos \frac{\omega' + \omega}{2} t; \\ x_2 &= \frac{z_2 - z_1}{2} = -C \sin \frac{\omega' - \omega}{2} t \sin \frac{\omega' + \omega}{2} t. \end{aligned} \right\} \quad (20.9)$$

Согласно соотношениям (20.4), для случая слабой связи

$$\frac{\omega - \omega'}{2} = \frac{k}{2\omega_0} \ll 1.$$

Таким образом, первые множители в правой части уравнений (20.9) *медленно изменяются* во времени; это и обуславливает тот факт, что представленные на рис. 34 колебания носят *характер биений*.

Теория не будет столь простой, если маятники расстроены, т. е. если $l_1 \neq l_2$ или $m_1 \neq m_2$. Положим

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l_1}, \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l_2}, \quad k_1 = \frac{c}{m_1}, \quad k_2 = \frac{c}{m_2},$$

где c — напряжение в пружине при единичном удлинении. Тогда вместо уравнений (20.1) мы получим следующие исходные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 &= -k_1(x_1 - x_2), \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 &= -k_2(x_2 - x_1). \end{aligned} \right\} \quad (20.10)$$

Здесь также имеются две нормальных частоты, которые мы можем определить по способу, введенному в §3, (3.24) [при решении уравнений (20.1) мы смогли применить более удобный искусственный прием, который, однако, в рассматриваемом общем случае не привел бы к цели]; положим

$$x_1 = A e^{i\lambda t}, \quad x_2 = B e^{i\lambda t}. \quad (20.11)$$

Тогда, подставляя выражения для x_1 и x_2 в уравнения (20.10), получим:

$$\left. \begin{aligned} A(\omega_1^2 - \lambda^2 + k_1) &= k_1 B, \\ B(\omega_2^2 - \lambda^2 + k_2) &= k_2 A. \end{aligned} \right\} \quad (20.12)$$

Вытекающее отсюда так наз. «вековое уравнение»¹ является квадратным относительно λ^2 :

$$\frac{B}{A} = \frac{\omega_1^2 - \lambda^2 + k_1}{k_1} = \frac{k_2}{\omega_2^2 - \lambda^2 + k_2}. \quad (20.13)$$

Оно имеет вид

$$\{\lambda^2 - (\omega_1^2 + k_1)\}\{\lambda^2 - (\omega_2^2 + k_2)\} = k_1 k_2. \quad (20.14)$$

При малых k_1 и k_2 получаем следующее приближенное решение этого уравнения:

$$\lambda^2 = \left\{ \begin{aligned} \omega_1^2 + k_1 + \frac{k_1 k_2}{\omega_1^2 - \omega_2^2}, \\ \omega_2^2 + k_2 + \frac{k_1 k_2}{\omega_2^2 - \omega_1^2}. \end{aligned} \right\} \quad (20.15)$$

Если мы обозначим найденные таким образом корни квадратного уравнения через ω^2 и ω'^2 и обобщим выражения (20.11) по образцу формулы (3.24б), то, представив решения в действительной форме, получим:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a \cos \omega t + b \sin \omega t + a' \cos \omega' t + b' \sin \omega' t; \\ x_2 &= \gamma a \cos \omega t + \gamma b \sin \omega t + \gamma' a' \cos \omega' t + \gamma' b' \sin \omega' t. \end{aligned} \right\} \quad (20.16)$$

Здесь γ и γ' означают значения отношения $\frac{B}{A}$, которые получаются из уравнения (20.13) при подстановке в него $\lambda^2 = \omega^2$ и, соответственно, $\lambda^2 = \omega'^2$.

Пусть начальные условия останутся прежними:

$$\text{при } t = 0: \quad x_2 = 0, \quad \dot{x}_2 = 0, \quad \dot{x}_1 = 0, \quad x_1 = C.$$

¹Это слово заимствовано из астрономической теории возмущений.

Это дает:

$$\left. \begin{aligned} \gamma a + \gamma' a' &= 0, & \gamma \omega b + \gamma' \omega' b' &= 0; \\ \omega b + \omega' b' &= 0, & a + a' &= C. \end{aligned} \right\} \quad (20.17)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} b &= b' = 0, \\ a &= \frac{\gamma'}{\gamma' - \gamma} C, & a' &= \frac{\gamma}{\gamma - \gamma'} C. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнения (20.16) примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{C}{\gamma' - \gamma} (\gamma' \cos \omega t - \gamma \cos \omega' t); \\ x_2 &= \frac{C}{\gamma' - \gamma} \gamma \gamma' (\cos \omega t - \cos \omega' t). \end{aligned} \right\} \quad (20.18)$$

Выражение для x_2 можно преобразовать к виду, аналогичному формуле (20.9):

$$x_2 = \frac{2\gamma\gamma'}{\gamma - \gamma'} C \sin \frac{\omega' - \omega}{2} t \sin \frac{\omega' + \omega}{2} t. \quad (20.19)$$

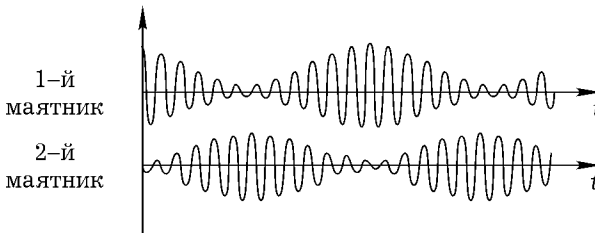


Рис. 36. Кривые колебаний двух несколько расстроенных симпатических маятников

Итак, в моменты времени, определяемые условием

$$\frac{\omega' - \omega}{2} t = n\pi,$$

второй маятник возвращается в положение покоя, тогда как первый маятник, напротив, в момент максимального отклонения второго маятника x_2 [согласно первому уравнению (20.18) и рис. 36] сохраняет конечную амплитуду колебаний. Взаимный обмен энергией, вследствие расстройки маятников, стал неполным.

Для применения вышеизложенной теории к электротехническим вопросам необходимо ее расширить, приняв во внимание также и затухание маятников, аналогом которого в электротехнике является омическое сопротивление (член с ускорением соответствует электрической самоиндукции, «упругая» сила — электрической емкости). При рассмотрении электротехнических вопросов нужно было бы, наряду с рассмотренной здесь «связью, зависящей только от положения» [k , умноженное на $\pm(x_2 - x_1)$], принять во внимание и «связь, зависящую от ускорения или от скорости».

В задаче III. 5 мы проведем расчет простого в изготовлении устройства, в котором маятники бифилярно подвешены на гибкой проволоке и колеблются не в плоскости своего положения покоя, а перпендикулярно к этой плоскости.

Интересным устройством, при котором оба симпатических маятника реализованы, так сказать, в одном и том же объекте, является колеблющаяся спиральная пружина¹.

Эта пружина (рис. 37) может совершать как колебания в осевом направлении (y), так и крутильные колебания (x) вокруг оси. При конечном расстоянии между витками пружины связь между обоими этими колебаниями осуществляется самой пружиной. Именно, если оттянуть пружину вниз, то можно ощутить боковое давление: пружина стремится отойти в боковом направлении. Если закрутить пружину вбок, в сторону продолжения проволоки, то пружина будет стремиться вытянуть-

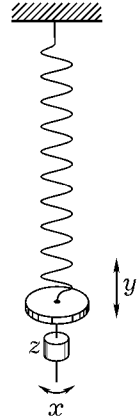


Рис. 37. Крутильное колебание и колебание изгиба спиральной пружины

¹Подробности см. в «Wüllner — Festschrift», Teubner 1905: «Lissajous-Figuren und Resonanzwirkungen bei schwingenden Schraubenfedern; ihre Verwertung zur Bestimmung des Poissonschen Verhältnisses» («Фигуры Лиссажу и резонансные действия в случае колеблющейся спиральной пружины; применение их для определения коэффициента Пуассона».)

ся вниз; таким образом, если вызвать колебание в направлении y , то будет возбуждено и колебание в направлении x , и наоборот. С точки зрения упругих напряжений в материале колебание в направлении оси y является крутильным колебанием, а колебание в направлении x — колебанием изгиба.

Варьируя добавочную массу Z , можно привести вертикальное и горизонтальное колебания в состояние точного или приближенного резонанса. Если тогда возбудить одно из колебаний, то будет иметь место обмен энергией в соответствии с рис. 34 или 36.

§ 21. ДВОЙНОЙ МАЯТНИК

Прежде, как и в начале предыдущего параграфа, опишем явления, приводящие нас к рассматриваемой задаче.

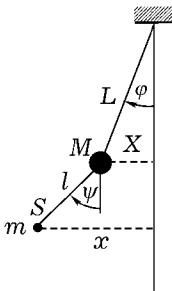


Рис. 38. Схема устройства двойного маятника

К тяжелому маятнику (например, к люстре) подвешен легкий маятник с приблизительно одинаковым периодом колебания. Если сообщить тяжелому маятнику короткий толчок, то легкий маятник приходит в быстрое движение, которое, однако, внезапно прекращается на короткое время. В тот же самый момент мы замечаем, что тяжелый маятник, который до этого находился в покое, начинает совершать заметные колебания. Однако непосредственно вслед за этим он вновь приходит в состояние покоя и, со своей стороны, приводит легкий маятник в быстрое движение, после чего вся картина повторяется.

Как было указано, массы обоих маятников (обозначим их через M и m) должны сильно отличаться друг от друга, но приведенные длины маятников (обозначим их через L и l) должны быть приблизительно равны. Положим

$$\frac{m}{M} = \mu \ll 1.$$

Отклонения тяжелого и легкого маятников (обозначим их соответственно X и x) рассматриваются как малые величины, так что по-прежнему можно пренебрегать различием между дугой окружности и касательной. В соответствии с этим, также и углы отклонения φ и ψ (на

рис. 38 ψ соответствует *относительному* отклонению $x - X$) должны считаться малыми. Таким образом, мы можем принять:

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi = \varphi = \frac{X}{L}, \quad \sin \psi = \psi = \frac{x - X}{l} \\ \sin(\psi - \varphi) = \psi - \varphi = \frac{x - X}{l} - \frac{X}{L}, \\ \cos \varphi = \cos \psi = \cos(\varphi - \psi) = 1. \end{aligned} \right\} \quad (21.1)$$

На верхний маятник действует, кроме его веса, сила натяжения нити нижнего маятника¹

$$S \cong mg \cos \psi$$

которая дает слагающую силы по направлению движения тяжелого маятника, равную $-mg \cos \psi \sin(\varphi - \psi)$. Поэтому уравнения движения примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{X} = -M\frac{g}{L}X + mg\left(\frac{x - X}{l} - \frac{X}{L}\right), \\ m\ddot{x} = -m\frac{g}{l}(x - X) \end{aligned} \right\} \quad (21.2)$$

или, если их переписать в более удобной форме,

$$\begin{aligned} \ddot{X} + \left(\frac{g}{L} + \mu\frac{g}{l} + \mu\frac{g}{L}\right)X = \mu\frac{g}{l}x, \\ \ddot{x} + \frac{g}{l}x = \frac{g}{l}X. \end{aligned} \quad (21.3)$$

С этого момента мы примем $L = l$ и введем обозначение

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}. \quad (21.4)$$

¹В приводимом здесь элементарном изложении натяжение S является наглядной вспомогательной величиной; когда мы позднее будем рассматривать ту же самую проблему по общему методу Лагранжа, введение S станет излишним. Приведенное в тексте значение S получено на основе следующих соображений: сила натяжения нити легкого маятника находится в равновесии с его весом и силой инерции, одной из слагающих которой является центробежная сила. Однако центробежной силой, как величиной второго порядка малости, можно пренебречь. Поэтому $S = mg \cos \psi$, как и указано выше.

При этом уравнения движения (21.3) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{X} + \omega_0^2(1 + 2\mu)X &= \mu\omega_0^2x, \\ \ddot{x} + \omega_0^2x &= \omega_0^2X. \end{aligned} \right\} \quad (21.5)$$

Из этих уравнений движения видно, что верхний маятник связан с нижним в $\frac{1}{\mu}$ раз слабее, чем нижний маятник с верхним.

Чтобы проинтегрировать уравнение (21.5), мы должны по аналогии с (20.11) положить

$$x = Ae^{i\lambda t}; \quad X = Be^{i\lambda t}. \quad (21.6)$$

Подставляя эти выражения в уравнения (21.5) и сокращая, получим:

$$\left. \begin{aligned} A(\omega_0^2 - \lambda^2) &= B\omega_0^2, \\ B[\omega_0^2(1 + 2\mu) - \lambda^2] &= A\mu\omega_0^2. \end{aligned} \right\} \quad (21.7)$$

В каждом из этих уравнений выразим $\frac{B}{A}$ через остальные величины. Приравнявая друг другу найденные выражения, получим квадратное уравнение относительно λ^2 :

$$(\lambda^2 - \omega_0^2)^2 + 2\mu\omega_0^2(\omega_0^2 - \lambda^2) = \mu\omega_0^4. \quad (21.8)$$

Обозначим корни этого уравнения через $\lambda^2 = \omega^2$ и $\lambda^2 = \omega'^2$. Пренебрегая более высокими степенями малой величины μ , легко найдем:

$$\left. \begin{aligned} \omega \\ \omega' \end{aligned} \right\} = \omega_0 \left(1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{\mu} \right). \quad (21.9)$$

Следовательно, общее решение уравнений (21.5), написанное в действительной форме, имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \omega t + b \sin \omega t + a' \cos \omega' t + b' \sin \omega' t, \\ X &= \gamma a \cos \omega t + \gamma b \sin \omega t + \gamma' a' \cos \omega' t + \gamma' b' \sin \omega' t. \end{aligned} \right\} \quad (21.10)$$

Здесь, как и в §20, γ и γ' являются значениями отношения $\frac{B}{A}$, которые получаются из уравнений (21.7) при подстановке в них соответственно $\lambda^2 = \omega^2$ и $\lambda^2 = \omega'^2$, а именно:

$$\gamma = -\sqrt{\mu}, \quad \gamma' = +\sqrt{\mu},$$

откуда

$$\gamma' - \gamma = 2\sqrt{\mu}. \quad (21.11)$$

Пусть в момент $t = 0$ возбуждение характеризуется условиями

$$x = 0, \quad \dot{x} = 0, \quad X = 0, \quad \dot{X} = C. \quad (21.12)$$

(Эти равенства являются начальными условиями.) Отсюда следует:

$$\left. \begin{aligned} a + a' &= 0 \\ \gamma a + \gamma' a' &= 0 \end{aligned} \right\} a = a' = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \omega b + \omega' b' &= 0 \\ \gamma \omega b + \gamma' \omega' b' &= C \end{aligned} \right\} b = \frac{C}{\omega(\gamma - \gamma')}; \quad b' = \frac{C}{\omega'(\gamma' - \gamma)}.$$

Таким образом, окончательные решения принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{C}{\gamma - \gamma'} \left(\frac{\sin \omega t}{\omega} - \frac{\sin \omega' t}{\omega'} \right), \\ X &= \frac{C}{\gamma - \gamma'} \left(\frac{\gamma}{\omega} \sin \omega t - \frac{\gamma'}{\omega'} \sin \omega' t \right). \end{aligned} \right\} \quad (21.13)$$

Переходя к скоростям \dot{x} и \dot{X} и заменяя γ и γ' их выражениями (21.11), получим:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \frac{C}{2\sqrt{\mu}} (\cos \omega' t - \cos \omega t), \\ \dot{X} &= \frac{C}{2} (\cos \omega' t + \cos \omega t). \end{aligned} \right\} \quad (21.14)$$

Итак, скорости тяжелого верхнего маятника будут (при одинаковых фазах) в $\sqrt{\frac{1}{\mu}}$ раз меньше скоростей легкого нижнего маятника; в то же время мы видим, что выражения (21.14) удовлетворяют начальным условиям возбуждения (21.12). Это же относится и к самим отклонениям. Как отклонения, так и скорости имеют, ввиду близости значений ω и ω' , *характер биений*, что можно было бы выразить и формально, приведя решение к виду, аналогичному формулам (20.9).

Остановимся еще на одной задаче, которая, собственно говоря, тоже относится к классу задач на связанные колебания и приводит к типам колебаний, вполне аналогичным рассмотренным выше. Однако мы

изберем более простую в математическом отношении трактовку задачи, а именно, будем рассматривать ее по образцу вынужденных¹ затухающих колебаний (ср. § 19); таким образом, мы будем иметь дело не с системой дифференциальных уравнений, а с интегрированием одного единственного дифференциального уравнения

Повесьте карманные часы с балансом на гладкий гвоздь таким образом, чтобы они могли свободно, по возможности без трения, качаться. Легким прикосновением пальца или платка приведите часы в состояние полного покоя; это их состояние мы примем за начальное. Часы немедленно придут в движение и будут совершать колебания с возрастающей амплитудой около вертикального положения равновесия. Однако амплитуда этих колебаний возрастает лишь до известного максимума, после чего она вновь убывает до нуля, и весь процесс повторяется снова.

Очевидно, что при возбуждении колебаний часов мы имеем дело с их движением, направленным в сторону, противоположную качанию баланса, а следовательно, с действием закона момента количества движения (закона площадей); при последующем же затухании амплитуды колебаний мы имеем дело с интерференцией свободных колебаний часов как маятника в поле тяжести и вынужденных колебаний их под действием баланса.

Воспользуемся обозначениями, принятыми в § 13, Б. Итак, обозначим полный момент количества движения системы через \mathbf{N} . Разложим его на две компоненты: одну, соответствующую качанию часов как маятника, и другую, соответствующую колебаниям баланса:

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_{\text{маят.}} + \mathbf{N}_{\text{бал.}}, \quad (21.15)$$

причем оба момента берутся относительно точки подвеса O (гвоздя). Обозначим частоту колебаний баланса через ω ; она определяется силой его спиральной пружины. Частоту собственных колебаний (не нарушенных воздействием баланса) колебаний «маятника» обозначим через ω_0 . В соответствии с формулами (11.6) и (16.4), положим

$$N_{\text{маят.}} = \Theta \dot{\varphi}, \quad \Theta = Ma^2. \quad (21.16)$$

¹В общем можно сказать следующее: возбудить колебание внешней силой означает установить связь данной системы с другой системой, на которую первая система не оказывает обратного воздействия. В случае, который мы сейчас рассмотрим, обратное воздействие колебания маятника на баланс действительно является исчезающе малым.

Здесь M — полная качающаяся масса, a — ее радиус инерции, измеренный от точки O . Мы предполагаем, что колебания баланса имеют синусоидальную форму, т. е. описываются уравнением

$$\varphi_{\text{бал.}} = \alpha \sin \omega t.$$

Согласно формулам (11.6) и (16.4), момент количества движения баланса равен

$$N_{\text{бал.}} = m\omega b^2 \alpha \cos \omega t. \quad (21.17)$$

Здесь m — масса баланса, b — его радиус инерции, измеренный от точки O ; с помощью теоремы Штейнера (16.8) его можно было бы выразить через радиус инерции, измеренный от центра тяжести баланса.

Если предположить, что угол φ достаточно мал, то момент внешней силы, как и для физического маятника [ср. уравнение (16.1)], равен

$$-Mgs\varphi, \quad (21.18)$$

где s означает расстояние между центром тяжести часов и точкой подвеса O . Уравнение движения нашей системы, согласно формуле (13.9) с учетом соотношений (21.15), (21.16), (21.17), (21.18), принимает, таким образом, следующий вид:

$$\ddot{\varphi} + \frac{gs}{a^2} \varphi = \frac{m}{M} \left(\frac{b}{a}\right)^2 \alpha \omega^2 \sin \omega t. \quad (21.19)$$

Полученное уравнение является уравнением незатухающих вынужденных колебаний, рассмотренных нами в §19. В соответствии со смыслом величины ω_0 (собственная частота колебаний маятника при отсутствии внешнего возбуждения), положим

$$\frac{gs}{a^2} = \omega_0^2.$$

Обозначим далее ради краткости

$$c = \frac{m}{M} \left(\frac{b}{a}\right)^2 \alpha \omega^2 \ll 1.$$

В этих обозначениях уравнение (21.19) запишется:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = c \sin \omega t. \quad (21.20)$$

Решение этого уравнения, которое при $t = 0$ одновременно удовлетворяет начальным условиям $\varphi = 0$ и $\dot{\varphi} = 0$, таково:

$$\varphi = \frac{c}{\omega_0^2 - \omega^2} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right). \quad (21.21)$$

Вследствие малости величины c (множитель $\frac{m}{M}$), колебание, представленное этим уравнением, будет иметь заметную величину только при $\omega_0 = \omega$, т. е. при наличии приблизительного резонанса между «внешним» колебанием часов как маятника и «внутренним» колебанием баланса. В карманных часах не слишком малых размеров этот резонанс более или менее хорошо выражен (дамские же часы для этой цели не годятся).

Согласно формуле (21.21), в случае приближенного равенства ω и ω_0 резонансу сопутствует также и *явление биений*. Период биений T определяется требованием

$$\omega T = \omega_0 T \pm 2\pi \quad (21.22)$$

и, следовательно, равен

$$T = \frac{2\pi}{|\omega - \omega_0|}. \quad (21.22a)$$

Его можно очень точно определить путем отсчета числа колебаний маятника между двумя узлами биений и, таким образом, получить удобный и точный критерий для суждения о том, насколько близко достигнут резонанс. Особенность рис. 32, которая наглядно представляет решение дифференциального уравнения, идентичного уравнению (21.20), заключается только в том, что на ней изображен случай полного резонанса, которому соответствует $T = \infty$.

Если мы продолжительное время не будем прикасаться к часам, то заметим, что биения их прекратились. Причиной этого является, очевидно, трение (в подвесе и в воздухе), которым мы до сих пор пренебрегали. Трение вызывает затухание колебаний маятника, что же касается колебаний баланса, то трение, как мы уже знаем (ср., например, рис. 33), лишь несколько уменьшает их амплитуду. Мы можем рассуждать следующим образом: в начальном состоянии вынужденное колебание возбуждено до своей полной величины, а свободное колебание маятника — до такой величины, что оно в момент времени $t = 0$ как раз компенсирует вынужденное колебание, в соответствии с начальными условиями $\varphi = \dot{\varphi} = 0$. В действительности же, когда мы

в начальный момент придерживаем часы, мы по существу сообщаем системе импульс, направленный в сторону, противоположную колебанию баланса. С течением времени трение поглощает этот импульс, так что остается только вынужденное колебание баланса.

В литературе наш пример с часами был впервые рассмотрен в «Electrotechn. Zeitschrift» за 1904 г. в связи с актуальной в то время проблемой «колебаний синхронных машин». Два синхронных генератора переменного тока, включенные параллельно и работающие на одну и ту же цепь тока, испытывают в случае резонанса нежелательные колебания числа оборотов и тока. Эти колебания являются по существу увеличенным отображением колебаний наших часов, а также и рассмотренных здесь явлений связи и резонанса симпатических маятников.

ГЛАВА IV

ТВЕРДОЕ ТЕЛО

§ 22. КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Как мы видели в начале § 7, твердое тело имеет *шесть степеней свободы: три степени свободы поступательного движения и три степени свободы вращательного движения.*

Рассмотрим тело в двух различных положениях — в «начальном» и в «конечном». Выберем произвольную точку тела O в качестве «начала отсчета» и вокруг этой точки опишем сферу (например, единичного радиуса). На поверхности сферы отметим две точки A и B . Если перевести три точки O , A и B из их начального положения в конечное, то и все точки твердого тела перейдут из начального положения в конечное.

Сначала мы перенесем начало отсчета O из начального положения O_1 в конечное положение O_2 . Осуществим это путем параллельного переноса, при котором каждая точка тела испытывает прямолинейное перемещение на отрезок O_1O_2 . Этим мы и определили три степени свободы поступательного движения.

Итак, мы совместили сферу K_1 , описанную вокруг точки O_1 , со сферой K_2 , описанной вокруг точки O_2 ; но это, вообще говоря, отнюдь не означает совпадения начальных и конечных положений точек A и B (A_1 и B_1 на поверхности сферы K_1 и, соответственно, A_2 и B_2 на поверхности K_2). Мы покажем, что эти точки могут быть переведены из положения A_1 , B_1 в положение A_2 , B_2 с помощью вполне определенного поворота вокруг точки $O_1 = O_2$. Положение соответствующей оси вращения и угол поворота определяют три степени свободы вращательного движения.

Чтобы построить ось вращения, т. е. найти точку Ω пересечения ее с поверхностью сферы, соединим дугами больших кругов точки A_1 и A_2 и соответственно точки B_1 и B_2 ; точка пересечения дуг, проведенных

через середины дуг A_1A_2 и B_1B_2 перпендикулярно к ним, и будет искомой точкой Ω . Тогда угол поворота, который мы обозначим через Ω , будет:

$$\Omega = \sphericalangle A_1\Omega A_2 = \sphericalangle B_1\Omega B_2. \quad (22.1)$$

Равенство этих углов вытекает из равенства (по трем соответственным сторонам) двух заштрихованных на рис. 39 сферических треугольников $A_1\Omega B_1$ и $A_2\Omega B_2$. Поэтому равны между собой также и два угла, обозначенные на рис. 39 через γ . Вычитая из полного угла $A_1\Omega B_2$ поочередно эти углы γ , получим правую и левую части равенства (22.1). Это равенство показывает, что с помощью одного и того же поворота Ω не только точка A_1 приводится в положение A_2 , но и точка B_1 — в положение B_2 .

Ввиду произвольного выбора начала отсчета O , величина и направление поступательного перемещения могут изменяться в широких пределах¹. Напротив, величина угла поворота и направление оси вращения не зависят от выбора начала отсчета. В самом деле: если мы выберем в качестве начала отсчета не точку O , а какую-либо другую точку O' , то разность между поступательными перемещениями, соответствующими точкам O и O' , будет опять-таки поступательным перемещением. Последнее, однако, совершенно не изменяет положения точек A и B на сферах K_1 и K_2 . Таким образом, построение, представленное на рис. 39, остается неизменным; угол поворота Ω сохраняет прежнюю величину, а новая ось вращения, проходящая теперь через новое начало отсчета O' , параллельна прежней оси вращения.

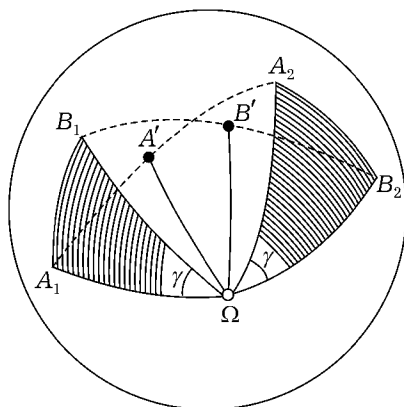


Рис. 39. Построение оси вращения и угла поворота Ω при сложении двух конечных вращений

¹В добавлении к § 23 мы увидим, в частности, что направление поступательного движения можно выбрать, параллельным оси вращения. В этом случае говорят о «винте».

Более важными, чем рассмотренные до сих пор *конечные* движения твердого тела, являются следующие друг за другом (фактически непрерывно) *бесконечно малые* движения твердого тела. Таким образом, мы предположим теперь, что поступательное перемещение O_1O_2 и угол поворота Ω как угодно малы, и разделим их на соответствующий малый промежуток времени Δt . Тогда в пределе при $\Delta t \rightarrow 0$ мы получим линейную скорость поступательного движения \mathbf{u} и угловую скорость вращения $\boldsymbol{\omega}$:

$$\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{O_1O_2}}{\Delta t}, \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{\overrightarrow{\Omega}}{\Delta t}. \quad (22.2)$$

$\boldsymbol{\omega}$ также не зависит от выбора начала отсчета O , тогда как \mathbf{u} существенно от него зависит. Мы рассматриваем угловую скорость как *вектор*, т. е. учитываем не только ее величину, но также и направление оси вращения, соответствующей этой угловой скорости.

Покажем, что угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ действительно имеет *векторный характер*. Рассматривая виртуальный поворот, мы [см. рис. 15 и уравнение (13.4)] вывели следующее соотношение:

$$\delta \mathbf{s} = [\overrightarrow{\delta\varphi} \cdot \mathbf{r}]. \quad (22.3)$$

Переходя от виртуального поворота $\overrightarrow{\delta\varphi}$ к угловой скорости вращения $\boldsymbol{\omega} = \frac{d\overrightarrow{\varphi}}{dt}$ и от вызванного этим поворотом виртуального перемещения $\delta \mathbf{s}$ к скорости $\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{s}}{dt}$, получаем из соотношения (22.3):

$$\mathbf{w} = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]. \quad (22.4)$$

Здесь, как и на рис. 15, \mathbf{r} — радиус-вектор, проведенный из расположенного на оси вращения начала отсчета O в точку P , скорость которой \mathbf{w} определяется этой формулой.

Рассмотрим одновременные или следующие непосредственно друг за другом воздействия двух вращений $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ на одну и ту же точку P твердого тела (начало отсчета O является общим для осей обоих вращений $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$). Мы имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= [\boldsymbol{\omega}_1 \mathbf{r}], & \mathbf{w}_2 &= [\boldsymbol{\omega}_2 \mathbf{r}], \\ \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 &= [\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2, \mathbf{r}]. \end{aligned} \quad (22.4a)$$

В последнем из этих уравнений слева стоит результирующая линейная скорость $\mathbf{w}_r = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$. Из сравнения с уравнением (22.4) видно, что

$$\boldsymbol{\omega}_r = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \quad (22.5)$$

также является результирующей угловой скоростью такого вращения, действие которого на твердое тело эквивалентно действию обоих вращений $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$. Таким образом, *угловые скорости вращения складываются как векторы и при сложении их можно менять местами*, т. е.

$$\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_1. \quad (22.6)$$

Оба последних утверждения не имеют места для рассмотренных ранее конечных поворотов, сложение которых происходит *не* по простым правилам векторного исчисления, а по правилам введенного Гамильтоном *исчисления кватернионов*. Результат сложения двух конечных поворотов зависит от их последовательности, т. е. *их нельзя менять местами*.

Здесь будет уместно рассмотреть разницу между *полярными* и *аксиальными* векторами.

Полярными векторами являются, например, скорость, ускорение, сила, радиус-вектор и т. д. Они наглядно изображаются направленными отрезками со стрелкой на конце. Их прямоугольные слагающие преобразуются при *вращении системы координат* как сами координаты, т. е. по схеме ортогонального преобразования (определитель = +1). При *инверсии координатной системы* (замена x, y, z на $-x, -y, -z$, определитель = -1) слагающие изменяют свои знаки на противоположные.

Аксиальными векторами являются, например, угловая скорость, угловое ускорение, момент силы, момент импульса. Они изображаются при помощи соответствующей оси с указанием направления и величины вращения. Если же мы хотим изобразить их с помощью отложенной на этой оси стрелки соответствующей длины, то мы должны вполне произвольно условиться относительно направления стрелки, например, установить правило правого винта. Прямоугольные слагающие аксиального вектора преобразуются при чистом *вращении системы координат* так же, как и слагающие соответствующей стрелки, т. е. ортогонально¹; однако *при инверсии* системы координат они *не* изменяют своих знаков.

¹С определителем преобразования = +1. (Прим. ред.)

В этом случае правило правого винта должно быть заменено правилом левого винта, и наоборот, — в соответствии с тем, что правая система координат переходит при инверсии в левую систему координат.

Векторное произведение двух полярных векторов будет аксиальным вектором (пример: момент силы). Векторное произведение аксиального и полярного векторов будет полярным вектором [пример: скорость \mathbf{w} в уравнении (22.4)]. В этом можно легко убедиться, рассмотрев поведение этих векторных произведений при инверсии системы координат¹.

После этого отступления вернемся к кинематике твердого тела. Движение каждой из его точек складывается из поступательного движения со скоростью \mathbf{u} [уравнение (22.2)] и вращательного движения, которому соответствует линейная скорость \mathbf{w} [уравнение (22.4)]. Таким образом, скорость \mathbf{v} произвольной точки твердого тела равна

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]. \quad (22.7)$$

При этом выбор начала отсчета O совершенно произволен: для этой точки имеет место

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}. \quad (22.7a)$$

Часто, однако, бывает удобно, чтобы начало отсчета O совпадало с центром тяжести S тела. Выясним это на примере вычисления кинематических характеристик.

¹Все эти свойства векторного произведения непосредственно вытекают из его определения. По определению, компоненты векторного произведения $\mathbf{C} = [\mathbf{A}\mathbf{B}]$ вдоль координатных осей прямоугольной системы координат даются следующими выражениями:

$$C_x = A_y B_z - A_z B_y; \quad C_y = A_z B_x - A_x B_z; \quad (IV.1)$$

$$C_z = A_x B_y - A_y B_x, \quad (IV.2)$$

независимо от того, применяем ли мы правую или левую систему координат. При вращении системы координат, как легко убедиться, эти выражения преобразуются как компоненты вектора. Если векторы \mathbf{A} и \mathbf{B} полярные, то при инверсии системы координат их компоненты меняют знаки, а следовательно, величины C_x , C_y , C_z остаются без изменения. Поэтому, если изображать векторное произведение стрелкой, то при инверсии координатной системы необходимо изменять направление этой стрелки на противоположное. Если вектор \mathbf{A} полярный, а вектор \mathbf{B} аксиальный, то инверсия системы координат ведет к изменению знаков C_x , C_y , C_z ; в этом случае вектор \mathbf{C} полярный. Напротив, если оба вектора \mathbf{A} и \mathbf{B} аксиальные, то их векторное произведение — также аксиальный вектор. (Прим. ред.)

нетической энергии тела

$$T = \int \frac{dm}{2} \mathbf{v}^2. \quad (22.8)$$

Возведем выражение (22.7) в квадрат

$$v^2 = u^2 + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]^2 + (\mathbf{u}[\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]) \quad (22.8a)$$

и разобьем кинетическую энергию T на три части, соответствующие трем членам формулы (22.8a):

$$T = T_{\text{пост.}} + T_{\text{вращ.}} + T_{\omega}, \quad (22.9)$$

где T_{ω} — «смешанная энергия», определяемая одновременно поступательным и вращательным движениями.

Поскольку скорость поступательного движения одинакова для всех элементов массы dm , то, очевидно,

$$T_{\text{пост.}} = \frac{u^2}{2} \int dm = \frac{m}{2} u^2. \quad (22.10)$$

Чтобы вычислить часть T_{ω} , преобразуем ее выражение следующим образом:

$$T_{\omega} = \int [\mathbf{u}[\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]] dm = (\mathbf{u}[\boldsymbol{\omega} \int \mathbf{r} dm]) = m(\mathbf{u}[\boldsymbol{\omega} \mathbf{R}]). \quad (22.11)$$

Здесь \mathbf{R} — радиус-вектор, проведенный из начала отсчета O в центр тяжести тела S . Он равен

$$\mathbf{R} = \frac{\int \mathbf{r} dm}{m}, \quad (22.11a)$$

как и в определении (13.36). Если же совместить точки O и S , то $\mathbf{R} = 0$ и, согласно формуле (22.11),

$$T_{\omega} = 0. \quad (22.11b)$$

В этом случае — полная кинетическая энергия T будет простой суммой $T_{\text{пост.}}$ и $T_{\text{вращ.}}$. Заметим, что если тело вращается вокруг неподвижной точки и мы примем ее за начало отсчета O , то в нуль обратится не только T_{ω} , но и $T_{\text{пост.}}$ (поскольку $\mathbf{u} = 0$); таким образом,

$$T = T_{\text{вращ.}} \quad (22.11b)$$

Займемся теперь этой *вращательной частью кинетической энергии*. Возведя в квадрат слагающие вектора $[\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}]$, получим из среднего члена правой части уравнения (22.8а):

$$\begin{aligned} 2T_{\text{вращ.}} = & \omega_x^2 \int (y^2 + z^2) dm + \omega_y^2 \int (z^2 + x^2) dm + \\ & + \omega_z^2 \int (x^2 + y^2) dm - 2\omega_y \omega_z \int yz dm - \\ & - 2\omega_z \omega_x \int zx dm - 2\omega_x \omega_y \int xy dm. \end{aligned} \quad (22.12)$$

Если ввести обозначения

$$\left. \begin{aligned} \Theta_{xx} &= \int (y^2 + z^2) dm \dots, \\ \Theta_{xy} &= \int xy dm \dots, \end{aligned} \right\} \quad (22.12a)$$

то выражение (22.12) примет вид

$$\left. \begin{aligned} 2T_{\text{вращ.}} = & \Theta_{xx}\omega_x^2 + \Theta_{yy}\omega_y^2 + \Theta_{zz}\omega_z^2 - 2\Theta_{yz}\omega_y\omega_z - \\ & - 2\Theta_{zx}\omega_z\omega_x - 2\Theta_{xy}\omega_x\omega_y. \end{aligned} \right\} \quad (22.12б)$$

Согласно определению (11.3), величина Q_{xx} является *моментом инерции тела относительно оси x*; соответственно, Θ_{yy} и Θ_{zz} являются моментами инерции того же тела относительно осей y и z . Величины Θ_{xy} , Θ_{yz} , Θ_{zx} называются *центробежными моментами инерции*; их обозначают также терминами «*произведения инерции*» и «*девиационные моменты*». Вместо $\Theta_{xx} \dots$ можно сокращенно писать $\Theta_x \dots$.

По аналогии с выражением (11.5), положим левую часть уравнения (22.12) равной $\Theta\omega^2$ и введем обозначения

$$\frac{\omega_x}{\omega} = \alpha, \quad \frac{\omega_y}{\omega} = \beta, \quad \frac{\omega_z}{\omega} = \gamma. \quad (22.13)$$

Тогда получим:

$$\left. \begin{aligned} \Theta = & \Theta_{xx}\alpha^2 + \Theta_{yy}\beta^2 + \Theta_{zz}\gamma^2 - 2\Theta_{yz}\beta\gamma - \\ & - 2\Theta_{zx}\gamma\alpha - 2\Theta_{xy}\alpha\beta. \end{aligned} \right\} \quad (22.13a)$$

Величины α , β , γ являются, очевидно, направляющими косинусами оси вращения ω , произвольно выбранной в твердом теле. Таким образом, согласно формуле (22.13а), момент инерции относительно любой оси полностью определяется заданием шести величин Θ_{ik} .

Совокупность шести величин, аналогичных Θ_{ik} , называется *тензором* или, точнее, *симметричным тензором*. Термин этот взят из теории упругости, в которой *тензоры напряжений и деформаций* играют центральную роль. Для записи тензора удобно пользоваться следующей квадратной схемой:

$$\Theta_{ik} = \begin{pmatrix} \Theta_{xx} & \Theta_{xy} & \Theta_{xz} \\ \Theta_{yx} & \Theta_{yy} & \Theta_{yz} \\ \Theta_{zx} & \Theta_{zy} & \Theta_{zz} \end{pmatrix}, \quad (22.13б)$$

причем в нашем случае $\Theta_{xy} = \Theta_{yx} \dots$

Тензорное исчисление в отношении наглядности уступает векторному. В то время как вектор изображается отрезком, для геометрического представления тензора нужно пользоваться *поверхностью второго порядка*. В нашем случае к понятию такой «тензорной поверхности» можно прийти следующим образом: положим

$$\alpha = \frac{\xi}{\rho}, \quad \beta = \frac{\eta}{\rho}, \quad \gamma = \frac{\zeta}{\rho}, \quad (22.14)$$

где ξ , η , ζ — декартовы координаты; величина $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ будет, очевидно, радиусом-вектором, проведенным из точки O . Возьмем ρ равным $\Theta^{-1/2}$, т. е. будем откладывать по каждой оси, проходящей через точку O , не просто соответствующую величину Θ , а величину, обратную $\sqrt{\Theta}$ (иначе мы не получили бы поверхности «второго» порядка). Тогда формула (22.13а) принимает вид

$$1 = \Theta_{xx}\xi^2 + \Theta_{yy}\eta^2 + \Theta_{zz}\zeta^2 - 2\Theta_{yz}\eta\zeta - 2\Theta_{zx}\zeta\xi - 2\Theta_{xy}\xi\eta. \quad (22.15)$$

Это уравнение (отвлекаясь от случаев вырождения) является уравнением поверхности *эллипсоида*, так как при распределении масс на конечных расстояниях момент инерции Θ , вообще говоря, отличен от нуля. Поверхность, изображаемую уравнением (22.15), мы называем *эллипсоидом инерции*.

Если преобразовать уравнение (22.15) к главным осям эллипсоида инерции, то оно примет вид

$$1 = \Theta_1\xi_1^2 + \Theta_2\xi_2^2 + \Theta_3\xi_3^2. \quad (22.15а)$$

Величины Θ_1 , Θ_2 , Θ_3 называются *главными моментами инерции*. Центробежные моменты относительно главных осей обращаются в нуль, что можно рассматривать как определение главных осей инерции. Наша тензорная схема (22.13б) становится «диагональной», т. е. только ее диагональные элементы Θ_1 , Θ_2 , Θ_3 будут отличны от нуля. Если же мы будем рассматривать тензор не в системе главных осей, а в какой-либо другой системе координат, то мы должны будем добавить три параметра, определяющие направление главных осей, и таким образом опять получим шесть величин, характеризующих симметричный тензор.

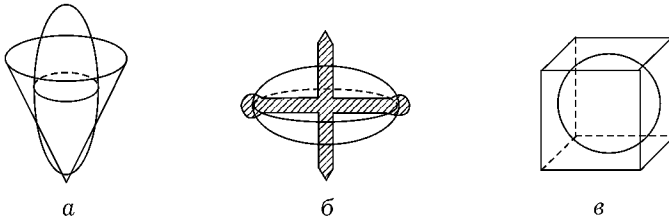


Рис. 40. а — эллипсоид инерции волчка, б — эллипсоид инерции гироскопа, в — пример шарового волчка

Каждая плоскость симметрии относительно распределения масс является, конечно, и плоскостью симметрии эллипсоида инерции; нормаль к этой плоскости определяет одну из главных осей этого эллипсоида. Распределению масс с симметрией вращения соответствует эллипсоид инерции, являющийся *эллипсоидом вращения*, следовательно, это распределение масс наряду с главной осью, совпадающей с осью симметрии тела, имеет еще бесчисленное множество «экваториальных» главных осей инерции. Примерами могут служить обыкновенный игрушечный волчок и волчок в форме маховичка, которым обычно пользуются для демонстраций (рис. 40а и б). У первого волчка момент инерции относительно оси симметрии минимален; поэтому соответствующая главная ось (в силу соотношения $\rho = \Theta^{-1/2}$) *длиннее* экваториальных главных осей; эллипсоид инерции будет *продолговатым*. У второго волчка, напротив, момент инерции относительно оси симметрии максимален; поэтому (в силу того же соотношения) соответствующая главная ось *короче* экваториальных главных осей; эллипсоид инерции будет *сплюснутым*. В обоих случаях мы имеем дело с *симметричными волчками*.

Впрочем, эллипсоид инерции, обладающий симметрией вращения, встречается не только при распределении масс, обладающем симметрией вращения, а во всех тех случаях, когда через одну ось проходят *больше, чем две* плоскости симметрии; это имеет место, например, и случае квадратной или правильной шестигранной призмы.

В соответствии с этим, эллипсоид инерции принимает *форму шара* не только при сферически-симметричном распределении масс, но также, например, при кубическом распределении масс, так как здесь имеется больше плоскостей симметрии, чем это было бы в случае эллипсоидальной формы тензорной поверхности. В этом случае говорят о *шаровом волчке*, у такого волчка любая центральная ось является главной осью инерции (рис. 40в).

§ 23. СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Статика твердого тела является теоретической основой расчета всех строительных конструкций (мостов, ферм, куполов и т. д.) и поэтому весьма подробно излагается (аналитически и графически) в учебниках прикладной механики. Здесь мы можем ограничиться изложением лишь основных черт этой части механики.

1. Условия равновесия

Основным принципом, на котором основано рассмотрение условий равновесия твердого тела так же, как и всех других вопросов теории равновесия, является принцип виртуальной работы. Он является частным случаем принципа Даламбера, из которого его можно получить, отбрасывая силы инерции. В связи с этим рассуждения, приводимые в настоящем параграфе, являются непосредственным следствием закона движения центра тяжести и закона площадей, разобранных в § 13. Следует также отметить, что рассмотренные там виртуальные перемещения (параллельный перенос и поворот), очевидно, не противоречат неизменяемости формы твердого тела и соответствуют рассмотренным в предыдущем параграфе поступательному движению и вращению — двум составным частям произвольного движения твердого тела.

Таким образом, отбрасывая силы инерции, мы получаем из (13.3) и (13.9) общие условия равновесия твердого тела:

$$\sum \mathbf{F}_k = 0, \quad \sum \mathbf{M}_k = 0. \quad (23.1)$$

Здесь \mathbf{F}_k — внешние силы, приложенные к каким-либо точкам P_k твердого тела. Для интерпретации первого уравнения (23.1) построим силовой многоугольник из векторов сил, не учитывая их точек приложения P_k и располагая эти векторы в любой последовательности. *Согласно первому уравнению (23.1), этот многоугольник в случае равновесия должен быть замкнутым.*

Величины \mathbf{M}_k — моменты сил \mathbf{F}_k относительно одной и той же для всех сил, но в остальном совершенно произвольной «точки отсчета» O . В соответствии со вторым уравнением (23.1), заменяем эти моменты сил \mathbf{M}_k их векторными изображениями (ср. стр. 56) и строим из них *многоугольник моментов*. *Согласно второму уравнению (23.1), многоугольник моментов в случае равновесия должен быть также замкнутым.*

По аналогии с уравнениями (13.12) и (13.13) мы можем перейти от двух векторных уравнений к следующим шести скалярным уравнениям для слагающих векторов \mathbf{F}_k и \mathbf{M}_k .

$$\left. \begin{aligned} \sum X_k &= \sum Y_k = \sum Z_k = 0, \\ \sum (y_k Z_k - z_k Y_k) &= \sum (z_k X_k - x_k Z_k) = \\ &= \sum (x_k Y_k - y_k X_k) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (23.2)$$

Эти уравнения получаются при проектировании векторных уравнений (23.1) на оси координат; x_k, y_k, z_k — координаты точек приложения сил, причем за начало координат взята «точка отсчета» O .

2. Эквивалентность сил и моментов.

Приведение системы сил

Если силы (моменты) не находятся в равновесии, то можно задать вопрос: существует ли одна сила (один момент), обладающая тем свойством, что она вызывает точно такое же движение твердого тела, как и вся заданная система сил (моментов)?

Такая постановка вопроса, между прочим, полезна (хотя и недостаточна) при определении сил реакций, которые испытывает твердое тело со стороны своих точек опоры, если к нему приложена система сил, не находящихся в равновесии друг с другом.

Ответ на этот вопрос мы получим, если проведем отрезок, замыкающий ломаную линию (по предположению, незамкнутую), составленную из векторов сил $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$, входящих в нашу систему. Этот замыкающий отрезок мы проведем дважды: как в направлении обхода силового многоугольника (сила \mathbf{F}_{n+1} на рис. 41), так и в *противоположном направлении* (равнодействующая сила \mathbf{F}_r), причем, очевидно, прибавление этих двух равных и противоположно направленных сил никак не изменит действия заданной системы сил. Мы получим замкнутый силовой многоугольник $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_{n+1}$ и одиночную силу \mathbf{F}_r , которые вместе взятые эквивалентны первоначальному многоугольнику $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n$. Но так как силы $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_{n+1}$ образуют систему уравновешивающих друг друга сил и потому могут быть отброшены, то уже одна сила \mathbf{F}_r вполне эквивалентна всей заданной системе сил $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n$. Таким образом,

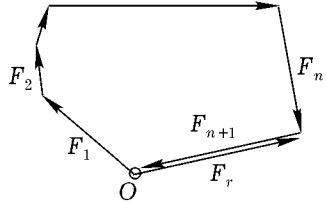


Рис. 41. Построение равнодействующей силы в случае незамкнутого многоугольника сил

$$\mathbf{F}_r = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k. \quad (23.3)$$

Точно такое же рассуждение можно привести и в отношении незамкнутого многоугольника моментов. Тогда получим равнодействующий момент \mathbf{M}_r , эквивалентный всей заданной системе моментов $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_n$:

$$\mathbf{M}_r = \sum_{k=1}^n \mathbf{M}_k. \quad (23.4)$$

Заметим, что ничто не препятствует нам приложить равнодействующую силу \mathbf{F}_r , как это показано на рис. 41, к точке O , относительно которой берутся моменты \mathbf{M}_r ¹.

¹Эту точку O часто называют центром приведения системы сил. Очевидно, ее можно выбрать вполне произвольно. (Прим. ред.)

3. Изменение точки отсчета

Уравнение (23.3) непосредственно показывает, что равнодействующая сила \mathbf{F}_r не зависит от выбора точки отсчета O . Если \mathbf{F}'_r означает равнодействующую силу, соответствующую выбору другой точки отсчета O' , то

$$\mathbf{F}'_r = \mathbf{F}_r. \quad (23.5)$$

С другой стороны, по аналогии с уравнением (23.4), имеем (\mathbf{M}'_r — равнодействующий момент относительно точки O'):

$$\mathbf{M}'_r = \sum \mathbf{M}'_k, \quad \text{где} \quad \mathbf{M}'_k = [\mathbf{r}'_k \mathbf{F}_k]. \quad (23.6)$$

Здесь \mathbf{r}'_k — радиус-вектор, проведенный из точки O' в точку приложения P_k силы \mathbf{F}_k . Если обозначить через \mathbf{a} вектор, проведенный от точки O' к точке O , то

$$\mathbf{r}'_k = \mathbf{a} + \mathbf{r}_k, \quad \mathbf{M}'_k = [\mathbf{a} \mathbf{F}_k] + [\mathbf{r}_k \mathbf{F}_k] = [\mathbf{a} \mathbf{F}_k] + \mathbf{M}_k. \quad (23.6a)$$

Следовательно,

$$\mathbf{M}'_r = \sum [\mathbf{a} \mathbf{F}_k] + \sum \mathbf{M}_k = [\mathbf{a} \sum \mathbf{F}_k] + \mathbf{M}_r. \quad (23.6b)$$

Согласно уравнению (23.3), имеем:

$$[\mathbf{a} \sum \mathbf{F}_k] = [\mathbf{a} \mathbf{F}_r].$$

Таким образом, искомое соотношение имеет вид

$$\mathbf{M}'_r = \mathbf{M}_r + [\mathbf{a} \mathbf{F}_r]. \quad (23.7)$$

4. Сравнение кинематики со статикой

Как уже отмечалось в связи с уравнением (22.2), в кинематике угловая скорость вращения ω не зависит, а скорость поступательного движения \mathbf{u} зависит от выбора начала отсчета. Имеем:

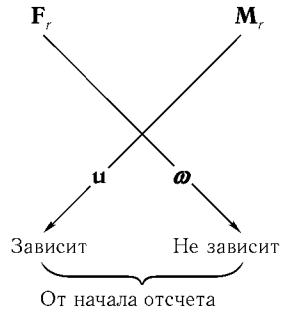
$$\omega' = \omega \quad (23.8)$$

и, согласно формуле (22.7), полагая $\mathbf{v} = \mathbf{u}'$ и $\mathbf{r} = \mathbf{a}$,

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} + [\omega \mathbf{a}]. \quad (23.9)$$

Эта формула имеет такой же вид, как и предшествующее уравнение (23.7) (с точностью до порядка сомножителей в соответствующих векторных произведениях). Таким образом, принимая во внимание также соотношения (23.5) и (23.8), приходим к удивительной обратимости уравнений статики и кинематики; ее можно выразить приводимой ниже схемой. Эта «перекрестная» обратимость сохраняет силу также и для понятий «пара сил» и «пара угловых скоростей».

Пара сил является основным понятием элементарной статики. Как известно, под парой сил понимают две параллельные противоположно направленные силы $\pm \mathbf{F}$, линии действия которых находятся на конечном расстоянии l друг от друга. Приведение такой пары сил, наполненное по правилу раздела 2 настоящего параграфа, дает:



$$\mathbf{F}_r = 0, \quad \mathbf{M}_r = \mathbf{M}, \quad |\mathbf{M}| = |\mathbf{F}|l, \quad (23.10)$$

причем вектор момента \mathbf{M} направлен по перпендикуляру к плоскости пары сил. Но в то время как прежний равнодействующий момент \mathbf{M}_r был «привязан» к точке отсчета O , теперь момент \mathbf{M} не зависит от положения точки отсчета и может совершенно свободно перемещаться в пространстве параллельно самому себе. Таким образом, любые две пары сил складываются путем векторного сложения их моментов и дают при этом третью пару сил; две пары сил с равными, но противоположными по направлению моментами, действующие в параллельных плоскостях, взаимно уравновешиваются и т. д.

Следуя «перекрестной» обратимости, выражаемой нашей схемой, мы понимаем под *парой угловых скоростей* две равные, но противоположно направленные угловые скорости вращения $\pm \omega$, причем соответствующие оси вращения расположены параллельно на расстоянии l друг от друга. Приведение такой пары угловых скоростей по правилу сложения (22.5) дает результирующую угловую скорость вращения $\omega_r = 0$. Таким образом, наша пара угловых скоростей сообщает телу *чистое поступательное движение* по перпендикуляру к плоскости, проходящей через обе оси вращения. Скорость этого поступательного движения можно легко определить, а именно: $|\mathbf{u}| = \omega l$. Таким образом, здесь

имеется полная аналогия с формулами (23.10) в смысле соблюдения нашей «перекрестной» схемы обращения. Но в то время как прежняя скорость \mathbf{u} зависела от выбора начала отсчета O , скорость \mathbf{u} , эквивалентная паре угловых скоростей, совершенно не зависит от выбора точки O и может произвольно перемещаться в пространстве параллельно самой себе. Из этого далее следует: две произвольно расположенные пары угловых скоростей складываются векторно, как и скорости \mathbf{u} соответствующих им поступательных движений; две пары угловых скоростей с равными, но противоположно направленными моментами $\pm\omega l$, расположенные в параллельных плоскостях, взаимно уравниваются и т. д.

ДОБАВЛЕНИЕ: О ДИНАМАХ И ВИНТАХ

Так как, согласно формуле (23.7), \mathbf{M}_r зависит от выбора точки отсчета, относительно которой этот момент рассматривается, то целесообразно выбрать эту точку (O') так, чтобы векторы \mathbf{M}_r и \mathbf{F}_r были параллельны друг другу. В этом случае говорят, что система сил приведена к *динаме*, т. е. к совокупности равнодействующей силы и действующего «вокруг» этой силы момента (этот момент эквивалентен паре сил, плоскость которой перпендикулярна к равнодействующей силе). Исходя из произвольной точки отсчета O , находим положение точки O' , необходимое для приведения системы к динаме, следующим образом: в уравнении (23.7) разложим момент \mathbf{M}_r на две слагающие: \mathbf{M}_p , параллельную \mathbf{F}_r , и \mathbf{M}_n , перпендикулярную \mathbf{F}_r ; далее, определяем a из условия

$$\mathbf{M}_n = -[a\mathbf{F}_r]. \quad (23.11)$$

Тогда для точки отсчета O' , согласно соотношениям (23.5) и (23.7), получим:

$$\mathbf{F}'_r = \mathbf{F}_r, \quad \mathbf{M}'_r = \mathbf{M}_p \parallel \mathbf{F}_r,$$

как и должно быть в случае динамы. Из условия (23.11) следует, что для получения динамы нужно передвинуть точку отсчета O перпендикулярно к векторам \mathbf{F}_r и \mathbf{M}_n на отрезок

$$a = -\frac{|\mathbf{M}_n|}{|\mathbf{F}_r|}.$$

Совершенно аналогичное рассуждение, в полном согласии с нашей схемой обращения, приводит нас к понятию *винта*. Исходя из уравнения (23.9), разложим скорость \mathbf{u} на две слагающие: \mathbf{u}_p , параллельную вектору $\boldsymbol{\omega}$, и \mathbf{u}_n , перпендикулярную к $\boldsymbol{\omega}$. Определяем необходимое смещение \mathbf{a} начала отсчета O из условия

$$\mathbf{u}_n = -[\boldsymbol{\omega}\mathbf{a}] \quad (23.12)$$

и, согласно формулам (23.8) и (23.9), получаем для нового начала отсчета O :

$$\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{u}' = \mathbf{u}_p \parallel \boldsymbol{\omega}, \quad (23.13)$$

что действительно соответствует винту. Из уравнения (23.12) следует, что для приведения движения к винту нужно передвинуть начало отсчета O перпендикулярно к $\boldsymbol{\omega}$ и \mathbf{u}_n на определенный отрезок \mathbf{a} .

Как ни привлекательно представление системы сил и движений с помощью динами и винта, все же оно не имеет большого практического значения при изучении специальных вопросов вращательного движения; поэтому мы и упоминаем об этих понятиях ёлишь в виде добавления.

§ 24. ИМПУЛЬС И МОМЕНТ ИМПУЛЬСА ТВЕРДОГО ТЕЛА. ИХ СВЯЗЬ СО СКОРОСТЬЮ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЙ

Представим себе, что твердому телу сообщены импульс поступательного движения (одиночный импульс, возбуждение толчком) и импульс вращательного движения (момент импульса, вращательный импульс). Поступательный импульс обозначим через \mathbf{G} , вращательный импульс — через \mathbf{N} . Импульс \mathbf{G} вычислим как сумму всех элементарных импульсов $d\mathbf{g} = \mathbf{v} dm$; следовательно,

$$\mathbf{G} = \int d\mathbf{g} = \int \mathbf{v} dm. \quad (24.1)$$

Пользуясь уравнением (22.7), получаем:

$$\mathbf{G} = \mathbf{u} \int dm + [\boldsymbol{\omega} \int \mathbf{r} dm]$$

или, вводя радиус-вектор \mathbf{R} , проведенный из точки O в центр тяжести [ср. (22.11a)],

$$\mathbf{G} = m\mathbf{u} + m[\boldsymbol{\omega}\mathbf{R}]. \quad (24.2)$$

В частности, если совместить начало отсчета O с центром тяжести S , то $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ и

$$\mathbf{G} = m\mathbf{u}. \quad (24.3)$$

С другой стороны, момент импульса \mathbf{N} твердого тела равен сумме моментов всех элементарных импульсов относительно общего начала отсчета O . Таким образом,

$$\mathbf{N} = \int [\mathbf{r} d\mathbf{g}] = \int dm[\mathbf{r}\mathbf{v}]. \quad (24.4)$$

Отсюда, принимая во внимание соотношения (22.7) и (22.11a), имеем:

$$\mathbf{N} = \int dm[\mathbf{r}\mathbf{u}] + \int dm[\mathbf{r}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]] = m[\mathbf{R}\mathbf{u}] + \int [\mathbf{r}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]] dm. \quad (24.5)$$

Первое слагаемое обращается в нуль как при совпадении точек O и S , так и при $\mathbf{u} = 0$, так что для этих двух случаев момент импульса равен

$$\mathbf{N} = \int dm[\mathbf{r}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]]. \quad (24.6)$$

Для наглядного представления этого интеграла воспользуемся известным соотношением векторной алгебры

$$[\mathbf{A}[\mathbf{B}\mathbf{C}]] = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\mathbf{B}), \quad (24.7)$$

которое справедливо для любой тройки векторов \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} . В нашем случае

$$[\mathbf{r}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]] = \boldsymbol{\omega}\mathbf{r}^2 - \mathbf{r}(\boldsymbol{\omega}\mathbf{r})$$

и, следовательно, например,

$$N_x = \int [\mathbf{r}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]]_x dm = \omega_x \int (x^2 + y^2 + z^2) dm - \left. \begin{array}{l} -\omega_x \int x^2 dm - \omega_y \int xy dm - \omega_z \int xz dm. \end{array} \right\} \quad (24.8)$$

Вводя моменты инерции и произведения инерции, в соответствии с их определениями (22.12а), можем написать:

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \Theta_{xx}\omega_x - \Theta_{xy}\omega_y - \Theta_{xz}\omega_z, \\ N_y &= -\Theta_{yx}\omega_x + \Theta_{yy}\omega_y - \Theta_{yz}\omega_z, \\ N_z &= -\Theta_{zx}\omega_x - \Theta_{zy}\omega_y + \Theta_{zz}\omega_z, \end{aligned} \right\} \quad (24.9)$$

Таким образом, мы пришли к линейной зависимости между *динамическим вектором* \mathbf{N} и *кинематическим вектором* $\boldsymbol{\omega}$, причем эта линейная зависимость характеризуется *тензором* Θ [ср. определение (22.13б)]; поэтому говорят: \mathbf{N} есть «линейная векторная функция» от $\boldsymbol{\omega}$. Такие линейные векторные функции играют важную роль во всех разделах тензорного исчисления, особенно в теории упругости.

Уравнениям (24.9) можно придать замечательную форму, если использовать выражение (22.12б) для кинетической энергии вращения. Именно,

$$N_i = \frac{\partial T_{\text{вращ.}}}{\partial \omega_i}, \quad i = x, y, z. \quad (24.10)$$

Мы замечаем далее, что это выражение справедливо не только при совпадении центра тяжести S и начала отсчета O или при $\mathbf{u} = 0$, т. е. в случаях, для которых выведены уравнения (24.9), но также и при любом положении точки O . В этом случае нужно только дополнить выражение (22.12б) для $T_{\text{вращ.}}$ выражением (22.11) для T_w , благодаря чему в правой части соотношения (24.10) прибавится член вида

$$\frac{\partial T_w}{\partial \omega_i} = m[\mathbf{R}\mathbf{u}]_i.$$

Но это тот же самый добавочный член, который входит в правую часть выражения (24.5) для \mathbf{N} , если точки O и S не совпадают. Так как полная кинетическая энергия T отличается от $T_{\text{вращ.}} + T_w$ только слагаемым $T_{\text{пост.}}$, не зависящим от $\boldsymbol{\omega}$ [ср. формулы (22.9) и (22.10)], то соотношения (24.10) можно обобщить, причем новые обобщенные соотношения будут справедливы для *любого положения* точки O :

$$N_i = \frac{\partial T}{\partial \omega_i}, \quad i = x, y, z. \quad (24.10a)$$

То же самое справедливо и для импульса поступательного движения \mathbf{G} , как и для вращательного импульса \mathbf{N} . Чтобы сразу же рассмотреть общий случай, когда точки O и S не совпадают, образуем с помощью формул (22.9), (22.10) и (22.11) производную

$$\frac{\partial T}{\partial u_i} = mu_i + m[\omega \mathbf{R}]_i,$$

что совпадает с уравнением (24.2) для импульса \mathbf{G} . Таким образом, получаем соотношение, вполне аналогичное соотношению (24.10а):

$$G_i = \frac{\partial T}{\partial u_i}, \quad i = x, y, z. \quad (24.11)$$

Наши уравнения (24.10а) и (24.11) являются частными случаями гораздо более общих соотношений, связывающих обобщенные импульсы с обобщенными скоростями. Но это мы можем показать лишь в гл. VI, § 36. Теперь нам важно выяснить геометрическое толкование уравнений (24.10). Речь идет здесь о знаменитом *построении Пуансо: по заданной оси вращения ω найти направление вектора момента импульса \mathbf{N}* . Собственно говоря, это построение не ограничивается случаем твердого тела; его всегда можно применять в том случае, когда имеют дело с симметричным тензором; изображают этот тензор тензорной поверхностью второго порядка и находят линейную векторную функцию, с которой сопоставляется этот тензор.

Правило Пуансо гласит: из центра O эллипсоида инерции нужно отложить вектор угловой скорости ω и в точке его пересечения с эллипсоидом провести касательную плоскость к последнему. Перпендикуляр, опущенный из центра эллипсоида на эту плоскость, и даст направление вектора момента импульса \mathbf{N} . Для доказательства правильности этого построения следует только вспомнить, что для любой поверхности $f(\xi, \eta, \zeta) = \text{const}$ направляющие косинусы нормали к касательной пропорциональны производным

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial f}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial f}{\partial \zeta}. \quad (24.12)$$

В нашем случае $f(\xi, \eta, \zeta) = \text{const}$ есть уравнение (22.15) эллипсоида инерции, и производные функции f по ξ , η , ζ действительно пропорциональны слагающим вектора \mathbf{N} , определяемым уравнениями (24.9).

Можно также сказать: построение Пуансо является непосредственным геометрическим представлением наших уравнений (24.10), так как поверхность эллипсоида инерции по существу тождественна с поверхностью

$$T_{\text{вращ.}} = \text{const.}$$

Рис. 42а, б соответствуют случаю *симметричного* эллипсоида инерции, для которого векторы $\boldsymbol{\omega}$ и \mathbf{N} находится в одной и той же плоскости, проходящей через его ось симметрии («ось фигуры»); касательная плоскость может быть поэтому представлена прямой, касательной к эллипсу осевого сечения. В случае удлинённого эллипсоида вращения (рис. 42б) вектор \mathbf{N} и ось фигуры F лежат по разные стороны от вектора $\boldsymbol{\omega}$, а в случае сплюснутого эллипсоида вращения (рис. 42а) вектор \mathbf{N} лежит между осью F и вектором $\boldsymbol{\omega}$. Графическое изображение для случая трехосного эллипсоида инерции более сложно.

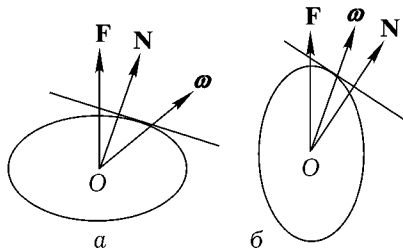


Рис. 42. Построение Пуансо для нахождения относительного положения мгновенной оси вращения $\boldsymbol{\omega}$ и момента импульса \mathbf{N} в случае сплюснутого и удлинённого эллипсоида инерции

В заключение подчеркнем, что соотношения, рассмотренные в этом параграфе, по существу, являются не чем иным, как *ньютонским* определением, примененным к твердому телу (ср. стр. 12): «количество движения есть мера такого, устанавливаемая пропорционально скорости и количеству материи». Наши теперешние уравнения оказались значительно сложнее соотношения между импульсом и скоростью для одной и той же материальной точки только потому, что в механике точки «количество материи», т.е. масса, есть *скаляр*, а в случае твердого тела моменты инерции образуют *тензор*.

§ 25. ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА. ОБЩИЙ ОБЗОР РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Сперва рассмотрим тело, свободно движущееся в пространстве. Поместим начало отсчета в центр тяжести тела и приведем к нему приложенные к телу силы согласно указанию, сделанному в § 23. Тогда вся система сил, действующих на тело, сведется к равнодействующей силе \mathbf{F} и к результирующему (главному) моменту \mathbf{M} . Согласно § 13, уравнения движения твердого тела примут форму «закона движения центра тяжести» и «закона площадей»:

$$\dot{\mathbf{G}} = \mathbf{F}, \quad (25.1)$$

$$\dot{\mathbf{N}} = \mathbf{M}. \quad (25.2)$$

Так как твердое тело имеет только шесть степеней свободы, то этих двух векторных уравнений достаточно для полного описания состояния его движения.

Если сила \mathbf{F} не зависит от угловой скорости, а момент \mathbf{M} — от скорости поступательного движения, то уравнения (25.1) и (25.2) можно рассматривать независимо друг от друга. В баллистике, например, это не имеет места. В случае же, когда такое раздельное рассмотрение этих двух уравнений допустимо, уравнение (25.1) соответствует просто задаче из механики точки, а уравнение (25.2) — задаче о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки или, короче, *задаче о движении волчка*.

Мы займемся рассмотрением, главным образом, последней из этих задач. При упомянутом выборе начала отсчета мы можем не принимать во внимание силу тяжести, так как она не дает момента относительно центра тяжести. Если мы пренебрежем также сопротивлением воздуха, трением и т. д., то будем иметь дело с задачей о движении свободного волчка. Эту задачу мы рассмотрим в разделах 1–3. Волчок в кардановом подвесе также будет свободным волчком, если мы вправе пренебречь массой подвесных колец по сравнению с массой маховичка. В противном случае мы имели бы дело с задачей о движении тела с пятью степенями свободы, тогда как в задачах о движении волчка, которые мы имеем в виду, число степеней свободы равно трем.

Мы рассмотрим, однако, и вращение вокруг неподвижной точки, не совпадающей с центром тяжести. В этом случае следует, как отмечено на стр. 162, выбрать эту неподвижную точку за начало отсчета O и ввести момент силы тяжести \mathbf{M} относительно этой точки. Тогда мы говорим о тяжелом волчке. Этот вид волчка рассматривается в разделах 4 и 5.

Однако полное аналитическое рассмотрение движения свободного волчка мы отложим до следующего параграфа, где воспользуемся новым вспомогательным средством — *уравнениями Эйлера*. Полное же рассмотрение законов движения тяжелого волчка, поскольку оно вообще возможно, мы должны отложить даже до § 35, чтобы иметь возможность воспользоваться таким мощным средством, как общие уравнения Лагранжа.

В случае *свободного волчка* из уравнения (25.2) следует

$$\dot{\mathbf{N}} = 0.$$

Это уравнение немедленно интегрируется и дает:

$$\mathbf{N} = \text{const.} \quad (25.3)$$

Для свободного волчка момент импульса по величине и направлению в пространстве постоянен. Эта теорема вполне соответствует закону инерции Галилея, однако она не приводит к таким простым заключениям относительно скорости и положения в пространстве, как этот закон.

1. Свободный шаровой волчок

Только в частном случае, когда эллипсоид инерции превращается в шар, из уравнения $\mathbf{N} = \Theta\boldsymbol{\omega}$ следует, что при $\mathbf{N} = \text{const}$ и $\boldsymbol{\omega} = \text{const}$. Ось вращения неопределенно долго совпадает с неподвижной осью момента импульса. Каждая точка тела, какую бы внешнюю форму оно ни имело (ср., например, рис. 40в), описывает окружность вокруг этой оси (с одинаковой для всего тела угловой скоростью).

2. Свободный симметричный волчок

В случае свободного симметричного волчка чистое вращение имеет место только тогда, когда направление момента импульса \mathbf{N} совпадает

с одной из главных осей, т. е. либо с осью фигуры, либо с одной из экваториальных осей. Общей же формой движения симметричного волчка является так называемая *регулярная прецессия*.

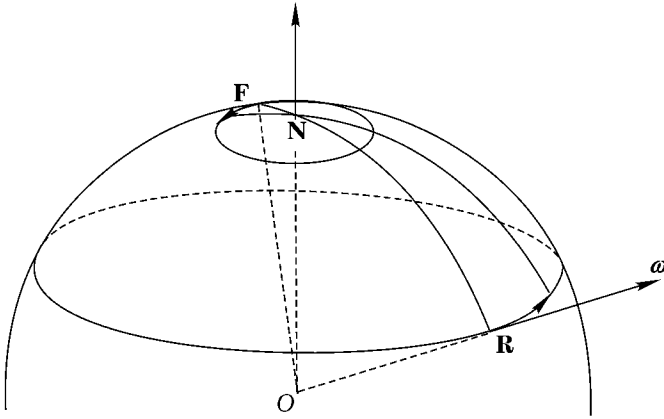


Рис. 43. Регулярная прецессия свободного симметричного волчка

Поясним регулярную прецессию при помощи рис. 43. Неподвижную в пространстве ось момента импульса N направим вертикально вверх; точку пересечения этой оси с поверхностью сферы единичного радиуса, описанной вокруг центра эллипсоида инерции, обозначим через N . Точки пересечения мгновенной оси вращения и оси фигуры с этой сферой обозначим через R и F . Так как, согласно построению Пуансо, эти три оси должны лежать в меридиональной плоскости, проходящей через точку F , то наши три точки N , R и F лежат на одном меридиане, проходящем через неподвижную точку N ; для случая сплюснутого эллипсоида инерции, который здесь подразумевается (рис. 42а), точка N находится между точками F и R . Мгновенное движение является вращением вокруг оси OR . При этом точка F движется нормально к названному меридиану, причем угловое расстояние между точками F и N не изменяется. Таким образом, мы можем изобразить мгновенное перемещение точки F в виде короткой дуги параллели, описанной вокруг оси ON (см. стрелку слева на рис. 43). Следовательно, и точка R должна изменить свое положение, а именно, переместиться так, чтобы все три точки F , N и R оставались на одном меридиане, определяе-

мом теперь новым положением точки F . При этом угловое расстояние между точками N и R сохраняется, поскольку оно задано построением Пуансо. Таким образом, точка R также движется по дуге параллели, описанной вокруг оси ON (см. стрелку справа на рис. 43). Относительное положение точек F , N и R теперь такое же, как и вначале, так что мы можем повторить наши рассуждения. Итак, *в пространстве ось фигуры и ось вращения описывают каждая, и притом с постоянной угловой скоростью, круговой конус вокруг неподвижной оси момента импульса* (эта угловая скорость постоянна, потому что она определяется величиной момента импульса \mathbf{N} и его положением относительно эллипсоида инерции волчка). Этим и установлен характер регулярной прецессии.

То же самое справедливо, конечно, и в случае продолговатого эллипсоида инерции, для которого, однако, точка R находилась бы между точками F и N (рис. 426).

3. Свободный несимметричный волчок

Рассмотренную только что форму движения симметричного волчка можно было бы описать короче (хотя, быть может, менее наглядно). Для этого через конец вектора \mathbf{N} момента импульса проводим перпендикулярно к нему «неизменяемую плоскость» \mathcal{E} (ср. стр. 99) и строим «эллипсоид кинетической энергии» с центром в начале вектора \mathbf{N} , подобный эллипсоиду инерции и касающийся плоскости \mathcal{E} . Точка касания является концом вектора угловой скорости вращения $\boldsymbol{\omega}$. Мгновенное движение волчка состоит во вращении этого эллипсоида вокруг $\boldsymbol{\omega}$. При этом эллипсоид катится без скольжения по плоскости \mathcal{E} .¹ Если эллипсоид обладает симметрией вращения, то кривая качения будет окружностью, описанной вокруг вектора \mathbf{N} ; поэтому конус, описанный вектором $\boldsymbol{\omega}$, равно как и конус, описанный осью фигуры, будет *круговым конусом*. Таким образом, мы снова пришли к регулярной прецессии симметричного волчка.

Это же построение приводит нас непосредственно к введенному Пуансо представлению свободного движения произвольного волчка в случае *трехосного эллипсоида инерции*. Подобно этому эллипсоиду,

¹ Качение без скольжения можно определить как такое качение, при котором изменение вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ имеет одинаковое значение в неподвижной системе отсчета и в системе, связанной с телом. Это утверждение будет доказано нами несколько позже [см. уравнение (26.8a)].

«эллипсоид кинетической энергии» мы также заставляем катиться по неизменяемой плоскости \mathcal{E} (ср. примечание на этой странице). Однако теперь кривая качения является уже не окружностью, а трансцендентной кривой, вообще говоря, незамкнутой. Равным образом и конусы, описываемые в пространстве осью вращения и осью фигуры, являются трансцендентными конусами. Аналитическое рассмотрение движения несимметричного волчка, даже в случае отсутствия внешних сил, приводит к *эллиптическим интегралам* (ср. раздел 3, § 26), тогда как при рассмотрении движения свободного симметричного волчка можно обойтись элементарными функциями. Конечно, вращение вокруг какой-либо из трех главных осей и в случае несимметричного волчка характеризуется постоянством направления оси вращения и угловой скорости, а потому может быть представлено в элементарных функциях.

4. Тяжелый симметричный волчок

Здесь мы не будем останавливаться отдельно на шаровом волчке, так как рассмотрение его движения лишь немногим проще, чем в случае симметричного волчка.

У тяжелого симметричного волчка неподвижная точка O (точка опоры о подставку) не совпадает с центром тяжести S (лежащим на оси фигуры); отрезок OS обозначим через s . Величина момента силы тяжести равна

$$|\mathbf{M}| = mgs \sin \vartheta, \quad (25.4)$$

где через ϑ обозначен угол между вертикалью и осью фигуры волчка. Сам вектор момента \mathbf{M} направлен по нормали к плоскости, проходящей через вертикальную линию и ось фигуры волчка, или, другими словами, по линии пересечения горизонтальной плоскости с экваториальной плоскостью эллипсоида инерции. Эту линию пересечения обозначают астрономическим термином «*линия узлов*». (По поводу знаков см. стр. 187–188.)

Теперь уже нельзя столь просто проинтегрировать общее уравнение (25.2), как это было в случае отсутствия внешних сил [ср. уравнение (25.3)]; напротив, момент импульса \mathbf{N} непрерывно изменяется по закону

$$d\mathbf{N} = \mathbf{M} dt. \quad (25.5)$$

Таким образом, к мгновенному вектору момента импульса N векторно прибавляется бесконечно малый вектор $\mathbf{M} dt$. При этом конец вектора \mathbf{N} движется в направлении мгновенной линии узлов, т. е. перпендикулярно к вертикали и к оси фигуры. Отсюда следует, что *проекции вектора \mathbf{N} на вертикаль и на ось фигуры остаются постоянными*. Обозначим обе эти постоянные через

$$n = N_{\text{верт.}} \quad \text{и} \quad N = N_{\text{фиг.}} \quad (25.6)$$

Эти две величины n и N , которые могут быть заданы произвольно, являются двумя *интеграционными постоянными уравнений движения*.

Третьей интеграционной постоянной является энергия W . Поскольку потенциальная энергия волчка в поле тяжести, в соответствии с уравнением (18.18), равна

$$V = mgs \cos \vartheta, \quad (25.6a)$$

имеем:

$$T + mgs \cos \vartheta = W. \quad (25.7)$$

Однако для того, чтобы с помощью последних соотношений получить аналитическое выражение законов движения тяжелого симметричного волчка, необходимо выразить кинетическую энергию T и проекции момента импульса $N_{\text{верт.}}$ и $N_{\text{фиг.}}$ через подходящие параметры, характеризующие положение волчка (эйлеровы углы), что будет сделано лишь в § 35. При этом аналитическое представление движения сведется к *эллиптическим интегралам*.

В частном случае это аналитическое представление описывает регулярную прецессию волчка, которая теперь, однако, не является общей формой движения, как было в случае свободного волчка, а получается только для специально подобранных значений n , N и W . Чаще всего наблюдаемая при обычном «возбуждении» тяжелого волчка прецессия является только по видимости регулярной; ее называют *псевдoreгулярной прецессией*. *Чистое вращение вокруг вертикально* расположенной оси фигуры также является, и притом при любой угловой скорости, возможной (устойчивой или неустойчивой) формой движения.

До сих пор мы рассматривали только уравнение момента импульса (25.2). Нам нужно, однако, коснуться также и уравнения импульса (25.1). В правой части этого уравнения стоит приложенная к неподвижной точке O сила \mathbf{F} , являющаяся реакцией подставки; назовем ее

опорной силой $\mathbf{F}_{\text{оп}}$. Изменение импульса, стоящее в левой части уравнения (25.1), согласно уравнению (24.2) и с учетом $u = 0$, равно

$$\dot{\mathbf{G}} = m \frac{d}{dt} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{R}] = m \dot{\mathbf{V}},$$

где \mathbf{V} — скорость движения центра тяжести. Таким образом, уравнение (25.1) принимает вид

$$\mathbf{F}_{\text{оп}} = m \dot{\mathbf{V}}.$$

Это означает, что для соблюдения закона движения центра тяжести волчок должен испытывать со стороны подставки действие опорной силы, равной произведению массы на ускорение его центра тяжести.

5. Тяжелый волчок с трехосным эллипсоидом инерции

Несмотря на усилия многих великих математиков, проинтегрировать в общем виде дифференциальные уравнения этой задачи не удалось. Из двух интегралов импульса, выражаемых соотношениями (25.6), первый остается в силе, так как момент силы тяжести и в этом случае действует относительно горизонтальной оси, вследствие чего конец вектора \mathbf{N} остается в горизонтальной плоскости, неподвижной в пространстве. Однако второе из соотношений (25.6) теряет силу, поскольку оно было связано с симметрией эллипсоида инерции. Интеграл энергии (25.7), разумеется, сохраняет силу и для общего случая эллипсоида инерции.

В разрешимых частных случаях предполагается либо специальное *распределение масс*, либо специальная *форма движения*.

Наиболее известным является случай С. Ковалевской. Эллипсоид инерции предполагается здесь *симметричным*, но центр тяжести лежит не на оси фигуры, а в экваториальной плоскости; кроме того, момент инерции относительно оси фигуры должен равняться половине экваториального момента инерции. В этом случае не требуется специализировать состояние движения.

Случай Штауде касается вопроса: какие оси, будучи расположены вертикально, могут являться *перманентными осями вращения*? Оказывается, что эти оси лежат в теле на конусе второго порядка, содержащем, кроме трех главных осей, также и центральную ось (проходящую через центр тяжести). Каждой оси соответствует определенная (с точ-

ностью до знака) угловая скорость вращения. При этом не требуется специализировать распределение масс и положение центра тяжести.

Наконец, в случае Гесса речь идет о движении, аналогичном простому движению маятника (сферического или, в частном случае, обыкновенного маятника). При этом центр тяжести должен лежать на определенной оси в эллипсоиде инерции, а начальное возбуждение волчка должно быть определенным образом специализировано, подобно тому, как это делается в случае симметричного волчка: центр тяжести последнего только тогда совершает маятникообразное движение в чистом виде, когда начальный момент импульса не имеет слагающей по оси фигуры.

§ 26. УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА. КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ СВОБОДНОГО ВОЛЧКА

1. Эйлеровы дифференциальные уравнения движения

Будем различать систему отсчета x, y, z , неподвижную в пространстве, и систему отсчета X, Y, Z , неподвижно связанную с телом. При свободном движении тела положение вектора момента импульса относительно системы x, y, z остается неизменным: $\mathbf{N} = \text{const}$ [уравнение (25.3)]; по отношению же к телу его положение непрерывно изменяется. Найдем закон, по которому происходит это изменение.

Для этого рассмотрим неподвижную относительно тела точку P и неподвижную в пространстве точку Q , которые в данный момент совпадают друг с другом. Обозначим скорость точки P в пространстве через \mathbf{v} , а скорость точки Q относительно тела — через \mathbf{V} . Согласно кинематическому уравнению (22.4), $\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]$. Скорость точки Q по отношению к телу равна по величине скорости точки P в пространстве, но противоположна ей по направлению:

$$\mathbf{V} = -[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}] = [\mathbf{r}\boldsymbol{\omega}].$$

Сведя эти скорости в таблицу, получим:

	По отношению к пространству	По отношению к телу
P	$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]$	$\mathbf{V} = 0$
Q	$\mathbf{v} = 0$	$\mathbf{V} = [\mathbf{r}\boldsymbol{\omega}]$

В качестве точки Q выберем неподвижный в пространстве конец вектора \mathbf{N} и поэтому можем написать:

$$\mathbf{r} = \mathbf{N}, \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{N}}{dt}.$$

Следовательно, под $\frac{d\mathbf{N}}{dt}$ мы понимаем «скорость изменения вектора \mathbf{N} по отношению к телу» (скорость изменения вектора \mathbf{N} в пространстве, равную в данном случае нулю, мы обозначали через $\dot{\mathbf{N}}$).

Используя вторую строку нашей таблицы, получим:

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = [\mathbf{N}\boldsymbol{\omega}]. \quad (26.1)$$

Тем самым мы получили векторную форму дифференциальных уравнений Эйлера¹ для случая отсутствия внешних сил (свободного движения твердого тела).

Перепишем это векторное уравнение в проекциях на оси X, Y, Z . Будем обозначать, по Эйлеру, компоненты вектора $\boldsymbol{\omega}$ через p, q, r , а компоненты вектора \mathbf{N} — через L, M, N . Тогда из уравнения (25.1) найдем:

$$\frac{dL}{dt} = Mr - Nq, \quad \frac{dM}{dt} = Np - Lr, \quad \frac{dN}{dt} = Lq - Mp. \quad (26.2)$$

При этом выбор осей X, Y, Z пока что совершенно произволен. Но если мы выберем в качестве осей X, Y, Z главные оси инерции тела [см. уравнение (22.15а)] и обозначим (также по Эйлеру) соответствующие главные моменты инерции через A, B, C , то, согласно общему соотношению (24.9) между компонентами векторов \mathbf{N} и $\boldsymbol{\omega}$, получим:

$$L = Ap, \quad M = Bq, \quad N = Cr. \quad (26.3)$$

¹Леонард Эйлер (1707–1783) — один из крупнейших математиков XVIII в. Швейцарец по происхождению, значительную часть своей жизни провел в России. Научная деятельность Эйлера протекала главным образом в стенах Российской Академии Наук, членом которой он состоял. (Прим. ред.)

Тогда уравнения (26.2) примут следующий простой вид:

$$\left. \begin{aligned} A \frac{dp}{dt} &= (B - C)qr, \\ B \frac{dq}{dt} &= (C - A)rp, \\ C \frac{dr}{dt} &= (A - B)pq. \end{aligned} \right\} \quad (26.4)$$

Эти необыкновенно изящные и симметричные формулы называются обычно «эйлеровыми дифференциальными уравнениями» вращения твердого тела.

Прежде всего мы обобщим их для случая, когда на тело действует момент внешней силы, который мы обозначим через \mathbf{M} . Тогда конец вектора \mathbf{N} не будет более неподвижным, а согласно уравнению (25.2), будет двигаться в пространстве со скоростью $\mathbf{v} = \mathbf{M}$.

Вышеупомянутая точка Q движется по отношению к телу со скоростью, которая складывается из скоростей $\mathbf{v} = \mathbf{M}$ и $\mathbf{V}[\mathbf{r}\boldsymbol{\omega}]$. В связи с этим уравнение (26.1) видоизменяется следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = [\mathbf{N}\boldsymbol{\omega}] + \mathbf{M}, \quad (26.5)$$

и в правых частях уравнений (26.3) и (26.4) появляются новые слагаемые проекции вектора \mathbf{M} на оси X , Y , и Z .

Разберем это более подробно только для случая тяжелого симметричного волчка, когда момент \mathbf{M} направлен по линии узлов и, согласно уравнению (25.4), абсолютная величина его равна

$$|\mathbf{M}| = mgs \sin \vartheta.$$

Во избежание возможной двойственности в понятиях: «вертикаль», «ось фигуры», «линия узлов», установим следующее правило знаков: положительное направление неподвижной в пространстве оси идет вверх и определяет «полупрямую (луч) вертикали». Положительное направление оси Z проходит через центр тяжести тела и определяет «полупрямую (луч) оси фигуры». С вертикалью положительное направление оси Z образует угол ϑ . Линия узлов представляет собою перпендикулярную к осям z и Z полупрямую, образующую с направлением возрастания угла ϑ праввинтовую систему. Величина s положительна. Далее,

обозначим угол, образуемый линией узлов с положительным направлением оси X , через φ . Тогда проекции момента \mathbf{M} на оси X, Y, Z будут равны соответственно

$$mgs \sin \vartheta \cos \varphi, \quad -mgs \sin \vartheta \sin \varphi, \quad 0, \quad (26.5a)$$

и при $B = A$ уравнения Эйлера (26.4) примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} A \frac{dp}{dt} &= (A - C)qr + mgs \sin \vartheta \cos \varphi, \\ A \frac{dq}{dt} &= (C - A)rp - mgs \sin \vartheta \cos \varphi, \\ C \frac{dr}{dt} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (26.6)$$

Последнее уравнение показывает, что для случая тяжелого (и тем более свободного) симметричного волчка справедливо уже знакомое нам равенство

$$Cr = N = \text{const}. \quad (26.7)$$

Но в то же время мы видим, что уравнения Эйлера не пригодны для дальнейшего интегрирования в случае тяжелого волчка, так как нам неизвестна (или пока еще неизвестна) связь между слагающими p, q и углами ϑ, φ .

Что касается слагающих угловой скорости p, q, r , то необходимо еще раз подчеркнуть, что они не являются скоростями в обычном смысле, т. е. производными по времени от каких-либо пространственных координат. Мы можем по аналогии с выражением, употребленным на стр. 71, назвать их «неголономными слагающими скорости».

Перепишем уравнение (26.5) в несколько иной форме, заменив \mathbf{M} , в соответствии с уравнением (25.2), на \mathbf{N} . Полученное таким образом равенство

$$\dot{\mathbf{N}} = \frac{d\mathbf{N}}{dt} + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{N}] \quad (26.8)$$

справедливо для всякого (аксиального или полярного) вектора. В применении к вектору угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ это равенство дает:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}; \quad (26.8a)$$

для вектора угловой скорости ω , и только для него, скорость изменения его в пространстве равна скорости изменения в системе отсчета, связанной с телом. На эту теорему мы уже указывали в примечании на стр. 181.

2. Регулярная прецессия свободного симметричного волчка и эйлера теория колебаний полюса

На случае *шарового волчка* мы останавливаться не будем. Его движение представляет собой в общем случае чистое вращение вокруг оси, неподвижно связанной с телом, что непосредственно вытекает из уравнений (26.4), если и них положить $A = B = C$. Эта неподвижная в теле ось, как мы знаем (ср. § 25, раздел 1), неподвижна также и в пространстве и совпадает с направлением вектора момента импульса.

Перейдем к рассмотрению *симметричного волчка*, у которого $B = A \neq C$. Из третьего уравнения (26.4) найдем

$$r = \text{const},$$

что видно также из уравнения (26.7). Первые два уравнения (26.4) запишутся так:

$$\left. \begin{aligned} A \frac{dp}{dt} &= (A - C)qr, \\ A \frac{dq}{dt} &= (C - A)pr. \end{aligned} \right\} \quad (26.9)$$

Удобно объединить их в одно уравнение в комплексной форме. Умножая второе уравнение на i и складывая его с первым, получим:

$$A \frac{ds}{dt} = i(C - A)rs, \quad \text{где } s = p + iq. \quad (26.10)$$

Для сокращения записи введем обозначение

$$\alpha = \frac{C - A}{A}r \quad (26.11)$$

и, интегрируя уравнение (26.10), найдем:

$$s = s_0 e^{i\alpha t}, \quad (26.12)$$

где s_0 — постоянная интегрирования.

Здесь s — проекция угловой скорости ω на экваториальную плоскость волчка, если ею пользоваться в качестве *гауссовой* плоскости для изображения s^1 . Из уравнения (26.12) видно, что эта проекция описывает круг радиуса s_0 постоянной угловой скоростью α . Вместе с этим вектор угловой скорости ω описывает круговой конус вокруг оси фигуры; угол раствора этого конуса β определяется уравнением

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{r} = \frac{|s_0|}{r}. \quad (26.12a)$$

В таком виде представляется *регулярная прецессия наблюдателю*, связанному с волчком (конечно, с точки зрения неподвижного в пространстве наблюдателя ось фигуры волчка в каждый данный момент вращается вокруг мгновенной оси вращения, которая, как мы знаем, в свою очередь описывает круговой конус вокруг неподвижного вектора момента импульса \mathbf{N}). В применении к вращению Земли, которое мы будем рассматривать, наиболее удобна как раз точка зрения связанного с «волчком» наблюдателя — обитателя Земли.

Земля представляет собой сплюснутый волчок. Назовем *геометрическим северным полюсом* точку пересечения оси фигуры Земли с ее поверхностью; он, вообще говоря, не совпадает с *кинематическим северным полюсом* — точкой пересечения вектора угловой скорости вращения Земли с ее поверхностью. По теории Эйлера, изложенной в настоящем параграфе, кинематический северный полюс описывает окружность вокруг геометрического северного полюса — так называемый *круг Эйлера*. Поскольку последний является траекторией полюса вращения, он называется также *полодией*.

Удобной мерой сплюснутости Земли является так называемая эллиптичность:

$$\frac{C - A}{A} \sim \frac{1}{300}. \quad (26.13)$$

Угловая скорость вращения Земли определяется из продолжительности суток, а именно:

$$r \sim \omega = \frac{2\pi}{\text{сутки}}. \quad (26.14)$$

¹Под гауссовой плоскостью автор понимает здесь плоскость комплексной переменной s . (*Прим. ред.*).

Отсюда, согласно обозначению (26.11), следует:

$$\alpha = \frac{C - A}{A} r = \frac{2\pi}{300} (\text{сутки})^{-1}. \quad (26.15)$$

Таким образом, Эйлеров период прецессии составляет

$$\frac{2\pi}{\alpha} = 300 \text{ суток} = 10 \text{ месяцев}. \quad (26.16)$$

Мы привыкли считать ось вращения Земли неподвижно расположенной в теле нашей планеты и проходящей через ее геометрические полюсы. Но, строго говоря, это не соответствует действительности. Всякое перемещение масс на Земле в направлении меридиана должно вызывать смещение ее оси вращения¹, равно как всякое перемещение масс в направлении параллели должно изменять угловую скорость вращения Земли, а следовательно, продолжительность суток; оба эти явления представляют собой следствия закона сохранения момента импульса. Когда подобное перемещение прекратится и кинематический полюс Земли окажется отклоненным, он снова начнет совершать свое движение по кругу Эйлера вокруг геометрического полюса.

Сравним теперь с этими выводами из теории Эйлера результаты наблюдений колебаний полюса учеными различных стран. Для периода 1895–1900 гг. получается полодия, представленная на рис. 44.

Согласно этим наблюдениям, среднее угловое отклонение кинематического полюса (т. е. средний угловой радиус круга Эйлера) составляло в названные годы приблизительно $\frac{1}{8}''$, что соответствует линейному отклонению по земной поверхности, равному приблизительно 4 м. Но вместо периода полного оборота в 10 месяцев мы имеем, как показано на рис. 44, за 4 года (1893–1900 г) $3\frac{1}{2}$ оборота, что соответствует одному обороту в 14 месяцев.

Период в 14 месяцев называется в честь открывшего его ученого *периодом Чандлера*. Величину этого периода объясняют упругими деформациями Земли вследствие вызванного смещением полюсов изменения центробежных воздействий. Модуль упругости Земли приблизительно равен модулю упругости стали.

¹Наибольшие перемещения масс на Земле связаны с ежегодными смещениями максимума воздушного давления, происходящими между азиатским континентом и Тихим океаном.

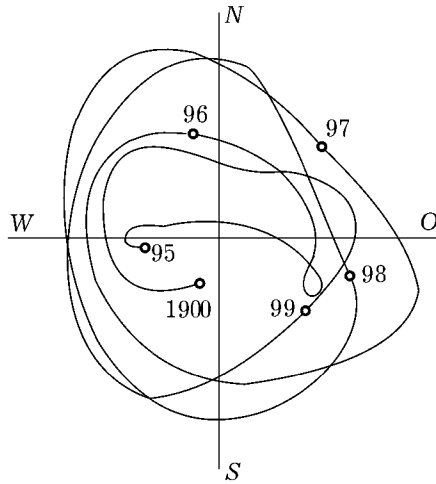


Рис. 44. Изменения положения полюса за время с 1895 по 1900 г., иллюстрирующие период Чандлера

Наблюдаемую полодию, представленную на рис. 44, можно понимать как наложение: 1) колебаний, происходящих с периодом Чандлера, 2) годовых колебаний, очевидно метеорологического происхождения, и 3) нерегулярных отклонений указывающих, по-видимому, на какие-то единовременные перемещения масс. По поводу десятимесячного периода Эйлера, который был получен как результат идеализированного представления о Земле, как о твердом теле, у нас никаких дополнительных замечаний нет.

В соответствии с принятой в теории волчка терминологией, мы назвали движение земной оси, исследованное впервые Эйлером, «свободной прецессией». Однако это противоречит терминологии, установившейся в астрономии. Как известно, термином «астрономическая прецессия» обозначают медленное вращение земной оси вокруг нормали к плоскости эклиптики, следствием которого является непрерывное смещение точек равноденствия в направлении, противоположном движению Земли по орбите, составляющее немного более $50''$ в год. Этой величине «опережения» соответствует период полного обращения земной оси вокруг нормали к плоскости эклиптики, равный $\frac{300^\circ}{50''} = 26\,000$

лет. Вместо предварения (опережения) точек равноденствия можно говорить также о «предварении линии узлов» (линии пересечения плоскости эклиптики с экваториальной плоскостью Земли); как мы отмечали выше, термин «линия узлов» заимствован из астрономии.

Астрономическая прецессия не является *свободным* движением Земли-волчка; это движение *вынужденное*, возникающее как результат одновременного притяжения Земли Солнцем и Луной. Уясним себе действие этого притяжения с помощью рис. 45, причем нам придется качественно предвосхитить теорию тяжелого симметричного волчка.

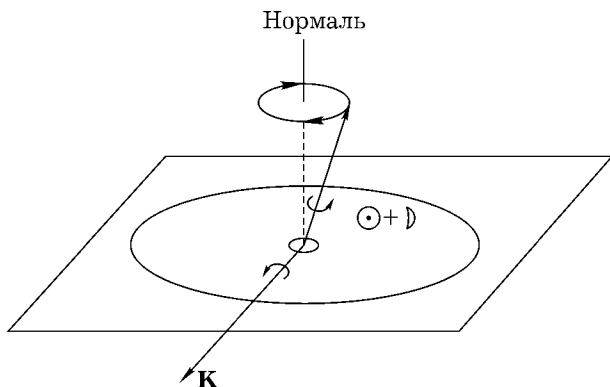


Рис. 45. Астрономическая прецессия земной оси

На фигуре представлена плоскость эклиптики и в этой плоскости — круг, по всей площади которого следует мысленно равномерно распределить массы Солнца \odot и Луны \lrcorner (собственно говоря, два круга — «круг Солнца» и «круг Луны»¹, которые мы здесь слили в одно целое). Это равномерное распределение масс равносильно усреднению по времени мгновенных положений Солнца и Луны за период их относительного обращения вокруг Земли (в смысле метода теории возмущений Гаусса). Это усреднение по времени может быть оправдано тем, что времена относительного обращения Солнца и Луны вокруг Земли очень малы по сравнению с вышеупомянутым периодом прецессии, так что прецессия ни в коем случае не может зависеть от положения Солн-

¹ Воздействие Луны, ввиду ее меньшей удаленности от Земли, даже превосходит действие Солнца приблизительно и два раза.

ца и Луны в каждый данный момент времени. В центре круга $\odot + \rangle$ мы видим в разрезе Землю с ее двумя вздутьями у экватора. Только эти вздутья и играют роль для рассматриваемого воздействия, а именно: притяжение кольца $\odot + \rangle$ стремится установить их в плоскости эклиптики, что непосредственно очевидно. Таким образом, мы имеем дело с вращающим моментом относительно линии узлов; направление этого момента указано стрелкой. Это — вращающий момент того же рода, что и вращающий момент силы тяжести, действующий на волчок, центр тяжести которого находится ниже точки опоры. Поэтому и результат таков же, как для волчка: вместо того, чтобы поддаться «непосредственному» воздействию вращающего момента, ось фигуры Земли-волчка отклоняется в сторону и описывает конус прецессии вокруг вертикали (нормали к эклиптике).

Правда, *регулярная* прецессия представляет собой лишь частный случай движения тяжелого волчка (ср. стр. 183); наиболее же общим видом движения, которого следует ожидать в данном случае, является упомянутая там же *псевдoreгулярная* прецессия, которая представляет собой результат наложения регулярной прецессии и малых нутаций. Эти нутации являются, однако, не чем иным, как свободными «коническими» качаниями оси фигуры, т. е. в нашем случае колебаниями полюса с периодом, равным периоду Эйлера (точнее, если учесть деформацию Земли, периоду Чандлера). Таким образом, ожидаемая псевдoreгулярная прецессия действительно получается в результате наложения этих свободных нутаций на астрономическую прецессию.

Здесь нам снова приходится столкнуться с двояким значением термина. В *астрономии* под *нутацией* понимают не свободное, а вынужденное *движением Луны* колебание земной оси. Орбита Луны не лежит в плоскости эклиптики, как это допускалось на рис. 45, а наклонена к ней под углом в 5° . Под действием совместного притяжения Солнца и Земли нормаль к лунной орбите описывает конус прецессии вокруг нормали к эклиптике. Эта прецессия означает *обратное движение лунных узлов* (точек пересечения орбиты Луны с плоскостью эклиптики), которое, однако, происходит гораздо скорее, чем прямое движение земных узлов, а именно в течение $18\frac{2}{3}$ лет. Понятно, что и земная ось, со своей стороны, испытывает влияние этих возмущений: обратное движение лунных узлов вызывая *астрономическую нутацию земной оси*, происходящую с тем же периодом.

3. Движение трехосного волчка. Исследование устойчивости неизменных вращений его вокруг главных осей инерции

Перейдем к интегрированию уравнений Эйлера (26.4) для случая $A \neq B \neq C$. Умножая их соответственно на p , q , r и складывая, получаем:

$$Ap \frac{dp}{dt} + Bq \frac{dq}{dt} + Cr \frac{dr}{dt} = 0.$$

Интегрирование дает:

$$\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = \text{const} = W. \quad (26.17)$$

Здесь W — постоянная энергии, а левая часть уравнения выражает кинетическую энергию [в соответствии с уравнением (22.126), преобразованным к главным осям инерции]. Уравнения (26.4) можно далее умножить соответственно на Ap , Bq , Cr ; при последующем их сложении в правой части опять получается нуль. Интегрируя, получим:

$$(Ap)^2 + (Bq)^2 + (Cr)^2 = \text{const} = |\mathbf{N}|^2. \quad (26.18)$$

Слева стоит сумма квадратов компонент момента импульса. Она, как известно, остается постоянной в случае свободного движения волчка, в то время как сами эти компоненты при движении изменяются.

Уравнения (26.17) и (26.18) — линейные однородные уравнения относительно p^2 , q^2 и r^2 , из них мы можем выразить, например, q^2 и r^2 через p^2 :

$$\left. \begin{aligned} q^2 = \beta_1 - \beta_2 p^2, \quad \beta_1 &= \frac{2WC - |\mathbf{N}|^2}{B(C - B)}, \quad \beta_2 = \frac{A(C - A)}{B(C - B)}, \\ r^2 = \gamma_1 - \gamma_2 p^2, \quad \gamma_1 &= \frac{2WB - |\mathbf{N}|^2}{C(B - C)}, \quad \gamma_2 = \frac{A(B - A)}{C(B - C)}. \end{aligned} \right\} \quad (26.19)$$

Подставляя эти значения q и r в первое из уравнений (26.4), получим

$$\frac{dp}{\sqrt{(\beta_1 - \beta_2 p^2)(\gamma_1 - \gamma_2 p^2)}} = \frac{B - C}{A} dt. \quad (26.20)$$

Таким образом, t является эллиптическим интегралом первого рода от p (ср. стр. 133); отсюда следует, что (как доказывается в теории функций) p есть эллиптическая функция времени. То же самое, разумеется, относится и к слагающим q и r .

Кроме того, из уравнений (26.17) и (26.18) следует, что конус полодии является не круговым конусом, как в случае симметричного волчка, а конусом четвертого порядка.

Теперь рассмотрим вращения несимметричного волчка вокруг каждой из его главных осей; эти вращения, как мы знаем (ср. § 25, конец раздела 3), являются неизменными вращениями. Предположим, например, что

$$A > B > C.$$

Покажем, что вращения вокруг главных осей, соответствующих наибольшему и наименьшему главным моментам инерции, являются устойчивыми, а вращение вокруг главной оси, соответствующей среднему из главных моментов инерции, — неустойчивым. Мы будем исходить из преобразованных уравнений (26.17) и (26.18), введя в них компоненты момента импульса L , M , N , что весьма удобно для последующего графического представления:

$$\frac{L^2}{A} + \frac{M^2}{B} + \frac{N^2}{C} = \text{const}, \quad (26.21a)$$

$$L^2 + M^2 + N^2 = \text{const} = |\mathbf{N}|^2. \quad (26.21b)$$

Уравнение (26.21a) представляет сферу радиуса $|\mathbf{N}|$, а уравнение (26.21b) — трехосный эллипсоид.

С л у ч а й А. Вращение вокруг наибольшей оси эллипсоида, выражаемого уравнением (26.21a). В случае чистого вращения сфера касается эллипсоида снаружи в точке A рис. 46а. Легкий толчок, вообще говоря, немного изменяет как сферу, так и эллипсоид. Вместо точки касания A сферы с эллипсоидом получается небольшая кривая пересечения, проходящая в непосредственной близости от точки A , образуется узкий конус полодии. Первоначальное вращение оказывается устойчивым.

Вполне идентичен с л у ч а й В, когда вращение происходит вокруг наименьшей оси эллипсоида (26.21a). В этом случае сфера касается эллипсоида изнутри. При легком толчке точка касания A сферы с эллипсоидом переходит в небольшую кривую, проходящую опять-таки

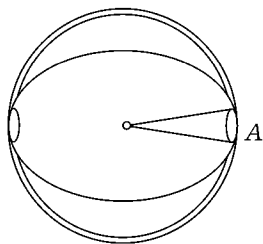


Рис. 46а. Устойчивое вращение трехосного волчка вокруг наибольшей оси эллипсоида инерции

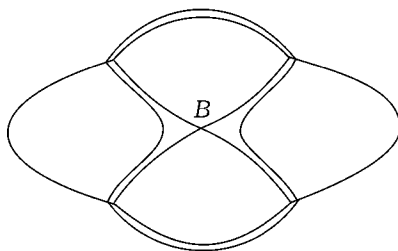


Рис. 46б. Неустойчивое вращение трехосного волчка вокруг средней оси эллипсоида инерции

вблизи точки *A*. И в этом случае первоначальное вращение является *устойчивым*.

Случай В. Вращение вокруг средней оси эллипсоида. В этом случае сфера пересекает эллипсоид по кривой четвертого порядка; двойная точка последней *B* (передняя точка на рис. 46б) изображает первоначальное вращение. При легком толчке кривая пересечения распадется на две ветви. По одной из этих ветвей движется ось вращения, все больше отдаляясь от своего начального положения в теле¹. Вращение является неустойчивым.

Поучительно доказать то же самое аналитическим путем, исходя из дифференциальных уравнений (26.4). Можно показать (см. задачу IV.2), что боковые слагающие угловой скорости вращения (появление которых вызвано небольшим возмущением) удовлетворяют системе двух линейных дифференциальных уравнений, имеющих в случаях *A* и *B* решения *тригонометрического* вида, а в случае *B* — решение *экспоненциального* вида (метод малых колебаний в качестве критерия устойчивости).

Продедаем следующий опыт с полной спичечной коробкой. Возьмем коробку большим и указательным пальцами за *короткие ребра* и, придав ей вращение вокруг оси, параллельной этим ребрам, отбросим ее от себя. Двигаясь по воздуху, коробка будет все время повернута эти-

¹ Утверждение автора неточно. На самом деле по одной из упомянутых ветвей движется относительно тела не сама ось вращения, а вектор момента количества движения. (*Прим. ред.*)

кеткой в одну и ту же сторону. Подобное же явление, хотя и менее отчетливо, будет наблюдаться при вращении отброшенной коробки вокруг *длинного ребра* (с той разницей, что сохранять положение будет наименьшая грань). Если же отбросить коробку, придав ей вращение вокруг *среднего ребра*, то наблюдается чередование различных граней, что и говорит о неустойчивости вращения.

§ 27. ДЕМОНСТРАЦИОННЫЕ ОПЫТЫ ПО ТЕОРИИ ВОЛЧКА И ТЕХНИЧЕСКИЕ ПРИМЕНЕНИЯ ЭТОЙ ТЕОРИИ

Опишем прежде всего хорошо известное устройство карданова подвеса, при помощи которого можно произвести особенно наглядные опыты для иллюстрации теории волчка.

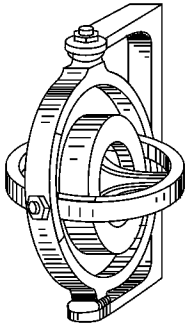


Рис. 47. Волчок в кардановом подвесе. Ось вращения внешнего кольца вертикальна, ось вращения внутреннего кольца горизонтальна и направлена спереди назад, ось вращения маховичка горизонтальна и направлена слева направо

Подвес состоит из двух колец — внешнего и внутреннего. Внешнее кольцо может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, укрепленной в стойке, а внутреннее кольцо — вокруг горизонтальной оси, укрепленной во внешнем кольце. Во внутреннем кольце вращается маховичок на цапфах, ось которых перпендикулярна к оси вращения внутреннего кольца. На рис. 47 ось маховичка направлена перпендикулярно к плоскости внешнего кольца, вследствие чего плоскость внутреннего кольца расположена горизонтально. Назовем эту начальную установку прибора его нормальным положением.

На оси маховичка находится приспособление, позволяющее сообщить маховичку в его нормальном положении, при покоящихся внешнем и внутреннем кольцах, столь значительный момент вращения, что все явления, в основном, определяются именно этим моментом, в то время как массами внешнего и внутреннего колец можно пренебречь.

Во всех описываемых ниже опытах предполагается наличие значительного момента вращения маховичка и нормальное положение его в начале опыта.

1. Нажмем слегка на *внутреннее кольцо* в направления сверху вниз. Это кольцо не будет опускаться, но *внешнее кольцо* начинает вращаться так, что ось фигуры маховичка отклоняется вперед или назад (в горизонтальной плоскости), в зависимости от положения точки, в которой мы произвели давление. Вместо того, чтобы оказывать давление на внутреннее кольцо, можно односторонне нагрузить его небольшим грузом. Тогда волчок будет совершать *регулярную прецессию* до тех пор, пока его момент импульса будет достаточно велик, причем ось фигуры во время прецессии волчка будет оставаться горизонтальной.

2. Нажмем теперь на *внешнее кольцо*. Это кольцо остается неподвижным, *внутреннее же кольцо* начинает вращаться и отклоняется от своего горизонтального положения вверх или вниз, в зависимости от того, в каком направлении было произведено давление на внешнее кольцо. Даже сильный удар, сообщенный внешнему кольцу, не оказывает на него заметного действия. Мы увидим в этом случае лишь быстрое «коническое» маятникообразное движение оси фигуры вокруг оси, проходящей вблизи нормального положения. Прибор сделан настолько хорошо, что он может выдержать даже сильные удары кулаком.

3. Если давление на внешнее кольцо сохраняется и ось фигуры волчка при дальнейшем вращении внутреннего кольца приближается к вертикали, то «сопротивляемость» внешнего кольца непрерывно уменьшается. Теперь внешнее кольцо без труда может быть приведено в быстрое вращение, *но только в направлении, соответствующем направлению первоначально произведенного давления*. При попытке вызвать вращение внешнего кольца в *противоположном направлении* маховичок «переворачивается»: его ось фигуры стремится внезапно принять противоположное направление, причем внутреннее кольцо, очевидно, поворачивается на 180° . Хотя теперь мы можем беспрепятственно вызвать вращение внешнего кольца в новом (противоположном начальному) направлении, но попытка вынудить вращение этого кольца в первоначальном направлении снова вызовет «переворачивание» оси волчка.

4. В этих опытах проявляется обнаруженная Фуко *тенденция к гомологичному, или одинаково направленному, параллелизму осей вращения*. Вертикальное положение оси фигуры волчка *устойчиво* до тех пор, пока направление его вращения совпадает с направлением вращения

внешнего кольца. В случае противоположного направления этих двух вращений вертикальное положение оси фигуры волчка *в высшей степени неустойчиво*, и эта ось стабилизируется лишь тогда, когда она примет противоположное направление, при котором имеет место гомологичный параллелизм обеих осей вращения. С помощью соответствующего ритмичного чередования давлений на внешнее кольцо можно вызвать непрерывное «перекидывание» маховичка вокруг оси внутреннего кольца.

5. Если жестко скрепить внутреннее кольцо с внешним, т. е. лишить его подвижности, то «сопротивляемость» волчка исчезнет. Волчок будет без сопротивления поддаваться всякому давлению, произведенному на внешнее кольцо, как будто он вовсе не обладает моментом вращения. Типичные гироскопические эффекты наблюдаются только у волчка с *тремя степенями свободы* и отсутствуют у волчка с *двумя степенями свободы*. Можно, однако, возместить недостающую степень свободы, укрепив волчок на вращающемся диске, описанном на стр. 101, таким образом, чтобы ось внешнего кольца (прежде вертикальная) образовала с вертикальной осью вращающегося диска не слишком малый угол. В этом случае ось волчка с двумя степенями свободы устремится в направлении оси вращения диска (подобно тому, как стрелка компаса поворачивается в направлении Северного полюса), и притом так, чтобы угловые скорости вращения диска и волчка были параллельны и одинаково направлены¹; направления движения обоих концов оси фигуры волчка при этом переходе в устойчивое положение определяются, очевидно, направлением вращения диска.

Все описанные явления — следствия основного закона (25.5):

$$d\mathbf{N} = \mathbf{M} dt. \quad (27.1)$$

1. При давлении на *внутреннее кольцо* момент \mathbf{M} направлен горизонтально параллельно оси вращения внутреннего кольца. Момент импульса \mathbf{N} на рис. 47 направлен вправо или влево, так что момент \mathbf{M} отклоняет его в *боковом направлении*. Таким образом, если мы вправо

¹Точнее, ось волчка установится в плоскости, проходящей через ось вращения диска и ось вращения внешнего кольца. Она установилась бы параллельно оси вращения диска, если бы, не скрепляя между собой внешнее и внутреннее кольца, закрепить внешнее кольцо на диске так, чтобы ось вращения внутреннего кольца была горизонтальна. (*Прим. ред.*)

допустить, что ось фигуры, первоначально совпадавшая с направлением момента импульса, непрерывно следует за ним, то боковое отклонение этой оси, а следовательно, и вращение *внешнего кольца*, получает весьма простое объяснение. Справедливость этого допущения при достаточно быстром вращении волчка будет нами обоснована, впрочем, только в § 35 (см. приведенное там изложение теории псевдорегулярной прецессии).

2. При давлении на *внешнее* кольцо момент M направлен вертикально. Момент импульса, первоначально направленный горизонтально (вправо или влево), отклоняется, таким образом, вверх или вниз. Тем самым объяснено (при том же допущении, что и в п. 1) вращение *внутреннего* кольца. При очень сильном ударе по внешнему кольцу наше допущение относительно того, что ось фигуры волчка следует за направлением вектора момента импульса, оказывается лишь приближенно правильным; в этом случае и возникает упомянутое выше «коническое» маятниковобразное движение, которое характеризуется небольшим расхождением между осью фигуры и вектором момента импульса волчка.

3 и 4. Если момент импульса направлен почти вертикально, то вращение внешнего кольца в направлении, *совпадающем* с вращением маховичка, приводит к еще большему приближению оси вращения последнего к вертикали. В этом случае оба кольца и маховичок вращаются, как одно целое, вокруг вертикали. «Спротивляемость» внешнего кольца исчезает. Напротив, при вращении внешнего кольца в противоположном направлении достаточно лишь незначительного отклонения оси вращения маховичка от вертикали, чтобы вызвать дальнейшее резкое удаление от нее; почти вертикальное положение оси маховичка оказывается *неустойчивым* по отношению к этому (негомологичному) вращению внешнего кольца.

5. При жестком скреплении внутреннего кольца с внешним ось вращения маховичка лишена возможности перемещаться в вертикальной плоскости под действием направленного по вертикали момента M , вызванного вращением внешнего кольца. Поэтому вращение внешнего кольца передается всей системе. Это возможно потому, что усилия, возникающие при соответствующем горизонтальном перемещении оси вращения маховичка, благодаря жесткому соединению обоих колец, воспринимаются подшипниками внешнего кольца. Иначе обстоит дело при наличии вращающегося диска; здесь ось вращения маховичка мо-

жет, по крайней мере отчасти, «следовать» за внешним моментом M , вследствие чего она устанавливается параллельно оси вращения диска.

Теперь остановимся на некоторых технических применениях теории гироскопа (волчка)¹.

1. Прибор для стабилизации торпеды

По внешнему виду торпеда напоминает большую рыбу. В головной части торпеды помещается разрывной заряд, а за ним расположена камера со сжатым воздухом (пневматическая камера), служащая источником энергии для двигателей гироскопа и приборов бокового и глубинного управления. Затем следует машинное отделение для моторов, обеспечивающих с помощью винтов поступательное движение торпеды. В хвостовой части торпеды, непосредственно перед винтами, помещается представляющий для нас наибольший интерес прибор для стабилизации торпеды, изображенный на рис. 47. Он изобретен австрийским инженером Обри и служит для бокового (горизонтального) *управления торпедой*.

Прежде всего скажем несколько слов о сравнительно простом *управлении по глубине*. Торпеда должна двигаться в воде на определенной заранее установленной глубине. Для этого служит поршень, находящийся под действием давления воды. Если установленная глубина превышена, то давление воды переместит поршень назад, если же эта глубина не достигнута, то поршень передвинется вперед. В обоих случаях поршень при помощи сжатого воздуха приводит в действие рули глубины, отклоняющие торпеду вверх или, соответственно, вниз. Ввиду этого, траектория торпеды в вертикальной плоскости представляет собой волнообразную линию, «вьющуюся» около горизонтали, проведенной на желаемой глубине.

Более трудным делом является боковое управление: несмотря на наличие водяных течений, торпеда должна сохранять начальное направление, полученное при выстреле. Для этого необходим прибор, способный независимо ориентироваться в пространстве. Этой способностью обладает гироскоп. В момент выстрела маховичок прибора Обри приводится в быстрое вращение. Благодаря этому внешнее кольцо оказывается фиксированным в пространстве, как это имело место в опы-

¹ Прекрасное элементарное изложение технических применений гироскопа можно найти в книге Е. Л. Николаи. Гироскоп, Гостехиздат, 1947. (*Прим. ред.*)

те 2; оно сохраняет свою ориентацию также и при боковом отклонении торпеды. В последнем случае корпус торпеды поворачивается относительно неподвижной плоскости внешнего кольца. Штифт, укрепленный на внешнем кольце (виден на рис. 47 слева вверху), приходит в соприкосновение с клапаном, укрепленным на корпусе торпеды; штифт открывает клапан и таким образом дает возможность сжатому воздуху привести в действие боковой руль, который и выправляет торпеду в боковом направлении. Таким образом, и в горизонтальной плоскости траектория торпеды имеет вид волнообразной линии, вьющейся около линии выстрела.

Заметим, что гироскоп действует здесь по отношению к боковому рулю в качестве *прибора управления*, а не в качестве непосредственного *двигателя*. Для последней цели, учитывая массивность торпеды, его мощность оказалась бы недостаточной.

2. Успокоитель качки корабля и аналогичные приборы

Бессемер (имя которого широко известно металлургам) около 1870 г. построил особую салон-каюту для судоходства на Ламанше. Эта каюта подвешивалась так, что могла свободно качаться вокруг продольной оси судна, и должна была стабилизироваться вращением маховика против боковой качки. Однако ось маховика жестко закреплялась в каюте, вследствие чего ему не хватало необходимой третьей степени свободы (ср. выше, опыт 5). Поэтому конструкция оказалась неудачной, и вскоре от нее пришлось отказаться.

Эта проблема, как и проблема уравнивания масс (стр. 103), была успешно разрешена О. Шликом. Маховик (имеющий окружную скорость 150 м/сек, вес 5 100 кг и диаметр 1,6 м) укрепляется в раме, которая, подобно маятнику, может качаться вокруг оси, расположенной поперек судна; при этом ось фигуры маховика колеблется в вертикальной плоскости продольного сечения судна. Эта рама соответствует внутреннему кольцу, а сам корпус судна — внешнему кольцу нашего демонстрационного волчка. Роль прежней (см. рис. 47) вертикали теперь играет продольная ось судна; прежним поворотам вокруг вертикали теперь соответствует боковая качка судна. Таким образом, необходимые три степени свободы представлены здесь боковой качкой, колебаниями рамы и собственным вращением маховика. При боковой качке ось фигуры маховика (расположенная в нормальном положении

вертикально) отклоняется вместе с рамой попеременно то вперед, то назад, причем энергия боковой качки судна превращается в кинетическую и потенциальную энергию рамы. Боковая качка судна и колебания рамы связаны друг с другом. В частном случае, когда оба соответствующих собственных колебания находятся в резонансе, имеют место соотношения, аналогичные соотношениям для симпатических маятников. Впрочем, этого еще недостаточно для «гашения» колебаний судна. Однако оказывается возможным поглотить энергию качаний рамы и, тем самым, энергию боковой качки корабля с помощью тормозов, действующих в опорных цапфах рамы подобно тому, как с помощью колесных тормозов уменьшают скорость вагона. При этом торможение рамы не должно быть настолько сильным, чтобы вообще ликвидировать отклонение оси гироскопа, ибо в этом случае мы снова имели бы дело с неэффективным волчком с двумя степенями свободы. Заснятые диаграммы боковой качки показывают, что действительно существует оптимальное среднее торможение: при включении гироскопа амплитуды колебания судна почти мгновенно уменьшались до $\frac{1}{10} - \frac{1}{20}$ первоначальной амплитуды, причем отклонения рамы составляли 30–40°.

Причина, почему этот успокоитель качки все же не нашел широкого применения, заключается отчасти в небезопасности конструкции (быстро вращающийся массивный маховик является опасным «пассажиром»), отчасти же в том, что нашелся еще более сильный «конкурент», именно успокоительная цистерна Фрама, действие которой основано на совершенно ином принципе.

С изложенной выше проблемой связана проблема стабилизации с помощью гироскопических эффектов установленной на корабле вращающейся платформы, например, для корабельных орудий. Мы не знаем, в какой мере разрешена эта проблема практически; работы в этой области проводятся, разумеется, уже давно и во всех странах.

3. Гирокомпас

Гирокомпас является весьма тонко и прекрасно разработанной конструкцией гироскопа. Идея гирокомпаса принадлежит Фуко. Доказав своими опытами с маятником вращение Земли (гл. V, § 31), он решил добиться того же самого с помощью опытов с волчком. Из различных методов, примененных им для этой цели, упомянем замену магнитного компаса волчком с двумя степенями свободы, укрепленным в горизон-

тальной плоскости; вместо того, чтобы указывать на *магнитный* Северный полюс, этот волчок прямо указывает на полюс вращения Земли — собственно *кинематический* Северный полюс. Это устройство мы по существу описали в п. 5 наших демонстрационных опытов, рассматривая помещенный на вращающемся диске волчок с закрепленным внутренним кольцом. Теперь вращающемуся диску соответствует вращающаяся Земля. Различие заключается только в том, что вращающемуся диску мы могли сообщить угловую скорость любой величины и поэтому получали резко выраженный эффект «установки» (ориентации) оси волчка, тогда как угловая скорость вращения Земли весьма мала, и поэтому установка «гироскопа Фуко» происходит крайне медленно. При описании опытов с волчком на вращающемся диске мы отмечали, что ось вращения внешнего кольца должна образовать с осью вращения диска не слишком малый угол. При рассмотрении вращения Земли этому углу соответствует дополнительный угол географической широты места наблюдения. На Северном и Южном полюсах Земли, где этот угол равен нулю, прекращается и «ориентирующее» действие волчка. Вообще, «ориентирующее» действие волчка пропорционально угловой скорости вращения Земли, моменту импульса волчка и синусу названного угла.

Опыты Фуко лишь указали на существование описанного эффекта. Полное же доказательство этого эффекта дал Герман Аншютц-Кемпф, пользовавшийся все более и более совершенными конструкциями гироскопа. Его первоначальной целью было достижение Северного полюса на подводной лодке под дрейфующим льдом. Ввиду того, что показания магнитного компаса вблизи Северного полюса становятся очень неточными, а внутри подводной лодки этот компас вовсе не пригоден, Аншютц решил воспользоваться волчком в качестве указателя направления. Правда, ему не удалось достичь Северного полюса, но в результате проводившихся им в продолжение многих лет опытов был создан весьма совершенный прибор, необходимый в судоходстве как в военное, так и в мирное время.

В отличие от гироскопа Фуко, волчок Аншютца не укреплен в горизонтальной плоскости, а приводится в эту плоскость действием собственного веса (подобно маятнику). В первоначальной конструкции прибора волчок плавал в сосуде с ртутью. Более поздние конструкции состояли из двух или трех волчков, действия которых взаимно усиливались и корригировались. Постоянство момента импульса волчка

обеспечивается с помощью электрического привода. В последней конструкции Аншютца вся система заключена в шар, «плавающий» в другом шаре с малым зазором и почти без трения. Так как к прибору нельзя прикасаться в течение нескольких месяцев плавания, то необходимо было обеспечить наиболее целесообразную автоматическую смазку его осевых подшипников.

Особое значение имеют меры для устранения вредных влияний собственного движения судна. Когда судно идет по кривой или изменяет свою скорость, его гирокомпас, «связанный» (наподобие маятника) с горизонтальной плоскостью, подвергается действию возникающих сил инерции. Силы инерции оказывают давление на ось фигуры волчка и отклоняют ее в сторону, что должно вызвать ложные показания прибора. Можно показать, что собственное движение судна становится в этом отношении «безвредным», если период свободных колебаний стрелки компаса около меридиана совпадает с периодом качаний математического маятника с длиной, равной радиусу Земли

$$R = \frac{2}{\pi} \cdot 10^7 \text{ м,}$$

а именно:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} = \sqrt{8\pi} \cdot 10^3 \text{ сек.} = 84,4 \text{ мин.}$$

(закон Шулера, обобщенный Глитчером)¹. Интересным применением компаса Аншютца в мирных условиях является автоматическое гироскопическое управление океанских пароходов. Для того, чтобы судно могло следовать по своему курсу при наличии волн и морских течений, необходимо непрерывное внимание штурмана и соответствующее противодействие рулевой машины. Однако противодействие, оказываемое рулевой машиной морскому течению, всегда несколько запаздывает, вследствие чего судно вынуждено проходить излишние участки пути. Напротив, гирокомпас (ср. описание прибора для стабилизации торпеды) является весьма чувствительным прибором управления, воспринимающим внешние влияния значительно точнее и быстрее, чем человек, и притом прибором, срабатывающим мгновенно. Благодаря этим контрастам, путь судна становится почти прямолинейным (строго говоря,

¹См. «Wissensch. Vrröffentl. aus den Simenswerken», Bd.19,57 (1940).

проходящим по локсодромии), что означает значительную экономию энергии. Поэтому каждый более или менее крупный пассажирский парход оборудуется теперь этим автоматическим рулевым устройством.

Дирижабли также оборудованы гироскопсами, а самолеты — «волчками-горизонтами».

4. Гироскопические эффекты у колес железнодорожных вагонов и велосипедов

Катящийся колесный стан железнодорожного вагона представляет собой гироскоп, момент импульса которого при быстром движении поезда может стать весьма значительным. Для того, чтобы при *прохождении* поезда по *криволинейному* пути отклонять упомянутый момент в положение, отвечающее нормали к кривой, необходим, согласно уравнению (27.1), вращающий момент M , направленный в сторону движения поезда. Так как такого момента M нет, то в качестве «гироскопического эффекта» возникает противоположный момент, прижимающий колесный стан к наружному рельсу и отрывающий его от внутреннего рельса. Этот момент складывается с моментом центробежной силы относительно направления движения поезда (для уменьшения влияния центробежного момента придают наружному рельсу при укладке пути некоторое превышение над внутренним). Оба момента пропорциональны $mv\omega$, где v — скорость движения поезда, ω — угловая скорость на кривой; величина m в нашем случае является массой колесного стана, приведенной к окружностям колес, а в выражении центробежной силы — общей массой вагона, приходящейся на колесный стан. Таким образом, рассматриваемый гироскопический момент очень мал по сравнению с моментом центробежной силы; его можно было бы учесть незначительным дополнительным превышением наружного рельса над внутренним.

Большую опасность представляют различные *неравномерности* в *вертикальной укладке* пути — «выбоины пути» (сюда относится также возрастающее и убывающее превышение наружного рельса в начале и в конце криволинейного участка пути).

Подобные неравномерности вызывают отклонение момента импульса в вертикальном направлении и, следовательно, противоположный момент относительно вертикали, стремящийся оторвать колесный

стан от рельсов и в пределах зазора между ними прижимающий реборды колес попеременно то к одному, то к другому рельсу. Это явление действительно наблюдалось при пробных рейсах скоростных электропоездов. Для непрерывного контроля точности укладки рельсового пути пользуются испытательными вагонами, снабженными гироскопическими устройствами.

Велосипед представляет собой дважды неголономную систему, поскольку при пяти степенях свободы¹ в конечной области он имеет только три степени свободы в бесконечно малой области (если не учитывать степеней свободы велосипедиста). Этими тремя степенями свободы являются: вращение заднего колеса в его мгновенной плоскости (с которым вращение переднего колеса связано условием его качения), вращение вокруг руля и совместное вращение обоих колес вокруг прямой, соединяющей их точки опоры. Как известно, устойчивость этой системы при достаточно большой скорости езды основана на том, что поворотом руля или произвольными движениями тела велосипедист вызывает соответствующие *центробежные воздействия*. Сама конструкция колес показывает, что их гироскопическое действие очень мало по сравнению с центробежным; для усиления *гироскопического действия* колеса нужно было бы снабдить его массивным ободом (а не делать его, как обычно, возможно более легким). Тем не менее, можно показать², что даже эти слабые гироскопические эффекты колес способствуют повышению устойчивости велосипеда. Дело в том, что гироскопические силы, как и при автоматическом гироскопическом управлении судна, быстрее реагируют на понижение центра тяжести системы, чем центробежные силы: при малых колебаниях, которые нужно рассматривать при оценке устойчивости, гироскопические воздействия сдвинуты по фазе лишь на четверть периода, в то время как центробежные воздействия сдвинуты на половину периода по сравнению с колебаниями центра тяжести.

¹Как колесо в задаче II.1.

²F. Klein и A. Sommerfeld, *Theorie des Kreisels*, Н. IV, S.880 и ff.

Конечно, для рассмотрения устойчивости велосипеда необходимо выключить оказываемое на него воздействие велосипедиста. Велосипедист должен ехать, не двигая ни руками, ни телом; его влияние на велосипед должно сказаться только весом его тела. В этом труде можно найти подробный материал также и о других применениях и о математическом обосновании теории волчка.

5. Деривация (отклонение вправо) снарядов

Из всех гироскопических проблем, возникающих в технике, баллистическая проблема ранее других подверглась математическому и экспериментальному исследованию (Даламбер, Эйлер, Пуассон, Магнус); однако и поныне ее решение остается, пожалуй, наименее полным. Дело в том, что она представляет собой не чисто динамическую, а динамически-гидродинамическую проблему. Действительно, решающую для баллистики величину силы *сопротивления воздуха* можно определить, строго говоря, только в связи и одновременно с движением снаряда, пользуясь основными уравнениями гидродинамики.

Существенным для траектории снаряда является получаемый им при выстреле момент вращения. Этот момент вращения является причиной того, что ось снаряда *все время приблизительно следует за касательной к его траектории*. Если бы момент вращения был слишком велик, то снаряд летел бы параллельно самому себе, т. е. направление его оси оставалось бы неизменным; если бы момент вращения был слишком мал, то снаряд повернулся бы своей осью перпендикулярно к траектории. В обоих случаях снаряд, если бы он даже и попал в цель, ударился бы не головной частью, а дном и потому не разорвался бы.

Перемещение вектора момента импульса снаряда вдоль касательной к траектории может происходить, согласно уравнению (27.1), только под действием момента M , направленного преимущественно *вертикально*. Этот момент M может быть только моментом *горизонтальной компоненты силы сопротивления воздуха, перпендикулярной к плоскости траектории*¹; эту компоненту мы обозначим через W . При этом, если пока не принимать во внимание знака, получим:

$$M = Wl, \quad (27.2)$$

где l — расстояние центра тяжести снаряда от точки приложения компоненты W . У снарядов обычной формы эта точка приложения силы W расположена перед центром тяжести, т. е. между центром тяжести и головным заострением снаряда. Отсюда следует, что при правом вращении снаряда (когда вектор момента импульса направлен от донной

¹Конечно, сила сопротивления воздуха по главной оси лежит в плоскости траектории и в основном имеет направление, противоположное направлению скорости полета. Таким образом, здесь речь идет о добавочном эффекте, вызванном не поступательным, а вращательным движением снаряда.

к головной части снаряда) сила W , если смотреть со стороны орудия, должна действовать *слева направо*; очевидно, что при таком направлении сила W даст момент, вектор которого направлен сверху вниз, что и обеспечит понижение касательной к траектории, а значит, и следующего за ней вектора момента импульса снаряда. (При *левом вращении* снаряда как вектор момента импульса, так и векторы момента \mathbf{M} и силы W изменяют направления на противоположные.)

Однако действие этой компоненты W сопротивления воздуха не исчерпывается тем, что она дает момент \mathbf{M} , влияющий на момент импульса снаряда (согласно закону момента импульса или закону площадей); эта сила оказывает и непосредственное влияние на форму траектории снаряда (в соответствии с законом импульса или законом движения центра тяжести). Отсюда (принимая во внимание направление силы W) мы делаем следующее заключение: *правое вращение снаряда приводит к отклонению его траектории вправо* (так называемая дрифтация), а *левое вращение — к отклонению траектории влево*. Назовем «вертикальной проекцией» проекцию траектории на вертикальную плоскость, проходящую через начальное направление полета снаряда, а «горизонтальной проекцией» траектории — проекцию на горизонтальную плоскость.

Запишем выражения закона площадей и закона движения центра тяжести для нашего случая (в приближенной форме); первое из этих уравнений относится к вертикальной проекции траектории, а второе — к ее горизонтальной проекции.

$$N \frac{d\varepsilon}{dt} = Wl \quad (\text{закон площадей}), \quad (27.3)$$

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = W \quad (\text{закон движения центра тяжести}). \quad (27.4)$$

В уравнении (27.3) $d\varepsilon$ означает мгновенное изменение направления касательной к траектории в вертикальной проекции; $N d\varepsilon$ — приближенная величина мгновенного приращения момента импульса [которое, собственно говоря, и должно входить в закон момента импульса; ср. уравнение (27.1)]. Таким образом, при написании уравнения (27.3) мы сделаем допущение, что момент импульса снаряда сохраняет свое значение $|\mathbf{N}| \sim N$ неизменным вдоль траектории, меняя только свое направление. В уравнении (27.4) m — масса снаряда и s — боковое отклонение его центра тяжести в горизонтальной проекции. Далее примем

во внимание, что

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\varepsilon}{ds} v = \frac{v}{\rho},$$

где ρ , согласно уравнению (5.10), означает радиус кривизны вертикальной проекции траектории в рассматриваемой точке. Поэтому уравнение (27.3) принимает вид

$$Wl = N \frac{v}{\rho}. \quad (27.5)$$

Умножая уравнение (27.4) на l и подставляя в него W из уравнения (27.5), получим:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{N}{ml} \frac{v}{\rho}. \quad (27.6)$$

Мы можем принять, что закон изменения скорости $v = v(t)$ вдоль траектории известен (получен с помощью измерений); действительно, весьма подробные данные о скорости полета снаряда можно найти в таблицах стрельбы, составленных для снарядов всех типов. Далее, разобьем вертикальную проекцию траектории на отдельные малые участки и для каждого из них мысленно построим соприкасающуюся параболу, соответствующую идеальной параболе (траектории брошенного тела в безвоздушном пространстве) для каждой скорости $v(t)$. Для такой параболы ускорение направлено вертикально вниз и равно g ; при этом имеет место

$$g = \frac{v^2}{\rho}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{v}{\rho} = \frac{g}{v}.$$

Это же значение $\frac{v}{\rho}$ мы приписываем и рассматриваемому участку вертикальной проекции действительной траектории снаряда; тогда из уравнения (27.6) окончательно получим для горизонтальной проекции траектории:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{N}{ml} \cdot \frac{g}{v(t)}. \quad (27.7)$$

Отсюда с помощью таблиц стрельбы для $v(t)$ можно определить боковое отклонение траектории снаряда, например, путем графического интегрирования; при этом величина момента импульса N определяется по длине хода нарезов в канале ствола и по начальной скорости снаряда. Для случая стрельбы на большие дистанции интегрирование

уравнения (27.7) дает весьма значительные величины бокового отклонения траектории — до нескольких сот метров, что вполне согласуется с опытными данными.

ДОБАВЛЕНИЕ: МЕХАНИКА ИГРЫ НА БИЛЬЯРДЕ

Игра на бильярде представляет широкое поле для применения законов динамики твердого тела. Исследование этой игры связано с именем Кориолиса, одного из крупнейших ученых в области механики¹.

Последующее изложение имеет своей главной целью пояснение некоторых задач, приводимых в конце книги. Эти задачи связаны не только с динамикой катящегося и скользящего шара, но также и с теорией трения на бильярдном сукне.

1. Высокие и низкие удары

Опытный игрок в бильярд почти всегда сообщает шару боковой удар — «эффе» (effet). Однако вначале мы рассмотрим удары без эффе, при которых кий ударяет по шару в его меридиональной плоскости и притом в горизонтальном направлении. Различают высокие и низкие удары.

Высокий удар имеет место, когда точка удара кия по шару находится от плоскости бильярдного сукна на расстоянии большем, чем $\frac{7}{5}a$ (a — радиус бильярдного шара); о *низком же ударе* говорят тогда, когда удар по шару приходится на расстоянии меньшем, чем $\frac{7}{5}a$ (ср. задачу IV. 3). Только в том случае, когда удар приходится в точности на высоте $\frac{7}{5}a$ от сукна, с самого начала имеет место *частое качение* шара. Дело в том, что при таком ударе (в соответствии с приведенной на стр. 88 величиной момента инерции шара) сообщаемое шару вращение как раз таково, что соответствующая ему окружная скорость в точке опоры шара в точности равна и противоположна по направлению скорости поступательного движения его центра тяжести, что и означает [ср. уравнение (11.10)] выполнение условия чистого качения.

При *высоких ударах* окружная скорость точки соприкосновения шара с сукном, обусловленная его вращением, направлена противоположно

¹G. Coriolis, Théorie mathématique des effets du jeu de billard. Paris, 1835.

скорости центра тяжести шара и превышает последнюю по величине. Сила трения шара о сукно направлена, разумеется, в сторону, противоположную этому избытку скорости (окружная скорость минус скорость поступательного движения), а следовательно, увеличивает первоначальную скорость центра тяжести. *При высоких ударах трение действует в направлении удара.* Конечная скорость чистого качения, которая установится, когда излишек скорости будет поглощен трением, будет больше начальной скорости. Шары, которым сообщены высокие удары, катятся долго; высокие удары обычно свидетельствуют об опытности игрока.

При *низких ударах* окружная скорость в точке соприкосновения шара с сукном направлена либо назад (но тогда она меньше скорости поступательного движения), либо (при еще более низких ударах) вперед. В обоих случаях *направление силы трения противоположно первоначальному направлению удара.* Конечная скорость чистого качения меньше начальной скорости.

Что касается «силы удара» S (измеряемой в динах-сек), то ее, конечно, следует понимать как интеграл по времени от весьма большой силы, действующей в направлении кия в продолжение очень короткого промежутка времени τ :

$$S = \int_0^{\tau} F dt.$$

В соответствии с этим момент силы удара относительно центра шара выражается формулой:

$$Sl = \int_0^{\tau} F l dt,$$

где l — расстояние от центра шара до оси кия; вектор этого момента перпендикулярен плоскости, проведенной через отрезок l и ось кия. В случае рассматривавшихся до сих пор ударов без эффе этот вектор направлен горизонтально перпендикулярно к меридиональной плоскости шара.

2. Удар с накатом и удар с оттяжкой

Если шар, которому сообщен *высокий удар* ударяется центрально о другой шар, то, вследствие равенства масс, он передает этому вто-

рому шару всю скорость своего поступательного движения [ср. формулы (3.27a)]; при этом, однако, он сохраняет свое вращательное движение (если пренебречь трением обоих шаров за короткое время их соприкосновения). Таким образом, непосредственно после удара центр ударяющего шара мгновенно находится в состоянии покоя, в то время как его наинизшая точка скользит по бильярдному сукну. Возникающая при этом (постоянная во времени) сила трения действует в направлении первоначального поступательного движения; в то же время момент этой силы трения относительно центра шара замедляет сохранившееся у него вращение. Таким образом, шар выводится из состояния покоя, постепенно ускоряясь в своем поступательном движении, в то время как его вращение постепенно замедляется. Ускорение прекратится, когда окружная скорость точки касания шара с сукном сравняется со скоростью поступательного движения; после этого наступает чистое качение. Шар продолжает катиться с постоянной конечной скоростью (мы не принимаем во внимание весьма медленно действующего трения качения). Мы изложили *теорию удара с накатом*.

Равным образом, и шар, которому сообщен *низкий удар*, передает всю свою скорость движения (скорость центра тяжести) ударяемому шару и на мгновение остается в состоянии покоя. Примем, что удар по шару был очень низким и пришелся во всяком случае ниже его центра, так что окружная скорость в точке касания с сукном, остающаяся у шара после соударения, направлена вперед. В этом случае сила трения направлена назад. Шар начинает двигаться назад с постоянным ускорением, одновременно его вращение замедляется до тех пор, пока не наступит чистое качение. В этом состоит *теория удара с оттяжкой*.

Так как сила трения скольжения не зависит от скорости, то как скорость движения центра тяжести шара v , так и его окружная скорость $u = \omega r$ будут линейно изменяться во времени. Поэтому задачи, рассмотренные нами до сих пор, удобнее анализировать не с помощью формул, а графическим путем — с помощью диаграммы, на которой по оси абсцисс отложено время t , а по оси ординат — величины скоростей v и u в соответствующие моменты времени (см. задачу IV.3).

3. Удар с эффе в горизонтальном направлении (режущий удар)

Если шару сообщен удар не в средней вертикальной плоскости, а сбоку (*справа или слева*), то при *горизонтальном направлении этого*

удара траектория шара будет по-прежнему прямой линией, совпадающей с направлением начального удара.

При ударе сбоку — справа или слева — плоскость момента силы удара наклонена вправо или влево по отношению к продольной меридиональной плоскости (назовем ее F), однако так, что нормаль к ней лежит в поперечной меридиональной плоскости, перпендикулярной к плоскости F . По этой нормали и направлен вектор момента удара. Этот вектор момента можно разложить на две слагающие: вертикальную и поперечную, горизонтальную. Первая из них вызывает вращение шара относительно вертикального диаметра и обуславливает слабое «сверлящее» трение о сукно; однако это трение не оказывает влияния на траекторию шара. С другой стороны, поперечная слагающая момента удара оказывает на шар такое же действие, как при ударах, рассмотренных в пп. 1 и 2 настоящего добавления, так что соответствующие результаты можно целиком распространить и на рассматриваемые здесь удары сбоку. В частности, траектория и теперь остается *прямолинейной*.

Однако вращение шара относительно вертикального диаметра проявляется при соударении шара с бортом бильярда или с другим шаром. В первом случае возникает трение о борт бильярда, отклоняющее шар вправо (если смотреть со стороны игрока) при боковом ударе справа, и влево — при ударе слева. Вследствие этого угол отражения (который в случае прямого удара равен углу падения) *изменяется* и притом так, что траектория отраженного шара оказывается *повернутой относительно «нормальной» траектории* (в направлении бокового вращения шара). Это явление знакомо всякому игроку в бильярд. Одновременно с силой трения возникает момент трения относительно вертикали, замедляющий вращение шара вокруг вертикального диаметра. Таким образом, по мере увеличения числа соударений шара его первоначальное боковое вращение все более и более замедляется, что также знакомо всякому игроку.

При соударении двух шаров боковое вращение оказывает такое же действие (и в том же направлении), как при ударе шара о борт бильярда.

4. Параболическая траектория при ударах с вертикальной слагающей

При наличии у силы удара вертикальной слагающей плоскость момента силы удара наклонена (относительно продольной меридиональной плоскости) не только вбок, как и п. 3, но и вперед (если смотреть

со стороны игрока). Поэтому соответствующий вектор момента силы удара имеет, кроме поперечной и вертикальной слагающих, еще и слагающую в направлении удара, которой отвечает добавочная скорость скольжения точки опоры, перпендикулярная к направлению первоначального движения. Поэтому сила трения, направление которой противоположно результирующей скорости скольжения точки опоры шара, образует некоторый угол с направлением начального движения. Выяснив (ср. задачу IV.4), что этот угол при движении шара остается постоянным, и принимая во внимание, что величина силы трения также постоянна, мы приходим к заключению: траектория шара должна быть лежащей в горизонтальной плоскости параболой, поскольку движение его происходит под действием одной единственной силы, постоянной по величине и направлению (теорема И. А. Эйлера, сына великого Леонарда Эйлера).

Траектории подобного рода вызывают крайнее недоумение у игрока, не имеющего полного представления о законах трения и векторном разложении момента импульса на составляющие. Такими ударами пользуются в особенности тогда, когда оба шара, которые должны столкнуться, находятся на разных концах короткой стороны бильярда. При этом вертикальная слагающая силы удара должна быть весьма значительной, т. е. кий должен быть расположен под малым углом к вертикали.

ГЛАВА V

ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Предмет настоящей главы — относительное движение — представляет большой интерес главным образом потому, что все наши наблюдения мы производим на вращающейся Земле; последняя же как с точки зрения классической механики, так и с точки зрения специальной теории относительности не является правомерной системой отсчета. С другой стороны, с точки зрения общей теории относительности всякая система отсчета является правомерной (см. стр. 28), так что здесь отпадает необходимость в особой теории относительного движения.

В этой главе мы будем принимать, что механика Ньютона строго справедлива для любой правомерной идеальной системы отсчета; мы будем определять отклонения от ньютоновской механики, возникающие вследствие движения «навязанной» нам системы отсчета — Земли.

§ 28. ВЫВОД СИЛЫ КОРИОЛИСА ДЛЯ ОДНОГО ИЗ ЧАСТНЫХ СЛУЧАЕВ

Пусть материальная точка движется по меридиану земного шара (радиус которого равен a) с постоянной угловой скоростью μ (относительно центра Земли), причем Земля одновременно вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω . Если, как обычно, обозначить через ϑ и φ соответственно дополнительный угол географической широты и географическую долготу, то движение нашей материальной точки, с точностью до произвольных начальных значений, описывается уравнениями

$$\vartheta = \mu t, \quad \varphi = \omega t. \quad (28.1)$$

Переходя от сферических координат к прямоугольным

$$\left. \begin{aligned} x &= a \sin \vartheta \cos \varphi, \\ y &= a \sin \vartheta \sin \varphi, \\ z &= a \cos \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (28.2)$$

и дифференцируя дважды по t , получаем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= a\mu \cos \vartheta \cos \varphi - a\omega \sin \vartheta \sin \varphi, \\ \dot{y} &= a\mu \cos \vartheta \sin \varphi + a\omega \sin \vartheta \cos \varphi, \\ \dot{z} &= -a\mu \sin \vartheta; \end{aligned} \right\} \quad (28.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -a\mu^2 \sin \vartheta \cos \varphi - a\omega^2 \sin \vartheta \cos \varphi - 2a\mu\omega \cos \vartheta \sin \varphi, \\ \ddot{y} &= -a\mu^2 \sin \vartheta \sin \varphi - a^2\omega^2 \sin \vartheta \sin \varphi + 2a\mu\omega \cos \vartheta \cos \varphi, \\ \ddot{z} &= -a\mu^2 \cos \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (28.4)$$

В последних трех уравнениях первые члены справа представляют собой обычное центростремительное ускорение, соответствующее движению по меридиану (который при этом считается покоящимся); вторые члены представляют собой обычное центростремительное ускорение, соответствующее движению точки по параллели; однако третьи члены представляют собой нечто новое, а именно *кинематическое взаимодействие обоих движений*. Умножив уравнения (28.4) на $-m$, получим силу инерции \mathbf{F}^* , действующую на нашу материальную точку при ее сложном вращательном движении; выразим ее в векторной форме:

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{C}. \quad (28.5)$$

Как и в формуле (10.3), через \mathbf{Z}_1 и \mathbf{Z}_2 обозначены «обыкновенные центробежные силы». Сила \mathbf{Z}_1 направлена от центра Земли по радиусу, а по величине равна

$$|\mathbf{Z}_1| = ma\mu^2 = m\frac{v_1^2}{a}, \quad v_1 = a\mu.$$

Сила \mathbf{Z}_2 направлена по перпендикуляру к земной оси наружу, а по величине равна

$$|\mathbf{Z}_2| = ma\omega^2 \sin \vartheta = m\frac{v_2^2}{a \sin \vartheta}, \quad v_2 = a\omega \sin \vartheta.$$

Третье слагаемое \mathbf{C} в выражении силы инерции мы называем «*составной центробежной силой*» или «*кориолисовой силой*». Ее полное векторное представление [см. формулу (29.4а)] имеет вид:

$$\mathbf{C} = 2m[\mathbf{v}_{\text{отн.}} \boldsymbol{\omega}]. \quad (28.6)$$

Мы обозначили здесь вектор скорости не через \mathbf{v}_1 , а через $\mathbf{v}_{\text{отн.}}$ для того, чтобы указать, что, вообще говоря, речь идет об относительной скорости (по отношению к вращающейся системе координат).

Согласно формуле (28.6), абсолютная величина \mathbf{C} равна

$$|\mathbf{C}| = 2mv_{\text{отн.}}\omega \sin(\mathbf{v}_{\text{отн.}}, \boldsymbol{\omega}), \quad (28.6a)$$

т. е. в нашем случае

$$|\mathbf{C}| = 2mv_{\text{отн.}}\omega \cos \vartheta. \quad (28.6b)$$

Здесь можно, очевидно, заменить $\cos \vartheta$ «синусом географической широты» (как обычно и поступают). Кориолисова сила \mathbf{C} перпендикулярна как к $\mathbf{v}_{\text{отн.}}$, так и к $\boldsymbol{\omega}$ (а также, как легко убедиться, и к силам \mathbf{Z}_1 и \mathbf{Z}_2) и направлена так, что образует с векторами $\mathbf{v}_{\text{отн.}}$ и $\boldsymbol{\omega}$ правовинтовую систему. Это представлено на рис. 48 для случая движения материальной точки с юга на север (как в северном, так и в южном полушариях). В соответствии с правилом правого винта, легко убедиться, что кориолисова сила действует в северном полушарии с запада на восток, а в южном — с востока на запад.

Вместо отдельной материальной точки мы можем рассматривать и непрерывную совокупность (континуум) материальных точек, т. е. поток их вдоль земного меридиана (например, реку). Тогда из рис. 48 видно, что кориолисова сила инерции текущей воды давит (при течении с юга на север) *в северном полушарии на правый берег, а в южном — на левый берег реки*; очевидно, эта «перемена знака» силы давления связана с синусом географической широты, входящим в формулу (28.6b). Однако это правило справедливо не только для направления относительно скорости $\mathbf{v}_{\text{отн.}}$ с юга на север, но, как это будет доказано в следующем параграфе, и для любого направления течения,

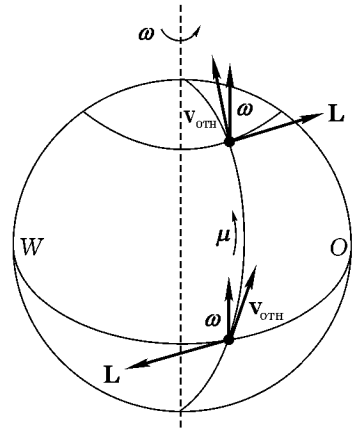


Рис. 48. Вывод силы Кориолиса для частного случая: по меридиану вращающегося земного шара движется материальная точка с постоянной скоростью $v_{\text{отн.}}$; эта точка обладает по отношению к центру постоянной угловой скоростью μ

Вместо отдельной материальной точки мы можем рассматривать и непрерывную совокупность (континуум) материальных точек, т. е. поток их вдоль земного меридиана (например, реку). Тогда из рис. 48 видно, что кориолисова сила инерции текущей воды давит (при течении с юга на север) *в северном полушарии на правый берег, а в южном — на левый берег реки*; очевидно, эта «перемена знака» силы давления связана с синусом географической широты, входящим в формулу (28.6b). Однако это правило справедливо не только для направления относительно скорости $\mathbf{v}_{\text{отн.}}$ с юга на север, но, как это будет доказано в следующем параграфе, и для любого направления течения,

в частности, и для течения с севера на юг. В рассматриваемом случае это непосредственно очевидно: скорость (переносная) движения воды с запада на восток, обусловленная вращением земного шара, зависит от расстояния до оси вращения, а следовательно, от географической широты. При течении с юга на север в северном полушарии вода приносит с собой из южных широт избыток количества движения, направленного с запада на восток; этот избыток и проявляется в виде давления воды в восточном направлении, т. е. на *правый* берег. Однако то же самое имеет место и для потока, направленного с севера на юг. В этом случае вода приходит из северных широт с недостатком количества движения в направлении с запада на восток. Вращающаяся Земля при этом должна ускорять воду в ее движении с запада на восток; очевидно, что в силу инерции воды это приведет к давлению потока на западный, т. е. опять-таки на *правый* берег. С помощью совершенно аналогичного рассуждения легко убедиться в том, что в южном полушарии текущая вода оказывает давление на *левый* берег как при течении с юга на север, так и с севера на юг.

Давление воды на правый берег проявляется (как это доказано географами на ряде примеров в северном полушарии) в более сильном размывании правых берегов рек (закон Бера); кроме того, уровень воды у правого берега рек (в северном полушарии) всегда несколько выше, чем у левого, причем эта разница достигает вполне измеримых величин.

Гораздо более значительными являются действия силы Кориолиса при морских течениях (отклонение вправо Гольфстрима, а также отклонение течений, связанных с приливами и отливами в северном полушарии).

Однако сильнее всего действие силы Кориолиса проявляется в атмосфере. Согласно известному закону Байс–Балло, ветер дует не в направлении падения давления, а значительно отклоняется от этого направления в северном полушарии вправо, в южном полушарии — влево; только на экваторе направление ветра в точности совпадает с направлением градиента давления.

Все эти явления представляют собой прямое следствие закона инерции и, в конечном счете, вызваны тем, что вращающаяся Земля не является, с точки зрения механики, правомерной системой отсчета.

В то время как в настоящем параграфе мы пользовались сферическими координатами, в задаче V.1 мы воспользуемся для вывода силы Кориолиса цилиндрическими координатами.

§ 29. ОБЩИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Заменяем Землю произвольным твердым телом K , вращающимся с мгновенной угловой скоростью ω вокруг неподвижной точки O . Пусть P — материальная точка, движущаяся с произвольно меняющейся относительной скоростью по отношению к телу K . Скорость точки P относительно неподвижной системы координат складывается из этой относительной скорости и скорости той точки тела K , которая в данный момент совпадает с точкой P ; последняя скорость, согласно формуле (22.4), равна $[\omega \mathbf{r}]$. Обозначим скорость точки P относительно неподвижной системы координат, как в формуле (22.4), через \mathbf{w} , а ее скорость относительно тела K — через \mathbf{v} (вместо $\mathbf{v}_{\text{отн.}}$). Таким образом,

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} + [\omega \mathbf{r}]. \quad (29.1)$$

В дальнейшем мы будем обозначать производные по времени в неподвижной системе координат точкой над соответствующими величинами, а в системе координат, связанной с телом K , — через $\frac{d}{dt}$. В соответствии с этим имеем:

$$\mathbf{w} = \dot{\mathbf{r}}, \quad (29.2a)$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad (29.2b)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} + [\omega \mathbf{r}]. \quad (29.2в)$$

Дифференцируя по времени уравнение (29.1), получим ускорение нашей точки P в неподвижной системе координат:

$$\dot{\mathbf{w}} = \dot{\mathbf{v}} + [\omega \dot{\mathbf{r}}] + [\dot{\omega} \mathbf{r}]. \quad (29.3)$$

Заменяя в среднем члене правой части $\dot{\mathbf{r}}$, согласно уравнениям (29.2a) и (29.1), получим:

$$[\omega \dot{\mathbf{r}}] = [\omega \mathbf{v}] + [\omega [\omega \mathbf{r}]]. \quad (29.3a)$$

В формуле (29.2в) под \mathbf{r} можно понимать произвольный вектор; заменяя в ней \mathbf{r} на \mathbf{v} , представим $\dot{\mathbf{v}}$ в виде

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} + [\omega \mathbf{v}]. \quad (29.3б)$$

Подставляя выражения (29.3а) и (29.3б) в (29.3), получаем:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} + 2[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}] + [\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]] + [\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}]. \quad (29.4)$$

Относительно последнего члена этого уравнения следует еще заметить, что, согласно формуле (26.8а), безразлично, напишем ли мы в нем $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ или $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$.

Из последнего уравнения можно получить силу инерции, действующую на нашу материальную точку, умножая его почленно на $(-m)$. При этом в левой части получим силу инерции \mathbf{F}^* в неподвижной системе координат, а первый член справа будет выражать силу инерции в «неправомерной» системе отсчета K ; назовем последнюю силу $\mathbf{F}_{\text{отн.}}^*$. Из второго члена правой части получается уже известное нам выражение (28.6) для силы Кориолиса, а именно

$$-2m[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}] = +2m[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}] = \mathbf{C}. \quad (29.4а)$$

Таким образом, настоящее рассмотрение содержит (в качестве дополнения к частному выводу, изложенному в предыдущем параграфе) *общий вывод кориолисовой силы*. Предпоследний член уравнения (29.4) представляет собой (после умножения на m и перемены знака) обычную центробежную силу \mathbf{Z} , действующую на нашу материальную точку благодаря вращению системы отсчета K [в формуле (28.5) эта сила обозначена через \mathbf{Z}_2]. Итак, вместо уравнения (29.4) окончательно получим:

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{F}_{\text{отн.}}^* + \mathbf{C} + \mathbf{Z} + m[\mathbf{r}\dot{\boldsymbol{\omega}}]. \quad (29.5)$$

Подставим вместо $\mathbf{F}_{\text{отн.}}^*$, согласно определению, величину

$$\mathbf{F}_{\text{отн.}}^* = -m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

и примем во внимание, что в силу равновесия внешних сил и сил инерции в неподвижной системе координат,

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}^* = 0.$$

Мы получим *общее дифференциальное уравнение относительного движения*:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{Z} + \mathbf{C} + m[\mathbf{r}\dot{\boldsymbol{\omega}}]. \quad (29.6)$$

Из этого уравнения видно, что в системе отсчета K , наряду с «истинной» внешней силой \mathbf{F} , появляются «фиктивные силы» \mathbf{Z} и \mathbf{C} . С точки зрения наблюдателя, движущегося вместе с системой K , эти силы действуют так же, как и внешняя сила \mathbf{F} ; но они возникают только вследствие инерции материальной точки m при ее движении относительно системы отсчета K . Такого же «инерционного» происхождения и сила, выражаемая последним членом уравнения (29.6): она обусловлена возможным ускорением вращения или перемещением оси вращения; в применении к Земле этот член соответствует колебаниям полюса; им, несомненно, можно пренебречь, как исчезающе малой величиной. Мы будем пользоваться дифференциальным уравнением (29.6) в трех следующих параграфах, а также при решении задач V.1 и V.2.

§ 30. СВОБОДНОЕ ПАДЕНИЕ НА ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЗЕМЛЕ. ОСОБЕННОСТЬ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ ЧЛЕНОВ

При всех измерениях силы тяжести мы наблюдаем не само притяжение Земли, а равнодействующую притяжения Земли \mathbf{F} и центробежной силы \mathbf{Z} . Равным образом, и степень сплюснутости геоида, т. е.

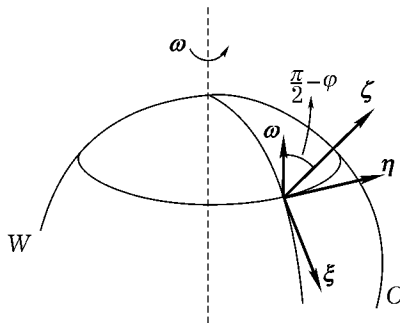


Рис. 49. Свободное падение в условиях вращающегося земного шара. Ось координат: ось ξ направлена по меридиану, ось η — по параллели, ось ζ — по нормали к геоиду

средней формы земной поверхности, определяется этой равнодействующей, именно — тем, что поверхность геоида всюду ей перпендикулярна.

Положим

$$\mathbf{F} + \mathbf{Z} = -mg. \quad (30.1)$$

Здесь ускорение свободного падения \mathbf{g} является вектором, равным по величине g , но *направленным* не по земному радиусу, а по *нормали к поверхности геоида*.

Принимая во внимание соотношения (30.1) и (28.6) и пренебрегая членом, содержащим $\dot{\omega}$ (ср. выше), получим из уравнения (29.6):

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\mathbf{g} + 2[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}]. \quad (30.2)$$

Решим это векторное уравнение в координатной форме, вводя прямоугольную систему координат ξ, η, ζ , неподвижно связанную с Землей (рис. 49):

$$\left. \begin{array}{l} \text{ось } \xi \text{ направлена с севера на юг (вдоль земного меридиана),} \\ \text{ось } \eta \text{ направлена с запада на восток (вдоль параллели),} \\ \text{ось } \zeta \text{ направлена от точки наблюдения к зениту} \\ \text{(по нормали к поверхности геоида).} \end{array} \right\} \quad (30.3)$$

Тогда компоненты наших векторов примут вид:

$$\left. \begin{array}{l} \text{вектора } \mathbf{v} : \quad \frac{d\xi}{dt}, \quad \frac{d\eta}{dt}, \quad \frac{d\zeta}{dt}, \\ \text{вектора } \mathbf{g} : \quad 0, \quad 0, \quad g, \\ \text{вектора } \boldsymbol{\omega} : \quad -\omega \cos \varphi, \quad 0, \quad \omega \sin \varphi, \end{array} \right\} \quad (30.4)$$

где φ — географическая широта (ср. рис. 49). Перепишем теперь уравнение (30.2) в координатной форме:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d^2 \xi}{dt^2} = 2\omega \sin \varphi \frac{d\eta}{dt}, \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} = -2\omega \sin \varphi \frac{d\xi}{dt} - 2\omega \cos \varphi \frac{d\zeta}{dt}, \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} + g = 2\omega \cos \varphi \frac{d\eta}{dt}. \end{array} \right\} \quad (30.5)$$

Перед тем как перейти к интегрированию, рассмотрим общий характер этих уравнений. Они отличаются тем, что коэффициенты их

правых частей образуют *антисимметричную* матрицу (схему). Если обозначить

$$\alpha = 2\omega \sin \varphi, \quad \beta = 0, \quad \gamma = -2\omega \cos \varphi, \quad (30.6)$$

то эта схема примет следующий *антисимметричный* по отношению к главной диагонали вид:

	$\frac{d\xi}{dt}$	$\frac{d\eta}{dt}$	$\frac{d\zeta}{dt}$
$\frac{d^2\xi}{dt^2}$	0	α	β
$\frac{d^2\eta}{dt^2}$	$-\alpha$	0	γ
$g + \frac{d^2\zeta}{dt^2}$	$-\beta$	$-\gamma$	0

(30.7)

Этот антисимметричный вид означает, что имеет место *сохранение энергии*; напротив, если бы матрица (схема) коэффициентов содержала отличные от нуля диагональные члены или — в более общем случае — *симметричную часть*, то имело бы место *рассеяние энергии*.

В самом деле, умножим уравнения (30.5) соответственно на $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ и сложим их; тогда в правой части все члены с α , β и γ взаимно уничтожаются, и мы получим:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt} \right)^2 \right] + g \frac{d\zeta}{dt} = 0.$$

Следовательно,

$$T + V = \text{const.} \quad (30.8)$$

Здесь T и V означают кинетическую и потенциальную энергию относительного движения (в предположении, что масса равна 1). Впрочем, этот *консервативный характер* нашей схемы коэффициентов вытекает без всяких вычислений уже из того, что кориолисова сила \mathbf{C} , поскольку она пропорциональна $[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}]$, перпендикулярна к направлению движения, а, следовательно, *ее работа равна нулю* (подобно тому, как это имеет место для магнитных сил в электродинамике).

Напротив, в случае наличия симметричной части в матрице коэффициентов мы имели бы

$$\frac{d}{dt}(T + V) < 0, \quad (30.9)$$

если только знаки коэффициентов удовлетворяют физически необходимому требованию затухания процессов движения. Очевидно, что неравенство (30.9) соответствует не *сохранению энергии*, а как мы уже утверждали, *рассеянию энергии*. Примером (впрочем, лишь для одномерного случая) подобного диссипативного характера симметричной матрицы коэффициентов являются рассмотренные в гл. III затухающие колебания [см. уравнения (19.8) и (19.9)].

Следуя лорду Кельвину, будем называть элементы антисимметричной матрицы коэффициентов *гироскопическими членами*. Эти члены характеризуют внутренние гироскопические свойства механической системы (в нашем случае вращение земного шара); последние при рассмотрении проблемы не учитываются явно (игнорируются), а принимаются во внимание при выборе системы координат (в нашем случае ξ , η , ζ). Такого рода гироскопические члены играют важную роль в общих теоремах об устойчивости движений и состояний равновесия.

Перейдем теперь к интегрированию уравнений (30.5). При этом в качестве начальных условий мы возьмем условия, соответствующие свободному падению с высоты h без начального импульса; таким образом, мы требуем при $t = 0$, чтобы имело место:

$$\left. \begin{aligned} \xi = \eta = 0, \quad \zeta = h, \\ \frac{d\xi}{dt} = \frac{d\eta}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (30.10)$$

Из первого и третьего уравнений (30.5) получаем:

$$\frac{d\xi}{dt} = 2\omega\eta \sin \varphi, \quad \frac{d\zeta}{dt} + gt = 2\omega\eta \cos \varphi. \quad (30.11)$$

Подстановка во второе уравнение (30.5) дает:

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + 4\omega^2\eta = Ct, \quad C = 2\omega g \cos \varphi. \quad (30.12)$$

Интегрирование последнего уравнения выполняется по общему правилу [ср. уравнение (19.4)]: «общее решение неоднородного уравнения равно сумме его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения». Следуя этому правилу, для нашего случая получим:

$$\eta = \frac{C}{4\omega^2}t + A \sin 2\omega t + B \cos 2\omega t.$$

Из начальных условий (30.10) находим:

$$B = 0, \quad 2\omega A = -\frac{C}{4\omega^2}, \quad (30.13)$$

откуда

$$\eta = \frac{C}{4\omega^2} \left(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right) = \frac{g \cos \varphi}{2\omega} \left(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right).$$

Это означает по смыслу координаты η [ср. определение (30.3)] отклонение падающего тела к *востоку*.

Величина ξ означает *отклонение к югу*. На основании (30.11) и (30.13) это отклонение можно вычислить из уравнения

$$\frac{d\xi}{dt} = g \sin \varphi \cos \varphi \left(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right),$$

интеграция которого, принимая во внимание начальные условия (30.10), дает:

$$\xi = g \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1 - \cos 2\omega t}{4\omega^2} \right). \quad (30.14)$$

Наконец, для движения по вертикали из второго уравнения (30.11), принимая во внимание соотношения (30.13) и (30.10), получим:

$$\zeta = h - \frac{gt^2}{2} + g \cos^2 \varphi \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1 - \cos 2\omega t}{4\omega^2} \right). \quad (30.15)$$

Величина ωt очень мала (порядка отношения времени падения к продолжительности суток). Поэтому мы можем разложить выраже-

ния (30.13), (30.14) и (30.15) в ряды по степеням ωt , после чего найдем:

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{gt^2}{3} \cos \varphi \cdot \omega t, \\ \xi &= \frac{gt^2}{6} \sin \varphi \cos \varphi \cdot (\omega t)^2, \\ \zeta &= h - \frac{gt^2}{2} \left[1 - \frac{\cos^2 \varphi}{3} (\omega t)^2 \right].\end{aligned}$$

Величина (ωt) , характеризующая влияние вращения Земли на свободное падение тел, входит в выражение отклонения к востоку η в первой степени, а в выражения отклонения к югу ξ и отклонения по вертикали ζ — лишь в квадрате. Отклонение падающих тел к востоку многократно наблюдалось на опыте, и величина его оказалась в хорошем согласии с теорией — при благоприятных условиях (падение в глубокой шахте) оно составляло несколько сантиметров.

Очевидно, что эти отклонения (как наблюдаемые, так и не поддающиеся наблюдению) объясняются тем, что лежащие в основе эксперимента и теории начальные условия (30.10) предполагают *состояние покоя относительно Земли* и что именно по этой причине они означают наличие у первоначально покоящегося тела определенной скорости в пространстве. Эта скорость равна произведению угловой скорости вращения Земли на расстояние от тела до оси вращения Земли и потому несколько отличается от окружной скорости земной поверхности под падающим телом. Естественным следствием этого и является некоторое отличие траектории падающего тела от вертикали, проходящей через его начальное положение.

§ 31. МАЯТНИК ФУКО

В рассматриваемом случае по-прежнему справедливы уравнения (30.5), но с тем дополнительным условием, что материальная точка должна находиться на постоянном расстоянии l от точки подвеса маятника. Запишем это условие совершенно так же, как и в случае сферического маятника [уравнение (18.1)]:

$$F = \frac{m}{2} (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - l^2) = 0. \quad (31.1)$$

Вводя соответствующий параметр Лагранжа λ получим вместо прежних уравнений (30.5):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= 2\omega \sin\varphi \frac{d\eta}{dt} + \lambda\xi, \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= -2\omega \sin\varphi \frac{d\xi}{dt} - 2\omega \cos\varphi \frac{d\zeta}{dt} + \lambda\eta, \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} + g &= 2\omega \cos\varphi \frac{d\eta}{dt} + \lambda\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (31.2)$$

Мы ограничимся, разумеется, *малыми* колебаниями маятника. Таким образом, мы будем считать $\frac{\xi}{l}$ и $\frac{\eta}{l}$ величинами первого порядка малости; тогда из условия (31.1) следует, что $\frac{\zeta^2}{l^2}$ равно единице с точностью до величин *второго порядка* малости. Именно, вблизи положения равновесия имеет место

$$\zeta = -l(1 + \text{величина второго порядка малости}),$$

так как за положительное направление оси ζ принято направление вверх. В соответствии с этим третье уравнение (31.2) показывает, что с точностью до величин первого порядка малости справедливо равенство:

$$g = -\lambda l, \text{ откуда } \lambda = -\frac{g}{l}. \quad (31.3)$$

Перепишем теперь первые два уравнения (31.2), пренебрегая членом $\frac{d\zeta}{dt}$ (так как он является величиной второго порядка малости) и вводя обозначение

$$u = \omega \sin\varphi. \quad (31.4)$$

Тогда эти уравнения примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} - 2u \frac{d\eta}{dt} + \frac{g}{l}\xi &= 0, \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} + 2u \frac{d\xi}{dt} + \frac{g}{l}\eta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (31.5)$$

Удобно объединить оба эти уравнения (умножив второе из них на i и сложив с первым), вводя, как и в уравнении (26.10) на стр. 189, комплексную переменную

$$s = \xi + i\eta. \quad (31.6)$$

В соответствии с этим, получим уравнение

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2iu \frac{ds}{dt} + \frac{g}{l} s = 0, \quad (31.7)$$

являющееся *однородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами*. Заметим, что объединение двух уравнений (31.5) в комплексной форме оказалось возможным благодаря «гироскопическому» характеру средних членов этих уравнений. Ищем решение уравнения (31.7) в виде

$$s = Ae^{i\alpha t}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (31.7), получим квадратное уравнение для определения α :

$$\alpha^2 + 2u\alpha - \frac{g}{l} = 0.$$

Его корни суть

$$\alpha_1 = -u + \sqrt{u^2 + \frac{g}{l}} \quad \text{и} \quad \alpha_2 = -u - \sqrt{u^2 + \frac{g}{l}}. \quad (31.8)$$

Общее решение уравнения (31.7) имеет вид;

$$s = A_1 e^{i\alpha_1 t} + A_2 e^{i\alpha_2 t}. \quad (31.9)$$

Постоянные A_1 и A_2 определяются из начальных условий. В соответствии с постановкой опыта, в качестве таковых выберем следующие:

$$\xi = a, \quad \eta = 0, \quad \frac{d\xi}{dt} = \frac{d\eta}{dt} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (31.10)$$

Иными словами, мы предполагаем, что маятник в начальный момент отклонен от вертикального положения на отрезок a в положительном направлении оси ξ , т.е. вдоль меридиана к югу (рис. 50), и отпущен

без толчка. Из условий (31.10) получим начальные значения для нашей комплексной переменной s :

$$s = a, \quad \frac{ds}{dt} = 0 \quad \text{при } t = 0. \quad (31.10a)$$

Тогда из равенства (31.9) найдем:

$$A_1 + A_2 = a, \quad (31.11)$$

$$A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 = 0, \quad (31.11a)$$

$$A_1 = \frac{a}{2} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 + \frac{g}{l}}} \right), \quad A_2 = \frac{a}{2} \left(1 - \frac{u}{\sqrt{u^2 + \frac{g}{l}}} \right). \quad (31.11b)$$

В соответствии с этим, получим выражение для $\frac{ds}{dt}$ (являющееся несколько более интересным, чем выражение для s). Принимая во внимание условие (31.11a), можем написать:

$$\frac{ds}{dt} = i\alpha_1 A_1 e^{-iut} \left(e^{i\sqrt{u^2 + \frac{g}{l}}t} - e^{-i\sqrt{u^2 + \frac{g}{l}}t} \right),$$

откуда следует [после подстановки выражений (31.8) и (31.11b)]:

$$\frac{ds}{dt} = -a \frac{\frac{g}{l}}{\sqrt{u^2 + \frac{g}{l}}} e^{-iut} \sin \sqrt{u^2 + \frac{g}{l}} t. \quad (31.12)$$

Отсюда мы заключаем, что в те моменты времени, когда синус обращается в нуль, всегда имеет место

$$\frac{ds}{dt} = 0 \quad \text{и, следовательно, также} \quad \frac{d\xi}{dt} = \frac{d\eta}{dt} = 0.$$

Это означает появление острия (точки возврата) на траектории маятника. Согласно нашим начальным условиям (31.10), такую точку возврата мы впервые имеем при $t = 0$. Полагая

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{u^2 + \frac{g}{l}}}, \quad (31.13)$$

мы видим, что следующие точки возврата соответствуют моментам времени:

$$t = \frac{\tau}{2}, \quad t = \tau, \quad t = \frac{3\tau}{2}, \dots$$

Промежуток времени $t = \tau$ является периодом полного колебания маятника (туда и обратно). Как и следовало ожидать, он совпадает с периодом колебаний математического маятника при отсутствии вращения Земли, если положить в формуле (31.13)

$$u = 0, \quad \text{т.е.} \quad \omega = 0.$$

Вспользуемся формулами (31.9), (31.11) и (31.13) для определения положения нашего маятника спустя время $t = \tau$ от начала опыта (учитывая вращение Земли). Эти формулы дают:

$$\begin{aligned} s_{t=\tau} &= A_1 e^{-iu\tau+2\pi i} + A_2 e^{-iu\tau-2\pi i} = \\ &= (A_1 + A_2) e^{-iu\tau} = \alpha e^{-iu\tau}. \end{aligned}$$

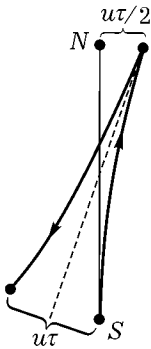


Рис. 50. Маятник Фуко. Вид траектории сверху. Начальное положение — к югу от точки равновесия; отклонение к западу за время полного колебания взад и вперед

Таким образом, маятник в момент $t = \tau$ находится на том же расстоянии a от своего положения равновесия, что и при $t = 0$, но азимут его качания лежит уже не в меридиональной плоскости, как в начале опыта, а отклонен от нее к западу на угол

$$u\tau = 2\pi \frac{u}{\sqrt{u^2 + \frac{g}{l}}} \sim 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \omega \sin \varphi$$

(рис. 50). Мы можем сказать, что траектория качания маятника, которая в случае отсутствия вращения Земли неизменно лежала бы в одной и той же меридиональной плоскости испытывает отклонение под действием кориолисовой силы (вследствие «давления на правый берег»), а именно: при качании с юга на север — отклонение к востоку на угол $\frac{u\tau}{2}$ и при обратном движении — отклонение к западу на тот же угол; таким образом, общий угол отклонения равен $u\tau$.

Опыты, произведенные Фуко в 1851 г., а также опыты его многочисленных последователей, дали только качественные результаты; *количественное же исследование* всех источников погрешностей дал в своей диссертации в 1879 г. Камерлинг–Оннес (имя которого впоследствии приобрело широкую известность благодаря работам в области низких температур и открытию явления сверхпроводимости).

§ 32. ПРОБЛЕМА ТРЕХ ТЕЛ (ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ ЛАГРАНЖА)

Мы не можем противостоять «искушению» дополнить наше рассмотрение относительного движения доказательством знаменитой теоремы Лагранжа (Парижская академия, 1772 г.): *Проблема трех тел допускает строгое решение в элементарных функциях, если принять, что треугольник, образованный тремя небесными телами, постоянно остается подобным самому себе.* При этом массы трех тел произвольны.

В ходе доказательства этой теоремы выяснится, что:

- 1) плоскость, проходящая через три рассматриваемые материальные точки, неподвижна в пространстве;
- 2) равнодействующая ньютоновских сил тяготения, приложенных к каждой из этих трех материальных точек, проходит через их общий центр тяжести;
- 3) образованный тремя телами треугольник является равносторонним;
- 4) траектории трех тел (материальных точек) представляют собой подобные друг другу конические сечения, для каждого из которых общий центр тяжести трех тел является одним из фокусов.

Доказательство, данное Лагранжем, довольно сложно. Его можно упростить, приняв с самого начала, как это делает Лаплас, что условие 1) выполнено. Каратеодори показал¹, однако, что и без этого допущения возможно элементарное доказательство теоремы Лагранжа. Его отправной точкой является наше векторное уравнение (29.4), переписанное в прямоугольных компонентах. Мы воспроизводим здесь с некоторыми изменениями доказательство Каратеодори.

Рассмотрим плоскость \mathcal{E} , проходящую через три материальные точки P_1, P_2, P_3 (массы их равны соответственно m_1, m_2, m_3), а сле-

¹Bayrische Akademie, 1933, S. 257.

довательно, и через их общий центр тяжести O . Последний мы можем без ограничения общности считать неподвижным. Таким образом, плоскость \mathcal{E} вращается вокруг неподвижной точки O ; кроме того, мы предполагаем, что плоскость \mathcal{E} вращается вокруг своей нормали, проведенной через точку O ; результирующую угловую скорость вращения обозначим через $\boldsymbol{\omega}$. Будем рассматривать движение материальных точек в системе отсчета, связанной с плоскостью \mathcal{E} , подобно тому, как мы рассматривали движение маятника Фуко в системе отсчета, связанной с Землей. Проведем радиусы-векторы \mathbf{r}_i из точки O в точку P_i ; $v_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}$ будут скоростями и ускорениями наших материальных точек в системе отсчета \mathcal{E} . Тогда из уравнения (29.4), с помощью векторной формулы (24.7), получим следующие дифференциальные уравнения движения:

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} + 2[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}_i] + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_i\boldsymbol{\omega}) - \mathbf{r}_i\boldsymbol{\omega}^2 + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}_i] = \frac{\mathbf{F}_i}{m_i}. \quad (32.1)$$

Здесь \mathbf{F}_i означает векторную сумму ньютоновских сил притяжения, действующих на материальную точку m_i . Так, например,

$$\frac{\mathbf{F}_1}{m_1} = \frac{Gm_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} + \frac{Gm_3}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|^2} \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|}. \quad (32.2)$$

Выберем в плоскости \mathcal{E} прямоугольную систему координат x, y с началом в точке O ; в остальном эта система координат произвольна.

Через точку O перпендикулярно к плоскости \mathcal{E} проведем ось z . Разложим угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ на слагающие по этим трем осям (как это делается в уравнениях Эйлера):

$$\boldsymbol{\omega} = (p, q, r). \quad (32.3)$$

Слагающую r (вращение плоскости \mathcal{E} вокруг собственной нормали) мы определим так, чтобы один из радиусов-векторов OP_i имел неизменное направление в плоскости \mathcal{E} . Поскольку мы предположили, что треугольник $P_1P_2P_3$ при движении остается подобным самому себе, то и остальные два радиуса-вектора OP_i также должны сохранять неизменное направление в плоскости \mathcal{E} . Таким образом, мы можем написать:

$$\mathbf{r}_i = \lambda(t)(a_i, b_i, 0). \quad (32.4)$$

Функция $\lambda(t)$ определяет общее изменение длины векторов OP_i , а следовательно, и изменение размеров треугольника $P_1P_2P_3$. Обозначая через $\dot{\lambda}$ и $\ddot{\lambda}$ производные от λ по времени, получим из уравнения (32.4):

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_i &= \dot{\lambda}(t)(a_i, b_i, 0), \\ \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} &= \ddot{\lambda}(t)(a_i, b_i, 0). \end{aligned} \right\} \quad (32.4a)$$

В соответствии с этим, z -компонента равнодействующей силы \mathbf{F}_i , выражаемой формулой (32.2), равна нулю; компоненты же этой силы по осям x и y обратно пропорциональны λ^2 . Запишем это сокращенно в следующем виде:

$$\frac{\mathbf{F}_i}{m_i} = \frac{1}{\lambda^2(t)}(L_i, M_i, 0). \quad (32.5)$$

В соответствии с этим, проектируя обе части дифференциального уравнения (32.1) на перпендикуляр к плоскости \mathcal{E} (т.е. на ось z), получим:

$$2\dot{\lambda}(pb_i - qa_i) + \lambda r(a_i p + b_i q) + \lambda(\dot{p}b_i - \dot{q}a_i) = 0,$$

или, группируя коэффициенты при a_i, b_i ,

$$\{-2\dot{\lambda}q + \lambda(rp - \dot{q})\}a_i + \{2\dot{\lambda}p + \lambda(rq + \dot{p})\}b_i = 0. \quad (32.6)$$

Оба выражения в фигурных скобках являются не зависящими от i функциями времени. Обозначим эти функции через $f(t)$ и $g(t)$, тогда должно выполняться равенство

$$\frac{f(t)}{g(t)} = -\frac{b_i}{a_i}. \quad (32.6a)$$

Так как, по условию, точки P_i образуют треугольник, т.е. не лежат на одной прямой, то три отношения $\frac{b}{a}$ не равны друг другу. Но отсюда следует, что условие (32.6) может быть выполнено только в том случае, если мы положим $f = g = 0$. Последнее означает, что

$$\left. \begin{aligned} 2\dot{\lambda}p &= -\lambda(rq + \dot{p}), \\ 2\dot{\lambda}q &= \lambda(rq - \dot{q}). \end{aligned} \right\} \quad (32.7)$$

Умножая эти уравнения соответственно на p и q и складывая их, найдем:

$$\frac{2\dot{\lambda}}{\lambda} = -\frac{p\dot{p} + q\dot{q}}{p^2 + q^2}.$$

Интегрируя, будем иметь:

$$p^2 + q^2 = \frac{C}{\lambda^4}, \quad (32.8)$$

где C — постоянная интегрирования. Далее, для x - и y -компонент дифференциальное уравнение (32.1) дает:

$$\ddot{\lambda}a_i - 2r\dot{\lambda}b_i + p\lambda(a_ip + b_iq) - \lambda a_i(p^2 + q^2 + r^2) - \dot{r}\lambda b_i = \frac{L_i}{\lambda^2},$$

$$\ddot{\lambda}b_i + 2r\dot{\lambda}a_i + q\lambda(a_ip + b_iq) - \lambda b_i(p^2 + q^2 + r^2) + \dot{r}\lambda a_i = \frac{M_i}{\lambda^2};$$

или, если сгруппировать коэффициенты при a_i и b_i :

$$\left. \begin{aligned} \{\ddot{\lambda} - \lambda(q^2 + r^2)\}a_i - \{2r\dot{\lambda} + \lambda(-pq + \dot{r})\}b_i &= \frac{L_i}{\lambda^2}, \\ \{2r\dot{\lambda} + \lambda(pq + \dot{r})\}a_i + \{\ddot{\lambda} - \lambda(p^2 + r^2)\}b_i &= \frac{M_i}{\lambda^2}. \end{aligned} \right\} \quad (32.9)$$

Таким образом, выражения в фигурных скобках каждого из этих уравнений, умноженные на λ^2 , должны удовлетворять трем линейным уравнениям с постоянными (не зависящими от t) коэффициентами. Это возможно только в том случае, если сами эти выражения являются постоянными. Поэтому разность выражений, заключенных в первой и четвертой скобках, равна некоторой постоянной, деленной на λ^2 , равно как и разность выражений, заключенных в третьей и второй скобках. Следовательно, имеет место:

$$p^2 - q^2 = \frac{A}{\lambda^3}, \quad 2pq = \frac{B}{\lambda^3}. \quad (32.10)$$

Объединим эти вещественные равенства в одно комплексное (j — мнимая единица):

$$(p \pm jq)^2 = \frac{A \pm jB}{\lambda^3}.$$

Переходя к абсолютным величинам, получим:

$$p^2 + q^2 = \frac{D}{\lambda^3}, \quad D = \sqrt{A^2 + B^2}. \quad (32.11)$$

Сравнение условий (32.11) и (32.8) привело бы нас к соотношению

$$\lambda = \frac{C}{D} = \text{const}, \quad (32.11a)$$

за исключением того случая, когда C и D оба обращаются в нуль. Однако при $\lambda = \text{const}$, согласно условию (32.10), были бы постоянными также p и q и, в силу условий (32.7), r обращалось бы в нуль. С помощью соответственного выбора координатных осей x , y можно было бы даже сделать $q = 0$ и получить из первого уравнения (32.9) $L_i = 0$. Но тогда наши три точки P_i должны были бы лежать на одной прямой, что, по условию, не должно иметь места.

Следовательно, мы должны положить $C = D = 0$, тогда из уравнений (32.8) или (32.11) получим:

$$p = q = 0. \quad (32.12)$$

Тем самым доказана 1-я часть теоремы Лагранжа: плоскость \mathcal{E} вращается вокруг своей нормали с угловой скоростью \mathbf{r} ; указанная нормаль неподвижна в пространстве.

Применяя закон площадей к нашей системе, мы видим, что движение точек m_i в плоскости \mathcal{E} не может увеличить «постоянную площадей». Таким образом, эта постоянная непосредственно определяется угловой скоростью вращения r плоскости \mathcal{E} , а именно:

$$\text{const} = r \sum m_i |r_i|^2 = r \lambda^2 \sum m_i (a_i^2 + b_i^2).$$

Обозначим

$$\lambda^2 r = \gamma, \quad (32.12a)$$

откуда

$$2\dot{\lambda}r + \lambda\dot{r} = 0. \quad (32.12b)$$

В силу условий (32.12) и (32.12 а, б), уравнения (32.9) упрощаются и принимают вид

$$\lambda^2 \ddot{\lambda} - \frac{\gamma^2}{\lambda} = \frac{L_i}{a_i} = \frac{M_i}{b_i}. \quad (32.13)$$

Из содержащегося в этих уравнениях требования $\frac{L_1}{a_1} = \frac{M_1}{b_1}$ вытекает, что момент силы \mathbf{F}_1 относительно точки O обращается в нуль:

$$[\mathbf{r}_1 \mathbf{F}_1] = \frac{1}{\chi^2} (a_1 M_1 - b_1 L_1) = 0 \quad (32.14)$$

и что, таким образом, сила \mathbf{F}_1 проходит через центр тяжести O . То же самое относится и к силам \mathbf{F}_2 и \mathbf{F}_3 . Этим доказана 2-я часть теоремы Лагранжа: *равнодействующая сил, приложенных к точке P_i , проходит через центр тяжести масс m_i .*

Преобразуем равенство (32.14) с помощью выражения (32.2). Вначале мы получим

$$\frac{|\mathbf{r}_1 \mathbf{F}_1|}{m_1 G} = \frac{m_2 [\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2]}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} + \frac{m_3 [\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_3]}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|^3} = 0. \quad (32.15)$$

Однако по определению центра тяжести имеем:

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3 = 0, \quad (32.16)$$

а, следовательно, также

$$m_2 [\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2] + m_3 [\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_3] = 0.$$

Подставив это в уравнение (32.15), найдем:

$$m_2 [\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2] \left(\frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} - \frac{1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|^3} \right) = 0,$$

откуда

$$|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = |\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|. \quad (32.17)$$

Таким же образом находим:

$$|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2| = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \text{ и т. д.} \quad (32.17a)$$

Это означает, что наш треугольник равносторонний, т. е. 3-я часть теоремы Лагранжа также доказана.

Мы можем определить и каждое из входящих в уравнение (32.13) отношений $\frac{L_i}{a_i}$, $\frac{M_i}{b_i}$ в отдельности. Обозначим сторону треугольника через λs , причем

$$s^2 = (a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2 = (a_3 - a_2)^2 + (b_3 - b_2)^2 = \dots$$

Согласно формулам (32.2) и (32.5), получим:

$$\frac{L_1}{a_1} = \frac{G}{s^3 a_1} \{m_2(a_2 - a_1) + m_3(a_3 - a_1)\};$$

принимая во внимание (32.16),

$$\frac{L_1}{a_1} = \frac{G}{s^3} \{-m_1 - m_2 - m_3\}. \quad (32.18)$$

Так как массы m_i и координаты a_i , b_i входят в правую часть формулы совершенно симметрично, то эта правая часть выражает в то же время величины $\frac{L_i}{a_i}$ и $\frac{M_i}{b_i}$. Подставляя это значение в формулу (32.13), получим:

$$\lambda^2 \ddot{\lambda} - \frac{\dot{\lambda}^2}{\lambda} = -\frac{G}{s^3} (m_1 + m_2 + m_3). \quad (32.19)$$

Это дифференциальное уравнение для λ описывает временной ход движения, «растяжения» и «сжатия» нашего равностороннего треугольника, претерпеваемые им с течением времени.

Однако временной ход таких «пульсаций» треугольника, равно как и геометрическую форму траекторий трех тел, можно проследить еще проще, если в качестве системы отсчета выбрать не плоскость \mathcal{E} , а совпадающую с ней, но неподвижную в пространстве, плоскость \mathcal{E}' . В этой системе отсчета на материальную точку m_i действует только равнодействующая сила \mathbf{F}_i , направленная к неподвижному центру тяжести, в то время как все прочие входящие в уравнение (32.1) фиктивные силы (кориолисова сила, центробежная сила и т. д.) отпадают. Согласно формулам (32.5) и (32.18), величина этой силы \mathbf{F}_i равна

$$|\mathbf{F}_i| = \frac{m_i}{\lambda^2} \sqrt{L_i^2 + M_i^2} = -\frac{m_i G}{\lambda^2 s^2} (m_1 + m_2 + m_3) \frac{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}{s}. \quad (32.20)$$

Единственной функцией времени в правой части этой формулы является λ^2 . С помощью равенства (32.4) выразим λ^2 через $|\mathbf{r}_i|$:

$$\lambda^2 = \frac{|\mathbf{r}_i|^2}{a_i^2 + b_i^2}.$$

Подставляя это выражение в формулу (32.20) и вводя массу

$$m_i' = m_i \frac{(a_i^2 + b_i^2)^{2/3}}{s^3}, \quad (32.20a)$$

а также полную массу $M = m_1 + m_2 + m_3$, получаем

$$|\mathbf{F}_i| = -\frac{m_i' M G}{|\mathbf{r}_i|^2}.$$

Таким образом, каждая из наших трех материальных точек движется в пространстве независимо от остальных двух и притом так, как если бы она имела массу m_i' и притягивалась находящейся в точке O неподвижной массой M по закону Ньютона. *Поэтому при своем движении она описывает коническое сечение, в одном из фокусов которого находится точка O .*

Для того чтобы узнать что-либо относительно размеров и взаимного положения этих трех конических сечений, мы должны учесть заданные начальные условия нашего движения. Рассмотрим, например, момент, в который все три материальные точки m_i находятся на экстремальных расстояниях от центра O , равных

$$\lambda_{\text{эстр.}} \sqrt{a_i^2 + b_i^2}. \quad (32.21)$$

Тогда, согласно формуле (32.4), радиальная скорость в системе отсчета \mathcal{E} равна нулю; скорость же в системе отсчета \mathcal{E}' (т. е. в пространстве) равна произведению компоненты r угловой скорости на расстояние (32.21). Входящий в выражение (32.21) множитель $\sqrt{a_i^2 + b_i^2}$ будет при этом *коэффициентом подобия* не только для начальных скоростей и начальных расстояний от центра тяжести, но также и для величин получающихся конических сечений. Тем самым доказана и 4-я часть теоремы Лагранжа. Три конических сечения взаимно смещены на углы, равные соответственно углам между тремя центральными осями.

В частном случае $m_1 = m_2 = m_3$, когда центр тяжести O является одновременно центром равностороннего треугольника, конические сечения конгруэнтны и смещены друг относительно друга на 120° .

Кроме этого движения по коническим сечениям, существует, по Лагранжу, класс движений, которые могут быть представлены в элементарных функциях и при которых три тела находятся на вращающейся прямой. Но на этом мы останавливаться не будем.

Укажем еще на то, что от лагранжева случая проблемы трех тел можно перейти к соответствующему частному случаю проблемы n тел. В случае, когда массы всех n тел одинаковы и скорости их подобраны соответствующим образом траектории представляют собой n равновеликих кеплеровых эллипсов, повернутых друг относительно друга на углы $\frac{2\pi}{n}$; движение по этим эллипсам происходит в одинаковом ритме. Этот род движения вскользь упоминается в теории рентгеновских L -спектров, где он обозначается термином «Ellipsenverein» [Physikal. Zeitschr., Bd **19**, S. 297 (1918)].

ГЛАВА VI

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ И ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА

§ 33. ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ ГАМИЛЬТОНА

Мы знакомы уже с одним из вариационных принципов механики — принципом Даламбера. Этот принцип исходит из произвольно выбранного мгновенного состояния системы, которое сравнивается со смежным ее состоянием, возникающим из предыдущего в результате виртуального перемещения (ср. § 7). Напротив, те вариационные принципы механики, к изучению которых мы сейчас перейдем, являются *интегральными принципами*: они позволяют рассматривать ряд последовательных состояний системы за конечный промежуток времени или, что то же самое, на конечном отрезке траектории и сравнивать их с соседними виртуальными состояниями, находящимися с ними в определенном соответствии.

Характером этого соответствия и отличаются друг от друга различные и носящие различные названия интегральные принципы. Общим для них является то, что варьируемая величина имеет размерность *действия*. Поэтому их объединяют под общим названием — *принципы наименьшего действия*¹.

В то время как *мощностью*, как известно, называют величину *энергия : время*, *действием* называют величину с размерностью *энер-*

¹К сожалению, этот термин выбран не совсем удачно. Когда мы говорим о причине и действии, мы под действием понимаем следствие или результат. С точки зрения принципа наименьшего действия природа достигает своей цели прямым путем, следовательно, с наименьшей затратой средств. Поэтому более удачен был бы термин «принцип наименьшей затраты средств при наибольшем действии». Но после того, как термин «действие» санкционирован Гельмгольцем и Планком, всякая замена его другим термином была бы бесперспективной.

гия \times время. Примером может служить элементарный квант действия Планка, с которым мы встретимся в § 45, именно — величина

$$h = 6,624 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{сек.}$$

Вначале мы остановимся на *принципе наименьшего действия Гамильтона*, а рассмотрение исторически более раннего принципа Мопертюи отложим до § 37. Принцип Гамильтона отличается от принципа Мопертюи тем, что в нем *не должно варьироваться время*. Это значит, что система проходит одновременно как через точку действительной траектории (с координатами x_k), так и через соответствующую ей точку траектории, получаемой в результате варьирования (пусть координаты этой точки будут $x_k + \delta x_k$). Таким образом, для принципа Гамильтона имеет место

$$\delta t = 0. \quad (33.1)$$

При этом мы должны отметить, что, говоря о «траектории системы», мы подразумеваем не траекторию отдельной точки системы в трехмерном пространстве, а многомерную характеристику движения всей системы в целом. Если рассматриваемая система имеет f степеней свободы, то траектория ее движения расположена в f -мерном пространстве обобщенных координат q_1, \dots, q_f (ср. 70).

Кроме условия (33.1), мы при рассмотрении принципа Гамильтона накладываем на вариации еще одно добавочное ограничение: положение начальной точки O и конечной точки P рассматриваемого участка траектории не должно варьироваться. Таким образом, для каждой координаты x должно выполняться условие

$$\delta x = 0 \quad \text{при} \quad t = t_0 \quad \text{и} \quad t = t_1. \quad (33.2)$$

Рис. 51 дает символическое трехмерное представление взаимного положения истинной траектории системы (сплошная кривая) и ее виртуальной траектории (пунктирная кривая): слагающееся из совокупности всех δx смещение δq должно быть вполне произвольным вдоль всей траектории, за исключением начальной и конечной точек, и должно представлять собой непрерывную и дифференцируемую функцию от t , причем каждые две соответственные точки действительной и варьированной траектории, связанные между собой вариацией δq , относятся к одному и тому же моменту времени t .

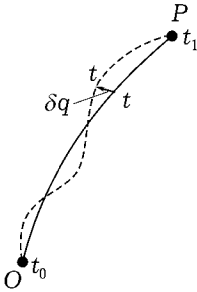


Рис. 51. Вариация траектории в принципе Гамильтона. Время не варьируется

Перейдем теперь к выводу принципа Гамильтона. Мы будем исходить при этом из принципа Даламбера в форме (10.6):

$$\sum_{k=1}^n \{ (m_k \ddot{x}_k) \delta x_k + (m_k \ddot{y}_k - Y_k) \delta y_k + (m_k \ddot{z}_k - Z_k) \delta z_k \} = 0. \quad (33.3)$$

Таким образом, мы рассматриваем систему из n дискретных материальных точек, которые, однако, могут быть связаны друг с другом посредством каких-либо связей. Вариации δx_k , δy_k и δz_k , которые также соответствуют этим связям, не независимы друг от друга. При f степенях свободы только f из них могут быть выбраны произвольно.

Произведем в уравнении (33.3) пока что формальное преобразование:

$$\ddot{x}_k \delta x_k = \frac{d}{dt} (\dot{x}_k \delta x_k) - \dot{x}_k \frac{d}{dt} (\delta x_k). \quad (33.4)$$

Но сейчас же зададим себе вопрос: что следует понимать здесь под $\frac{d}{dt} (\delta x_k)$? Чтобы ответить на этот вопрос, мы сравним между собой не только истинную траекторию (состоящую из точек x_k) с виртуальной траекторией (состоящей из точек $x_k + \delta x_k$), но также и скорость \dot{x}_k вдоль истинной траектории со скоростью $\dot{x}_k + \delta \dot{x}_k$ вдоль виртуальной траектории *в один и тот же момент времени t* . Скорость $\dot{x}_k + \delta \dot{x}_k$, вдоль виртуальной траектории, по определению, равна

$$\frac{d}{dt} (x_k + \delta x_k) = \dot{x}_k + \frac{d}{dt} (\delta x_k).$$

Приравнивая друг другу оба выражения виртуальной скорости, мы получим:

$$\frac{d}{dt} (\delta x_k) = \delta \dot{x}_k. \quad (33.5)$$

Подставив это в выражение (33.4), будем иметь:

$$\ddot{x}_k \delta x_k = \frac{d}{dt} (\dot{x}_k \delta x_k) - \dot{x}_k \delta \dot{x}_k = \frac{d}{dt} (\dot{x}_k \delta x_k) - \frac{1}{2} \delta (\dot{x}_k^2). \quad (33.6)$$

Аналогичные выражения мы получим, разумеется, и для координат y_k и z_k , следовательно, уравнение (33.3) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum m_k (\dot{x}_k \delta x_k + \dot{y}_k \delta y_k + \dot{z}_k \delta z_k) &= \\ &= \sum \frac{m_k}{2} \delta (\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2) + \sum (X_k \delta x_k + \\ &+ Y_k \delta y_k + Z_k \delta z_k). \end{aligned} \quad (33.7)$$

Второй член правой части этого уравнения есть не что иное, как виртуальная работа δA , т. е. работа внешних сил на рассматриваемом виртуальном перемещении. Первый же член правой части является вариацией кинетической энергии T системы:

$$T = \sum \frac{m_k}{2} (\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2)$$

при переходе от истинной к виртуальной траектории. Поэтому уравнение (33.7) можно упростить следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \sum m_k (\dot{x}_k \delta x_k + \dot{y}_k \delta y_k + \dot{z}_k \delta z_k) = \delta T + \delta A. \quad (33.8)$$

Прежде чем делать дальнейшие выводы, нужно сказать несколько слов по поводу соотношения (33.5). Перепишем его в следующей форме:

$$\frac{d}{dt} \delta x = \delta \frac{dx}{dt}. \quad (33.9)$$

Принимая во внимание, что t не варьируется и что из $\delta t = 0$ следует также $\delta dt = 0$, мы можем соотношение (33.9) переписать в виде:

$$\frac{d \delta x}{dt} = \frac{\delta dx}{dt} \quad \text{или} \quad d \delta x = \delta dx. \quad (33.9a)$$

Главным образом, в этой последней форме « $d\delta = \delta dx$ » соотношение (33.9a) играло плодотворную, хотя и несколько «мистическую» роль в старом вариационном исчислении времен Эйлера. Мы видим, что соотношение (33.9a) является лишь видоизменением довольно тривиального соотношения (33.5) между производной по времени от виртуального перемещения и виртуальным изменением скорости, если *ввести дополнительное предположение о том, что время не варьируется* и что виртуальное перемещение непрерывно.

Теперь вернемся к уравнению (33.8) и проинтегрируем его по t в пределах от t_0 до t_1 . При этом, согласно уравнению (33.2), левая часть уравнения обратится в нуль, и мы получим

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta A) dt = 0. \quad (33.10)$$

Применяя наш способ варьирования, можем также написать:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} T dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta A dt = 0. \quad (33.11)$$

Однако было бы неправильно заменить последний интеграл выражением $\delta \int Adt$, так как вполне определенный смысл имеют лишь виртуальная работа δA и элементарная работа dA , но не сама работа A . Работа A не является, вообще говоря, «функцией состояния». Она является «функцией состояния» лишь в том случае, когда dA представляет собой «полный дифференциал», т. е. когда внешние силы удовлетворяют условиям существования *потенциальной энергии* V (ср. добавление к § 18). В этом случае мы можем в уравнении (33.11) заменить

$$\int \delta A dt \quad \text{через} \quad - \int \delta V dt = -\delta \int V dt.$$

Благодаря этому уравнение (33.11) принимает классически простую форму:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt = 0. \quad (33.12)$$

Эту форму и подразумевают обычно, когда говорят о принципе Гамильтона; она справедлива (см. стр. 135) для консервативных систем. Напротив, формулу (33.11) мы называем «*принципом Гамильтона, обобщенным для случая неконсервативных систем*».

Мы утверждаем, что в формуле (33.12) или в формуле (33.11) (так же, как в принципе Даламбера) *заклучена вся механика*. Этим подчеркивается особое значение энергетической величины $T - V$. В механике

эта величина называется *функцией Лагранжа*, и формула (33.12) записывается также в виде

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0, \quad L = T - V. \quad (33.13)$$

Гельмгольц, который в своих последних работах использовал преимущественно принцип наименьшего действия в форме Гамильтона, назвал L «*кинетическим потенциалом*». По аналогии с термодинамикой можно было бы назвать L «*свободной энергией*», в противоположность термину «*полная энергия*» для $T + V$.

Принцип Гамильтона особенно ценен в том отношении, что он совершенно не зависит от выбора системы координат. Действительно T и V (как и δA) являются величинами, имеющими непосредственный физический смысл; они могут быть выражены в любых координатах. Мы воспользуемся этим в следующем параграфе.

Принцип Гамильтона, так же как и остальные принципы наименьшего действия, кажущимся образом противоречит нашему представлению о причинности, поскольку, согласно этому принципу, протекание процесса во времени определяется не состоянием системы в настоящий момент, а выводится с учетом в равной мере прошедшего и будущего системы. *Интегральные принципы являются, казалось бы, не каузальными, а телеологическими.* К этому вопросу мы вернемся в § 37, когда будем рассматривать историческое происхождение принципов наименьшего действия. Там же мы коснемся вопроса о распространении принципа Гамильтона на другие области физики.

§ 34. ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА

Рассмотрим произвольную механическую систему; допустим сначала, что на ее составные части наложены только голономные связи и что она имеет f степеней свободы. Тогда мы можем ввести f независимых координат, определяющих мгновенное положение системы. Обозначим эти координаты [как в уравнении (7.2)] через

$$q_1, q_2, \dots, q_f. \quad (34.1)$$

Это наши «обобщенные координаты». Сопоставим им «обобщенные скорости»

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_f. \quad (34.1a)$$

Совокупность всех q_k и \dot{q}_k полностью определяет мгновенное состояние системы.

Рассмотрим это более подробно. Допустим сначала, что положение системы описывается координатами x_1, \dots, x_n , которые могут и не быть обычными прямоугольными координатами. Пусть на них наложено $(n - f)$ условий связи:

$$F_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad k = f + 1, f + 2, \dots, n. \quad (34.2)$$

С помощью x_1, x_2, \dots, x_n определяем координаты q_k как некоторые функции следующего вида:

$$F_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = q_k, \quad k = 1, 2, \dots, f. \quad (34.2a)$$

Обозначая через F_{ik} частные производные от f_k по x_i и дифференцируя по t уравнения (34.2a) и (34.2), получим:

$$\sum_{i=1}^n F_{ik}(x_1, \dots, x_n) \dot{x}_i = \begin{cases} \dot{q}_k, & k = 1, 2, \dots, f, \\ 0, & k = f + 1, \dots, n. \end{cases} \quad (34.2б)$$

Отсюда \dot{x}_i определяются как линейные функции от \dot{q}_k с коэффициентами, зависящими от x_1, \dots, x_n или, в силу условий (34.2) и (34.2a), от q_1, \dots, q_f . Кинетическая энергия T , являющаяся однородной квадратичной функцией от \dot{x}_i (как и в исходных прямоугольных координатах), будет также однородной квадратичной функцией от \dot{q}_k с коэффициентами, зависящими от q_k . Потенциальную энергию V мы будем вначале считать зависящей только от координат q_k . Впрочем, в целях дальнейших обобщений, в нашем рассмотрении мы не исключаем принципиально возможной зависимости функции V от \dot{q}_k . В связи с этим дополним определение (33.13) функции Лагранжа в том смысле, что L следует рассматривать как функцию от q_k и \dot{q}_k .

Руководствуясь этим определением, образуем вариацию L , т.е. разность между значениями L в виртуально варьированном состоянии (характеризуемом обобщенными координатами $q_k + \delta q_k$ и обобщенными

скоростями $\dot{q}_k + \delta\dot{q}_k$) и в исходном состоянии (со значениями обобщенных координат и скоростей, соответственно, q_k и \dot{q}_k):

$$\delta L = \sum_k \frac{\delta L}{\delta q_k} \delta q_k + \sum_k \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k. \quad (34.3)$$

Эту вариацию введем в выражение принципа Гамильтона:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = 0. \quad (34.3a)$$

Такая форма записи отличается от принятой в формуле (33.13) тем, что здесь варьирование производится под знаком интеграла, в то время как в выражении (33.13) оно вынесено за знак интеграла. Это, однако, допустимо ввиду условия (33.1): « t и dt не варьируются», и, более того, даже соответствует той формулировке (33.10), в которой мы впервые встретились с принципом Гамильтона.

Интегрирование по времени в формуле (34.3a) мы выполним прежде всего для общего члена второй суммы в выражении (34.3) и произведем с помощью интегрирования по частям преобразование, которое со времен Эйлера¹ является характерным для всего вариационного исчисления:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k dt = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k dt. \quad (34.4)$$

В этом двойном равенстве первый член правой части обращается в нуль, согласно условию (33.2). Поэтому, используя выражение (34.4) для δL , мы получим:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = - \int_{t_0}^{t_1} \sum_k \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} \right) \delta q_k dt = 0. \quad (34.4a)$$

¹Вообще уравнением Эйлера произвольной вариационной задачи называют получаемое по образцу уравнений (34.4) и (34.5) дифференциальное уравнение типа (34.6). Таким образом, можно сказать, что уравнения Лагранжа являются эйлеровыми уравнениями вариационной проблемы, заданной функцией L .

Поскольку вариации δq_k между собой независимы, мы можем все δq_k положить равными 0, кроме одной, относительно которой мы можем допустить еще, что она также обращается в нуль вдоль всей «траектории» рис. 51, кроме окрестности одной точки, или, что то же самое, кроме интервала времени Δt , заключающего произвольный момент времени t . Тогда для того, чтобы имело место равенство (34.4а), мы должны потребовать выполнения следующего условия:

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} \right) \int_{\Delta t} \delta q_k dt = 0. \quad (34.5)$$

Но ни Δt , ни δq_k в интервале Δt не обращаются в нуль. Поэтому (для каждого произвольно выбранного момента времени t и для каждого произвольно взятого индекса k) мы имеем:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0. \quad (34.6)$$

Это и есть общие уравнения Лагранжа или, иначе, уравнения Лагранжа второго рода для рассматриваемого нами случая, когда силы, действующие на систему, имеют потенциал, а связи, существующие внутри системы, голономны.

Если какое-либо из этих двух условий не выполняется, то уравнения Лагранжа принимают соответствующую обобщенную форму.

В первом случае (силы не имеют потенциала) следует исходить из формулировки (33.11) принципа наименьшего действия. При этом, выражая виртуальную работу δA через виртуальные перемещения δq , положим:

$$\delta A = \sum Q_k \delta q_k. \quad (34.7)$$

Введенные здесь коэффициенты Q_k мы назовем обобщенными силами, соответствующими обобщенным координатам q_k . Это является формальным расширением понятия силы и, конечно, допустимо как математическое определение. Целесообразность введения понятия обобщенной силы обнаруживается, например, в том, что данное в выражении (9.7) определение момента силы относительно оси теперь может быть сформулировано следующим образом: «момент силы относительно оси представляет собой обобщенную силу, соответствующую углу поворота вокруг этой оси». Совершенно ясно, что величины Q , определяемые формулой (34.7), уже не являются векторами и, вообще говоря,

отнодь не должны иметь размерности «динь». Их размерность, согласно формуле (34.7), существенно зависит от размерности соответствующей координаты q_k и в случае момента силы, как мы знаем, является размерностью работы, т. е. «эрг», поскольку соответствующее δq — величина безразмерная.

Подставив выражение (34.7) в формулу (33.11) и произведя вышеописанные преобразования [см. равенства (34.4) и (34.5)], мы вместо уравнений (34.6), очевидно, получим:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k. \quad (34.8)$$

Вместо этих уравнений мы можем написать еще несколько более общие уравнения:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k. \quad (34.8a)$$

Именно, когда только часть действующих сил имеет потенциал, а остальные силы его не имеют, можно написать в правой части уравнений (34.8a) только те Q_k , которые соответствуют силам, не имеющим потенциала; потенциальную же энергию остальной части сил можно в уравнении (34.8a) объединить с кинетической энергией T в функцию Лагранжа L .

Эти уравнения (34.8a) являются *общими уравнениями Лагранжа, когда часть сил не имеет потенциала*.

Далее, если мы откажемся от второго из упомянутых условий, т. е. допустим, что часть из наложенных на систему связей неголономна, то мы тем самым затронем самый способ введения обобщенных координат q_k .

Согласно определению, неголономные связи мы не можем представить в форме условий (34.2) и, следовательно, не можем исключить их путем соответствующего выбора q . Напротив, нам придется ввести *избыточные* координаты q , число которых превышает число степеней свободы в бесконечно малой области. Последнее число равно $f - r$ (f — число степеней свободы в конечной области, r — число неголономных связей). Мы выразим эти неголономные связи в виде виртуальных условий, аналогичных условию (7.4):

$$\sum_{k=1}^f F_{k\mu}(q_1, \dots, q_f) \delta q_k = 0, \quad \mu = 1, 2, \dots, r. \quad (34.9)$$

Эти условия налагают ограничения на допустимые вариации δq_k . Это ограничение мы учтем путем умножения каждого из уравнений (34.9) на *множитель Лагранжа* λ_μ и суммирования их под знаком интеграла в формуле (33.13). Записывая, кроме того, функцию F в несколько более сокращенной форме, мы получим:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta L + \sum_{\mu=1}^r \lambda_\mu F_{k\mu} \delta q_k) dt = 0.$$

Преобразование Эйлера производится так же, как и в формуле (34.4); при этом вместо выражения (34.4a) получается следующее:

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_k \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} - \sum_{\mu=1}^r \lambda_\mu F_{k\mu} \right) \delta q_k dt. \quad (34.10)$$

Правда, теперь вариации δq_k уже не являются, как прежде, независимыми, а связаны между собой условиями (34.9). Однако можно рассуждать так, как это изложено на стр. 91: при соответствующем выборе множителей λ_μ , r из числа скобок, умноженных на δq_k обращаются в нуль. Тогда в оставшуюся сумму по k войдут только $f - r$ независимых друг от друга δq . Рассуждение, аналогичное примененному к формуле (34.5), убеждает нас в том, что и остальные выражения в скобках обращаются в нуль. Таким образом, мы получаем полную систему f уравнений

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_{\mu=1}^r \lambda_\mu F_{k\mu}. \quad (34.11)$$

Эти уравнения могут быть названы *уравнениями Лагранжа смешанного типа*, так как занимают промежуточное положение между уравнениями Лагранжа первого и второго рода.

Следует также отметить, что этот смешанный тип уравнений встречается не только тогда, когда мы *не можем* исключить отдельные условия связи (случай неголономных связей), но и тогда, когда мы не хотим их исключать. А именно, нас может интересовать *принуждение*, оказываемое на систему голономными связями. Это принуждение представлено как раз множителем λ_μ , соответствующим данному условию связи [как в уравнении (18.7) в случае сферического маятника], и может быть определено путем интегрирования уравнений (34.11).

Наконец, очевидно, можно также комбинировать друг с другом уравнения типов (34.11) и (34.8а), если отказаться одновременно от обоих предположений, при которых были выведены уравнения (34.6).

Но мы на этом останавливаться не будем, а рассмотрим здесь только вопрос, как и при каких допущениях можно вывести *закон сохранения энергии* из уравнений Лагранжа (34.6).

Выше, перед тем, как получить формулу (34.3), мы уже указывали, что L является функцией от q_k и \dot{q}_k ; теперь мы специально подчеркиваем, что *функция Лагранжа L не должна явно зависеть от времени t* . Тогда соотношение (34.3) будет справедливо не только для виртуальных изменений δq_k и $\delta \dot{q}_k$, но и для действительных изменений во времени dq , $d\dot{q}$; таким образом,

$$\frac{dL}{dt} = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial q_k} + \sum_k \ddot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}. \quad (34.12)$$

С другой стороны, мы также подчеркивали, что кинетическая энергия T является однородной квадратичной функцией¹ от \dot{q}_k . Поэтому, применяя теорему Эйлера об однородных функциях, получим:

$$2T = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}. \quad (34.13)$$

Если T также не зависит явно от t (см. ниже), то отсюда путем дифференцирования по t можно найти:

$$2 \frac{dT}{dt} = \sum_k \dot{q}_k \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} + \sum_k \ddot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}. \quad (34.14)$$

Вычтем почленно уравнение (34.12) из уравнения (34.14). Тогда, ввиду того, что $L = T - V$, в левой части получится

$$\frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt}.$$

¹Если это даже не имеет места, так что L является произвольной функцией q_k и \dot{q}_k , можно доказать «обобщенный закон сохранения энергии», имеющий следующую форму:

$$H = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L = \text{const.}$$

Определенную таким образом функцию H мы будем в гл. VIII называть «функцией Гамильтона»; частным случаем приведенного уравнения является закон сохранения энергии, выражаемый уравнением (34.15в).

Вторые члены в правой части взаимно уничтожаются, если V не зависит от \dot{q}_k . При том же условии, согласно уравнениям (34.6), обратится в нуль и разность первых членов в правой части. Следовательно, мы имеем:

$$\frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt} = 0, \quad (34.14a)$$

откуда заключаем, что

$$T + V = W, \quad (34.15)$$

т. е. закон сохранения энергии является следствием уравнений Лагранжа.

Рассмотрим исходные положения этого важного вывода.

а) Кинетическая энергия T по своему смыслу определяется положением и скоростью системы, т. е. является функцией q и \dot{q} ; T могла бы явно зависеть от t только в результате исключения условий связи, в случае если бы последние зависели от t^1 . Однако, мы уже видели (см. стр. 93), что такие связи производят работу над системой и, следовательно, нарушают сохранение энергии. Таким образом, независимость T от времени действительно является необходимым условием выполнимости закона сохранения энергии.

б) Условие, что L не должно явно зависеть от t , сводится, на основании вышесказанного, к условиям независимости V от t . Последнее также является необходимым. В противном случае правая часть уравнения (34.12) содержала бы член

$$-\frac{\partial V}{\partial t},$$

который тогда появился бы и в правой части уравнения (34.14a) с обратным знаком. Таким образом, вместо $T + V = \text{const}$, мы имели бы

$$\frac{d}{dt}(T + V) = \frac{\partial V}{\partial t}, \quad (34.15a)$$

т. е. в этом случае закон сохранения энергии теряет силу.

¹Такие зависящие от времени условия называются *реономными* (текущими) в противоположность условиям, не зависящим от времени, которые называются *склерономными* (твердыми).

в) Если V зависит не только от q_k , но также от \dot{q}_k , то учитывая уравнения (34.6), мы получим разность правых частей уравнений (34.14) и (34.12) в виде

$$\sum \dot{q}_k \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} + \sum \ddot{q}_k \frac{\partial V}{\partial \ddot{q}_k} = \frac{d}{dt} \sum \dot{q}_k \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k}. \quad (34.156)$$

В этом случае, правда, имеет место закон сохранения, но форма его отлична от обычной:

$$T + V - \sum \dot{q}_k \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = \text{const.} \quad (34.15в)$$

Из изложенного мы выведем еще одно следствие, которое будет нам полезно в дальнейшем. Выразим $L - 2T = -(T + V)$, используя для $2T$ выражение (34.13) и снова считая V функцией только q_k . Тогда мы найдем, что

$$-(T + V) = L - \sum \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = L - \sum \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

или

$$T + V = \sum \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L. \quad (34.16)$$

Таким образом, *полная энергия $T + V$ может быть определена из выражения «свободной энергии» L .*

Довольно абстрактные рассуждения, содержащиеся в этом параграфе, будут в полной мере конкретизированы на примерах, приводимых в следующем параграфе. Для того чтобы подготовить рассмотрение этих примеров, найдем выражения входящих в уравнения Лагранжа величин

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial L}{\partial q}$$

для простейшего частного случая отдельной материальной точки и для обычных прямоугольных координат x, y, z . Мы получим:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \text{и т. д.};$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = X \quad \text{и т. д.}$$

Поскольку, как мы видим, величина $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ равна x -компоненте импульса, мы будем называть вообще $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ обобщенным импульсом, соответствующим обобщенной координате q_k . Так как, с другой стороны, выражение $\frac{\partial L}{\partial x}$ дает x -компоненту силы, мы будем называть оба получающихся из $\frac{\partial L}{\partial q}$ члена обобщенными силами, соответствующими обобщенным координатам q :

$$\frac{\partial T}{\partial q} - \frac{\partial V}{\partial q} = \frac{\partial T}{\partial q} - Q, \quad (34.17)$$

именно, Q — внешней силой, как и в формуле (34.7), а $\frac{\partial T}{\partial q}$ — фиктивной силой Лагранжа (последняя зависит от того, что природа координаты q меняется с изменением положения в пространстве). Для не зависящей от положения в пространстве параллельной системы координат, какой является система координат x, y, z , эта последняя часть обобщенной силы равна нулю.

§ 35. ПРИМЕРЫ НА ПРИМЕНЕНИЕ ОБЩИХ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА

Мы выберем примеры, которые мы уже рассматривали с помощью элементарных методов, чтобы на них показать превосходство формального метода Лагранжа.

1. Циклоидальный маятник

В качестве обобщенной координаты здесь удобно взять угол поворота φ колеса, образующего циклоиду (см. рис. 26). Согласно формулам (17.2), прямоугольные координаты выражаются через этот угол следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= a(\varphi - \sin \varphi), & \dot{x} &= a(1 - \cos \varphi)\dot{\varphi}; \\ y &= a(1 + \cos \varphi), & \dot{y} &= -a \sin \varphi \dot{\varphi}. \end{aligned}$$

Отсюда мы определяем:

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = ma^2(1 - \cos \varphi)\dot{\varphi}^2, \\ V &= mgy = mga(1 + \cos \varphi), \\ L &= ma^2(1 - \cos \varphi)\dot{\varphi}^2 - mga(1 + \cos \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (35.1)$$

Ничего более относительно геометрии и механики рассматриваемой системы нам знать не нужно. Все остальное «выполнит за нас» формальный метод Лагранжа. Пользуясь им, мы получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= 2ma^2(1 - \cos \varphi)\dot{\varphi}, & \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= ma^2 \sin \varphi \dot{\varphi}^2 + mga \sin \varphi, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= 2ma^2(1 - \cos \varphi)\ddot{\varphi} + 2ma^2 \sin \varphi \dot{\varphi}^2. \end{aligned}$$

Таким образом, дифференциальное уравнение движения маятника запишется в виде

$$(1 - \cos \varphi)\ddot{\varphi} + \frac{1}{2} \sin \varphi \dot{\varphi}^2 = \frac{g}{2a} \sin \varphi$$

или, после введения половинного угла и сокращения на $2 \sin \frac{\varphi}{2}$,

$$\sin \frac{\varphi}{2} \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \dot{\varphi}^2 = \frac{g}{2a} \cos \frac{\varphi}{2}. \quad (35.2)$$

Легко убедиться, что левая часть этого уравнения тождественно равна

$$-2 \frac{d^2}{dt^2} \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Следовательно, наше дифференциальное уравнение совпадает с прежним дифференциальным уравнением (17.6), с помощью которого был доказан точный изохронизм циклоидального маятника.

2. Сферический маятник

Координатами q_k материальной точки здесь являются углы ϑ и φ , т. е. полярный угол и географическая широта на сфере радиуса l . Квадрат элемента длины запишется в виде

$$ds^2 = l^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2).$$

Поэтому кинетическая энергия равна

$$T = \frac{m}{2} l^2 (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2).$$

Выражая потенциальную энергию, как в формуле (18.5а) в виде $V = mgl \cos \vartheta$, получим:

$$L = \frac{m}{2} l^2 (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) - mgl \cos \vartheta. \quad (35.3)$$

Теперь вступают в силу «автоматические» операции по схеме формального метода Лагранжа: после отделения постоянных множителей дифференциальные уравнения, относящиеся к ϑ и φ , принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\vartheta} - \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2 - \frac{g}{l} \sin \vartheta &= 0, \\ \frac{d}{dt} (l^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (35.4)$$

Второе из этих уравнений представляет собой закон площадей, в полном согласии с уравнением (18.8). При этом мы замечаем, что здесь удалось обойтись без преобразования координат, которое предшествовало уравнению (18.8). Вводя константу площадей C из уравнения (18.8), перепишем первое уравнение (35.4) в форме

$$\ddot{\vartheta} = \frac{C^2}{l^4} \frac{\cos \vartheta}{\sin^3 \vartheta} + \frac{g}{l} \sin \vartheta.$$

Второй член правой части соответствует моменту силы тяжести $M = mgl \sin \vartheta$, который представляет собой соответствующую углу $q = \vartheta$ обобщенную силу Q в смысле определения (34.7). Первый член представляет фиктивную силу Лагранжа в смысле формулы (34.17); эта сила обусловлена тем, что градусы долготы, соответствующие данной координате ϑ , расположены на сфере не «параллельно», а расходятся по мере удаления от полюса.

Весьма поучительно также проделать на этом примере предусмотренное в (34.11) обобщение уравнений Лагранжа, вводя в рассмотрение, наряду с ϑ , φ , излишнюю координату r . Хотя эта координата уже определена условием $r = l$, но она интересует нас потому, что дает возможность с помощью множителя λ определить давление материальной

точки на поверхность сферы, или, что то же самое, натяжение нити маятника. Для того чтобы получить соответствующее дифференциальное уравнение, нам нужно лишь вместо формулы (35.3) написать:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) - mgr \cos \vartheta \quad (35.5)$$

и, в дополнение к двум уравнениям (35.4), получить еще третье уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} m\dot{r} - mr\dot{\vartheta}^2 - mr \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 + mg \cos \vartheta = \lambda r. \quad (35.6)$$

При этом величину $F_{k\mu}$, входящую в уравнения (34.11), мы положим равной r , переписав условие $r = l$ [для приведения в соответствие с условием (18.1)] в форме

$$F = \frac{1}{2}(r^2 - l^2) = 0.$$

Но из уравнения (35.6) при $r = l$ и $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ следует:

$$\lambda l = mg \cos \vartheta - ml(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2). \quad (35.7)$$

Эта формула совпадает с формулой (18.6), если в последней произвести преобразование от прямоугольных координат к сферическим (ϑ, φ) . Мы видим, что и это преобразование координат становится излишним благодаря применению формального метода Лагранжа.

3. Двойной маятник

В качестве обобщенных координат q_k здесь удобно выбрать углы φ и ψ , обозначенные на рис. 38. Пользуясь обозначениями § 21, запишем:

$$\left. \begin{aligned} X &= L \sin \varphi, & x &= L \sin \varphi + l \sin \psi; \\ Y &= L \cos \varphi, & y &= L \cos \varphi + l \cos \psi. \end{aligned} \right\} \quad (35.8)$$

Отсюда получим:

$$\begin{aligned} T &= \frac{M}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \\ &= \frac{M+m}{2}L^2\dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2}l^2\dot{\psi}^2 + mLl \cos(\varphi - \psi)\dot{\varphi}\dot{\psi}, \\ V &= -MgY - mgy = -(M+m)gL \cos \varphi - mgl \cos \psi. \end{aligned}$$

Последнее выражение имеет отрицательный знак, так как (ср. рис. 38) положительное направление Y и y совпадает с направлением силы тяжести. Функцию Лагранжа, равную $T - V$, мы обозначим здесь через Λ , так как через L мы уже обозначили длину маятника. Тогда

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\varphi}} &= (M + m)L^2 \dot{\varphi} + mLl \cos(\varphi - \psi) \dot{\psi}, \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\psi}} &= ml^2 \dot{\psi} + mLl \cos(\varphi - \psi) \dot{\varphi}, \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial \varphi} &= -(M + m)gL \sin \varphi - mLl \sin(\varphi - \psi) \dot{\varphi} \dot{\psi}, \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial \psi} &= -mgl \sin \psi + mLl \sin(\varphi - \psi) \dot{\varphi} \dot{\psi}.\end{aligned}$$

При написании вытекающих отсюда уравнений Лагранжа мы сразу перейдем к малым углам φ, ψ . Ввиду того, что $\dot{\varphi}, \dot{\psi}$ являются величинами того же порядка малости, что φ и ψ , квадратами их можно пренебречь. Тогда искомые уравнения Лагранжа принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned}\ddot{\varphi} + \frac{g}{L} \varphi &= -\frac{m}{M + m} \frac{l}{L} \ddot{\psi}, \\ \ddot{\psi} + \frac{g}{l} \psi &= -\frac{L}{l} \ddot{\varphi}.\end{aligned} \right\} \quad (35.9)$$

Эти уравнения оказываются идентичными с уравнениями (21.3), если проделать обратное преобразование от угловых координат φ, ψ к координатам X, x по формулам (35.8), упрощенным для случая малых φ, ψ :

$$\varphi = \frac{X}{L}, \quad \psi = \frac{x - X}{l}.$$

Это непосредственно очевидно для вторых уравнений (35.9) и (21.3); то же самое получается для первых уравнений (35.9) и (21.3), если в их правую часть подставить значение $\ddot{\psi}$ из второго уравнения (35.9). Поэтому все рассуждения относительно процесса колебания, относящиеся к уравнениям (21.3), полностью сохраняют силу и для наших новых уравнений (35.9) и их можно здесь не повторять.

Следует еще подчеркнуть, что в нашем чисто формальном рассмотрении вообще не шла речь относительно натяжения нити маятника l ;

как уже указывалось в примечании к стр. 151, это натяжение неявно учтено в самом методе уравнений Лагранжа как внутренняя реакция системы.

4. Тяжелый симметричный волчок

Классическими координатами q_k для этой задачи являются эйлеровы углы ϑ , φ и ψ [ϑ и ψ мы уже вводили в выражениях (25.4) и (26.5а)].

Мы определяем их вместе с соответствующими угловыми скоростями следующим образом (рис. 52).

1) ϑ — угол между вертикалью и осью фигуры; $\dot{\vartheta}$ — угловая скорость вращения вокруг линии узлов, перпендикулярной к обеим этим осям.

2) ψ — угол, образованный линией узлов с некоторой неподвижной прямой в горизонтальной плоскости, например, с осью x ; $\dot{\psi}$ — угловая скорость вращения вокруг вертикали.

3) φ — угол, образованный линией узлов с некоторой неподвижной прямой в экваториальной плоскости волчка, например, с осью X ; $\dot{\varphi}$ — угловая скорость вращения вокруг оси фигуры волчка.

Величины $\dot{\vartheta}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$ являются «голономными», но косоугольными компонентами вектора угловой скорости вращения ω в противоположность величинам p , q , r , которые были *прямоугольными*, но *неголономными* слагающими вектора ω . Нижеследующая таблица дает величины направляющих косинусов между обеими тройками компонент p , q , r и $\dot{\vartheta}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$; одновременно она фиксирует выбор положительных направлений вращения $\dot{\vartheta}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$ (в соответствии с прави-

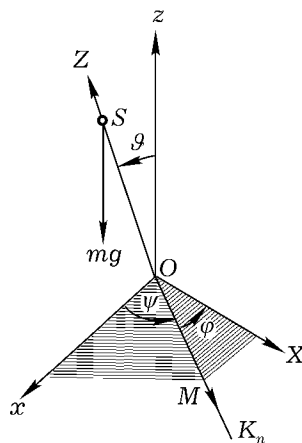


Рис. 52. Определение эйлеровых углов ϑ , φ , ψ и направлений их отсчета. Обозначения осей соответствуют координатным системам, введенным на стр. 185 (z — вертикальная линия, Z — ось фигуры, x — неподвижная горизонтальная прямая, X — прямая, закрепленная в экваториальной плоскости вращающегося тела)

лом правого винта):

	$\dot{\vartheta}$	$\dot{\varphi}$	$\dot{\psi}$
p	$\cos \varphi$	0	$\sin \vartheta \sin \varphi$
q	$-\sin \varphi$	0	$\sin \vartheta \cos \varphi$
r	0	1	$\cos \vartheta$

(35.10)

В силу сказанного в пп. 1 и 3, первые два столбца таблицы не требуют пояснений. Нетрудно уяснить себе и смысл третьего столбца, если сообразить, что проекция вертикального вектора длины $\dot{\psi}$ на экваториальную плоскость равна $\dot{\psi} \sin \vartheta$ и что при последующем проектировании на координатные оси в самой экваториальной плоскости она дает как раз приведенные в таблице слагающие при p и q .

Итак, три горизонтальных строки нашей таблицы дают:

$$\left. \begin{aligned} p &= \cos \varphi \dot{\vartheta} + \sin \vartheta \sin \varphi \dot{\psi}, \\ q &= -\sin \varphi \dot{\vartheta} + \sin \vartheta \cos \varphi \dot{\psi}, \\ r &= \dot{\varphi} + \cos \vartheta \dot{\psi}. \end{aligned} \right\} \quad (35.11)$$

Отсюда

$$p^2 + q^2 = \dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\psi}^2. \quad (35.11a)$$

Из выражения (26.17), полагая $B = A$, получаем:

$$T = \frac{A}{2}(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\psi}^2) + \frac{C}{2}(\dot{\varphi} + \cos \vartheta \dot{\psi})^2. \quad (35.12)$$

На основании формулы (25.6а) для потенциальной энергии V в поле тяжести имеем:

$$\begin{aligned} L &= T - V = \\ &= \frac{A}{2}(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\psi}^2) + \frac{C}{2}(\dot{\varphi} + \cos \vartheta \dot{\psi})^2 - P \cos \vartheta, \quad P = mgs. \end{aligned} \quad (35.13)$$

Таким образом, функция Лагранжа L не зависит от координат φ и ψ , а зависит только от соответствующих им скоростей. В таких случаях

φ и ψ называют циклическими координатами. Этот термин заимствован из задачи о вращающемся колесе, динамическое поведение которого, очевидно, совершенно не зависит от его мгновенного положения, а определяется лишь его окружной скоростью. Итак,

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0.$$

Согласно уравнениям Лагранжа, обращаются в нуль и производные по времени от величин

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}.$$

В конце предыдущего параграфа мы назвали эти величины *обобщенными импульсами, соответствующими обобщенным координатам φ и ψ* . Впредь мы будем обозначать их буквой p . Итак, в общем виде мы пишем:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}. \quad (35.14)$$

Таким образом, для случая циклических координат q_k мы можем высказать следующее утверждение: *циклические обобщенные импульсы суть постоянные интегрирования*. В нашем случае смысл этих постоянных нам уже известен из формул (25.6). Имеем:

$$p_\varphi = N, \quad p_\psi = n. \quad (35.15)$$

Однако раньше (стр. 188) мы не смогли выразить эти постоянные через углы Эйлера. Теперь же воспользуемся общим соотношением (35.14), из которого найдем:

$$\left. \begin{aligned} p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = C(\dot{\varphi} + \cos \vartheta \dot{\psi}), \\ p_\psi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = A \sin^2 \vartheta \dot{\psi} + C \cos \vartheta (\dot{\varphi} + \cos \vartheta \dot{\psi}). \end{aligned} \right\} \quad (35.16)$$

Сравнивая выражения (35.15) и (35.16), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varphi} + \cos \vartheta \dot{\psi} &= \frac{N}{C}, \\ A \sin^2 \vartheta \dot{\psi} &= n - N \cos \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (35.17)$$

Этим и исчерпывается содержание двух уравнений Лагранжа. Третье уравнение Лагранжа, определяющее закон изменения величины

$$p_{\vartheta} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = A\dot{\vartheta}, \quad (35.18)$$

имеет следующий вид [если с помощью соотношения (35.17) исключить $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$]:

$$A\ddot{\vartheta} = \frac{(n - N \cos \vartheta)(n \cos \vartheta - N)}{A \sin^3 \vartheta} + P \sin \vartheta. \quad (35.19)$$

Правая часть этого уравнения, получающаяся из $\frac{\partial L}{\partial \vartheta}$, содержит не только уже знакомый нам член, учитывающий действие силы тяжести [ср. формулу (25.4)], но также и «фиктивную силу», обусловленную, как мы знаем (см. стр. 256), природой выбранной системы координат.

Уравнение (35.19) имеет вид обобщенного уравнения маятника. Но нам не нужно заниматься его интегрированием, так как мы располагаем интегралом энергии

$$T + V = W, \quad (35.20)$$

который должен совпадать с результатом первого интегрирования уравнения (35.19). Исключая с помощью уравнений (35.17) величины $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$, входящие в выражение (35.12), находим из формулы (35.20):

$$\frac{A}{2} \left\{ \dot{\vartheta}^2 + \left(\frac{n - N \cos \vartheta}{A \sin \vartheta} \right)^2 \right\} + \frac{N^2}{2C} + P \cos \vartheta = W. \quad (35.21)$$

Так как мы имеем здесь три постоянных интегрирования n , N и W , то выражение (35.21) является *общим интегралом первого порядка задачи о волчке*. Наконец, заменяем ϑ и $\dot{\vartheta}$, как мы уже делали в § 18 для случая сферического маятника, по формулам

$$\cos \vartheta = u, \quad \sin \vartheta \dot{\vartheta} = -\dot{u}.$$

Тогда получим просто

$$\left(\frac{du}{dt} \right)^2 = U(u), \quad (35.22)$$

$$U = \left(\frac{2W}{A} - \frac{N^2}{AC} - \frac{2P}{A}u \right) (1 - u^2) - \left(\frac{n - Nu}{A} \right)^2. \quad (35.23)$$

Так как $U(u)$ является многочленом третьей степени относительно u , то время t выражается, как и в случае сферического маятника, эллиптическим интегралом первого рода:

$$t = \int^u \frac{du}{\sqrt{U}}, \quad (35.24)$$

а азимут ψ , согласно второму уравнению (35.17), выражается эллиптическим интегралом третьего рода (ср. стр. 133):

$$\psi = \int^u \frac{n - Nu}{A(1 - u^2)\sqrt{U}} du. \quad (35.25)$$

Теперь мы можем повторить рассуждения, относящиеся к рис. 29 (стр. 132), и таким образом придем к изображению, представленному на рис. 53; след оси фигуры волчка на сфере единичного радиуса параллелями $u = u_2$ и $u = u_1$, которых он касается. Как видно из рис. 53, это касание может происходить либо без перемены направления движения следа, либо в виде петли (которая в частном случае может выродиться в острие). За время каждого такого качания или «цикла» ось фигуры волчка продвигается по азимуту на один и тот же угол $\Delta\psi$, который вычисляется по формуле (18.15).

В частности, для того, чтобы волчок совершал регулярную прецессию вокруг вертикали, необходимо, чтобы параллели u_1 и u_2 совпадали друг с другом; следовательно, в этом случае кривая $U(u)$ на рис. 29 (стр. 132) должна касаться снизу оси абсцисс. Вследствие этого регулярная прецессия является для тяжелого волчка (в противоположность свободному волчку) лишь частным случаем его движения.

Если оба корня u_1 и u_2 , совпадают не в точности, а лишь приближенно, то все еще имеет место кажущееся равномерное перемещение оси фигуры вокруг вертикали, на которое, однако, как показывает более детальное рассмотрение, накладываются малые нутации. В этом случае мы говорим

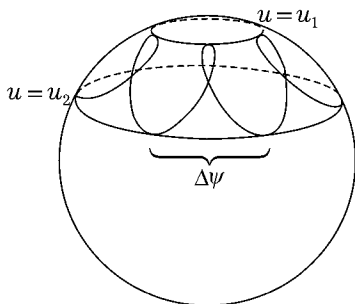


Рис. 53. След оси фигуры тяжелого симметричного волчка на сфере единичного радиуса

о *псевдорегулярной прецессии*. Последняя является типичным явлением, сопровождающим обычные гироскопические опыты, в которых мы сообщаем маховичку с помощью шнура возможно более сильное вращение вокруг оси фигуры, а потом без заметного бокового толчка помещаем нижний конец его оси в подпятник (опору).

Мы объясняем это следующим образом. В рассматриваемом опыте вектор начального момента импульса \mathbf{N} проходит вблизи оси фигуры; согласно построению Пуансо, то же самое относится и к начальному положению оси вращения. Таким образом, ось фигуры вначале описывает малый контур на сфере единичного радиуса (ср. рис. 43); касательные к этому контуру параллели $u = u_1$ и $u = u_2$ расположены близко друг к другу и остаются в таком положении в течение всего процесса движения (как показывает справедливое в общем случае изображение на рис. 53). Момент импульса, а значит и угловая скорость вращения, вначале весьма велики; они остаются таковыми и во время последующего движения (если не учитывать потери на трение). Таким образом, нутации происходят в очень быстром темпе и вообще почти незаметны. Волчок *кажущимся образом не поддается влиянию силы тяжести, а постоянно отклоняется в перпендикулярном к ней направлении*. Это парадоксальное поведение волчка с давних пор приковывало внимание любителей и исследователей к теории волчка.

§ 36. ДРУГОЙ ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА

Хотя принцип наименьшего действия и дает нам способ вывода общих уравнений Лагранжа, непревзойденный по своей наглядности и краткости, все же этот способ представляется нам несколько искусственным. Приведенный вывод не раскрывает истинной природы уравнений Лагранжа, заключающейся в свойствах преобразований различных механических величин. Следующий вывод должен восполнить этот пробел.

Рассмотрим систему $n/3$ материальных точек [n должно делиться на 3], на которую наложены произвольные связи (для простоты будем считать их голономными). Число этих связей равно $n - f$, где f означает число степеней свободы системы. Будем пользоваться обозначениями, введенными в § 34 [ср. уравнения (36.2)]. Пронумеруем координаты (которые мы теперь считаем прямоугольными) и обозначим их через x_1, x_2, \dots, x_n ; так же поступим и со слагающими внешних

сил X_1, X_2, \dots, X_n Компоненты элементарных количеств движения наших материальных точек обозначим через $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ [а не через p_1, p_2, \dots, p_n , как это следовало бы сделать согласно общему условию (35.14); эти обозначения мы сохраним для лагранжевых обобщенных импульсов]. Тогда имеем:

$$\xi_i = m_i \dot{x}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (36.1)$$

причем величины m_i , конечно, по-трое равны между собой. Движение нашей системы описывается уравнениями Лагранжа первого рода (12.9), которые в принятых нами теперь обозначениях имеют следующий вид:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = X_i + \sum_{\mu=f+1}^n \lambda_\mu \frac{\partial F_\mu}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (36.2)$$

Введем теперь *обобщенные координаты* q_1, \dots, q_f , которые могут и должны быть выбраны таким образом, чтобы [как в (34.2)] $n - f$ условий $F_\mu = 0$ удовлетворялись тождественно. Тогда старые и новые *обобщенные скорости* будут связаны соотношениями (34.26); разрешая последние относительно \dot{x} , получим:

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^f a_{ik} \dot{q}_k, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (36.3)$$

Коэффициенты a_{ik} , как мы указывали в связи с уравнением (34.26), являются функциями от x_1, \dots, x_n , а следовательно, и от q_1, \dots, q_f . Таким образом, в то время как старые и новые координаты связаны друг с другом *произвольным «точечным преобразованием»*, скорости преобразуются друг в друга *линейно*, причем коэффициенты этого преобразования, в свою очередь, зависят от координат.

Как преобразуются друг в друга *обобщенные силы*? Обозначим новые обобщенные силы через Q_k и определим их, как и в (34.7), условием инвариантности виртуальной работы, т. е. с помощью соотношения

$$\delta A = \sum_{i=1}^n X_i \delta x_i = \sum_{k=1}^f Q_k \delta q_k. \quad (36.4)$$

Переходя от виртуальных перемещений к действительным и от последних к соответствующим скоростям и принимая во внимание выраже-

ния (36.3), получим из условия (36.4):

$$\sum_{k=1}^f Q_k \dot{q}_k = \sum_{i=1}^n X_i \sum_{k=1}^f a_{ik} \dot{q}_k. \quad (36.4a)$$

В противоположность \dot{x}_i величины \dot{q}_k независимы друг от друга. Следовательно, коэффициенты при \dot{q}_k в правой и левой частях равенства (36.4a) должны быть равны между собою; таким образом,

$$Q_k = \sum_{i=1}^n a_{ik} X_i, \quad k = 1, 2, \dots \quad (36.5)$$

Это преобразование является «транспонированным» по отношению к преобразованию (36.3), ибо в (36.3) суммирование производится по k , а в (36.5) — по i . Выпишем подробно:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11} \dot{q}_1 + a_{12} \dot{q}_2 + \dots \\ Q_1 &= a_{11} X_1 + a_{21} X_2 + \dots \\ \dot{x}_2 &= a_{21} \dot{q}_1 + a_{22} \dot{q}_2 + \dots \\ Q_2 &= a_{12} X_1 + a_{22} X_2 + \dots \end{aligned}$$

Таким образом, «транспозиция» заключается в замене a_{ik} на a_{ki} . В этом случае принято говорить, что *обобщенные силы преобразуются контраградиентно¹ по отношению к обобщенным скоростям.*

Так же, как обобщенные силы, т. е. *коградиентно* с ними, преобразуются *обобщенные импульсы*. Импульсы мы можем рассматривать как толчки, сообщающие данные скорости первоначально покоящимся материальным точкам. Если новые импульсы обозначить через p_k , то они выразятся через старые импульсы ξ_i следующим образом:

$$p_k = \sum_{i=1}^n a_{ik} \xi_i. \quad (36.6)$$

Этим и устанавливается определение обобщенных импульсов p_k . Это определение, правда, довольно сложно, но оно может быть легко преобразовано к более содержательному виду. С этой целью рассмотрим,

¹ Согласно принятым в общей теории относительности обозначениям, индексы у контраградиентных (или контравариантных) величин Q, p пишутся сверху, в отличие от ковариантных величин \dot{q}_k . Однако для наших целей нам нет необходимости вводить разные обозначения для ковариантных и контравариантных величин.

подобно изложенному на стр. 248, выражения кинетической энергии как функции, с одной стороны, \dot{q} и, с другой стороны, \dot{x} , причем в случае необходимости мы будем их различать с помощью обозначений

$$T_{\dot{q}} \quad \text{и} \quad T_{\dot{x}}.$$

В соответствии с этим преобразуем выражение

$$\frac{\partial T_{\dot{q}}}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial T_{\dot{x}}}{\partial \dot{x}_i} \left[\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} \right]. \quad (36.7)$$

Квадратные скобки здесь означают, что при дифференцировании по \dot{q}_k как q_k , так и все остальные \dot{q} , кроме \dot{q}_k , считаются постоянными. Но при этом условии производная $\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k}$, согласно соотношению (36.3), равна просто a_{ik} . С другой стороны, элементарная формула

$$T_{\dot{x}} = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{x}_i^2$$

дает, очевидно,

$$\frac{\partial T_{\dot{x}}}{\partial \dot{x}_i} = \xi_i.$$

Таким образом, формула (36.7) принимает вид

$$\frac{\partial T_{\dot{q}}}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^n a_{ik} \xi_i. \quad (36.8)$$

Правая часть полученного равенства совпадает с правой частью равенства (36.6). Отсюда результат:

$$p_k = \frac{\partial T_{\dot{q}}}{\partial \dot{q}_k}. \quad (36.9)$$

Принимая, что внешние силы имеют потенциал V , не зависящий от \dot{q} , и вводя функцию Лагранжа $L = T - V$, можно вместо формулы (36.9) написать также

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}. \quad (36.9a)$$

Тем самым мы обосновали в общем виде определение (35.14) обобщенного импульса p_k .

Теперь мы можем преобразовать и уравнения движения (36.2) к нашим обобщенным координатам. Для этой цели умножим эти уравнения поочередно на a_{ik} и просуммируем по i . Согласно формуле (36.5), в первом члене правой части получим:

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}. \quad (36.10)$$

Во втором члене правой части множителем при λ_μ будет

$$\sum_{i=1}^n a_{ik} \frac{\partial F_\mu}{\partial x_i} \quad \text{при} \quad \mu = f+1, \dots, n. \quad (36.11)$$

Но, согласно формуле (36.3), имеем:

$$a_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k}. \quad (36.12)$$

В этом легко убедиться, если в уравнении $dx_i = \sum a_{ik} dq_k$, тождественном с уравнением (36.3), фиксировать все q , кроме q_k . Таким образом, выражение (36.11) принимает следующий вид:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial F_\mu}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \frac{\partial F_\mu}{\partial q_k}.$$

Но поскольку при нашем выборе q_k , функции F_μ при $\mu = f+1, \dots, n$ тождественно обращаются в нуль [согласно (34.2)], то обращается в нуль также и частная производная F_μ по q_k . Таким образом, правая часть нашего уравнения сводится к выражению (36.10). В левой части вначале получим:

$$\sum_i a_{ik} \frac{d\xi_i}{dt}.$$

Преобразуем это выражение:

$$\frac{d}{dt} \sum_i a_{ik} \xi_i - \sum_i \xi_i \frac{da_{ik}}{dt} = \frac{dp_k}{dt} - \sum_i \xi_i \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \quad (36.13)$$

[при этом мы использовали формулы (36.6) и (36.12)]. Последнюю сумму мы переписываем в виде

$$\sum m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{1}{2} \sum m_i \dot{x}_i^2 = \frac{\partial}{\partial q_k} T_{\dot{q}}.$$

Здесь индекс \dot{q} при T указывает, что прежнее выражение T через скорости \dot{x} перед дифференцированием по \dot{q} должно быть преобразовано к переменным q, \dot{q} . В соответствии с этим правая часть равенства (36.13) принимает вид

$$\frac{dp_k}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_k}. \quad (36.13a)$$

Так как это выражение должно быть равно выражению (36.10), то мы получаем:

$$\frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}. \quad (36.14)$$

Но это уравнение, принимая во внимание формулу (36.9a), вполне идентично с уравнением Лагранжа в форме (34.6), или, если не предполагать существования потенциальной энергии, с уравнением Лагранжа в форме (34.8).

Таким образом, все изложенное убеждает нас в том, что при выводе уравнений Лагранжа можно обойтись без принципа наименьшего действия, если только вместо этого достаточно глубоко исследовать свойства преобразований механических величин.

§ 37. ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ МОПЕРТЮ

В конце § 33 мы говорили о *телеологическом* характере принципа наименьшего действия. «Телеологический» значит «целесообразный» или «целенаправленный». «Из всех возможных движений природа выбирает то, при котором цель движения достигается с наименьшей затратой действия» — такова возможная формулировка принципа наименьшего действия, хотя и весьма неопределенная, но вполне соответствующая по своему смыслу идее ученого, открывшего этот принцип.

Мопертю опубликовал свой принцип в 1747 г. Ему указали на письмо Лейбница, относящееся к 1707 г. (оригинал этого письма не

сохранился), но он ревностно защищал свой приоритет, не останавливаясь даже перед использованием своей власти в качестве президента Берлинской академии. Однако более определенную математическую форму принципу наименьшего действия придали только Эйлер и, в особенности, Лагранж.

В приведенной формулировке принципа содержится двоякая неопределенность:

1) Что следует здесь понимать под словом «действие»? Очевидно, не то же самое, что понимается под этим словом в принципе Гамильтона, поскольку речь теперь идет о формулировке, хотя и близкой к гамильтоновской, но все же отличной от нее.

2) Что значит «все возможные движения»? Совершенно необходимо точно определить совокупность всех сравниваемых движений, чтобы из них можно было выбрать истинное движение как наиболее целесообразное или наивыгоднейшее.

К пункту 1. Лейбниц рассматривал в качестве элементарного действия произведение $2T \cdot dt$. Мы также будем ниже терминами «интеграл действия» или «функция действия» обозначать величину¹

$$S = 2 \int_{t_0}^{t_1} T dt. \quad (37.1)$$

Мопертюи, который, как и Декарт, считал основной динамической величиной количество движения mv , рассматривал в качестве элементарного действия произведение $mv \cdot ds$. Ясно, однако, что оба эти определения — Лейбница и Мопертюи — для случая отдельной материальной точки совпадают, ибо имеет место соотношение

$$2T \cdot dt = mv \cdot vdt = mv \cdot ds. \quad (37.2)$$

Но это совпадение обоих определений имеет место и для любых механических систем, если под действием понимать сумму элементов $m_k v_k ds_k$, взятую по всем материальным точкам.

¹ Множитель 2, разумеется, не существенен для вопроса о минимуме S , но он оказывается удобным для последующих формулировок в § 43. Впрочем, у Лейбница была еще некоторая неопределенность в вопросе о том, назвать ли «*Vis viva*» («живая сила») mv^2 или, как это делаем мы, $\frac{1}{2}mv^2$.

К пункту 2. При рассмотрении принципа Гамильтона мы ограничивали совокупность подлежащих сравнению движений условиями (33.1) и (33.2). Условие (37.2) мы сохраним, условие же (37.1) изменим. А именно, вместо $\delta t = 0$, мы потребуем, чтобы имело место

$$\delta W = 0. \quad (37.3)$$

Таким образом, мы сравниваем только траектории с такой же энергией, как энергия рассматриваемой траектории. Тем самым, разумеется, мы утверждаем, что рассматриваемый нами теперь принцип наименьшего действия справедлив только для движений, при которых выполняется закон сохранения энергии, т. е. для случая, когда силы имеют потенциал. Если мы обозначим этот потенциал через V и, соответственно, для варьируемых траекторий — через $V + \delta V$, то, в силу условия (37.3), будем иметь:

$$\begin{aligned} \delta T + \delta V &= 0, \\ \delta V &= -\delta T, \\ \delta L &= \delta T - \delta V = 2\delta T. \end{aligned} \quad (37.4)$$

Чтобы наглядно представить себе сущность изменений, внесенных условием (37.3), вспомним рис. 51. На этом рисунке две точки, связанные друг с другом вариацией δq , соответствуют одному и тому же моменту времени t . Теперь это не так: время в варьированной точке равно не t , а $t + \delta t$ (ср. рис. 54). Поэтому варьированная траектория достигает конечной точки P не в момент $t = t_1$, а в данном случае, согласно рис. 54, в более поздний момент времени. Точке Q нашей варьированной траектории, относящейся к моменту времени $t = t_1$, на исходной траектории соответствует более ранний момент времени $t_1 - \delta t_1$.

В соответствии с этим, проследим выкладки, содержащиеся в § 33. Соотношения (37.3) и (37.4) и теперь остаются в силе, но соотношение (37.5) нужно изменить, так как оно, как мы уже подчеркивали,

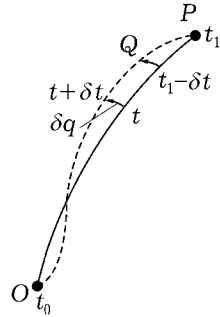


Рис. 54. Вариация «траектории» в принципе Мопертюи. Ввиду того что энергия не варьируется, точка q исходной траектории и точка $q + \delta q$ варьированной траектории относятся к различным временам t и $t + \delta t$. Конечной точке P соответствует на варьированной траектории точка Q

справедливо только при $\delta t = 0$. Чтобы найти новое соотношение, заменяющее (33.5), образуем вариацию

$$\delta \dot{x} = \frac{d(x + \delta x)}{d(t + \delta t)} - \frac{dx}{dt}. \quad (37.5)$$

Перепишем первую производную правой части в виде

$$\begin{aligned} \frac{d(x + \delta x)}{dt} / \frac{d(t + \delta t)}{dt} &= \left(\frac{dx}{dt} + \frac{d}{dt} \delta x \right) / \left(1 + \frac{d}{dt} \delta t \right) = \\ &= \frac{dx}{dt} + \frac{d}{dt} (\delta x) - \dot{x} \frac{d}{dt} (\delta t) + \dots, \end{aligned} \quad (37.6)$$

причем опущенные члены являются малыми высшего порядка. Поэтому из равенства (37.5) следует:

$$\delta \dot{x} = \frac{d}{dt} (\delta x) - \dot{x} \frac{d}{dt} (\delta t), \quad \text{т. е.} \quad \frac{d}{dt} (\delta x) = \delta \dot{x} + \dot{x} \frac{d}{dt} (\delta t). \quad (37.7)$$

Подставляя последнее выражение в равенство (33.4), находим для любого индекса k :

$$\ddot{x}_k \delta x_k = \frac{d}{dt} (\dot{x}_k \delta x_k) - \dot{x}_k \delta \dot{x}_k - \dot{x}_k^2 \frac{d}{dt} (\delta t). \quad (37.8)$$

Поскольку соотношение (37.8) в такой же мере, как и для x , справедливо для координат y и z , из уравнений (33.3) получаем вместо (33.8):

$$\frac{d}{dt} \sum m_k (\dot{x}_k \delta x_k + \dot{y}_k \delta y_k + \dot{z}_k \delta z_k) = \delta T + 2T \frac{d}{dt} (\delta t) + \delta A. \quad (37.9)$$

Принимая во внимание условие (37.4), положим

$$\delta A = -\delta V = +\delta T. \quad (37.9a)$$

При этом в правой части равенства (37.9) получим:

$$2\delta T + 2T \frac{d\delta t}{dt}. \quad (37.10)$$

Теперь проинтегрируем равенство (37.9) от t_0 до t_1 . При этом, в силу условия (33.2), левая часть обращается в нуль; ввиду (37.10) получаем:

$$2 \int_{t_0}^{t_1} \delta T dt + 2 \int_{t_0}^{t_1} T d\delta t = 0. \quad (37.11)$$

Но левая часть является не чем иным, как

$$2\delta \int_{t_0}^{t_1} T dt \quad (37.12)$$

или, на основании (37.1),

$$\delta S = 0. \quad (37.12a)$$

Тем самым мы подробно обосновали принцип наименьшего действия в форме Мопертю.

По поводу перехода от формулы (37.11) к (37.12) необходимо еще заметить следующее. В случае принципа Гамильтона можно было, ввиду $\delta t = 0$, считать тождественными оба символа

$$\delta \int T dt \quad \text{и} \quad \int \delta T dt,$$

как это имело место, например, для равенств (33.10) и (33.11). Однако с нашей теперешней точки зрения они существенным образом отличаются друг от друга, в чем можно убедиться путем сравнения вышеприведенных выражений (37.11) и (37.12).

Если мы рассмотрим частный случай свободного движения, то для него из закона сохранения энергии $T = W$ и из (37.12), принимая во внимание условие (37.3), легко найти:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} dt = \delta(t_1 - t_0) = 0. \quad (37.13)$$

Мы пришли к принципу кратчайшего времени прихода, сформулированному Ферма и примененному им к преломлению света, после того как еще в древности Герон соответствующим образом рассмотрел отражение света.

Для случая свободной материальной точки можно вместо $T = W$ взять $v = \text{const}$ и вместо (37.12) написать

$$\delta \int v dt = \delta \int ds = 0. \quad (37.14)$$

В этом состоит *принцип кратчайшего пути*, который определяет траекторию свободной материальной точки на кривой поверхности, а также

(в общей теории относительности) на произвольно искривленном многообразии, как *геодезическую линию*. К этому мы вернемся в § 40.

В своих знаменитых «Лекциях по динамике», читанных в 1842 г. в Кенигсберге¹, Якоби обосновал необходимость полного исключения времени t из выражения принципа наименьшего действия. Это возможно потому, что

$$T = W - V = \frac{1}{2} \sum m_k v_k^2 = \frac{1}{2} \frac{\sum m_k ds_k^2}{dt^2},$$

откуда

$$dt = \sqrt{\frac{\sum m_k ds_k^2}{2(W - V)}}.$$

Таким образом, вместо условия (37.12) можно потребовать:

$$\delta \int \sqrt{2(W - V)} \sqrt{\sum m_k ds_k^2} = 0. \quad (37.15)$$

Здесь вариация при постоянном W распространяется только на пространственные параметры траектории системы, в то время как о ее временном ходе вообще не говорится.

Возвращаясь снова к телеологической стороне этого принципа и принципа наименьшего действия Гамильтона, заметим, что «наименьшее действие» при известных обстоятельствах может оказаться и «наибольшим действием». Дело в том, что требование $\delta \dots = 0$ соответствует собственно не *минимуму*, а, вообще говоря, лишь *экстремуму*. Проще всего это можно показать на примере геодезических линий, на поверхности шара, которые являются дугами больших кругов. Если начальная точка O и конечная точка P траектории находятся в одном и том же полушарии, то дуга большого круга, непосредственно соединяющая эти две точки, будет, правда, *короче* всех круговых дуг, получающихся от пересечения сферы с плоскостями, проходящими через O и P , но не через центр шара; однако и дополнительная дуга большого круга, которая при противоположном начальном направлении движения проходит от точки O через все второе полушарие к точке P , представляет собой геодезическую линию, причем эта линия *длиннее* всех остальных круговых дуг, проходящих от O к P через второе полушарие. Отсюда

¹К. Якоби, Лекции по динамике, ОНТИ, 1936.

мы заключаем, что интегральные принципы отражают не «целенаправленность» природы, а лишь некоторое математически особенно выразительно сформулированное экстремальное свойство законов динамики.

Мопертюю считал свой принцип наиболее общим из всех законов природы. В настоящее время мы скорее склонны признать эту всеобщность за принципом наименьшего действия Гамильтона. Мы уже упоминали на стр. 246 о том, что Гельмгольц положил этот принцип в основу своих исследований по электродинамике. С тех пор интегральные принципы в форме Гамильтона нашли применение в самых различных областях физики.

Особое преимущество принципа Гамильтона обнаруживается в механике сплошных сред, поскольку этот принцип приводит не только к дифференциальным уравнениям задачи, но также и к краевым условиям, которым должны удовлетворять решения этих дифференциальных уравнений в частных производных. Во многих случаях необходимо вначале искать функцию Лагранжа L (входящую в выражение вариационного принципа) в зависимости от характера задачи. Это имеет место, например, при движении электрона в магнитном поле, когда действующая сила не имеет потенциала V ; далее — в теории относительности, когда L нельзя выразить с помощью выведенного нами выражения (4.10) для кинетической энергии. Здесь роль «кинетической» части принципа наименьшего действия играет выражение

$$-m_0c^2 \int \sqrt{1 - \beta^2} dt. \quad (37.16)$$

Эйлерова производная этого выражения приводит прямо к релятивистскому импульсу \mathbf{G} в форме (2.19), а, следовательно, также и к закону зависимости массы электрона от его скорости. Вообще говоря, нахождение функции Лагранжа L , приводящей через посредство вариационного принципа к заданным дифференциальным законам, является (в особенности вне пределов механики) трудной задачей, для решения которой не существует общих правил. Для указанного выше случая движения электрона в магнитном поле эта задача была весьма простым способом разрешена Лармором и Шварцшильдом. В этом случае разложение L на кинетическую и потенциальную части по схеме $L = T - V$, вообще говоря, уже невозможно.

Следует особо подчеркнуть, что величина, стоящая в выражении (37.16) под знаком интеграла, является не чем иным, как элемен-

том собственного времени (2.17), который был признан Минковским простейшим инвариантом специальной теории относительности и введен Эйнштейном в качестве элемента мировой линии в общую теорию относительности. Таким образом, принцип Гамильтона в формулировке (37.16) автоматически удовлетворяет требованию инвариантности теории относительности. В этом Планк¹ видит «наиболее блестящий успех, достигнутый принципом наименьшего действия».

¹См. поучительную статью в «Die Kultur der Gegenwart», Teil III, Abteilung III, 1 (Leipzig, 1915, V. G. Teubner, S. 701).

ГЛАВА VII

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ

§ 38. ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ПРИНУЖДЕНИЯ ГАУССА

Гаусс был не только «принцем математиков», но также, как астроном и геодезист, страстным вычислителем. В трех больших трудах он все больше совершенствовал свой «метод наименьших квадратов», и когда ему однажды пришлось (вопреки его желанию) читать лекцию в Геттингенском университете, он избрал в качестве темы наиболее любимый им «метод наименьших квадратов».

Свою короткую статью «О новом общем начале механики», написанную в 1829 г., он заключает следующей характерной фразой: «Весьма замечательно, что свободные движения, когда они при имеющихся условиях не могут осуществляться, видоизменяются природой как раз таким же образом, как это делает математик, выравнивающий по методу наименьших квадратов результаты наблюдений, относящиеся к величинам, связанным между собой необходимыми зависимостями».

Гаусс называет свой новый основной закон «принципом наименьшего принуждения». Мету принуждения он определяет как «сумму произведений отклонения каждой точки от своего свободного движения на ее массу». Если мы снова (ср. стр. 90) пронумеруем материальные точки и их прямоугольные координаты, то получим в качестве меры принуждения для системы из n материальных точек выражение

$$Z = \sum_{k=1}^{3n} m_k \left(\ddot{x}_k - \frac{X_k}{m_k} \right)^2. \quad (38.1)$$

«Свободное движение», которое имело бы место при отсутствии внутренних связей, определяется уравнением

$$\ddot{x}_k = \frac{X_k}{m_k}.$$

Таким образом, величина, стоящая в скобках в формуле (38.1), действительно является для k -й материальной точки «отклонением от свободного движения», вызванным принуждением. Эту величину можно было бы также называть «потерянной силой», деленной на массу (ср. стр. 83); таким образом, вместо определения (38.1) можно написать:

$$Z = \sum \frac{1}{m_k} (\text{потерянная сила})^2. \quad (38.2)$$

Таким образом, потерянные силы и обратные массы играют здесь такую же роль, как погрешности и статистические веса в теории ошибок.

Теперь мы должны определить, однако, что́ нужно понимать под термином «наименьшее принуждение». Для этого нужно указать, какие величины должны *сохраняться неизменными* и какие должны *варьироваться* при вычислении $\delta Z = 0$.

Должны *сохраняться неизменными*:

а) Состояние системы в каждый данный момент, т. е. положения и скорости всех материальных точек. Следовательно, мы должны положить:

$$\delta x_k = 0, \quad \delta \dot{x}_k = 0. \quad (38.3)$$

б) Условия связи, наложенные на систему. Если мы будем считать их голономными связями вида $F(x_1, x_2, \dots) = 0$, то при варьировании мы должны принять во внимание дополнительные условия

$$\sum_{k=1}^{3n} \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \delta x_k = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (38.4)$$

где r означает число условий связи, а, следовательно, $3n - r = f$ число степеней свободы системы. Продифференцируем равенства (38.4) дважды по t ; при этом появляются члены с δx , $\delta \dot{x}$ и $\delta \ddot{x}$. В силу условий (38.3), нам надо из их числа выписать только члены с $\delta \ddot{x}$, т. е.

$$\sum_{k=1}^{3n} \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \delta \ddot{x}_k = 0. \quad (38.4a)$$

в) Силы, действующие на систему, и, конечно, массы; таким образом, имеем:

$$\delta X_k = 0, \quad \delta m_k = 0. \quad (38.5)$$

Итак, *варьировать* нужно только \ddot{x}_k .

В соответствии с этим, учтя дополнительные условия (38.4а) по методу лагранжевых множителей, мы получим из формулы (38.1):

$$\delta Z = 2 \sum_{k=1}^{3n} \left\{ m_k \ddot{x}_k - X_k - \sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right\} \delta \ddot{x}_k = 0. \quad (38.6)$$

Из величин $\delta \ddot{x}$ только $f = 3n - r$ являются здесь независимыми друг от друга. Однако с помощью соответственного выбора множителей λ_i (как на стр. 91) можно обратить в нуль r из выражений в фигурных скобках, так что в сумме (38.6) останутся только f членов с $\delta \ddot{x}_k$, которые теперь могут рассматриваться как независимые. Поэтому должны обращаться в нуль также все остальные f выражений в фигурных скобках. Таким образом, мы получаем в точности *уравнения Лагранжа первого рода* в форме (12.9).

Очевидно, что это доказательство можно без изменения распространить также и на случай неголономных связей. Итак, мы действительно имеем дело с «новым общим началом механики», как гласит заглавие статьи Гаусса. Это начало механики равноценно принципу Даламбера и, подобно последнему, представляет собой дифференциальный принцип, потому что оно трактует о поведении системы только в настоящий (но не в будущий или прошедший) момент времени. В соответствии с этим, здесь нет необходимости применять правила вариационного исчисления, а можно обойтись правилами обычного дифференциального исчисления для определения максимумов и минимумов.

§ 39. ПРИНЦИП «ПРЯМЕЙШЕГО ПУТИ» ГЕРЦА

В настоящем параграфе, собственно говоря, речь будет идти лишь о частном случае принципа Гаусса. Однако причина, по которой Герц смог назвать свой принцип если и не новым, то во всяком случае общим, заключается в том, что ему удалось, как мы уже указывали на стр. 15, заменить силы связями между рассматриваемой системой и другими, находящимися с ней во взаимодействии системами. Таким образом, Герц мог ограничиваться рассмотрением *свободных систем*. Далее, для того, чтобы прийти к геометрическому толкованию, которое он имел в виду, Герц должен был рассматривать все массы как кратные некоторой, скажем, атомарной *единичной массе*. Поэтому множитель m_k в га-

уссовом выражении (38.1) становится равным единице, тогда как X_k становится равным нулю. При этом выражение (38.1) переходит в

$$Z = \sum_{k=1}^N \ddot{x}_k^2. \quad (39.1)$$

Здесь верхний предел N над знаком суммы означает, что число единичных масс, по которым (согласно предусмотренным связям и нумерации масс) нужно суммировать, возросло в степени, не поддающейся более точному определению.

Произведем в формуле (39.1) еще одно изменение, заменив

$$\ddot{x}_k \text{ на } \frac{d^2 x_k}{ds^2}, \text{ где } ds^2 = \sum_{k=1}^N dx_k^2. \quad (39.2)$$

Это допустимо потому, что закон сохранения энергии, который является следствием уравнений Лагранжа первого рода, а следовательно, и принципа Гаусса, в рассматриваемом частном случае гласит:

$$\frac{1}{2} \sum \left(\frac{dx_k}{dt} \right)^2 = W$$

или

$$\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \text{const.}$$

Разделив равенство (39.1) на квадрат этой постоянной, получим из Z величину

$$K = \sum_{k=1}^N \left(\frac{d^2 x_k}{ds^2} \right)^2. \quad (39.3)$$

Герц называет ds элементом длины, \sqrt{K} — кривизной траектории, описываемой системой, и постулирует:

$$\delta K = 0. \quad (39.4)$$

«Всякая система пребывает в состоянии покоя или равномерного движения по *прямейшему пути*».

Этот способ выражения (ср. стр. 309 ранее цитированной книги Герца) весьма напоминает формулировку первой аксиомы Ньютона.

Математическое преобразование требования (39.4) повторяет гаусово (ср. выше) и на основании условий варьирования, установленных на стр. 280 в пп. а) и б), приводит, очевидно, к уравнениям Лагранжа первого рода (при $m_k = 1$) для свободного движения.

Однако возникает вопрос: чем оправдан выбор названий «элемент длины» для величины ds и «кривизна» для величины \sqrt{K} ? Очевидно, что эти величины надо рассматривать как многомерные. Мы «находимся» при этом не в трехмерном, а в N -мерном евклидовом пространстве координат x_1, x_2, \dots, x_N . В этом пространстве, как известно, элемент длины действительно определяется выражением (39.2). Выражение (39.3) для квадрата кривизны траектории в общем случае мы оправдываем, исходя из двух- и трехмерного случаев, следующим образом.

Согласно формуле (5.10), в пространстве координат x_1, x_2 имеет место

$$K = \frac{1}{\rho^2} = \left(\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta s} \right)^2. \quad (39.5)$$

Согласно рис. 46, $\Delta\varepsilon$ есть угол между двумя соседними касательными к траектории, точки касания которых находятся на расстоянии Δs друг от друга. Эти касательные имеют направляющие косинусы, соответственно,

$$\frac{dx_1}{ds}, \quad \frac{dx_2}{ds} \quad \text{и} \quad \frac{dx_1}{ds} + \frac{d^2x_1}{ds^2}\Delta s, \quad \frac{dx_2}{ds} + \frac{d^2x_2}{ds^2}\Delta s. \quad (39.6)$$

Однако эти направляющие косинусы являются в то же время ординатами обеих точек пересечения единичной окружности с ее радиусами, проведенными параллельно обоим касательным; дуговая мера угла $\Delta\varepsilon$ является расстоянием между двумя названными точками пересечения. Таким образом, согласно (39.6), имеем:

$$\Delta\varepsilon = \left[\left(\frac{d^2x_1}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2x_2}{ds^2} \right)^2 \right] \Delta s^2$$

и, согласно формуле (39.5),

$$K = \left(\frac{d^2x_1}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2x_2}{ds^2} \right)^2. \quad (39.7)$$

В пространстве трех координат x_1, x_2, x_3 величина $\Delta\varepsilon$ снова определяется как угол между соседними касательными к трехмерной траектории. Вместо единичной окружности мы имеем здесь единичную сферу, через центр которой нужно провести параллели к обоим касательным. Расстояние между точками их пересечения с единичной сферой дает дуговую меру угла $\Delta\varepsilon$; следовательно,

$$\Delta\varepsilon^2 = \left[\left(\frac{d^2 x_1}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 x_2}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 x_3}{ds^2} \right)^2 \right] \Delta s^2.$$

Отсюда, согласно формуле (39.5), получается трехчленное выражение для K .

Обобщение для пространства N измерений и для N -членной формулы (39.3) очевидно.

На этом мы заканчиваем наше изложение механики Герца. Как мы уже отмечали на стр. 15, механика Герца построена в высшей степени увлекательно и последовательно, но, в силу сложности замены сил связями, оказалась мало плодотворной.

§ 40. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЛИНИЯХ

Геодезические линии на произвольной кривой поверхности мы определим здесь как *траектории свободной* (а значит, движущейся также и без трения) *материальной точки, связанной с поверхностью*. Пусть масса точки будет равна единице, уравнение поверхности пусть будет $F(x, y, z) = 0$.

Согласно принципу Мопертюи, эти геодезические линии одновременно являются и *кратчайшими линиями* или, говоря в более общем смысле (ср. стр. 276), *линиями экстремальной длины*. В силу применимости закона сохранения энергии, скорость движения по траектории постоянна. Путем соответствующего выбора нормировки энергии можно скорость сделать равной единице и, в соответствии с этим, заменить $\frac{d}{dt}$ на $\frac{d}{ds}$.

Можно прийти к элементарному определению геодезических линий, если описывать траектории с помощью уравнений Лагранжа пер-

вого рода. В сокращенной векторной записи эти уравнения в нашем случае будут иметь следующий вид:

$$\dot{\mathbf{v}} = \lambda \operatorname{grad} F. \quad (40.1)$$

Вектор $\dot{\mathbf{v}}$ направлен по главной нормали, к нашей траектории, если, как в данном случае, $v = \text{const}$, т. е. $\dot{v} = 0$ (ср. в § 5 начало раздела 3); таким образом, $\dot{\mathbf{v}}$ лежит в соприкасающейся плоскости (ср. там же). С другой стороны, вектор $\operatorname{grad} F$ направлен по нормали к поверхности, так как для всех направлений поступательного движения dx , dy , dz на поверхности имеет место

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0,$$

так что направление

$$\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z}$$

действительно нормально к этим направлениям поступательного движения. Таким образом, формула (40.1) содержит элементарное определение геодезических линий: *их главная нормаль совпадает по направлению с нормалью к поверхности, или их соприкасающаяся плоскость проходит через нормаль к поверхности.*

Теперь воспользуемся принципом *прямейшего пути*. Согласно этому принципу, геодезическая линия имеет меньшую кривизну, чем соседние траектории; при этом, по условию (38.3), сравниваемые соседние траектории ограничены тем, что они должны проходить через ту же точку и с той же касательной, как и геодезическая линия в рассматриваемой точке. Совокупность этих соседних траекторий мы получим, если, кроме плоскости, проходящей через нормаль к поверхности и дающей в сечении с последней геодезическую линию, проведем через соответствующую касательную все возможные наклонные плоскости и определим линии их пересечения с поверхностью. Согласно принципу Герца, эти косые сечения имеют *большую кривизну* (а следовательно, и *меньший радиус кривизны*), чем нормальные сечения.

Этому соответствует *теорема Менье теории поверхностей*, которая гласит: *радиус кривизны косоуго сечения равен проекции радиуса кривизны нормального сечения на плоскость косоуго сечения.* Таким образом, теорема Менье может рассматриваться как количественная «специализация» общего принципа *прямейшего пути*.

В заключение применим к нашим геодезическим траекториям *уравнения Лагранжа второго рода*. Тем самым мы вступаем в круг идей большого труда Гаусса, написанного им в 1827 г. («Disquisitiones generales circa superficies curvas»); в четырехмерном обобщении этот круг идей характерен для общей теории относительности.

Подобно тому, как Лагранж вводит произвольные криволинейные координаты q , Гаусс в качестве координат на поверхности пользуется двумя произвольными семействами кривых, двояко покрывающих эту поверхность. Обозначим их общепринятым образом:

$$u = \text{const}, \quad v = \text{const}. \quad (40.2)$$

В этих координатах Гаусс выражает элемент длины ds в следующей форме:

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2. \quad (40.3)$$

«Первые дифференциальные параметры» E, F, G , рассматриваемые как функции от u и v , связаны с прямоугольными координатами x, y, z точек поверхности формулами:

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2, \\ G &= \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2, \\ F &= \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}. \end{aligned}$$

Квадрат элемента длины, деленный на $2 dt^2$, выражает кинетическую энергию T нашей движущейся по поверхности материальной точки.

Таким образом, мы можем выразить уравнения Лагранжа второго рода в обозначениях Гаусса, образуя

$$\begin{aligned} p_u &= \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} = E\dot{u} + F\dot{v}, \\ 2 \frac{\partial T}{\partial u} &= \frac{\partial E}{\partial u} \dot{u}^2 + 2 \frac{\partial F}{\partial u} \dot{u}\dot{v} + \frac{\partial G}{\partial u} \dot{v}^2. \end{aligned}$$

Следовательно, по схеме уравнений Лагранжа (если мы еще заменим $\frac{d}{dt}$

на $\frac{d}{ds}$) дифференциальное уравнение геодезических линий для координаты u запишется в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(E \frac{du}{ds} + F \frac{dv}{ds} \right) = \\ = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial E}{\partial u} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2 \frac{\partial F}{\partial u} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \frac{\partial G}{\partial u} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \right\}. \quad (40.4) \end{aligned}$$

Нет необходимости выписывать соответствующее дифференциальное уравнение для координаты v , так как оно, в силу закона сохранения энергии (в нашем случае $\frac{ds}{dt} = 1$), должно быть идентичным с уравнением (40.4).

В своей названной работе (в статье 18) Гаусс выводит уравнение (40.4) из принципа кратчайшего пути. Здесь нам хотелось лишь указать на то, что гауссов метод криволинейных координат на поверхности (40.2) совпадает с лагранжевым методом механики системы. Оба метода инвариантны по отношению к любому преобразованию координат и зависят только от «внутренних» свойств поверхностей или, соответственно, механических систем.

ГЛАВА VIII

ТЕОРИЯ ГАМИЛЬТОНА

§ 41. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА

В то время как в уравнениях Лагранжа независимыми переменными являлись обобщенные координаты q_k и обобщенные скорости \dot{q}_k в *уравнениях Гамильтона*, которые мы теперь выведем двумя различными способами, *независимыми переменными* являются обобщенные координаты q_k и обобщенные импульсы p_k , причем последние определяются выражением (36.9а). Далее, в то время как в уравнениях Лагранжа характеристической функцией была «свободная энергия» $T - V$, рассматриваемая как функция q_k и \dot{q}_k , в *уравнениях Гамильтона роль такой характеристической функции играет «полная энергия»* $T + V$, рассматриваемая как функция q_k и p_k . Назовем ее *функцией Гамильтона* и обозначим через $H(q, p)$, подобно тому, как мы называли свободную энергию функцией Лагранжа и обозначали ее через $L(q, \dot{q})$. Функции H и L связаны соотношением (34.16), которое, учитывая определение p_k , можно переписать в виде

$$H = \sum p_k \dot{q}_k - L. \quad (41.1)$$

Однако мы тотчас же расширим основу теории (ср. конец § 37), а именно, откажемся от предположения, что L может быть разложено на кинетическую и потенциальную составные части, и допустим также явную зависимость L от t . Согласно изложенному на стр. 254, такая зависимость может возникнуть в том случае, если условия связи, наложенные на механическую систему, или уравнения, служащие для определения ее координат, содержат время. Таким образом, мы напишем функцию Лагранжа в более общей форме:

$$L = L(t, q, \dot{q}). \quad (41.1a)$$

Уравнение (41.1) мы будем рассматривать как определение соответствующей функции Гамильтона, не обращая внимания на ее первоначальный физический смысл как полной энергии системы:

$$H = H(t, q, p). \quad (41.1б)$$

Здесь, как и прежде, импульсы p определяются соотношением

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}. \quad (41.1в)$$

Положив в основу принцип Гамильтона

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0, \quad (41.1г)$$

получим [считая функцию L определенной выражением (41.1а)] точно так же, как в § 37, уравнения Лагранжа; для последующего рассмотрения эти уравнения мы запишем в форме:

$$\dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k}. \quad (41.1д)$$

а) *Вывод уравнений Гамильтона из уравнений Лагранжа.*

Напишем полные дифференциалы функций H и L :

$$dH = \frac{\partial H}{\partial t} dt + \sum \frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \sum \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k, \quad (41.2)$$

$$dL = \frac{\partial L}{\partial t} dt + \sum \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k, \quad (41.2а)$$

Пользуясь уравнениями Лагранжа (41.1д) и определением (41.1в) импульсов p_k , преобразуем dL к виду

$$dL = \frac{\partial L}{\partial t} dt + \sum \dot{p}_k dq_k + \sum p_k d\dot{q}_k. \quad (41.2б)$$

С другой стороны, пользуясь уравнением (41.2б), образуем дифференциал от выражения (41.1):

$$dH = \sum \dot{q}_k dp_k + \sum p_k d\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt - \sum \dot{p}_k dq_k - \sum p_k d\dot{q}_k. \quad (41.3)$$

Так как второй и последний члены взаимно уничтожаются, то

$$dH = -\frac{\partial L}{\partial t} dt - \sum \dot{p}_k dq_k + \sum \dot{q}_k dp_k. \quad (41.3a)$$

Это выражение dH должно быть тождественно с выражением (41.2). Приравнявая множители при dt , получаем:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (41.36)$$

С другой стороны, сравнение множителей при dq_k и dp_k дает:

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}. \quad (41.4)$$

Эти замечательно симметричные соотношения и называются обыкновенными дифференциальными уравнениями Гамильтона.

Нужно, впрочем, заметить, что уравнения типа (41.4) встречались уже значительно ранее у Лагранжа в его «Аналитической механике»¹, но там они выведены и применены лишь для частного случая малых возмущений.

б) Вывод уравнений Гамильтона из принципа Гамильтона

Если с помощью соотношения (41.1) написать принцип Гамильтона в виде

$$\begin{aligned} \delta \int L dt &= \delta \int [H(t, q, p) - \sum p_k \dot{q}_k] dt = \\ &= \sum_k \int \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} \delta p_k - \dot{q}_k \delta p_k - p_k \delta \dot{q}_k \right) dt = 0, \end{aligned} \quad (41.5)$$

то последний член в скобках может быть преобразован интегрированием по частям:

$$-\int_{t_0}^{t_1} p_k \delta \dot{q}_k dt = \int_{t_0}^{t_1} \dot{p}_k \delta q_k dt - p_k \delta q_k \Big|_{t_2}^{t_1}, \quad (41.6)$$

¹Лагранж, Аналитическая механика, том первый, стр. 246, пункт 14, М.-Л., 1937.

причем член, не содержащий интеграла, обращается в нуль (в силу условий варьирования в принципе Гамильтона). Подставляя выражение (41.6) в уравнение (41.5) и группируя слагаемые с δq и δp , получим:

$$\sum_k \int \left(\left\{ \frac{\partial H}{\partial q_k} + \dot{p}_k \right\} \delta q_k + \left\{ \frac{\partial H}{\partial p_k} - \dot{q}_k \right\} \delta p_k \right) dt = 0. \quad (41.7)$$

Если бы мы были вправе рассматривать величины δq_k и δp_k как независимые вариации, то непосредственно получили бы уравнения Гамильтона (41.4), приравняв нулю порознь множители при δq_k и δp_k . Это, однако, недопустимо: хотя q_k и p_k и входят в H как независимые переменные, но при вычислении интеграла действия они связаны между собой временной зависимостью, точно так же, как q_k и \dot{q}_k в равенстве (41.6), вследствие чего мы и должны были проделать интегрирование по частям. Однако если мы возьмем частную производную по p от выражения (41.1) (при фиксированных q), то убедимся, что выражение во вторых фигурных скобках формулы (41.7) тождественно обращается в нуль¹; отсюда мы вполне строго заключаем, что и выражение в первых фигурных скобках формулы (41.7) должно быть равно нулю.

Мы привели здесь второй вывод уравнений Гамильтона для того, чтобы сделать в связи с ним одно важное замечание.

Мы знаем, что уравнения Лагранжа инвариантны относительно любых «точечных преобразований», т. е. они сохраняют свою форму, если мы вместо q_k вводим любые другие координаты Q_k , связанные с q_k соотношениями:

$$Q_k = f_k(q_1, q_2, \dots, q_f). \quad (41.8)$$

¹Рассматривая L как функцию q_k , \dot{q}_k и t , из формулы (41.1) находим:

$$dH = \sum p_k dq_k + \sum \dot{q}_k dp_k - \sum \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

или, на основании определения (41.1в),

$$dH = \sum \dot{q}_k dp_k - \sum \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

Отсюда

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k,$$

причем частная производная берется в предположении постоянства q и t . (Прим. ред.)

Тогда соответствующие P_k выражаются в виде

$$P_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_k} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_k} = \sum_i p_i a_{ik}, \quad (41.8a)$$

т. е. они являются линейными функциями от p_i ; коэффициенты a_{ik} , как и в формуле (3.3), являются функциями координат q_k .

В противоположность этому, мы покажем, что уравнения Гамильтона инвариантны относительно *гораздо более общих преобразований*

$$\begin{aligned} Q_k &= f_k(q, p), \\ P_k &= g_k(q, p), \end{aligned} \quad (41.9)$$

при которых, следовательно, f_k и g_k являются произвольными функциями обоих рядов переменных q_k и p_k (с некоторым ограничением, которое будет тотчас же указано); в частности, q_k может и не быть линейной функцией относительно p_k .

Для этой цели выразим q , p через Q , P с помощью соотношений (41.9) [разумеется, соотношения (41.9) должны допускать такую возможность] и подставим результат в выражение $H(q, p)$. Преобразованную таким образом функцию Гамильтона обозначим через \bar{H} , таким образом,

$$H(q, p) = \bar{H}(Q, P). \quad (41.10)$$

Сравним, далее, величину $\sum p_k \dot{q}_k$, входящую в равенство (41.5), с $\sum P_k \dot{Q}_k$. При преобразовании (41.8), (41.8a) обе эти величины, как легко убедиться, были бы равны друг другу¹. Потребуем теперь, чтобы равенство этих величина сохранялось и при общем преобразовании (41.9) с точностью до слагаемого, являющегося полной производной по времени некоторой функции F от q и p или, иначе, функцией от q

¹ Дифференцируя выражение (41.8) по времени, получаем:

$$\dot{Q}_k = \sum_i \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} \dot{q}_i.$$

Отсюда после дифференцирования по \dot{q}_i находим:

$$\frac{\partial \dot{Q}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial Q_k}{\partial q_i}.$$

и Q^1 . Таким образом, полагаем:

$$\sum p_k \dot{q}_k = \sum P_k \dot{Q}_k + \frac{d}{dt} F(q, Q), \quad (41.11)$$

где функция F может быть выбрана произвольно. В этом и заключается упомянутое выше ограничение, накладываемое на преобразование (41.9).

Если мы теперь подставим выражения (41.10) и (41.11) в уравнение (41.5), то при интегрировании и последующем варьировании слагаемое с $\frac{dF}{dt}$ выпадает, так как на пределах интеграла вариации δq и δQ обращаются в нуль. Таким образом, уравнение (41.5) сохраняет свою прежнюю форму и может быть переписано следующим образом:

$$\delta \int (\bar{H}(Q, P) - \sum P_k \dot{Q}_k) dt = 0.$$

Так как ничто не изменяется и в прежних преобразованиях (41.6) и (41.7), то мы здесь приходим к заключению о справедливости уравнений Гамильтона. В соответствии с уравнениями (41.4), они имеют вид:

$$\dot{P}_k = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_k}, \quad \dot{Q}_k = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_k}. \quad (41.12)$$

Далее, принимая во внимание (41.8a), имеем:

$$\begin{aligned} \sum_k P_k \dot{Q}_k &= \sum_i \sum_j \sum_k \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_k} \frac{\partial Q_k}{\partial q_j} p_j \dot{q}_j, \\ \sum_k \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_k} \frac{\partial Q_k}{\partial q_j} &= \sum_k \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial q_j} = \frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \delta_{ij}, \end{aligned}$$

где $\delta_{ij} = 1$, если $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$.

Следовательно,

$$\sum P_k \dot{Q}_k = \sum_i \sum_j \delta_{ij} p_i \dot{q}_j = \sum_i p_i \dot{q}_i,$$

что и требовалось доказать. (*Прим. ред.*)

¹В самом деле, если F первоначально задана как функция q и p , то p можно выразить из первого уравнения (41.9) и подставить в F , благодаря чему получается новая функция F от q и Q . (*Прим. ред.*)

²Против приведенного доказательства можно выставить два возражения.

Во-первых, в принципе Гамильтона накладывается требование, чтобы вариации δq

Преобразования (41.9) в том частном случае, когда они ограничены условием (41.11), носят название касательных преобразований.

Так как при столь общих преобразованиях, как (41.9), величины P_k утрачивают свое первоначальное значение обобщенных импульсов, то величины P_k , Q_k лучше назвать «каноническими переменными»; в этом случае говорят, что P_k и Q_k являются «канонически сопряженными». Уравнения Гамильтона, вследствие их инвариантности относительно этих преобразований, называются также «каноническими дифференциальными уравнениями».

Именно в силу этой инвариантности относительно канонических преобразований, уравнения Гамильтона имеют особое значение в астрономической теории возмущений. Равным образом, уравнения Гамильтона играют важную роль и в общей статистике Гиббса.

Мы закончим наше рассмотрение уравнений Гамильтона замечанием, относящимся к закону сохранения энергии.

В соответствии с равенством (41.2), в общем случае имеет место:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} \dot{p}_k \right).$$

обращались в нуль на пределах интеграла. Однако вариации δp в общем случае на пределах интеграла отличны от нуля. Следовательно, и δQ на этих пределах, вообще говоря, также отличны от нуля. Можно было бы не делая никаких предположений относительно обращения в нуль вариации δQ на пределах интеграла, показать, что имеет место соотношение:

$$\sum_k \int \left(\left\{ \frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_k} + \dot{P}_k \right\} \delta Q_k + \left\{ \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_k} - \dot{Q}_k \right\} \delta P_k \right) dt = 0. \quad (41.7a)$$

(См., например, *де-Бройль*, Введение в волновую механику. Харьков — Киев, 1934.) Это соотношение отличается от (41.7) только тем, что в нем вместо q и p стоят Q и P .

Во-вторых, в силу уравнений (41.9), временная зависимость между δq и δp переносится также на δQ и δP . Поэтому пока нет оснований приравнять нулю выражения в фигурных скобках, входящие в уравнение (41.7a). Метод, с помощью которого были выведены уравнения Гамильтона из уравнения (41.7) к уравнению (41.7a) непосредственно неприменим, поскольку теперь мы не можем рассматривать P_k как частную производную по Q_k от «функции Лагранжа», определяемой выражением $\sum P_k \dot{Q}_k - \bar{H}$.

Можно, однако, оправдать приведенное доказательство следующим образом. Будем рассматривать p и q как независимые переменные функции H . Будем при этом считать, что соотношение $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ имеет место лишь для истинного движения, но не обязательно должно выполняться для варьированного движения. Образум

Здесь, согласно уравнению (41.4), выражение в скобках обращается в нуль для каждого k . Таким образом, в общем случае справедливо равенство:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (41.13)$$

В частности, если H не зависит явно от t , то отсюда получается *закон сохранения*:

$$\frac{dH}{dt} = 0, \quad H = \text{const}. \quad (41.14)$$

Этот закон является более общим, чем закон сохранения энергии, так как он, согласно соотношениям (41.1) и (41.1в), в случае любой, но *не зависящей от времени* функции Лагранжа L гласит:

$$\sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L = \text{const}. \quad (41.14a)$$

Мы уже упоминали об этом законе сохранения в примечании на стр. 253. Он переходит в *закон сохранения энергии* в том частном случае, когда функцию Лагранжа L можно разложить на кинетическую

вариацию интеграла

$$\int_{t_0}^{t_1} (\sum p_k \dot{q}_k - H) dt$$

в предположении, что пределы интеграции t_0 и t_1 постоянны и что на этих пределах вариации δq_k и δp_k обращаются в нуль. Вариация этого интеграла, как легко видеть, равна

$$\sum \int \left\{ \left(\dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} \right) \delta p_k - \left(\dot{p}_k + \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) \delta q_k \right\} dt.$$

Для истинного движения, в силу уравнений Гамильтона (40.4) она обращается в нуль, т. е.

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (\sum p_k \dot{q}_k - H) dt = 0. \quad (41.5a)$$

Это уравнение только по форме совпадает с вариационным принципом Гамильтона. Содержание его иное, поскольку в нем предполагается другой способ варьирования. В частности вариации δq и δp теперь могут рассматриваться как независимые. Поэтому из уравнения (41.5a) без привлечения каких-либо добавочных соотношений непосредственно вытекают уравнения Гамильтона (41.4). Теперь ясно, что приведенное выше доказательство формул (41.12) может быть сохранено, если исходить из уравнения (41.5a), ибо из требования $\delta q = \delta p = 0$ следует, что $\delta Q = \delta P = 0$. (*Прим. ред.*)

часть, являющуюся однородной квадратичной функцией скоростей \dot{q}_k , и потенциальную часть, не зависящую от \dot{q}_k .

§ 42. УРАВНЕНИЯ РАУСА И ЦИКЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Подобно тому, как в § 35 [ср. формулы (35.10) и (35.11)] мы рассматривали смешанный тип уравнений (по отношению к уравнениям Лагранжа первого и второго рода), мы теперь познакомимся еще с одним, смешанным типом «уравнений», занимающих *промежуточное положение между уравнениями Лагранжа и уравнениями Гамильтона*. Этот тип уравнений носит имя Рауса¹, в продолжение нескольких десятков лет преподававшего механику в Кембриджском университете. Несколько позднее Гельмгольц² положил этот же тип уравнений в основу своей теории моно- и полициклических систем, связанной с основными проблемами термодинамики.

Разобьем все степени свободы системы на две группы: одну группу, состоящую из $f - r$ степеней свободы, мы будем описывать лагранжевыми обобщенными координатами и обобщенными скоростями

$$q_1, q_2, \dots, q_{f-r}; \quad \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_{f-r};$$

вторую же группу степеней свободы мы будем характеризовать гамильтоновыми обобщенными координатами и обобщенными импульсами

$$q_{f-r+1}, q_{f-r+2}, \dots, q_f; \quad p_{f-r+1}, p_{f-r+2}, \dots, p_f.$$

Вместо функции Лагранжа L или функции Гамильтона H мы теперь введем функцию Рауса R , являющуюся функцией вышеприведенных $2f$ -координат, а также (для общности) и времени t :

$$R(t, q_1, q_2, \dots, q_f; \quad \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_{f-r}, p_{f-r+1}, \dots, p_f) \quad (42.1)$$

¹Мы считаем нужным указать его книгу: «Treatise on the dynamics of a system of rigid bodies, by Routh, I elementary part, II advanced part» — сборник задач, являющийся единственным в своем роде по богатству содержания. Свою форму уравнений динамики Раус развил впервые в конкурсном сочинении «A treatise of stability of a given state of motion».

²Berliner Akademie, 1884 и Crelles J., Bd. 97.

и определяемую выражением:

$$R = \sum_{k=f-r+1}^f p_k \dot{q}_k - L(t, q_1, q_2, \dots, q_f; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f). \quad (42.2)$$

Как мы видим, при $r = f$ функция Рауса переходит в *функцию Гамильтона* (41.1); с другой стороны, при $r = 0$ [когда сумма в первой части формулы (42.2) исчезает] она, с точностью до знака, переходит в *функцию Лагранжа*. Заметим при этом, что вместо определения (40.2) мы могли бы, очевидно, написать:

$$R = H(t, q_1, q_2, \dots, q_f; p_1, \dots, p_f) - \sum_{k=1}^{f-r} p_k \dot{q}_k. \quad (42.2a)$$

Теперь мы поступаем, как в § 41 [см. (41.2) и (41.4)] и выражаем полный дифференциал R , с одной стороны, из (42.1):

$$dR = \frac{\partial R}{\partial t} dt + \sum_{k=1}^f \frac{\partial R}{\partial q_k} dq_k + \sum_{k=1}^{f-r} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k + \sum_{k=f-r+1}^f \frac{\partial R}{\partial p_k} dp_k, \quad (42.3)$$

с другой стороны, из определения (42.2):

$$dR = \sum_{k=f-r+1}^f \dot{q}_k dp_k + \sum_{k=f-r+1}^f p_k d\dot{q}_k - dL. \quad (42.3a)$$

Здесь для dL мы можем непосредственно воспользоваться выражением (41.26), которое мы для большей ясности перепишем в виде:

$$dL = \frac{\partial L}{\partial t} dt + \sum_{k=1}^f \dot{p}_k dq_k + \sum_{k=1}^{f-r} p_k d\dot{q}_k + \sum_{k=f-r+1}^f p_k d\dot{q}_k. \quad (42.36)$$

При подстановке в равенство (42.3a) последний член выражения (42.36) и средний член (42.3a) взаимно уничтожаются, после чего остается:

$$dR = -\frac{\partial L}{\partial t} dt - \sum_{k=1}^f \dot{p}_k dq_k - \sum_{k=1}^{f-r} p_k d\dot{q}_k + \sum_{k=f-r+1}^f \dot{q}_k dp_k. \quad (42.4)$$

Сравнивая теперь почленно равенства (42.4) и (42.3), получим, кроме соотношения

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t},$$

следующую схему уравнений:

для $k = 1, 2, \dots, f - r$	для $k = f - r + 1,$ $f - r + 2, \dots, f$	(42.5)
$\dot{p}_k = -\frac{\partial R}{\partial q_k}$ $p_k = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k}$	$\dot{p}_k = -\frac{\partial R}{\partial q_k}$ $\dot{q}_k = +\frac{\partial R}{\partial p_k}$	

Здесь $f - r$ уравнений, стоящих слева, относятся к типу уравнений Лагранжа (при $L = -R$), а r уравнений, стоящих справа, относятся к типу уравнений Гамильтона (при $H = R$).

Приложение этих уравнений к циклическим системам, которое и имел в виду Раус при их выводе, заключается в следующем. Мы принимаем, что координаты второй группы степеней свободы являются циклическими и, следовательно (согласно стр. 262), не входят в функцию Лагранжа; в таком случае они не входят также и в функцию Рауса. Вследствие этого, соответствующие p_k оказываются постоянными (согласно верхнему уравнению из правой группы уравнений Рауса или так же, как мы уже замечали на стр. 263, согласно уравнениям Лагранжа). Подставляя эти постоянные значения p_k и соответствующие им (вообще говоря, не постоянные) значения q_k в выражение (42.2), получим функцию Рауса, зависящую только от $f - r$ координат первой группы q_k и от \dot{q}_k . Для этих координат справедлива левая группа приведенных уравнений (42.5), благодаря чему задача сводится к $f - r$ уравнениям типа Лагранжа.

Для того чтобы пояснить этот метод на не слишком сложном примере (Раус применяет этот метод преимущественно к трудным вопросам устойчивости состояний движения), рассмотрим еще раз задачу о движении тяжелого симметричного волчка. Циклическими координатами этого «бицикла» являются эйлеровы углы φ и ψ ; согласно форму-

лам (35.15)–(35.17) имеем:

$$\begin{aligned} p_\varphi \dot{\varphi} + p_\psi \dot{\psi} &= N \left(\frac{N}{C} - \cos \vartheta \frac{n - N \cos \vartheta}{A \sin^2 \vartheta} \right) + n \frac{n - N \cos \vartheta}{A \sin^2 \vartheta} = \\ &= \frac{N^2}{C} + \frac{(n - N \cos \vartheta)^2}{A \sin^2 \vartheta}. \end{aligned}$$

Следовательно, принимая во внимание формулу (35.13), получим:

$$\begin{aligned} R &= \frac{N^2}{C} + \frac{(n - N \cos \vartheta)^2}{A \sin^2 \vartheta} - \frac{A}{2} \dot{\vartheta}^2 - \frac{(n - N \cos \vartheta)^2}{2A \sin^2 \vartheta} - \frac{N^2}{2C} + P \cos \vartheta = \\ &= -\frac{A}{2} \dot{\vartheta}^2 + \Theta(\vartheta), \quad \Theta = \frac{N^2}{2C} + \frac{(n - N \cos \vartheta)^2}{2A \sin^2 \vartheta} + P \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Поэтому из нижнего уравнения левой группы уравнений (42.5) следует (при $q_k = \vartheta$):

$$p_k = A \dot{\vartheta}$$

и из верхнего уравнения этой же группы:

$$A \ddot{\vartheta} = -\frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta}, \quad (42.6)$$

что, разумеется, совпадает с «обобщенным уравнением маятника» (35.19). Таким же образом можно было бы показать применимость метода Рауса к проблемам более сложным, чем только что рассмотренная.

В начале своих лекций по теории Максвелла, прочитанных в 1891 г. в Мюнхенском университете, Больцман подробно рассматривает бициклическую систему, наглядно представляющую индукционные взаимодействия двух контуров тока.

В заключение рассмотрим в общем виде формальный математический метод, с помощью которого мы перешли от уравнений Лагранжа к уравнениям Гамильтона и, соответственно, Рауса. Допустим, что мы имеем дело с функцией Z двух переменных (или рядов переменных) x и y ; пусть

$$dZ(x, y) = X dx + Y dy. \quad (42.7)$$

Если вместо x, y мы хотим ввести в качестве независимых переменных X, Y , то нужно вместо Z рассматривать, «преобразованную функцию»:

$$U(X, Y) = xX + yY - Z(x, y). \quad (42.8)$$

Дифференцируя уравнение (42.8) и принимая во внимание условие (42.7), непосредственно получим:

$$dU(X, Y) = x dX + y dY. \quad (42.9)$$

Уравнения (42.7) и (42.9) идентичны следующим «взаимным с ними соотношениям»:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial x} &= X, & \frac{\partial Z}{\partial y} &= Y, \\ \frac{\partial U}{\partial X} &= x, & \frac{\partial U}{\partial Y} &= y. \end{aligned} \quad (42.10)$$

Если, с другой стороны, мы хотим заменить только одну из первоначальных переменных, например, y на «канонически сопряженную» переменную Y , то мы должны видоизменить (42.8) следующим образом:

$$V(x, Y) = yY - Z, \quad (42.11)$$

откуда получаем:

$$dV(x, Y) = -X dx + y dY; \quad (42.12)$$

следовательно,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -X, \quad \frac{\partial V}{\partial Y} = y. \quad (42.13)$$

Переход от Z к U можно сравнить с переходом от уравнений Лагранжа к уравнениям Гамильтона, а переход от Z к V — с переходом от уравнений Лагранжа к уравнениям Рауса.

В математическом анализе подобная замена независимых переменных и связанное с ней преобразование характеристической функции, называемое преобразованием Лежандра, играет выдающуюся роль. Эта замена широко используется в термодинамике.

§ 43. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ГАМИЛЬТОНА В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

В начале прошлого столетия наиболее актуальным вопросом теоретической физики была «дилемма» правильности *волновой* или *корпускулярной* теории света. Основы *волновой* теории были заложены Гюйгенсом. В рассматриваемый период она получила подтверждение благодаря

открытию Томасом Юнгом явления интерференции; *корпускулярная* же теория опиралась на авторитет Ньютона.

Гамильтон — астроном и математик — изучал ход лучей в оптических приборах. Публикация его работ, относящихся к этому вопросу¹, началась в 1827 г., т. е. после смерти двух величайших создателей волновой оптики — Фраунгофера и Френеля². Работы Гамильтона в области общей динамики, результаты которых мы здесь вкратце изложим, относятся к более позднему времени, но тесно связаны с его работами по лучевой оптике³.

Необходимо заметить, что развитие современной физики после открытия Планком элементарного кванта действия h в корне изменило самую постановку вопроса; она не гласит более: «Волновая или корпускулярная теория?», но: «*и волновая, и корпускулярная теория!*». Как увязать друг с другом, не впадая в противоречия, эти два, казалось бы, противоположных (а в действительности — *взаимно дополняющих друг друга*) толкования оптики (а в дальнейшем — и динамики)? Ответ на этот вопрос заключается, как показал Шредингер, в дальнейшем последовательном развитии хода мыслей Гамильтона, которое приводит к волновой или *квантовой механике*.

Лучевая оптика является механикой световых частиц; их траектории (в оптически неоднородных средах они ни в коем случае не будут прямолинейными) определяются обыкновенными дифференциальными уравнениями Гамильтона или эквивалентным им принципом наименьшего действия. Напротив, с точки зрения волновой теории световые лучи получаются как ортогональные⁴ траектории системы волновых поверхностей. Последние, согласно принципу Гюйгенса, являются *параллельными поверхностями*. Гамильтон описывал семейство волновых поверхностей с помощью дифференциального уравнения (по необходимости — *в частных производных*) и распространил этот метод на мно-

¹Trans. Irish Academy, 1827, 1830, 1832. Работы по динамике вышли в издании «Trans. Roy. Soc.» London 1834 and 1835.

²Огюстен Жан Френель родился 10 мая 1788 г., умер 14 июля 1827 г.; Иосиф Фраунгофер родился 6 марта 1787 г., умер 7 июня 1826 г.

³В изложении Якоби эта связь утрачивается. Лишь в 1891 г. она была вновь выявлена Ф. Клейном (Naturforscher-Gesellschaft in Halle; Ges. Abhandl., S. 601 and 603).

⁴Это справедливо для оптически изотропных сред. В анизотропных средах (кристаллах) ортогональность луча и волновой поверхности является не обычной евклидовой, а «тензорно» обобщенной неевклидовой ортогональностью.

гомерное пространство координат q_k произвольной механической системы. Тогда, как мы увидим, семейство волновых поверхностей определяется условием $S = \text{const}$, где S есть функция действия в форме (37.1), а ортогональные к этому семейству траектории определяются уравнением:

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}. \quad (43.1)$$

а) *Консервативная система.* Вначале мы рассмотрим механическую систему, для которой справедлив закон сохранения энергии, причем энергию можно разложить на кинетическую T и потенциальную V , В этом случае T , V и H не зависят явно от t .

Будем исходить из соотношения (37.9) и заменим в нем справа δA через

$$-\delta V = \delta(T - W) = \delta T - \delta W.$$

Тогда правая часть соотношения (37.9) принимает вид:

$$2\delta T + 2T \frac{d}{dt} \delta t = \delta W. \quad (43.2)$$

Левую часть того же соотношения переписываем в обобщенных координатах q, p :

$$\frac{d}{dt} \sum p_k \delta q_k \quad (43.3)$$

и, приравняв ее выражению (43.2), получим:

$$2\delta T + 2T \frac{d}{dt} \delta t - \delta W = \frac{d}{dt} \sum p_k \delta q_k. \quad (43.4)$$

Отсюда путем интегрирования по t в пределах от 0 до t [аналогично формулам (37.11)–(37.12а)] получим:

$$\delta S - t\delta W = \sum p \delta q - \sum p_0 \delta q_0. \quad (43.5)$$

Здесь p_0 и δq_0 относятся к нижнему пределу интегрирования $t = 0$, а p и δq — к верхнему пределу t .

Уравнение (43.5) показывает, что мы будем рассматривать интеграл действия S как функцию начального положения q_0 , конечного положения q и энергии W , а следовательно, вместо времени t будем пользоваться в качестве переменной произвольно задаваемой энергией W :

$$S = S(q, q_0, W). \quad (43.6)$$

Тогда из (43.5) при фиксированных q_0 и q получим следующее уравнение, определяющее временной ход движения:

$$t = \frac{\partial S}{\partial W}. \quad (43.7)$$

В то же время, фиксируя в уравнении (43.5) энергию W и варьируя лишь одну из координат q или q_0 , получим:

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad p_0 = -\frac{\partial S}{\partial q_0}. \quad (43.8)$$

Первое из этих соотношений совпадает с нашим утверждением (43.1), второе же соотношение мы вскоре приведем к более удобному виду.

Казалось бы, полученные соотношения дают мало нового для описания движения, пока не известно действие S в форме (43.6). Вспомним, однако, закон сохранения энергии:

$$H(q, p) = W.$$

Заменяя здесь p , согласно уравнению (43.8), получим:

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = W. \quad (43.9)$$

Это уравнение мы рассматриваем как уравнение для определения S . Поскольку T является квадратичной функцией импульсов p (V можно считать не зависящей от p), то *дифференциальное уравнение Гамильтона в частных производных* (43.9) является уравнением второй степени и первого порядка.

Допустим, что мы нашли полный интеграл этого уравнения, т. е. интеграл, содержащий столько произвольных постоянных, сколько степеней свободы имеет рассматриваемая система. Обозначим эти произвольные постоянные через

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_f.$$

Так как само S не входит в уравнение (43.9), то S может быть определено из него только с точностью до аддитивной постоянной. Следовательно, одна из перечисленных постоянных интегрирования, скажем, α_1 , является излишней и заменяется аддитивной постоянной, остающейся

неопределенной. Вводя вместо α_1 параметр энергии W , запишем наш полный интеграл в следующей форме:

$$S = S(q, W, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_f) + \text{const.} \quad (43.10)$$

Классическим (хотя и не всегда применимым) методом получения подобного полного интеграла является метод разделения переменных, на котором мы остановимся в § 45. В § 44 мы покажем, как можно определить движение системы, если найден полный интеграл (43.10).

б) *Неконсервативная система.* Рассмотрим теперь общий случай, когда функция Лагранжа L , а следовательно, и функция Гамильтона H , зависит от t . В этом случае разложение L и H на T и V , вообще говоря, невозможно; в частности, если бы существовала потенциальная энергия V , то она зависела бы от времени. Этот случай важен для теории возмущений в астрономии и квантовой механике. Здесь не имеет места сохранение энергии, т. е. отсутствует и постоянная энергия W . Вследствие этого, мы не можем применить принцип наименьшего действия в форме Мопертюи, а должны обратиться к его гамильтоновой форме. Определим функцию действия S^* с помощью интеграла входящего в принцип Гамильтона:

$$S^* = \int_{t_0}^{t_1} L dt. \quad (43.11)$$

Будем рассматривать S^* как функцию начального и конечного положений и времени движения t :

$$S^* = S^*(q, q_0, t), \quad (43.12)$$

в противоположность формуле (43.6), в которой место t занимала не существующая теперь константа энергии W .

Образум теперь, согласно (43.11),

$$\frac{dS^*}{dt} = L; \quad (43.13)$$

с другой стороны, согласно (43.12):

$$\frac{dS^*}{dt} = \sum \frac{\partial S^*}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial S^*}{\partial t} = \sum p_k \dot{q}_k + \frac{\partial S^*}{\partial t}. \quad (43.14)$$

В справедливости использованного здесь, аналогичного (43.8) соотношения

$$p_k = \frac{\partial S^*}{\partial q_k} \quad (43.15)$$

можно убедиться с помощью формулы (43.11), если продифференцировать ее по q_k и использовать соотношение (41.1д).

Сравнивая выражения (43.13) и (43.14), в силу общего определения (41.1) функции H , получаем:

$$\frac{\partial S^*}{\partial t} + H = 0. \quad (43.16)$$

Таким образом, используя зависимость (43.15), имеем:

$$\frac{\partial S^*}{\partial t} + H \left(q, \frac{\partial S^*}{\partial q}, t \right) = 0. \quad (43.17)$$

Это и есть *общий вид дифференциального уравнения Гамильтона*. Оно включает в себе прежнее уравнение (43.9) как частный случай. А именно, если принять, как в случае а), что H не зависит от t , то из уравнения (43.17) следует, что S^* линейно относительно t . Поэтому полагаем

$$S^* = at + b$$

и заключаем из (43.16), что $-a = H$, т. е. равно существующей теперь константе энергии W . Величина b оказывается тождественной нашей прежней функции действия S . Следовательно, общее уравнение (43.17) действительно переходит в более специальное уравнение (43.9).

Все сказанное нами в п. а) относительно интегрирования уравнения (43.9) относится и к более общему уравнению (43.17). Полный интеграл уравнения (43.17) теперь содержит $f + 1$ постоянную, из которых одна по-прежнему является аддитивной. Теперь мы будем вместо (43.10) писать:

$$S = S(q, t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_f) + \text{const.} \quad (43.18)$$

§ 44. ТЕОРЕМА ЯКОБИ ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Мы уже указывали, что второе из уравнений (43.8) неудобно для интегрирования. Это объясняется тем, что мы получаем интеграл нашего дифференциального уравнения в частных производных не в форме (43.6), а в форме (43.10) или, соответственно (43.18). С другой стороны, мы получили уравнение (43.7):

$$t = \frac{\partial S}{\partial W}. \quad (44.1)$$

Это уравнение весьма наглядно описывает *временной ход движения*. Покажем теперь, что если мы будем дифференцировать S^* не по W , а по постоянным интегрирования $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_f$, то полученные уравнения

$$\beta_k = \frac{\partial S}{\partial \alpha_k}, \quad k = 2, 3, \dots, f \quad (44.2)$$

будут описывать *геометрическую форму траектории системы, поскольку мы будем рассматривать величины β_k как новые постоянные интегрирования*. Это и есть теорема Якоби в случае а). В случае б) она принимает еще более наглядную форму:

$$\beta_k = \frac{\partial S^*}{\partial \alpha_k}, \quad k = 1, 2, \dots, f. \quad (44.3)$$

В этом случае мы имеем f уравнений одинакового вида, которые описывают движение системы как в пространстве, так и во времени.

Чтобы получить такую же наглядность и в случае а), следует вместо равенства (44.1) формально написать:

$$\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1}, \quad (44.3a)$$

т. е. положить $t = \beta_1$ и $W = \alpha_1$.

При доказательстве мы положим в основу случай а) и вспомним определение (41.9) касательного преобразования (41.11), которое мы для последующего запишем в виде:

$$dF(q, Q) = \sum p_k dq_k - \sum P_k dQ_k. \quad (44.4)$$

Сравним это выражение с дифференциалом функции действия (43.10):

$$dS(q, W, \alpha) = \sum_{k=1}^f \frac{\partial S}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial S}{\partial W} dW + \sum_{k=2}^f \frac{\partial S}{\partial \alpha_k} d\alpha_k,$$

или, принимая во внимание формулы (43.8), а также (44.2) и (44.3а), получим:

$$dS(q, \alpha) = \sum_{k=1}^f p_k dq_k + \sum_{k=1}^f \beta_k d\alpha_k. \quad (44.5)$$

Это равенство совпадает с равенством (44.4), если положить:

$$F = S, \quad Q_k = \alpha_k, \quad P_k = -\beta_k. \quad (44.6)$$

Мы знаем далее, что из обыкновенных дифференциальных уравнений Гамильтона (41.4)

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

путем преобразования $q_k, p_k \rightarrow Q_k, P_k$ при условии (44.4) получаются уравнения (41.12).

$$\dot{P}_k = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_k}, \quad \dot{Q}_k = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_k}.$$

В нашем случае, в силу (44.6), эти уравнения принимают вид:

$$-\dot{\beta}_k = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \alpha_k}, \quad \dot{\alpha}_k = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \beta_k}. \quad (44.7)$$

Но, согласно (41.10), имеем:

$$\bar{H}(Q, P) = H(q, p)$$

или с учетом (44.6):

$$\bar{H}(\alpha, -\beta) = W = \alpha_1. \quad (44.8)$$

Отсюда следует:

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial \alpha_k} = \begin{cases} 1 & \text{при } k = 1, \\ 0 & \text{при } k > 1, \end{cases} \quad \frac{\partial \bar{H}}{\partial \beta_k} = \begin{cases} 0 & \text{при } k = 1, \\ 0 & \text{при } k > 1. \end{cases} \quad (44.9)$$

Таким образом, уравнения (44.7) переходят в

$$\dot{\beta}_k = \begin{cases} 1 & \text{при } k = 1, \\ 0 & \text{при } k > 1, \end{cases} \quad \dot{\alpha}_k = \begin{cases} 0 & \text{при } k = 1, \\ 0 & \text{при } k > 1. \end{cases} \quad (44.10)$$

Для величин α_k эти уравнения не дают ничего нового; они лишь подтверждают, что α_k суть постоянные интегрирования. Также и уравнение для β_1 не содержит ничего нового; именно — из $\dot{\beta}_1 = 1$ следует $\beta_1 = t$ (с точностью до несущественной аддитивной постоянной), как мы уже отмечали в связи с равенством (41.3а). Напротив, уравнения (41.10) для β_k при $k > 1$ содержат доказательство теоремы Якоби; именно — из этих уравнений видно, что величины β_k так же, как и α_k , являются постоянными интегрирования.

Приведенное доказательство можно без существенных изменений распространить и на случай б), если несколько обобщить определение касательного преобразования. Однако для дальнейшего это обобщение нам не понадобится.

§ 45. ЗАДАЧА КЕПЛЕРА В КЛАССИЧЕСКОМ И КВАНТОВОМ РАССМОТРЕНИИ

В этом параграфе мы покажем, как метод интегрирования Гамильтона–Якоби непосредственно и, так сказать, «автоматически» приводит к решению *астрономической задачи о движении планет*. С другой стороны, мы установим, что этот же метод удовлетворяет требованиям *атомной физики* и дает естественное введение в (старую) квантовую теорию.

Мы исходим из функции Лагранжа для задачи двух тел (при неподвижном Солнце M) в полярных координатах:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + G \frac{mM}{r}. \quad (45.1)$$

Выразим отсюда обобщенные импульсы:

$$p_r = m\dot{r}, \quad r_\varphi = mr^2\dot{\varphi}. \quad (45.1a)$$

Вводя их в формулу (45.1) и изменив знак перед потенциальной энергией, получим функцию Гамильтона:

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\varphi^2 \right) - G \frac{mM}{r}. \quad (45.16)$$

Согласно (43.9), дифференциальное уравнение Гамильтона имеет следующий вид:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 = 2m \left(W + G \frac{mM}{r}\right). \quad (45.2)$$

На этом примере мы покажем, что следует понимать под «методом разделения переменных», упомянутым на стр. 303.

Будем искать решение дифференциального уравнения (45.2) в виде:

$$S = R + \Phi, \quad (45.3)$$

где R должно зависеть только от r , а Φ — только от φ . Если бы мы заменили правую часть уравнения (46.2) для общности через $f(r, \varphi)$, то должно было иметь место

$$\left(\frac{dR}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{d\Phi}{d\varphi}\right)^2 = f(r, \varphi). \quad (45.3a)$$

Подобное соотношение, вообще говоря, не выполняется. Если, однако, как в нашем случае, f не зависит от φ , то достаточно положить $\frac{d\Phi}{d\varphi}$ равным постоянной, скажем C . Тогда для определения R получим уравнение

$$\left(\frac{dR}{dr}\right)^2 = f(r) - \frac{C^2}{r^2}, \quad (45.4)$$

которое может быть разрешено в квадратурах. Допущение о независимости f от φ , очевидно, равносильно тому, что в нашем случае φ является «циклической» координатой, т. е. не входит явно в дифференциальное уравнение. На этом примере мы видим, что метод разделения переменных связан с особыми свойствами симметрии данного дифференциального уравнения, которые проявляются во многих случаях, но далеко не всегда.

Согласно общей схеме § 44, положим $C = \alpha_2$. Тогда уравнение (45.2) распадается на два уравнения:

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi} = \alpha_2, \quad (45.5)$$

$$\frac{\partial S}{\partial r} = \sqrt{2m \left(W + G \frac{mM}{r}\right) - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}. \quad (45.6)$$

Уравнение (45.5) представляет собой закон площадей, т. е. второй закон Кеплера: постоянная интегрирования α_2 означает постоянный момент импульса и в сущности идентична с использованной ранее постоянной площадей (§ 6). Уравнение (45.6) есть уравнение изменения радиального импульса.

Согласно (45.5) и (45.6), если еще заменить W на α_1 , функция действия S выразится в виде:

$$S = \int_{r_0}^r \sqrt{2m \left(\alpha_1 + G \frac{mM}{r} \right) - \frac{\alpha_2^2}{r^2}} dr + \alpha_2 \varphi + \text{const.} \quad (45.7)$$

Нижний предел интегрирования может быть выбран произвольно, так как он влияет только на величину аддитивной постоянной.

Прежде всего нас интересует уравнение траектории, т. е. первый закон Кеплера. Для этого мы образуем, согласно (44.2),

$$\beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = -\alpha_2 \int_{r_0}^r \left\{ 2m \left(\alpha_1 + G \frac{mM}{r} \right) - \frac{\alpha_2^2}{r^2} \right\}^{-1/2} \frac{dr}{r^2} + \varphi. \quad (45.8)$$

Здесь, очевидно, удобно ввести вместо r в качестве новой переменной интегрирования $s = \frac{1}{r}$ и переписать равенство (45.8) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \beta_2 - \varphi &= \alpha_2 \int_{s_0}^s \{ 2m(\alpha_1 + GmMs) - \alpha_2^2 s^2 \}^{-1/2} ds = \\ &= \int_{s_0}^s \frac{ds}{\sqrt{(s - s_{\min})(s_{\max} - s)}}. \end{aligned} \quad (45.9)$$

Здесь s_{\min} и s_{\max} означают обратные величины расстояний от афелия и перигелия; как показывает сравнение обоих интегральных выражений в равенстве (45.9), имеет место:

$$\left. \begin{aligned} s_{\min} s_{\max} &= -\frac{2m\alpha_1}{\alpha_2^2}, \\ s_{\min} + s_{\max} &= \frac{2Gm^2M}{\alpha_2^2}. \end{aligned} \right\} \quad (45.10)$$

Чтобы получить выражение (45.9) в удобной тригонометрической форме, введем еще подстановку:

$$s = \frac{s_{\min} + s_{\max}}{2} + \frac{s_{\max} - s_{\min}}{2}u, \quad (45.11)$$

которая переводит $s = s_{\max}$ в $u = +1$, $s = s_{\min}$ в $u = -1$. Тогда из (45.9) получаем:

$$\beta_2 - \varphi = \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \quad (45.12)$$

и если мы еще возьмем произвольный нижний предел интегрирования равным $\frac{\pi}{2}$, то

$$\varphi - \beta_2 = \arccos u, \quad u = \cos(\varphi - \beta_2). \quad (45.13)$$

Наконец, при помощи (45.11) возвращаемся от u к s и принимаем во внимание, что, согласно рис. 7, имеет место:

$$s_{\min} = \frac{1}{a(1+\varepsilon)}, \quad s_{\max} = \frac{1}{a(1-\varepsilon)}$$

и, следовательно,

$$s = \frac{1}{a(1-\varepsilon^2)} + \frac{\varepsilon}{a(1-\varepsilon^2)}u.$$

Отсюда, принимая во внимание формулу (45.13), получаем уравнение эллипса в известной форме:

$$s = \frac{1}{r} = \frac{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \beta_2)}{a(1 - \varepsilon^2)}, \quad (45.14)$$

причем постоянная β_2 может быть включена в угол φ .

Однако по причинам, связанным с наблюдениями, астронома интересует не столько форма орбиты, сколько процесс движения по орбите во времени. Метод Гамильтона–Якоби весьма наглядным образом решает и этот вопрос, именно, посредством уравнения (44.1)

$$t = \frac{\partial S}{\partial W} = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1},$$

из которого, после введения переменной s , получаем:

$$t = -\frac{m}{\alpha_2} \int_{s_0}^s \frac{ds}{s^2 \sqrt{(s - s_{\min})(s_{\max} - s)}}. \quad (45.15)$$

Этим представлением мы одновременно дополняем наше прежнее рассмотрение в § 6, при котором мы оставляли без внимания зависимость местоположения планеты от времени. Если мы, далее, введем в качестве новой переменной интегрирования «эксцентрическую аномалию» из задачи I.16 [ее обозначение u не имеет, конечно, ничего общего с вспомогательной величиной u в формуле (45.11)], то интеграл (45.15) можно взять элементарными способами, и мы придем непосредственно к приведенному в упомянутой задаче уравнению Кеплера:

$$nt = n - \varepsilon \sin u.$$

Как известно, проблема двух и многих тел играет центральную роль также и в современной *атомной физике*. В *атоме водорода* электрон движется вокруг ядра (протона), как планета вокруг Солнца. Метод Гамильтона–Якоби поразительным образом оправдался также и в этой области. Этот метод непосредственно приводит нас к необходимости введения *квантовых чисел*.

В (старой) квантовой теории *фазовым интегралом*, соответствующим k -й степени свободы (если последняя может быть отделена от остальных степеней свободы), называют интеграл:

$$J_k = \int p_k dq_k, \quad (45.16)$$

распространенный по всей области значений («фазовой области») переменной q_k и требуют при этом, чтобы J_k было целым кратным планковского кванта действия (ср. стр. 243):

$$J_k = n_k h. \quad (45.16a)$$

Выражая p_k в формуле (45.16) через функцию действия S , получаем:

$$\int \frac{\partial S}{\partial q_k} dq_k = \Delta S_k = n_k h. \quad (45.17)$$

Величина ΔS есть k -й «модуль периодичности» функции действия, т. е. приращение, которое испытывает S , когда q_k пробегает всю свою фазовую область.

Электрон водородного атома имеет координаты $q_1 = \varphi$ и $q_2 = r$. Дифференциальное уравнение (45.2) для S и его решение (45.7) могут быть непосредственно перенесены из астрономии в атомную физику, если в них заменить потенциальную энергию тяготения на кулоновскую энергию $-\frac{e^2}{r}$.

Так как фазовая область координаты φ простирается от 0 до 2π , то из формул (45.7) и (45.17) получаем:

$$\Delta S_\varphi = 2\pi\alpha_2 = n_\varphi h. \quad (45.18)$$

Здесь n_φ — азимутальное квантовое число; α_2 , как мы знаем, идентично с азимутальным моментом импульса p_φ .

Фазовая область координаты r простирается от r_{\min} до r_{\max} и обратно. В соответствии с этим формулы (45.7) и (45.17) дают:

$$\Delta S_r = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{2m \left(W - \frac{e^2}{r} \right) - \frac{n_\varphi^2 h^2}{4\pi^2 r^2}} dr = n_r h. \quad (45.19)$$

Здесь n_r радиальное квантовое число. Интегрирование можно выполнить (лучше всего комплексным интегрированием в плоскости r); при этом формула (45.19) переходит в

$$-n_\varphi h + 2\pi i \frac{me^2}{\sqrt{2mW}} = n_r h. \quad (45.20)$$

Отсюда получается энергия электрона водородного атома в квантовом состоянии $n = n_r + n_\varphi$:

$$W = -\frac{2\pi^2 me^4}{h^2 n^2}. \quad (45.21)$$

Эта величина отрицательна, так как энергия при бесконечном удалении электрона от протона (ср. вышеприведенное допущение о потенциальной энергии) принята равной нулю.

Формула (45.21), вместе с постулатом Бора об излучении энергии при квантовых переходах, впервые привела к пониманию спектра водорода (так называемые серии Бальмера) и далее — к современной теории спектральных линий вообще.

Как мы уже указывали в начале § 43, современное развитие атомной теории не остановилось на изложенном здесь представлении об электронных орбитах, но, следуя по стопам Гамильтона, пришло к углубленному пониманию атомных процессов на основе волновой механики.

Приложения

Задачи к главе I

I.1. *Упругий удар*¹. n равных масс M расположены по прямой линии одна возле другой. Слева по ним одновременно ударяют две массы M , каждая со скоростью v . Законы сохранения энергии и импульса, очевидно, будут удовлетворены в том случае, если две массы слева передадут свою скорость двум последним массам справа. Показать, что эти законы не могли бы выполняться, если бы была выбита только одна масса справа или если бы две массы справа пришли в движение с различными скоростями v_1, v_2 .

I.2. *Упругий удар в случае неравных масс.* Допустим, что последняя масса m меньше остальных масс. Пусть слева ударяет масса M со скоростью v_0 . Показать, что, в силу законов сохранения энергии и импульса, *невозможно*, чтобы в движение пришла *только одна масса m* . Допустим, далее, что справа приходят в движение только две массы; каковы будут при этом их скорости?

I.3. *Упругий удар в случае неравных масс.* Последняя масса справа M' больше остальных масс. Сделав те же допущения, что и в задаче 2, нужно, однако, учесть, что предпоследняя масса справа передает свой импульс влево. Каковы скорости массы M' и первой массы M , расположенной на левом конце прямой? Что произойдет, если масса M' очень велика?

I.4. *Неупругое соударение электрона с атомом.* Электрон, обладающий массой m и скоростью v , ударяется о покоящийся атом массы M . При этом атом возбуждается, т.е. переходит из основного состояния в более высокое энергетическое состояние (разность соответствующих энергетических уровней равна W). Какова минимальная начальная скорость v_0 электрона, необходимая для этого возбуждения атома, если удар центральный?

Находим квадратные уравнения отдельно для конечной скорости электрона v и атома V . Из требования вещественности квадратного корня, входящего в решения этих уравнений, определяем минимальную величину v_0 . Эта величина несколько больше (впрочем, ввиду соотношения масс $\frac{M}{m} > 2000$, это превышение ненаблюдаемо мало), чем можно было бы ожидать, исходя

¹Рекомендуется изучающему эту книгу самому произвести опыты, описанные в задачах **I.1.—I.3.**, с помощью монет на гладкой поверхности или упругих шаров, нанизанных на нить таким образом, чтобы в состоянии покоя они соприкасались.

только из закона сохранения энергии, т. е. требуя, чтобы начальная кинетическая энергия электрона была не меньше W .

Если же ударяющая частица имеет такую же (или приблизительно такую же) массу, как ударяемая частица, то величина минимально необходимой энергии получается вдвое больше (или приблизительно вдвое больше), чем нужно было ожидать по закону сохранения энергии.

1.5. Ракета для полета на Луну. Ракета с непрерывным истечением пороховых газов летит вертикально вверх. Скорость истечения газов относительно ракеты a и масса вытекающих в секунду пороховых газов $\mu = -\dot{m}$ предполагаются постоянными во времени. Движение совершается без трения при постоянном ускорении силы тяжести g . Составить уравнение движения и проинтегрировать его, считая начальную скорость ракеты u поверхности Земли равной нулю. На какой высоте будет находиться ракета через $t = 10; 30; 50$ сек, если $\mu = \frac{1}{100}$ начальной массы m_0 и $a = 2000$ м/сек?

1.6. Падение водяной капли в насыщенной атмосфере. Шарообразная водяная капля падает без трения под влиянием силы тяжести в атмосфере, насыщенной водяными парами. Пусть в начале движения ($t = 0$) ее радиус $= c$, а ее скорость $= v_0$. Вследствие конденсации, капля испытывает непрерывное приращение массы, пропорциональное ее поверхности, и, следовательно, приращение радиуса, пропорциональное времени. Проинтегрировать дифференциальное уравнение движения, введя r вместо t в качестве независимой переменной, и доказать, что в случае $c = 0$ скорость равномерно нарастает со временем.

1.7. Падающая цепь. Свернутая цепь лежит на краю стола, причем в начале одно звено цепи неподвижно свешивается со стола. Звенья цепи по одному вовлекаются в движение; трение не принимается во внимание. Теорема живых сил (в ее обычной форме) в рассматриваемом случае не является интегралом уравнения движения. Здесь в балансе энергии нужно учесть, согласно теореме Карно, потерю энергии при ударе.

1.8. Падающий канат. Канат длиной l соскальзывает с неподвижной горизонтальной подставки, с которой к началу движения свешивался отрезок каната длиной x_0 ; x — длина вертикально висящей части каната в момент времени t . Канат не должен оказывать сопротивления изгибу. Показать, что закон сохранения энергии в форме $T + V = \text{const}$ является интегралом уравнения движения.

1.9. Ускорение Луны под действием земного притяжения. Расстояние Луны от Земли составляет приблизительно 60 земных радиусов. Орбиту Луны считаем круговой; время обращения полагаем равным 27 суткам 7 часам 43 минутам. Отсюда можно определить ускорение Луны по направле-

нию к Земле (центростремительное ускорение). Сравнение этого ускорения с ускорением, вычисленным из закона всемирного тяготения Ньютона, явилось первым подтверждением правильности этого закона.

I.10. *Момент силы как векторная величина.* Пусть в прямоугольной системе координат (x, y, z) точка приложения силы \mathbf{F} дана радиусом-вектором \mathbf{r} . Показать, что момент силы \mathbf{F} относительно начала координат системы при переходе к другой системе отсчета (x', y', z') , полученной из первой путем поворота, преобразуется как вектор, т. е. так же, как \mathbf{r} (x, y, z) . При этом предполагаем, что рассматриваемые системы координат являются обе либо правыми, либо левыми.

I.11. *Годограф движения планеты.* Как следует из уравнений (6.5), при $A = 0$ годограф движения планеты определяется уравнениями:

$$\begin{aligned}\xi &= \dot{x} = -\frac{GM}{C} \sin \varphi, \\ \eta &= \dot{y} = +\frac{GM}{C} \cos \varphi + B\end{aligned}$$

(M — масса Солнца, C — постоянная площадей, φ — истинная аномалия, ср. рис. 6). Показать, что орбита представляет собой гиперболу или эллипс, в зависимости от того, находится ли «полюс» $\xi = \eta = 0$ годографа вне или внутри последнего, и охарактеризовать предельные случаи параболы и окружности также в зависимости от положения этого полюса.

I.12. *Траектории параллельного пучка электронов в поле иона и огибающая этих траекторий.* На покоящийся ионизированный атом A (заряд E , масса M) последовательно (во времени) падает из бесконечности параллельный пучок электронов (заряд e , масса m) со скоростью v_0 . В какую окрестность атома вообще не могут попасть электроны, если знаки зарядов e и E одинаковы?

Примем направление падающих частиц за ось и будем рассматривать вопрос о движении электронов как плоскую задачу, лучше всего, исходя из уравнения траектории частицы в полярных координатах с A в качестве полюса системы координат и фокуса гиперболической траектории. Границей искомой области будет огибающая всех траекторий. Ввиду того, что $M \gg m$, ион A может рассматриваться как неподвижный.

Показать, что если заряды e и E имеют противоположные знаки, то хотя условия огибания и дают (кажущимся образом) ту же границу искомой области, но эта граница не имеет физического смысла.

I.13. *Эллиптическая траектория в поле центральной силы, прямо пропорциональной расстоянию.* Пусть масса m находится под действием силы,

направленной к неподвижной точке O (центральной силы)

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$$

($\mathbf{r} = \overrightarrow{Om}$; $k = \text{const}$). Показать, что для движения массы m справедливы следующие три закона:

- 1) m описывает эллипс с центром в точке O .
- 2) Радиус-вектор \mathbf{r} в равные промежутки времени описывает равные площади.
- 3) Время обращения T не зависит от формы эллиптической траектории, а зависит только от закона силы, т. е. от k и массы m .

1.14. *Расщепление ядра атома лития* (Кирхнер, 1933 г.). Если ядро атома водорода (протон, масса m_p) со скоростью v_p попадает в ядро Li^7 (литий, атомный вес 7), то последнее расщепляется на две альфа-частицы (масса $m_\alpha = 4m_p$), которые разлетаются почти (но не точно) в диаметрально противоположных направлениях. Для случая, когда альфа-частицы разлетаются с равными скоростями симметрично относительно направления «удара», вычислить угол 2φ их разлета. При этом нужно принять во внимание, что, кроме кинетической энергии E_p протона, в рассматриваемом случае фигурирует еще энергия W , освобождающаяся при расщеплении и определяемая дефектом массы, причем W гораздо больше, чем E_p . Эта энергия W также передается альфа-частицам. В окончательные формулы для $\cos \varphi$ входят, кроме масс m_p и m_α , кинетическая энергия протона E_p и энергия W .

В принятых в атомной физике единицах энергии $W = 14 \cdot 10^6 \text{ eV}$ (электрон-вольт). Как велики были скорость v_α и угол 2φ в опыте, в котором кинетическая энергия протона $E_p = 0,2 \cdot 10^6 \text{ eV}$?

1.15. *Центральное соударение нейтронов с атомными ядрами; действие парафинового блока.* Нейтроны лишь весьма слабо тормозятся свинцовой пластиной толщиной в 50 см, в то же время они полностью задерживаются слоем парафина в 20 см. Это объясняется тем, что при центральном ударе кинетическая энергия нейтрона (масса $m = 1$) полностью передается одному из водородных ядер парафина (масса протона $M_1 = 1$), тогда как ядру свинца (масса $M_2 = 206$) не передается сколько-нибудь заметная энергия. Построить кривую зависимости кинетической энергии, приобретаемой первоначально покоящимся атомным ядром (масса M) при центральном соударении с нейтроном (масса m), от величины отношения $\frac{M}{m}$.

1.16. *Уравнение Кеплера.* Временной ход процесса движения планеты по ее орбите определяется в дифференциальной форме законом площадей. Для того чтобы получить закон движения в конечной форме, можно, по Кеплеру, поступить следующим образом (рис. 55).

На большой оси кеплерова эллипса как на диаметре строится окружность. Планете, находящейся в момент t в точке E , сопоставляется на этой окружности точка K , имеющая в системе координат, совпадающей с главными осями эллипса, ту же абсциссу, что и точка E . Точка E задается полярными координатами r, φ (полюс S), тогда как точка K , задается полярными координатами a, u (полюс M). Таким образом, к истинной аномалии φ добавляется эксцентрисическая аномалия u . (Мы отсчитываем, как в тексте, обе эти аномалии от афелия в направлении движения, в отличие от астрономов, отсчитывающих их от перигелия, конечно, также в направлении движения планеты.)

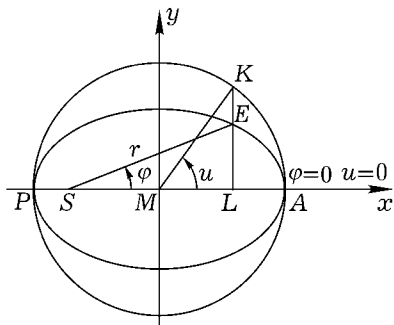


Рис. 55. Кеплерово построение средней аномалии u и ее связь с истинной аномалией φ

Координаты x и y планеты E можно выразить, с одной стороны, через r, φ и, с другой стороны, известным образом, через полуоси эллипса и эксцентрисическую аномалию u , так что заданием точки K определяется также и точка E . Тогда процесс движения точки K , по окружности будет происходить согласно знаменитому уравнению Кеплера:

$$nt = (u - \varepsilon \sin u).$$

Здесь ε означает численный эксцентриситет эллиптической орбиты, а $n = \frac{\sqrt{GM}}{a^3} = \frac{C}{ab}$, где a, b — полуоси эллипса, G — постоянная тяготения, M — масса Солнца, C — постоянная площадей.

Для вывода уравнения Кеплера нужно исходить из уравнения эллипса в полярных координатах, беря S за полюс и радиус-вектор SA (Солнце — афелий) — за полярную ось [«параметр» $p = a(1 - \varepsilon^2)$]:

$$r = \frac{p}{(1 - \varepsilon \cos \varphi)}.$$

Если мы с помощью указанных выше формул преобразования введем u вместо φ , то получим уравнение:

$$r = a(1 + \varepsilon \cos u).$$

Дифференцируя оба приведенных выше уравнения, исключая r и φ , а также используя закон площадей и соотношения (6.8), мы, в конце концов, путем интегрирования получим уравнение Кеплера; при этом надо еще условиться отсчет времени начинать с афелия.

Задачи к главе II

II.1. *Неголономные связи при качении колеса.* Колесо с острыми краями (радиуса a) катится без скольжения по шероховатому плоскому основанию (например, обруч на гладкой мостовой). Положение колеса в каждый данный момент времени определяется заданием следующих величин:

1) координат x , y точки касания колеса с основанием в прямоугольной системе координат x , y , z , плоскость xy которой совпадает с плоскостью основания,

2) угла ϑ между осью колеса и осью z ,

3) угла ψ , образованного касательной (линией пересечения плоскости колеса с плоскостью основания) и осью x ,

4) угла φ между радиусом колеса, проведенным в мгновенную точку касания, и произвольным, но фиксированным радиусом; этот угол можно отсчитывать, например, в направлении вращения.

Таким образом, катящееся колесо имеет пять степеней свободы в конечной области. Эта подвижность колеса, однако, ограничивается условием чистого качения (без скольжения), вызванного трением сцепления между колесом и основанием; действительно, при качении колеса в мгновенном направлении путь, пройденный вдоль касательной, должен быть равен $\delta s = a \delta \varphi$. Проектируя на оси, получим следующие условия связи для перемещений δx , δy и $\delta \varphi$:

$$\delta x = a \cos \psi \delta \varphi, \quad \delta y = a \sin \psi \delta \varphi. \quad (1)$$

Следовательно, в бесконечно малой области катящееся колесо имеет только три степени свободы.

Показать, что условия (1) не могут быть сведены к уравнениям, связывающим координаты. Для этого нужно доказать, что существование соотношений $f(x, y, \varphi, \psi)$ [ведь ϑ не входит в (1)] одновременно с условиями (1) ведет к противоречию.

II.2. *Приближенный расчет маховика одноцилиндровой поршневой пары машины двойного действия* (см. также § 9).

(«Двойное действие» означает, что пар попеременно подается по обе стороны поршня, так что работа производится как при прямом, так и при обратном ходе поршня.)

Если мы для простоты примем, что давление пара во время каждого хода поршня остается неизменным (паровая машина без расширения), а длину шатуна положим бесконечной, то за время половины оборота (от переднего до заднего мертвого положения кривошипа, т. е. между моментами нахождения поршня у соответственных оснований цилиндра) крутящий момент M , передаваемый поршнем на вал, меняется в зависимости от угла поворота

кривошипа φ согласно формуле

$$M = M_0 \sin \varphi$$

[ср. формулу (9.5)]. Здесь M_0 — постоянная; угол φ отсчитывается от заднего мертвого положения в направлении вращения. Во время второй половины хода (от переднего до заднего мертвого положения) крутящий момент при сделанных выше допущениях (именно: 1) машина двойного действия, 2) отсутствие расширения, 3) шатун бесконечной длины) изменяется по тому же самому закону; при этом угол φ нужно отсчитывать от переднего мертвого положения в направлении вращения.

Пусть нагрузка машины задача постоянным моментом W , соответствующим мощности N лощ. сил при n оборотах в минуту. Вследствие непостоянства вращающего момента M при неизменном моменте нагрузки W угловая скорость вращения вала колеблется между наибольшим значением ω_{\max} и наименьшим значением ω_{\min} около среднего значения ω_m , которое приблизительно положим равным

$$\omega_m = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2}.$$

Назначение маховика состоит в том, чтобы не допускать роста относительного колебания числа оборотов, так называемой «степени неравномерности»

$$\delta = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{\omega_m},$$

выше установленного предела. Каков должен быть момент инерции требуемого маховика, если пренебречь инерционными воздействиями остальных движущихся масс (поршня с поршневым штоком и крейцкопфом, шатуна, кривошипа)?

II.3. *Центробежная сила при увеличенной скорости вращения Земли.* С какой скоростью должна вращаться Земля для того, чтобы на экваторе сила тяжести и центробежная сила взаимно уничтожились? Какова была бы при этом продолжительность суток?

II.4. *Опыт Поггендорфа с весами.* На одной стороне коромысла весов укреплен (без трения) невесомый ролик; через ролик перекинута нить F , несущая на одном конце груз P , а другом, как в машине Атвуда для исследования законов падения, груз $P + p$ (p — малый довесок). Вначале груз p прикреплен нитью F к оси ролика. На другой стороне весов грузы уравновешиваются. Вслед за этим нить F пережигается. Требуется определить:

- С каким ускорением поднимаются или опускаются грузы P и $P + p$?
- Отклоняется ли при этом коромысло весов?
- Какое натяжение действует в нити F ?

II.5. *Ускоренно движущаяся наклонная плоскость.* Наклонная плоскость движется в вертикальном направлении, согласно заданной зависимости от времени. По этой наклонной плоскости скользит без трения тело массы m . Исследовать движение этого тела, в частности, для случая движения наклонной плоскости с постоянным ускорением $\pm g$.

II.6. *Центробежные моменты при равномерном вращении несимметричного тела вокруг оси.* Несимметричное тело равномерно вращается вокруг оси, концы которой A и B находятся в подшипниках. Какие реакции A и B возникают в подшипниках? Определить эти реакции по принципу Даламбера показать, что они обусловлены приложенной в центре тяжести равнодействующей центробежной силы и результирующим моментом центробежных сил отдельных элементов массы.

Реакции, обусловленные только весом тела, известны (стр. 77) и поэтому их можно здесь не рассматривать.

II.7. *Теория игрушки йо-йо¹.* На дискообразном теле (масса M , момент инерции Θ) сделан глубокий, симметричный относительно его средней плоскости, паз (имеется в виду средняя плоскость, перпендикулярная к оси диска) Через этот паз на ось диска (радиуса r) намотана нить, верхний конец которой придерживается. Натянув нить, отпускают тело. Опускаясь, тело в то же время ускоренно вращается до тех пор, пока не размотается вся нить. В то время, как нить вновь наматывается в обратном направлении, тело поднимается, замедляясь в своем вращении, и т. д. Определить натяжение нити: а) при опускание тела, б) при подъеме тела.

Радиус r считаем столь малым по сравнению с расстоянием оси от верхнего конца нити, что нить можно все время рассматривать как вертикальную.

II.8. *Отрыв материальной точки от шаровой поверхности, по которой она движется.* По верхнему полушарию движется материальная точка; ее начальное положение z_0 и начальная скорость v_0 произвольны; однако начальная скорость v_0 направлена по касательной к поверхности шара. Движение происходит без трения под действием силы тяжести. На какой высоте произойдет отрыв материальной точки от поверхности шара?

Задачи к главе III

III.1. *Сферический маятник в случае бесконечно малых отклонений.* В то время как у сферического маятника вершины траектории, вообще говоря, продвигаются вперед, они должны быть неподвижными при достаточ-

¹По своей идее эта игрушка не отличается от хорошо известного маятника Максвелла. (Прим. ред.)

но малых отклонениях, в соответствии с тем обстоятельством, что здесь мы имеем дело с гармоническим движением по эллипсу. Оценить, в каком порядке исчезает продвижение вершины траектории $\Delta\varphi$ с уменьшением площади эллипса.

III.2. *Положение резонансного максимума при вынужденном затухающем колебании.* При вынужденном затухающем колебании максимум амплитуды колебания лежит не при $\omega = \omega_0$, как в случае незатухающего колебания, а при несколько меньшем значении ω , зависящем от величины затухания (ср. рис. 33). Вывести указанную на рис. 33 максимальную величину $|C|$. Показать, с другой стороны, что максимум амплитуды скорости $|C|\omega$ (и, соответственно, среднего по времени значения кинетической энергии) находится в точности при $\omega = \omega_0$.

III.3. *Процесс включения гальванометра.* Гальванометр соединен через выключатель с источником постоянного тока постоянной электродвижущей силы E . В момент $t = 0$ производится включение; через достаточное время устанавливается отклонение гальванометра α_∞ . Как происходит переход от начального положения покоя $\alpha = 0$, $\dot{\alpha} = 0$ к конечному положению $\alpha = \alpha_\infty$?

Здесь нужно учесть, что на гальванометр с моментом инерции Θ , кроме внешнего вращающего момента, пропорционального силе электрического тока (а, тем самым, и величине э.д.с.), оказывает тормозящее действие: 1) момент затухания, пропорциональный угловой скорости, и 2) момент упругих сил в подвесе, пропорциональный отклонению α . Величина ρ характеризует коэффициент пропорциональности в выражении момента затухания, а ω_0^2 — соответствующий коэффициент в выражении момента упругих сил.

При этом нужно различать и графически представить случаи:

- а) слабого затухания ($\rho < \omega_0$),
- б) аperiодический предельный случай ($\rho = \omega_0$),
- в) сильного затухания ($\rho > \omega_0$).

III.4. *Маятник, точка подвеса которого движется заданным образом.*

а) Материальная точка висит на нерастяжимой нити и совершает незатухающие колебания под действием силы тяжести. Точка подвеса движется прямолинейно в горизонтальном направлении по некоторому произвольному закону [перемещение $\xi = f(t)$].

Каковы будут уравнения движения системы (нить невесома)? Искомые уравнения выводятся из принципа Даламбера или из уравнений Лагранжа первого рода.

Уравнения движения значительно упрощаются, если перейти к случаю малых колебаний, а, следовательно, сохранить только члены первого порядка.

Если, кроме того, принять, что перемещение точки подвеса изменяется во времени по гармоническому закону, то уравнения движения могут

быть просто проинтегрированы. Показать, что при установившемся движении (т. е. после того, как благодаря обычно непринятому во внимание затуханию, способствующему переходу к установившемуся движению, прекратились собственные колебания маятника) точка подвеса и масса m в «дорезонансной» области частот движутся в одинаковом направлении, а в «зарезонансной» области — в противоположных направлениях.

б) Соответственно рассмотреть случай вертикального, в частности, равномерно ускоренного перемещения η точки подвеса. Каков будет в этом случае период колебания, если точка подвеса перемещается с ускорением $\pm g$?

III.5. Легко выполняемая модель симпатических маятников (рис. 56). Между двумя неподвижными опорами A, B (угловое железо) натянута невесомая упругая гибкая проволока. Натяжение S проволоки вызывается грузом G , прикрепленным к свисающему концу проволоки. Величину груза можно менять. В точках C и D , разделяющих отрезок AB на три примерно равные части, бифилярно подвешены два маятника, так что они могут колебаться почти строго трансверсально в плоскости, перпендикулярной к плоскости чертежа. (На рисунке бифилярные подвесы, каждый в отдельности, схематично представлены длинами маятников.) Увеличивая G , можно сделать связь между обоими маятниками более слабой (а не более сильной!). В дальнейшем мы будем считать связь слабой, т. е. силу S большей по сравнению с весами маятников. Углы отклонения маятников от вертикали φ_1 и φ_2 предполагаем малыми, так что (в отношении обозначений ср. рис. 56; 3' и 4' означают положения, противоположные положениям 3 и 4 точек подвеса C и D):

$$\sin \varphi_1 = \varphi_1 = \frac{x_1 - x_2}{l_1}, \quad \cos \varphi_1 = 1;$$

$$\sin \varphi_2 = \varphi_2 = \frac{x_2 - x_4}{l_2}, \quad \cos \varphi_2 = 1;$$

Пренебрегая слагающей малых колебаний по оси y , имеем для m_1 и, соответственно, для m_2 :

$$m_1 g = S_1 \cos \varphi_1 = S_1, \quad m_2 g = S_2 \cos \varphi_2 = S_2,$$

$$m_1 \ddot{x}_1 = -S_1 \sin \varphi_1 = \frac{m_1 g}{l_1} (x_3 - x_1), \quad (1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -S_2 \sin \varphi_2 = \frac{m_2 g}{l_2} (x_4 - x_2), \quad (2)$$

В точках C и D натяжения S_1 и, соответственно, S_2 должны находиться в равновесии с натяжением S , которое, со своей стороны, изменяется силами S_1 и S_2 лишь на пренебрежимо малые величины. Это дает еще два

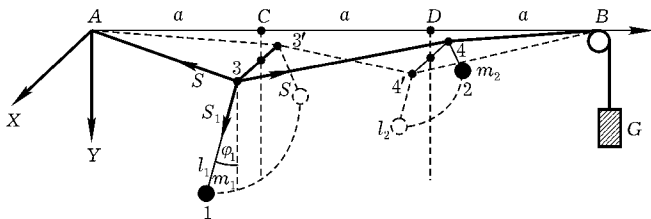


Рис. 56. Проволока $ACDB$ натянута с помощью груза G . Под действием веса маятников и их сил инерции проволока деформируется в ломаную $A34B$ или при отклонении маятников в другую сторону — в ломаную $A3'4'B$. Маятники 1 и 2 (длины l_1 и l_2) подвешены бифилярно и поэтому качаются перпендикулярно к плоскости чертежа (бифилярные подвесы на рисунке не изображены); φ_1 и φ_2 — углы между маятниками и вертикальной линией

условия, связывающие x_1, x_2, x_3, x_4 . Выразив из этих условий x_3 и x_4 и подставив в уравнения (2), получим совместные дифференциальные уравнения симпатических маятников. Убедиться в том, что эти уравнения совпадают с уравнениями (20.10).

III.6. Успокоитель колебаний. С системой (масса M , постоянная упругой силы K), могущей колебаться в направлении оси x , связана пружиной (постоянная которой равна k) масса t таким образом, что и она может колебаться в направлении оси x . При воздействии внешней силы $P_x = c \cos \omega t$ на массу M последняя не должна двигаться. Каким условиям должна при этом удовлетворять система (t, k) ?

III.7. Баллистический маятник.

а) Баллистический маятник служит для измерения скорости полета снаряда. В своей ранней конструкции (Робинс, 1742) этот маятник состоял из ящика, наполненного мягким материалом (деревянными опилками или песком; и подвешенного к горизонтальной оси; с одной стороны этот ящик открыт. Снаряд застревает в мягком материале, так что удар можно считать неупругим. Измеряется отклонение маятника α ; по величине этого отклонения, зная параметры маятника (его массу M , момент инерции Θ , расстояние s центра тяжести от оси вращения), массу снаряда t и место попадания снаряда (характеризуемое расстоянием α от оси вращения), можно определить скорость v , с которой снаряд попал в маятник. Внести в окончательную формулу для v период колебания τ маятника или длину l соответствующего математического маятника.

б) На каком расстоянии от оси маятника должно находиться место падения снаряда для того, чтобы ось маятника не испытала при ударе дополнительной нагрузки?

Задачи к главе IV

IV.1. *Моменты инерции плоского распределения масс.* Для каждого распределения масс в плоскости момент инерции относительно «полярной» оси (перпендикулярной к плоскости) равен сумме моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных «экваториальных» осей (расположенных в плоскости диска). Рассмотреть также частный случай кругового диска.

IV.2. *Вращение волчка вокруг своих главных осей.* В случае несимметричного волчка (см. рис. 46а, б) вращение вокруг главных осей, соответствующих наибольшему или наименьшему моментам инерции, является устойчивым, а вращение вокруг оси, соответствующей среднему главному моменту, — неустойчивым. Для аналитического доказательства этого предложения нужно исходить из уравнений Эйлера и принять угловую скорость вращения вокруг оси, равной $p = \text{const} = p_0$. Угловые скорости вращения q и r вокруг остальных двух главных осей инерции, которые вначале равны нулю, под влиянием внешнего возмущения принимают отличные от нуля значения. Если предположить, что возмущение мало, то из первого уравнения Эйлера следует, что p в первом приближении остается неизменным и равным $p + 0$. Из остальных двух уравнений получаем для q и r систему двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Полагая $q = ae^{\lambda t}$ и $r = be^{\lambda t}$, где a и b произвольные константы, получаем квадратное уравнение для λ , из рассмотрения которого и вытекает высказанное нами выше утверждение.

IV.3. *Удары «высокие» и «низкие», «с накатом» и «с оттяжкой» в бильярдной игре.* Горизонтальным кием ударяют бильярдный шар в его меридиональной плоскости, т. е. без «эффе». На какой высоте h над центром шара следует сообщить удар, чтобы имело место чистое качение (без скольжения)? Развить теорию «высоких» и «низких» ударов с учетом трения скольжения между шаром и сукном стола. Насколько возрастает скорость центра тяжести шара в течение периода трения при высоком ударе и насколько она уменьшается при низком ударе? По истечении какого времени имеет место лишь чистое качение? С помощью этих же методов можно объяснить и соотношения при ударах «с накатом» и «с оттяжкой».

IV.4. *Параболическое движение бильярдного шара.* Как нужно ударить шар для того, чтобы направление поступательного движения его центра тяжести не было перпендикулярным оси вращения? Показать, что направление

силы трения остается неизменным, пока шар скользит. Какова траектория центра шара? Через какое время наступает чистое качение?

Задачи к главе V

V.1. *Относительное движение на плоскости.* Допустим, что плоскость вращается с переменной угловой скоростью ω вокруг неподвижной точки O (ось вращения — нормаль к плоскости в точке O).

Какие добавочные силы, помимо центробежной силы, нужно приложить к материальной точке, чтобы уравнения движения ее во вращающейся плоскости приняли ту же форму, что и в инерциальной системе неподвижной плоскости? Целесообразно ввести комплексные переменные $x + iy$ в неподвижной плоскости и $\xi + i\eta$ во вращающейся плоскости.

V.2. *Движение вращающейся материальной точки по вращающейся прямой.* Материальная точка движется (без трения) в вертикальной плоскости по прямой, которая в свою очередь вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной горизонтальной оси. Выразить движение материальной точки по вращающейся прямой в функции времени [$r = r(t)$ — расстояние от оси вращения]. Показать, что реакция связи (давление на направляющую) и взятая вдоль нее компонента земного притяжения как раз уравновешиваются кориолисовой силой.

V.3. *Сани как простейший пример неголономной системы.* [По Каратеодори: *Z. angew. Math. Mech.*, **13**, 71 (1933).] Сани рассматриваются как жесткая плоская система с тремя степенями свободы в конечной области и с одной степенью свободы в бесконечно малой окрестности (ср. задачу II.1.: катящееся колесо обладало пятью степенями свободы в конечной области и тремя в бесконечно малой).

Трение скольжения по снегу можно не принимать во внимание (или, например, можно представить себе, что оно постоянно уравновешивается силой тяги лошади). Однако нужно учесть трение R , которое оказывает снежная колея на полозья в перпендикулярном к ним направлении; эта сила трения препятствует всякому боковому движению полозьев. Сосредоточим эту (распределенную) силу трения в какой-либо одной точке.

Неподвижно свяжем с санями систему координат ξ, η . Пусть ось ξ проходит по средней линии полозьев через центр тяжести саней S (его координаты $\xi = a, \eta = 0$), а ось η — через точку приложения силы трения R . Пусть горизонтальная поверхность снега является плоскостью x, y . Введем обозначения: φ — угол между осями ξ и x , $\omega = \dot{\varphi}$ — мгновенная угловая скорость вращения саней вокруг вертикали; M — масса, Θ — момент инер-

ции саней относительно вертикали, проходящей через центр тяжести; u, v — компоненты скорости точки O ($\xi = \eta = 0$) по осям ξ и η .

а) Вывести по методу комплексной переменной (см. задачу V.1) систему трех дифференциальных уравнений для величин u, v, ω , беря R за внешнюю силу.

б) Упростив эти уравнения путем введения неголономной связи $v = 0$, определить из них R .

в) Проинтегрировать эти уравнения, введя вместо угла поворота φ пропорциональный ему вспомогательный угол.

г) Убедиться в том, что кинетическая энергия саней остается постоянной (сила R действует «беззаттно», т. е. не производит работы).

д) Показать, что при надлежащем выборе начала отсчета времени траектория точки O в плоскости xy имеет при $t = 0$ острие, а при $t \rightarrow \pm\infty$ стремится к асимптотам, как это показано на рис. 57, заимствованной у Каратеодори.

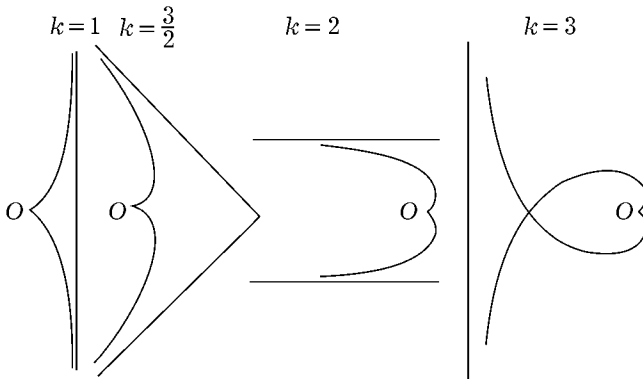


Рис. 57. Траектория саней по Каратеодори при различных значениях k

Задачи к главе VI

VI.1. *Пример на применение принципа Гамильтона.* Вычислить величину интеграла Гамильтона в пределах $t = 0$ до $t = t_1$: а) для случая действительного свободного падения материальной точки: $z = \frac{1}{2}gt^2$; б) для случаев двух фиктивных движений $z = ct$ и $z = at^3$, где постоянные c и a , в соответствии с условием относительно допустимых траекторий, должны быть

определены таким образом, чтобы начальное и конечное положения совпадали с действительными положениями. Показать, что величина интеграла для истинного движения а) меньше, чем для фиктивных движений б).

VI.2. *Относительное движение в плоскости и движение по вращающейся прямой.* Задачи V.1. и V.2. решить по методу Лагранжа.

VI.3. *Свободное падение на вращающейся Земле и маятник Фуко.* Убедиться в том, что и эти задачи можно решить по методу Лагранжа, не зная законов относительного движения. Этот метод интересен и по своей идее более прост, чем метод, изложенный в гл. V; однако он требует тщательного учета многочисленных малых членов, причем пренебрежения, связанные с большим значением земного радиуса и медленностью вращения Земли, могут быть допущены лишь после того, как будут выполнены операции дифференцирования

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial q}.$$

Нужно исходить из обычных полярных координат r, ϑ, ψ , причем r отсчитывается от центра Земли. Эти координаты нужно сравнить с координатами ξ, η, ζ (см. рис. 49). Если R — радиус Земли, а ϑ_0, ψ_0 — координаты точки, над которой находится начальная точка свободного падения или точка подвеса маятника, то координаты r, ϑ, ψ и ξ, η, ζ падающей или качающейся материальной точки m связаны соотношениями:

$$\xi = R(\vartheta - \vartheta_0), \quad \eta = R \sin \vartheta (\psi - \psi_0), \quad \zeta = r - R, \quad (1)$$

где

$$\psi_0 = \omega t, \quad \vartheta_0 = \frac{\pi}{2} - \varphi, \quad (2)$$

$\frac{\pi}{2} - \varphi$ — дополнительный угол географической широты.

Отсюда следует:

$$\dot{\xi} = R\dot{\vartheta}, \quad \dot{\eta} = R \sin \vartheta (\dot{\psi} - \omega) + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \eta \dot{\vartheta}, \quad \dot{\zeta} = \dot{r}$$

и обратно:

$$\begin{aligned} r\dot{\vartheta} &= \left(1 + \frac{\zeta}{R}\right)\dot{\xi}, \\ r \sin \vartheta \dot{\psi} &= \left(1 + \frac{\zeta}{R}\right)\dot{\eta} + \omega R \left(1 + \frac{\zeta}{R}\right) \sin \vartheta - \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \left(1 + \frac{\zeta}{R}\right) \frac{\eta}{R} \dot{\xi}, \\ \dot{r} &= \dot{\zeta}. \end{aligned} \quad (3)$$

Входящий сюда угол ϑ нужно, в соответствии с соотношением (1), рассматривать как функцию от ξ .

Эти величины надо подставить в выражение кинетической энергии

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\psi}^2),$$

которое вследствие этого становится функцией от ξ , $\dot{\eta}$, ζ , ξ , η , ζ . Отсюда можно, например, вычислить (если не учитываемые в дальнейшем члены обозначить через (...)):

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = m \left(1 + \frac{\zeta}{R}\right)^2 \dot{\xi} - m \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \left(1 + \frac{\zeta}{R}\right) \frac{\eta}{R} \left\{ \dots + \omega R \left(1 + \frac{\zeta}{R}\right) \sin \vartheta + \dots \right\} \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = m \ddot{\xi} - m \omega \cos \vartheta \dot{\eta} + \dots \quad (5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{1}{R} \frac{\partial T}{\partial \vartheta} = +m \omega \cos \vartheta \dot{\eta} + \dots \quad (6)$$

В качестве потенциальной энергии можно взять величину

$$V = mg(r - R) = mg\zeta. \quad (7)$$

Убедиться в том, что таким путем получаются уравнения (30.5) для случая свободного падения и уравнения (31.2) для случая маятника Фуко (из которых и вытекали полученные ранее результаты).

VI.4. «Маятникобразное» качение цилиндра по плоскому основанию. Пусть центр тяжести S неоднородного кругового цилиндра радиуса a находится на расстоянии s от его оси. Цилиндр катится под действием силы тяжести по горизонтальной плоскости. Масса цилиндра равна m , момент инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести параллельно оси цилиндра, равен Θ . Исследовать движение по методу Лагранжа, введя в качестве обобщенной координаты q угол φ поворота цилиндра вокруг его оси. При вычислении кинетической энергии поместить точку отсчета

а) в центре тяжести,

б) в (геометрическом) центре цилиндра и убедиться в том, что в обоих случаях получается одно и то же дифференциальное уравнение для φ .

По методу «малых колебаний» показать, что при наименьшем положении центра тяжести S имеет место устойчивое равновесие, а при наивысшем положении S — неустойчивое равновесие.

VI.5. Дифференциальная передача автомобиля. Для того чтобы ведущие колеса автомобиля не скользили при прохождении автомобиля по криволинейному пути, они должны вращаться с различной скоростью. Это осуществляется с помощью дифференциальной передачи (рис. 58). Мотор вращает ведущее колесо (Ω), с которым неподвижно скреплена ось A . Вокруг

этой оси может вращаться укрепленная на ней пара конических шестерен ω . Своими зубьями эта пара сцепляется с другой парой конических шестерен, по которой она катится при вращении оси A

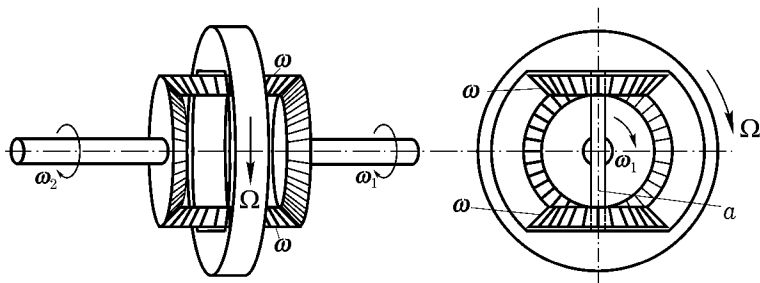


Рис. 58. Дифференциальная передача автомобиля; она же (по Больцману) может служить моделью индукционного взаимодействия двух цепей тока. Справа: вид вдоль оси задних колес автомобиля. Слева: вид на эту ось

Ось задних колес автомобиля разрезана посередине. На левый конец правой половины этой оси посажена коническая шестерня ω_1 , на правый конец левой половины оси — коническая шестерня ω_2 . Таким образом, обе половины оси задних колес могут вращаться с различными угловыми скоростями, причем, однако, они связаны между собой дифференциальной передачей.

Вывести кинематические соотношения между угловыми скоростями Ω , ω , ω_1 , и ω_2 . Далее, с помощью принципа виртуальной работы вывести условия равновесия между моментом M действующим на колесо Ω (движущий момент), и моментами M_1 , M_2 , приложенными к зубчаткам ω_1 , ω_2 .

Каково уравнение движения системы? Моменты инерции колес (ω_1), (ω_2) положим равными Θ_1 , Θ_2 , момент инерции пары колес ω относительно собственной оси — Θ , а относительно оси ведущего колеса (Ω) — Θ' . Моментом инерции Θ' колеса Ω пренебрегаем. Если вращение одного из задних колес ускоряется, например, вследствие уменьшения трения, то вращение другого заднего колеса замедляется (так же и в том случае, когда движущий его момент и момент трения остаются равными друг другу).

Указания к решению задач

Почти все численные расчеты, встречающиеся в задачах могут быть с достаточной степенью точности выполнены с помощью счетной линейки, которой мы и рекомендуем пользоваться при приближенных подсчетах.

I.1. Доказательство того, что должно быть $v_1 = v_2 = v$, можно провести алгебраическим или геометрическим путем. В последнем случае следует воспользоваться величинами v_1 и v_2 , как прямоугольными координатами на плоской диаграмме.

I.2. Скорость отлетающих масс m и M равна:

$$\frac{2M}{M+m} v_0 \quad \text{и, соответственно,} \quad \frac{M-m}{M+m} v_0.$$

I.3. Здесь сохраняют силу формулы задачи **I.2.**, но скорость первой массы направлена в противоположную сторону.

I.4. Нужно убедиться в том, что квадратное уравнение для V приводит к тому же минимальному значению v_0 , как и уравнение для v .

I.5. Дифференциальные уравнения, которые надо проинтегрировать, имеют вид:

$$\frac{dm}{dt} = -\mu,$$

$$\frac{d}{dt}(mv) - \mu a = -mg.$$

Из первого уравнения находим:

$$m = m_0 - \mu t.$$

Подставляя это значение во второе уравнение и интегрируя, получим:

$$v = \frac{\mu a t - m_0 g t + \frac{\mu g t^2}{2}}{m_0 - \mu t},$$

или

$$v = \frac{m_0 \left(a - \frac{g m_0}{2 \mu} \right)}{m_0 - \mu t} - \left(a - \frac{g m_0}{2 \mu} \right) - \frac{g t}{2}.$$

После вторичного интегрирования (z — высота над поверхностью Земли):

$$z = \frac{a m_0}{\mu} \left\{ \left(1 - \frac{\mu}{m_0} t \right) \lg \left(1 - \frac{\mu}{m_0} t \right) + \frac{\mu}{m_0} t \right\} - \frac{1}{2} g t^2. \quad (1)$$

Для малых t , пренебрегая высшими степенями t , получаем:

$$z = \left(\frac{\mu a}{m_0} - g \right) \frac{t^2}{2}. \quad (2)$$

Вычисление с помощью формулы (1) дает:

$$t = 10; \quad 30; \quad 50 \text{ сек.}$$

$$z = 0,54; \quad 5,65; \quad 18,4 \text{ км.}$$

1.6. Поскольку плотность равна единице, масса водяной капли будет $m = \frac{4\pi}{3}r^3$; следовательно, $dm = 4\pi r^2 dr$. С другой стороны, при конденсации (α — коэффициент пропорциональности) $dm = 4\pi r^2 \alpha dt$; следовательно, $dr = \alpha dt$. Переходя к переменной r , получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\alpha \frac{d}{dr}(r^3 v) = r^3 g.$$

Решение этого дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию $v = v_0$ при $r = c$, имеет вид:

$$v = \frac{g}{\alpha} \frac{r}{4} + \frac{c^3}{r^3} \left(v_0 - \frac{g}{\alpha} \frac{c}{4} \right).$$

При $c = 0$ получаем:

$$v = \frac{g}{\alpha} \frac{r}{4},$$

а при $v_0 = 0$,

$$v = \frac{g}{\alpha} \frac{r}{4} \left(1 - \frac{c^4}{r^4} \right).$$

1.7. Обозначим через x длину свешивающейся части цепи. Полагая массу, приходящуюся на единицу длины цепи, равной единице, получим следующее уравнение движения:

$$\frac{d}{dt}(x\dot{x}) = x\ddot{x} + \dot{x}^2 = gx.$$

Ввиду того, что интегрирование этого уравнения довольно сложно (после подстановки $x = \sqrt{u}$ приводит к эллиптическому интегралу), можно ограничиться выражением величин \dot{T} , \dot{V} , \dot{Q} (потеря энергии за единицу времени по теории Карно) через x , \dot{x} , \ddot{x} и показать, что, в силу уравнения движения, имеет место:

$$\dot{T} + \dot{V} + \dot{Q} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \dot{T} + \dot{V} \neq 0.$$

1.8. Уравнение движения имеет вид $l\ddot{x} = gx$. Это линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами можно проинтегрировать согласно (3.24б). В том, что закон сохранения энергии удовлетворяется, можно убедиться либо в его дифференциальной форме — путем рассмотрения уравнения движения, либо в его интегральной форме — рассматривая решение этого уравнения:

$$x = a(e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}), \quad \alpha^2 = \frac{g}{l}, \quad a = \frac{x_0}{2}.$$

1.9. Числовые данные задачи позволяют определить центростремительное ускорение Луны в m/sec^2 . Длину радиуса Земли можно при этом положить, в соответствии с определением метра, равной $r = \frac{2}{\pi} \cdot 10^7$ м; с другой стороны, из закона всемирного тяготения, исключая гравитационную постоянную G с помощью g (см. стр. 34), получаем для центростремительного ускорения величину $g/60^2$. Оба полученные таким образом числовые значения совпадают с достаточной степенью точности.

1.10. Применим формулы преобразования координат, как в (2.5), полагая, однако, $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 0$. Компоненты преобразованного момента M' получаются в виде выражений, линейных относительно компонент M , с коэффициентами, равными минорам матрицы преобразования. Последние удовлетворяют следующим соотношениям, справедливость которых вытекает из условий ортогональности:

$$\rho\gamma_1 = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}, \quad \rho\gamma_2 = \begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_1 \\ \beta_3 & \beta_1 \end{vmatrix}, \dots$$

Здесь $\rho = \pm 1$, в зависимости от того, можно ли путем вращения совместить преобразованную систему с исходной или нет (правая и левая системы).

1.11. Из формул (6.8) (стр. 65) непосредственно следует:

$$\varepsilon = \frac{B}{\frac{GM}{C}}.$$

Следовательно, для эллипса ($\varepsilon < 1$) $\frac{GM}{C} > B$, для гиперболы ($\varepsilon > 1$) $\frac{GM}{C} < B$. Но $R = \frac{GM}{C}$ есть радиус окружности годографа, а B — расстояние центра от полюса. Отсюда непосредственно вытекает утверждение задачи. Характеристики предельных случаев окружности и параболы дает следующая таблица, в которой

$$v_0 = \frac{GM}{C} - B$$

означает скорость планеты в перигелии.

Орбита планеты	ε	B	Годограф	v_0
Окружность	$= 0$	$= 0$	Центр в полюсе	$= GM/C$
Эллипс	< 1	$< R$	Полюс лежит внутри годографа	$GM/C < v_0$ $< 2GM/C$
Парабола	$= 1$	$= R$	Годограф проходит через полюс	$= 2GM/C$
Гипербола	> 1	$> R$	Полюс лежит вне годографа	$> 2GM/C$

1.12. В дифференциальных уравнениях (6.4) нужно заменить GM на $\pm \frac{eE}{m}$, причем верхний знак (притяжение) соответствует случаю положительного иона, а нижний знак (отталкивание) — случаю отрицательного иона. Тогда уравнения (6.5) (при том же значении φ , что и на рис. 6) дадут при $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$A = \pm \frac{eE}{m} C, \quad B = -v_0,$$

так как

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = -v_0.$$

При этом уравнения (6.6) принимают вид

$$\frac{1}{r} = \pm \frac{eE}{m_0 C^2} (1 - \sin \varphi) - \frac{v_0}{C} \cos \varphi. \quad (1)$$

Так как C меняется от траектории к траектории в зависимости от расстояния начальной прямолинейной траектории от оси y , то это уравнение определяет семейство кривых. Для того чтобы получить огибающую этого семейства, нужно продифференцировать уравнение (1) по C . Исключив C из продифференцированного и исходного уравнения (1), получим для искомой огибающей

$$x^2 = p^2 - 2pg, \quad p = \pm \frac{4eE}{m_0 v_0^2}. \quad (2)$$

Нужно принять во внимание, что траектория электрона всякий раз представляет собой одну ветвь гиперболы, тогда как уравнение (1) определяет обе ветви, и убедиться (проще всего, изобразив рассматриваемое семейство кривых графически) в том, что только в случае отталкивания уравнение (2) определяет огибающую истинных траекторий электронов.

1.13. Проще всего воспользоваться методом гармонических колебаний (см. § 3, раздел 4). Поучительно, однако, убедиться и том, что методы, приведенные в § 6, также ведут к цели.

1.14. Рассматриваемый здесь ядерный процесс не является ни упругим, ни неупругим, а «сверхупругим» соударением, поскольку к первичной энергии E прибавляется ядерная энергия W . Кинетическую энергию альфа-частиц можно выразить в классической форме:

$$E_\alpha = \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2.$$

Исключая v_α из уравнений, выражающих законы сохранения энергии и импульса, получаем (в согласии с Кирхнером) для симметричного случая:

$$\cos \varphi = \sqrt{\frac{m_p}{2m_\alpha} \frac{E_p}{W + E_p}}.$$

1 электрон-вольт есть энергия, которую приобретает электрон ($e = 1,6 \cdot 10^{-20}$ электромагнитных единиц заряда) под действием разности потенциалов в один вольт ($1 V = 10^8$ электромагнитных единиц потенциала); следовательно, $1 eV = 1,6 \cdot 10^{-12}$ эрг.

Масса протона $m = 1,65 \cdot 10^{-24}$ г; следовательно, масса альфа-частицы $m = 6,6 \cdot 10^{-24}$ г. Последняя величина необходима для того, чтобы перейти от значения энергии E_α , первоначально выраженного в электрон-вольтах, а затем в эргах, к скорости v_α . Найденная таким образом величина v_α показывает, что применение классического выражения для E_α оправдано и что релятивистская поправка [формула (4.11)] неощутимо мала.

I.15. Из второй формулы (3.27) при $V_0 = 0$ и, например, $v_0 = 1$ непосредственно вычисляется кинетическая энергия $\frac{M}{2} V^2$ «ударяемой» частицы после соударения как функция $x = \frac{M}{m}$, в частности, ее максимум для $x = 1$ и ее малая ордината для $x = 206$. Последняя величина составляет всего только 10 промилле (т.е. 1% от первой).

Исходя из этого рассуждения, Ферми разработал в 1935 г. свой метод получения «тепловых» нейтронов, т.е. медленных нейтронов одинаковой скорости, которые, благодаря многократным соударениям, приходят в равновесие с протонами, содержащимися в парафине.

I.16. Координаты точки E суть

$$x = ML = a \cos u = SL - SM = r \cos \varphi - \varepsilon a, \quad (1a)$$

$$y = EL = r \sin \varphi = b \sin u. \quad (1b)$$

Уравнение эллипса, выраженное через r и φ , преобразуется к виду:

$$r = \varepsilon r \cos \varphi + p, \quad p = a(1 - \varepsilon^2). \quad (1)$$

Отсюда, подставляя величину $r \cos \varphi$ из (1a), получаем:

$$r = \varepsilon(a \cos u + \varepsilon a) + a(1 - \varepsilon^2) = a(1 + \varepsilon \cos u). \quad (2)$$

Дифференцирование уравнения (2) дает:

$$dr = -\varepsilon a \sin u du. \quad (3)$$

Дифференцируя уравнение (1), получаем:

$$\varepsilon \sin \varphi d\varphi = -p \frac{dr}{r^2}.$$

Отсюда

$$\frac{-p}{\varepsilon \sin \varphi} \dot{\varphi} = r^2 \dot{\varphi} = C \quad (\text{постоянная площадей}). \quad (4)$$

С помощью соотношений (16) и (3) это уравнение преобразуется к виду:

$$\frac{pa}{b} r \dot{u} = C.$$

Заменяя еще r по формуле (2), окончательно получим дифференциальное уравнение

$$(1 + \varepsilon \cos u) du = n dt, \quad (5)$$

$$n = \frac{Cb}{pa^2}. \quad (6)$$

Интегрирование уравнения (5) дает:

$$u - \varepsilon \sin u = nt.$$

Постоянная интегрирования обращается в нуль, так как при $t = 0$ u должно быть равно нулю. Величина nt называется «средней аномалией» (в астрономии она также отсчитывается от перигелия). Это название объясняется тем, что правая часть формулы (6) с помощью формулы (6.9) может быть приведена к виду $2\pi/T$.

II.1. Преобразуя выражение

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial f}{\partial \psi} \delta \psi,$$

согласно условию (1) данной задачи, получим

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} a \cos \psi + \frac{\partial f}{\partial y} a \sin \psi + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) \delta \varphi + \frac{\partial f}{\partial \psi} \delta \psi = 0.$$

Отсюда, поскольку $\delta \varphi$ и $\delta \psi$ могут быть в отдельности приравнены нулю,

$$\frac{\partial f}{\partial \psi} = 0, \quad (2)$$

$$a \frac{\partial f}{\partial x} \cos \psi + a \frac{\partial f}{\partial y} \sin \psi + \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0. \quad (3)$$

Последнее равенство справедливо для любого ψ и поэтому может быть продифференцировано по ψ . Принимая во внимание (2), получаем:

$$-a \frac{\partial f}{\partial x} \sin \psi + a \frac{\partial f}{\partial y} \cos \psi = 0 \quad (4)$$

и после вторичного дифференцирования по ψ :

$$a \frac{\partial f}{\partial x} \cos \psi + a \frac{\partial f}{\partial y} \sin \psi = 0. \quad (5)$$

Из (4) и (5) следует:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad (6)$$

Согласно (3), имеем также:

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0. \quad (7)$$

Из равенств (2), (6) и (7) следует, что никакого условия связи $f = 0$, содержащего x, y, φ, ψ , не существует и поэтому наша система является неголономной. (Доказательство Г. Гамеля — «Elementare Mechanik», 2. Aufl. Leipzig, 1922.)

II.2. Начертим диаграмму работы машины, т. е. кривую момента M и (горизонтальную) прямую момента W ; по оси абсцисс откладываем угол поворота кривошипа от 0 до π ; следует обратить внимание на то, что площади, заключенные между осью и соответственно линией M и прямой W , должны быть равны друг другу. Таким образом, получается соотношение между M_0 и W . Углы φ_2 и φ_1 , соответствующие ω_{\max} и ω_{\min} , получаются на диаграмме как абсциссы точек пересечения линий M и W : $\sin \varphi_1 = \sin \varphi_2 = \frac{2}{\pi}$, $\varphi_2 = \pi - \varphi_1$, $\varphi_1 = 39^\circ 33' = 0,69$ в дуговой мере. Определяем разность кинетических энергий маховика при углах φ_2 и φ_1 и выражаем ее через Θ , ω_m и δ . Из закона сохранения энергии, примененного к тому же интервалу углов, получаем выражение для искомого момента инерции Θ в виде:

$$\Theta = \frac{W}{\delta \omega_m^2} (\pi \cos \varphi_1 - \pi + 2\varphi_1) = \frac{0,66}{\delta \omega_m^2} W.$$

Введя

$$N = \frac{W\omega}{75} \text{ л.с.} \quad \text{и} \quad n = \frac{60}{2\pi} \omega \frac{\text{об.}}{\text{мин.}},$$

получаем (в технической системе единиц):

$$\Theta \sim 43\,400 \frac{N}{\delta n^3} \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{сек}^2.$$

II.3. Относительно величины земного радиуса см. задачу I. 9. Для вычисления продолжительности суток можно принять $\sqrt{8\pi} = 5$.

II.4. а) Если представить себе коромысло весов закрепленным, то нужно рассматривать только равновесие силы тяжести и сил инерции, действующих на ролик при его виртуальном вращении $\delta\varphi$ (уравнение моментов). Отсюда получается ускорение грузов \ddot{x} как малая часть величины g

б) Прибавляем виртуальное вращение коромысла весов. При этом нужно принять во внимание моменты сил инерции относительно оси вращения коромысла весов. Равновесие нарушается: коромысло отклоняется в сторону чашки весов до тех пор, пока падает груз p . При определении избыточного груза можно пренебречь диаметром ролика по сравнению с плечом коромысла весов. В этом пренебрежении можно также приравнять друг другу нагрузку чашки весов и нагрузку другого конца коромысла, вызванную весом и силами инерции.

II.5. Пусть уравнение наклонной плоскости имеет вид:

$$F(z, x, t) = z - ax - \varphi(t) = 0. \quad (1)$$

Здесь $a = \operatorname{tg} \alpha$ определяет постоянный угол α , образуемый наклонной плоскостью с горизонтом; $\varphi(t)$ — изменяющийся со временем отрезок, отсекаемый наклонной плоскостью на оси z . Уравнения Лагранжа первого рода (12.9) дают:

$$\ddot{x} = -\lambda a, \quad \ddot{z} = \lambda - g. \quad (2)$$

Для того чтобы определить λ , нужно дважды продифференцировать по t уравнение (1); при этом получаем:

$$\ddot{z} - a\ddot{x} = \ddot{\varphi}(t). \quad (3)$$

Подставляя выражение (2) в уравнение (3), получим λ , после чего интегрирование уравнений (2) легко выполняется. Начальные условия $\dot{x} = \dot{z} = 0$, $x = x_0$, $z = z_0$ при $t = 0$ дают:

$$\begin{aligned} x &= x_0 - \frac{a}{1+a^2} \left(\varphi(t) - \varphi(0) - \dot{\varphi}(0)t + g\frac{t^2}{2} \right), \\ z &= z_0 + \frac{1}{1+a^2} \left(\varphi(t) - \varphi(0) - \dot{\varphi}(0)t - ga^2\frac{t^2}{2} \right), \end{aligned}$$

Отсюда для $\ddot{\varphi} = +g$ получим:

$$x = x_0 - \sin 2\alpha g \frac{t^2}{2}, \quad z = z_0 + \cos 2\alpha g \frac{t^2}{2}$$

и для $\ddot{\varphi} = -g$:

$$x = x_0, \quad z = z_0 - g\frac{t^2}{2},$$

как и при свободном падении. Только при этом допущении λ равно нулю, в остальных случаях λ характеризует давление на скользящее по наклонной плоскости тело и обуславливает отличную от нуля работу связи.

Задачу можно решить, не вводя λ , с помощью принципа Даламбера. Ввиду того, что время не должно варьироваться (стр. 92), виртуальные перемещения, согласно (1), связаны соотношением $\delta z = a\delta x$. Тогда, согласно принципу Даламбера, имеет место уравнение:

$$\ddot{x} + (g + \ddot{z})a = 0.$$

Это уравнение вместе с уравнением (3) позволяет непосредственно вычислить \ddot{x} и \ddot{z} . На этом примере видно, что метод Даламбера прямее и проще приводит к цели, чем уравнения Лагранжа, преимущество которых, в свою очередь, заключается в возможности количественного определения возникающих давлений.

II.6. В § 11, раздел 1, мы применяли принцип Даламбера для вывода уравнения ускорения системы, вращающейся под действием момента внешних сил. При этом мы рассматривали виртуальный поворот $\delta\varphi$ вокруг оси вращения, которая в дальнейшем может быть выбрана за ось x . В рассмотренные входили лишь касательные силы инерции, поскольку нормальные силы инерции (центробежные силы) при вращении $\delta\varphi$ не производят работы.

Теперь речь идет о нагрузке на подшипники A, B при равномерном вращении, а, значит, и об их реакциях A и B . При этом нужно принять во внимание именно центробежные силы, в то время как касательные силы инерции при равномерном вращении отсутствуют. Если сообщить системе виртуальные параллельные перемещения $\delta y(\delta z)$, то соответствующие виртуальные работы будут равны произведению величины δy (и соответственно δz) на сумму слагающих по оси y (соответственно по оси z) центробежных сил всех элементов массы:

$$dm y \omega^2, \quad dm z \omega^2.$$

Отсюда путем интегрирования получаем слагающие Y и Z обычного центробежного движения общей массы m , которую мы представляем себе сосредоточенной в центре тяжести системы.

Если, с другой стороны, сообщить системе виртуальные повороты $\delta\varphi_y$ и $\delta\varphi_z$ вокруг осей y и z , то получаем виртуальные работы

$$-\delta\varphi_y \int dm x z \omega^2 \quad \text{и} \quad \delta\varphi_z \int dm x y \omega^2.$$

Они соответствуют моментам

$$M_y = -\Theta_{xz} \omega^2 \quad \text{и} \quad M_z = \Theta_{xy} \omega^2.$$

Для определения реакций подшипников A и B поместим начало системы координат x, y, z , например, в подшипнике A и обозначим расстояние между обоими подшипниками через l , а координаты центра тяжести в направлениях y и z — через η и ζ . Тогда для определения четырех неизвестных A_y, A_z и B_y, B_z мы имеем два уравнения для компонент сил:

$$\begin{aligned} A_y + B_y &= -m\eta\omega^2, \\ A_z + B_z &= -m\zeta\omega^2 \end{aligned} \quad (1)$$

и два уравнения для моментов:

$$\begin{aligned} lB_z &= \Theta_{xz}\omega^2, \\ lB_y &= \Theta_{xy}\omega^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Понятно, что эти периодически изменяющиеся реакции подшипников крайне нежелательны в технике; для их устранения недостаточно, чтобы центр тяжести находился на оси вращения, $\eta = \zeta = 0$ [уравнения (1)], но также необходимо, чтобы ось вращения была главной осью инерции, т. е. $\Theta_{xz} = \Theta_{xy} = 0$ [уравнения (2)]; ср. в § 22 рассуждения, относящиеся к уравнению (22.15а). Выполнение этого второго требования столь же важно, как и выполнение первого требования. Выполнение этих двух требований называют «балансировкой тела вращения».

II.7. Обозначим через S натяжение нити, а через z — длину ее размотанной части в данный момент времени. Тогда имеет место: *В случае а*), т. е. при опускании:

$$\Theta\dot{\omega} = Sr, \quad S = m(g - \ddot{z}).$$

Величины \dot{z} и \ddot{z} положительны; ввиду того, что $\dot{z} = r\omega$, имеем

$$\ddot{z} - r\dot{\omega} = \frac{Sr^2}{\Theta}, \quad (1)$$

$$S = \frac{mg}{1 + \frac{mr^2}{\Theta}}. \quad (2)$$

В случае б), т. е. при подъеме:

Вращение ω сохраняет свое направление. Вращающий момент силы натяжения нити противодействует вращению ω . Величины \dot{z} и \ddot{z} отрицательны, и мы имеем:

$$\dot{z} = -r\omega, \quad \ddot{z} - r\dot{\omega} = + \frac{Sr^2}{\Theta}. \quad (3)$$

$$S = \frac{mg}{1 + \frac{mr^2}{\Theta}}. \quad (4)$$

Натяжение нити в обоих случаях а) и б) одинаково; оно меньше веса вращающегося тела.

В промежутке времени между а) и б) рука, держащая нить, ощущает заметный рывок, соответствующий переходу от положительного ускорения \ddot{z} к отрицательному; в этом промежутке \ddot{z} на мгновение обращается в нуль, и натяжение S становится в действительности больше, чем по формуле (2).

II.8. Условием отрыва, согласно (18.7), является

$$\lambda = 0 \quad \text{или} \quad R_n = 0;$$

следовательно, согласно (18.6),

$$mg\frac{\ddot{z}}{l} = -\frac{m}{l}(x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z}). \quad (1)$$

Для каждой траектории на сфере имеет место соотношение:

$$x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = 0, \quad \text{т.е.} \quad x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z} = -(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = -v^2.$$

Поэтому уравнение (1) принимает вид:

$$\frac{mgz}{l} = \frac{mv^2}{l}. \quad (2)$$

Правая часть этой формулы не равна центробежной силе на траектории (поскольку в нашем случае эта траектория не является геодезической линией), однако, согласно теореме Менье (см. § 35), она соответствует проекции этой центробежной силы на нормаль к поверхности шара.

Согласно закону сохранения энергии,

$$v^2 = v_0^2 - 2g(z - z_0). \quad (3)$$

В соответствии с этим, уравнение (2) может быть преобразовано к начальным значениям v_0 , z_0 следующим образом:

$$3z = 2z_0 + \frac{v_0^2}{g} = 2(z_0 + h_0), \quad (4)$$

где $h_0 = v_0^2/2g$ — скоростной напор, соответствующий скорости v_0 .

III.1. В случае почти вертикально свисающего маятника координаты x и y являются величинами первого порядка малости; $z = -l$ с точностью до малых второго порядка. Поэтому третье уравнение (18.2) дает (с точностью до малых второго порядка):

$$\lambda = -\frac{mg}{l}, \quad (1)$$

а первые два уравнения (18.2) определяют, как и в задаче 1.13, гармоническое движение по эллипсу с циклической частотой

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (2)$$

Для постоянной площадей при движении по эллипсу имеем:

$$C = \frac{2\pi ab}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}} ab \rightarrow 0 \quad (3)$$

и для постоянной энергии (начальное состояние $\vartheta_0 = \varepsilon$, $\dot{\vartheta}_0 = 0$):

$$W = T + V = mgl \left(-1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \right). \quad (4)$$

Вводя $u = 1 - \eta$, получаем из уравнения (18.11):

$$U = -\frac{4g}{l} \left(\eta - \frac{\varepsilon^2}{2} \right) \eta - \frac{C^2}{l^4} = \frac{4g}{l} (\eta - \eta_1)(\eta - \eta_2),$$

$$\eta_{1,2} = \frac{\varepsilon^2}{4} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^4}{16} - \frac{C^2}{4gl^2}}.$$

Следовательно, из формулы (18.15) при $k = 0$ получаем:

$$\Delta\varphi = \frac{C}{2l\sqrt{lg}} \int_{\eta_2}^{\eta_1} \frac{d\eta}{\eta\sqrt{(\eta_1 - \eta)(\eta - \eta_2)}}. \quad (5)$$

Интеграл, входящий в формулу (5), можно преобразовать с помощью подстановки аналогичной (45.11), в известный интеграл:

$$\int_0^{\pi} \frac{dv}{A + B \cos v} = \frac{\pi}{\sqrt{A^2 - B^2}},$$

где

$$A = \frac{\varepsilon^2}{4}, \quad B = \sqrt{\frac{\varepsilon^4}{16} - \frac{C^2}{4gl^3}}.$$

В соответствии с этим, из (5) получаем $\Delta\varphi = \pi$, что и требовалось доказать.

III.2. Первое (и соответственно второе) утверждение данной задачи доказывается непосредственно путем дифференцирования выражения (19.10) для $|C|$ (и, соответственно, выражения $|C|\omega$) по ω .

III.3. Если коэффициенты пропорциональности момента затухания и упругого момента обозначить через $2\rho\Theta$ и соответственно через $\omega_0^2\Theta$, то в качестве уравнения движения гальванометра получаем непосредственно уравнение (19.9), но с постоянной правой частью C и с переменной α вместо x . Значения констант a и b , входящих в общее решение

$$\alpha = C + e^{-\rho t} (a \cos \sqrt{\omega_0^2 - \rho^2} t + b \sin \sqrt{\omega_0^2 - \rho^2} t),$$

нужно выбирать так, чтобы они удовлетворяли условиям $\alpha = \dot{\alpha} = 0$ при $t = 0$.

В случае а) переход в конечное положение сопровождается затухающими колебаниями, в случае в) этот переход происходит монотонно. Случай б) надо рассматривать как предельный по отношению к а) или в), причем здесь появляется вековой член с множителем t .

III.4. а) Согласно принципу Даламбера (x, y — координаты качающейся материальной точки, ось y направлена вертикально вверх), имеем:

$$\ddot{x}\delta x + (\ddot{y} + g)\delta y = 0. \quad (1)$$

Условие связи имеет вид:

$$(x - \xi)^2 + y^2 = l^2. \quad (2)$$

Варьирование этого условия дает:

$$(x - \xi)\delta x + y\delta y = 0 \quad (3)$$

(t , а поэтому также и ξ , не варьируется). Комбинируя (1) и (3), получим:

$$y\ddot{x} - (x - \xi)(\ddot{y} + g) = 0. \quad (4)$$

Если условие (2) дважды продифференцировать по t , то получим второе соотношение для \ddot{x} и \ddot{y} , которое вместе с (4) и дает точное дифференциальное уравнение рассматриваемой задачи.

Переходя к малым колебаниям, нужно учесть, что $x - \xi$ является величиной первого порядка малости и что, согласно (2), с точностью до малых величин второго порядка $y = -l$. Следовательно, \dot{y} и \ddot{y} являются величинами второго порядка малости. В соответствии с этим уравнение (4) переходит в

$$l\ddot{x} + (x - \xi)g = 0. \quad (5)$$

Вводя $x - \xi = u$, получим неоднородное уравнение маятника

$$\ddot{u} + \frac{g}{l}u = -\ddot{\xi}, \quad (6)$$

в котором $-m\ddot{\xi}$ играет роль вынуждающей силы. Интегрирование выполняется, как указано на стр. 137. Указанное в задаче соотношение фаз движений точки подвеса и материальной точки соответствует рис. 31. Рекомендуем проделать опыт со шнуром, на нижнем конце которого подвешен груз, а верхний конец приводится рукой в колебательное движение в горизонтальном направлении. При быстром движении (выше резонанса) противоположное по фазе движение обеих точек особенно заметно.

Если воспользоваться методом уравнений Лагранжа первого рода, то из уравнения для y получаем, с точностью до малых второго порядка, $\lambda = -\frac{g}{l}$; из уравнения для x получаем уравнение (5).

б) Условие (1) сохраняется и в этом случае. Условие связи (2) принимает следующий вид:

$$x^2 + (y - \eta)^2 = l^2. \quad (7)$$

Варьирование этого условия дает вместо (4):

$$(y - \eta)\ddot{x} - x(\ddot{y} + g) = 0. \quad (8)$$

Если x рассматривать как малую величину первого порядка, то из условия (7), с точностью до малых второго порядка, получаем;

$$y - \eta = -l, \quad \ddot{y} = \ddot{\eta}. \quad (9)$$

Поэтому уравнение (8) принимает вид

$$\ddot{x} + \frac{\ddot{\eta} + g}{l}x = 0. \quad (10)$$

То же самое получается и из уравнений Лагранжа первого рода, так как уравнение для y в приближении (9) дает величину

$$\lambda = -\frac{\ddot{\eta} + g}{l}, \quad (11)$$

вследствие чего уравнение для x становится тождественным с уравнением (10).

При равномерно ускоренном движении точки подвеса вверх с ускорением $+g$ действие силы тяжести как бы удваивается, а при движении вниз с ускорением $-g$ ее действие как бы уничтожается. Это означает эквивалентность тяжести и ускорения, которая, наряду с равенством тяжелой и инертной масс (стр. 32), явилась основой теории тяготения Эйнштейна.

III.5. Из равновесия натяжения в точках c и D вытекают требования:

$$\begin{aligned} S_1 \frac{x_1 - x_3}{l_1} &= S \frac{x_3}{a} + S \frac{x_3 - x_4}{a}, \\ S_2 \frac{x_2 - x_4}{l_2} &= S \frac{x_4}{a} + S \frac{x_4 - x_3}{a}. \end{aligned} \quad (3)$$

Таким образом, ввиду уравнений (1) (ср. текст задачи), вводя

$$\sigma_1 = \frac{m_1 g a}{S l_1}, \quad \sigma_2 = \frac{m_2 g a}{S l_2},$$

получаем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 x_1 &= (2 + \sigma_1)x_3 - x_4, \\ \sigma_2 x_2 &= (2 + \sigma_2)x_4 - x_3. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

В силу предположения о слабой связи, σ_1 и σ_2 являются малыми величинами, так что в правых частях уравнений (4) ими можно пренебречь. Разрешая эти уравнения относительно x_3, x_4 , получаем:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{2}{3}\sigma_1 x_1 + \frac{1}{3}\sigma_2 x_2, \\ x_4 &= \frac{2}{3}\sigma_2 x_2 + \frac{1}{3}\sigma_1 x_1. \end{aligned} \quad (5)$$

и, после подстановки в уравнении (2):

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \frac{g}{l_1}(1 - \sigma_1)x_1 &= \frac{1}{3}\frac{g}{l_1}\sigma_2(x_2 - x_1), \\ \ddot{x}_2 + \frac{g}{l_2}(1 - \sigma_2)x_2 &= \frac{1}{3}\frac{g}{l_1}\sigma_1(x_1 - x_2). \end{aligned} \quad (6)$$

Эту систему дифференциальных уравнений нужно сравнить с уравнениями (20.10); при этом получаются значения введенных там величин $\omega_1, \omega_2, k_1, k_2$ для рассматриваемого теперь расположения.

III.6. Воздействие m на M выражается величиной $k(X - x)$, а воздействие M на m — величиной $k(x - X)$. В полученной таким путем системе двух дифференциальных уравнений для X и x нужно положить $X = 0$. Оказывается, что искомое условие (колебание одной только массы m) совпадает с условием резонанса; круговая частота собственных колебаний системы (m, k) должна совпадать с частотой ω внешней силы.

Подобное устройство применяется в технике в качестве «успокоителя колебаний», чтобы, например, в случае коленчатого вала с маховиком, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω , передавать колебания с вала на связанный с ним успокоитель колебаний (являющийся в данном случае

также вращающимся механизмом, способным совершать крутильные колебания). При этом вместо координаты x нашей задачи в рассмотрение войдет угол поворота.

III.7. а) Удар mv сообщает баллистическому маятнику начальный момент импульса, из которого нужно определить его угловую скорость при $t = 0$. Из уравнения движения физического маятника, зная угловую скорость, найдем отклонение α . Обратив эту формулу, получим:

$$v = \frac{\sqrt{Mgs\Theta}}{ma} 2 \sin \frac{\alpha}{2}$$

или также

$$v = \frac{M}{m} \frac{s}{a} g \tau \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\pi} = \frac{M}{m} \frac{s}{a} \sqrt{gl} 2 \sin \frac{\alpha}{2},$$

где τ — период малого колебания.

б) После удара угловая скорость вращения маятника ω определяется из закона сохранения момента импульса:

$$\Theta \omega = mva,$$

где Θ — момент инерции всей системы (маятник + снаряд) относительно оси вращения маятника. (В дальнейшем под маятником понимается система, состоящая из собственно баллистического маятника и снаряда, застрявшего в нем.) С другой стороны, если при ударе снаряда ось маятника не испытывает дополнительной нагрузки, то закон движения центра тяжести дает:

$$Mu = mv,$$

где u — скорость движения центра тяжести системы. Так как

$$u \equiv \omega s,$$

то

$$\frac{\Theta}{M} = as,$$

откуда, вводя приведенную длину маятника $l = \frac{\Theta}{Ms}$, находим:

$$a = l.$$

Определенная таким образом точка подвеса маятника (ось машинка) называется «центром удара». Кузнец точно знает, в каком месте нужно держать рукоятку своего тяжелого молота (именно — в центре удара), чтобы при ударе не ощущать в руке неприятную отдачу.

IV.1. Моменты инерции плоско распределенных масс играют важную роль в теории упругости при рассмотрении кручения и изгиба балок. Ввиду $r^2 = x^2 + y^2$ имеем:

$$\Theta_p = \int r^2 dm = \int x^2 dm + \int y^2 dm = \Theta_x + \Theta_y.$$

В применении к теории упругости масса предполагается равномерно распределенной с плотностью 1 по поперечному сечению балки, так что $dm = df$ = элементу площади. В соответствии с этим для кругового диска радиуса a , т. е. площади $F = \pi a^2$, получаем:

$$\Theta_p = \int r^2 df = 2\pi \int r^3 dr = \frac{1}{2} F a^2,$$

откуда

$$\Theta_x = \Theta_y = \frac{1}{4} F a^2.$$

IV.2. Оставляя до конца открытым вопрос о соотношениях величин трех главных моментов инерции, мы охватываем одним и тем же расчетом все три случая: когда A является наибольшим, наименьшим или средним из главных моментов инерции.

IV.3. Удар S одновременно сообщает шару радиуса a импульс поступательного движения и импульс вращательного движения:

$$Mv = S \tag{1}$$

и

$$\Theta\omega = Sh, \tag{2}$$

где h — высота (относительно центра шара) точки удара, произведенного кием в горизонтальном направлении.

Ось вращения ω перпендикулярна к центральной плоскости. Окружная скорость u в наименьшей точке лежит в центральной плоскости и равна $a\omega$. Это справедливо не только для $t = 0$ (момент удара), но также для $t > 0$.

Так как, согласно формуле (11.12а), $\Theta = \frac{2}{5} Ma^2$, то, в силу (2) и (1), при $t = 0$ имеем:

$$\frac{2}{5} Mau = Sh = Mvh; \tag{3}$$

$v = u$ означает чистое качение; условием последнего, согласно (3), является $h = \frac{2}{5}a$. При этом нужно учесть, что положительные направления отсчета скоростей u и V противоположны. При высоких ударах ($h > \frac{2}{5}a$) скорость

скольжения $u - v$ точки касания шара с сукном будет больше 0 и направлена противоположно v ; таким образом, сила трения направлена в ту же сторону, что и v , и равна по величине fMg . Момент силы трения относительно центра шара равен $fMga$ и противодействует вращению ω .

При низких ударах сила трения направлена в противоположную сторону. В общем случае при $t > 0$ имеем:

$$\dot{v} = \pm fg, \quad (4)$$

$$\dot{u} = \pm \frac{5}{2} fg \quad (5)$$

(верхний знак соответствует высокому удару, нижний знак — низкому удару).

Графическое рассмотрение. Будем откладывать скорости v и u по оси ординат, а по оси абсцисс — время t ; оба графика представляют собой прямые, пересекающиеся друг с другом как при высоких, так и при низких ударах. Точка пересечения $u = v$ соответствует началу чистого качения. В своей дальнейшей части графики u и v представляют собой совпадающие горизонтальные прямые. Абсцисса точки пересечения равна

$$\tau = \pm \frac{5h - 2a}{7a} \cdot \frac{S}{fgM}. \quad (6)$$

(При низком ударе числитель первой дроби имеет отрицательный знак, так как h лежит в этом случае между $-a$ и $\frac{2}{5}a$; поэтому правая часть отрицательна лишь кажущимся образом.) Прирост или убыль скорости при высоких и соответственно низких ударах будет $\Delta v = \pm fg\tau$. Конечная скорость чистого качения равна

$$v + \Delta v = \frac{5}{7} \frac{h + a}{a} \frac{S}{M};$$

таким образом, она пропорциональна высоте $h + a$ точки удара над сукном.

Теория ударов «с накатом». Шар, которому сообщен высокий удар, ударяет центрально другой шар в момент времени $t < \tau$ (когда $u > v$). Пусть скорости u и v при соударении равны u_0 и v_0 . Скорость v_0 передается второму шару. Движение первого шара, согласно (4), ускоряется, начиная от $v = 0$. Согласно (5), его окружная скорость u уменьшается, начиная от u_0 . Новый график показывает, что имеется точка пересечения, соответствующая началу чистого качения. Абсцисса точки пересечения и скорость чистого качения соответственно равны

$$\tau_1 = \frac{2}{7} \frac{u_0}{fg}, \quad v_1 = fg\tau_1 = \frac{2}{7} u_0. \quad (7)$$

Теория ударов «с оттяжкой». Шар, которому сообщен удар, ударяет другой шар также в момент времени $t < \tau$; при этом, однако, $u < v$. При особенно низких ударах, которые мы и будем предполагать имеющими место, скорость u будет даже отрицательна (т. е. будет совпадать по направлению с v). Пусть скорости u и v при соударении равны u_0 и v_0 . Скорость v_0 по-прежнему передается второму шару. Движение первого шара будет, согласно (4), ускоряться, начиная от $v_0 = 0$, в отрицательном направлении; шар катится назад. Окружная скорость u , согласно (5), увеличивается от отрицательного начального значения u_0 в положительном направлении, т. е. уменьшается по абсолютной величине. Обе прямые, представляющие v и u , пересекаются (новый график). Абсцисса точки пересечения и конечная скорость чистого качения равны

$$\tau_2 = \frac{2}{7} \frac{|u_0|}{fg}, \quad |v_2| = \frac{2}{7} |u_0|. \quad (8)$$

IV.4. Пусть кий направлен не горизонтально, как в задаче IV.3, а под некоторым углом к горизонтальной плоскости. Если выбрать ось x по направлению горизонтальной слагающей удара, а ось z — по вертикали (начало координат системы x, y, z помещаем в центре шара), то компоненты силы удара \mathbf{S} равны $S_x, 0, S_y$, а компоненты момента силы удара \mathbf{N} относительно центра шара равны:

$$N_x = yS_z, \quad N_y = zS_x - xS_z, \quad N_z = -yS_x.$$

Здесь x, y, z — координаты точки удара кия по шару. Слагающим момента силы удара N_x, N_y соответствуют угловые скорости

$$\omega_x = \frac{5}{2} \frac{N_x}{Ma^2}, \quad \omega_y = \frac{5}{2} \frac{N_y}{Ma^2}.$$

Соответствующие окружные скорости в наинижней точке P шара суть

$$u_x = -a\omega_y, \quad u_y = +a\omega_x. \quad (1)$$

Величины N_z и ω_z нас не интересуют, так как они не вызывают скольжения точки P ; они вызывают лишь некоторое (пренебрежимо малое) «сверлящее» трение. Пусть слагающие скорости скольжения точки P по сукну равны

$$v_x - u_x = -\rho \cos \alpha, \quad v_y - u_y = -\rho \sin \alpha. \quad (2)$$

Это скольжение вызывает силу трения R , которая образует с осью x угол $\pi + \alpha$ и имеет величину fgM . Ее влияние на поступательное и вращательное движения определяется при $t > 0$ уравнениями

$$\begin{aligned} M\dot{v}_z &= R_x, & M\dot{v}_y &= R_y, \\ \Theta\dot{\omega}_x &= aR_y, & \Theta\dot{\omega}_y &= -aR_x. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\dot{v}_x = -fg \cos \alpha, \quad \dot{v}_y = -fg \sin \alpha \quad (3)$$

и, принимая во внимание (1) и (2),

$$\dot{u}_y = -\frac{5}{2}fg \sin \alpha, \quad \dot{u}_x = -\frac{5}{2}fg \cos \alpha. \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{v}_x - \dot{u}_x &= -\frac{d}{dt}(\rho \cos \alpha) = -\frac{7}{2}fg \cos \alpha, \\ \dot{v}_y - \dot{u}_y &= -\frac{d}{dt}(\rho \sin \alpha) = -\frac{7}{2}fg \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Разрешая последние два уравнения (5) относительно $\dot{\alpha}$ и $\dot{\rho}$, получаем:

1) $\dot{\alpha} = 0$. Сила трения постоянна по направлению; ввиду того, что она постоянна и по величине, траектория точки P в горизонтальной плоскости оказывается параболой. Ось параболы параллельна начальному направлению скольжения α , которое определяется векторами \mathbf{S} и \mathbf{N} .

$$2) \dot{\rho} = -\frac{7}{2}fg, \quad \rho = \rho_0 - \frac{7}{2}fgt, \quad \rho = 0 \quad \text{при} \quad t = \tau = \frac{2}{7} \frac{\rho_0}{fg}.$$

Здесь ρ_0 — начальная величина скорости скольжения, которая также может быть определена из \mathbf{S} и \mathbf{N} . При $t > \tau$ скольжение и трение становятся равными нулю. Шар катится прямолинейно по касательной к параболе.

V.1. Пусть φ — мгновенный угол поворота вращающейся плоскости относительно неподвижной. Положим

$$x + iy = (\xi + i\eta)e^{i\varphi}. \quad (1)$$

Дифференцируя дважды по t и полагая $\dot{\varphi} = \omega$, получим:

$$\ddot{x} + i\ddot{y} = \{\ddot{\xi} + i\ddot{\eta} + 2i\omega(\dot{\xi} + i\dot{\eta}) + i\dot{\omega}(\xi + i\eta) - \omega^2(\xi + i\eta)\}e^{i\varphi}. \quad (2)$$

Здесь $\xi + i\eta$ есть вектор \mathbf{r} , рассматриваемый относительно вращающейся плоскости; $\dot{\xi} + i\dot{\eta}$ — соответствующая ему скорость (также относительно вращающейся плоскости) и т. д.; $i(\dot{\xi} + i\dot{\eta}) = (\dot{\xi} + i\dot{\eta})e^{i\pi/2}$ — перпендикулярный к нему вектор, так что можно написать:

$$2i\omega(\dot{\xi} + i\dot{\eta}) = 2[\omega\dot{\mathbf{r}}], \quad i\dot{\omega} = (\dot{\xi} + i\dot{\eta}) = [\dot{\omega}\mathbf{r}]. \quad (3)$$

При этом за направление вектора ω нужно взять нормаль к комплексной плоскости. Обозначим скорость $\dot{x} + i\dot{y}$, рассматриваемую относительно неподвижной плоскости, как на стр. 220, через \mathbf{w} . Для производных по времени от величин, рассматриваемых относительно вращающейся плоскости, мы сохраним обозначение с помощью точек (над соответствующими величинами),

использованное в уравнении (3). Тогда (2) переходит в следующее уравнение, аналогичное уравнению (29.4):

$$\dot{\mathbf{w}} = \{\ddot{\mathbf{r}} + 2[\boldsymbol{\omega}\dot{\mathbf{r}}] + [\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}] - \omega^2\mathbf{r}\}e^{i\varphi}. \quad (4)$$

Если $\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + i\mathbf{F}_y$ — сила, рассматриваемая относительно неподвижной плоскости, а $\Phi = \mathbf{F}_\xi + i\mathbf{F}_\eta$ — сила, рассматриваемая относительно вращающейся плоскости, то, согласно (1), имеет место $\mathbf{F} = \Phi e^{i\varphi}$, следовательно,

$$\Phi = \mathbf{F}e^{-i\varphi}. \quad (5)$$

Тогда, согласно (4) и (5), из $m\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{F}$ следует:

$$m\{\ddot{\mathbf{r}} + 2[\boldsymbol{\omega}\dot{\mathbf{r}}] + [\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}] - \omega^2\mathbf{r}\} = \Phi. \quad (6)$$

Тем самым искомые дополнительные силы определены. В частности, второй член слева представляет собой уже знакомую нам кориолисову силу.

Мы намеренно рассматривали эту задачу в комплексной форме, чтобы подчеркнуть, что двухмерные векторы лучше всего представлять с помощью комплексных переменных.

V.2. Плоскость, в которой вращается прямая, выберем в качестве плоскости x, y , ось X направим горизонтально, а ось y — вертикально вверх. Пусть ось вращения проходит через начало координат; $\varphi = \omega t$ есть угол, образованный прямой с осью x . Эту задачу можно свести к предыдущей, если (мысленно) неподвижно связать с вращающейся прямой вертикальную плоскость ξ, η , вращающуюся, таким образом, с постоянной угловой скоростью ω относительно плоскости x, y . При этом удобно направить ось ξ по вращающейся прямой. Однако в этом случае для того, чтобы материальная точка неизменно оставалась на оси ξ , необходима некоторая вынуждающая сила (реакция связи), действующая на нее в направлении оси η .

Таким образом, внешняя сила Φ здесь состоит из реакции связи, которую мы обозначим через mb , и силы тяжести mg . Если теперь спроектировать уравнение (6) предыдущей задачи на неподвижные оси x и y , то получим (при $\dot{\omega} = 0$):

$$\left. \begin{aligned} \ddot{r} \cos \varphi - 2\dot{r} \sin \varphi - r\omega^2 \cos \varphi &= -b \sin \varphi, \\ \ddot{r} \sin \varphi + 2\dot{r} \cos \varphi - r\omega^2 \sin \varphi &= b \cos \varphi - g. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Умножая первое уравнение на $\cos \varphi$, второе — на $\sin \varphi$ и складывая их почленно, найдем ($\varphi = \omega t$):

$$\ddot{r} - r\omega^2 = -g \sin \omega t. \quad (2)$$

Решение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$r = A \operatorname{ch} \omega t + B \operatorname{sh} \omega t + \frac{g}{2\omega^2} \sin \omega t. \quad (3)$$

Не зная этого решения, можно приведенное в задаче соотношение

$$b = g \cos \varphi + 2\dot{r}\omega$$

между реакцией связи, силой тяжести и кориолисовой силой вывести непосредственно с помощью соответствующей комбинации уравнений (1).

V.3. а) Пусть $x_0 + iy_0$ определяет положение точки O в плоскости x, y . Тогда

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_0 + i\dot{y}_0 &= (u + iv)e^{i\varphi}, \\ \ddot{x}_0 + i\ddot{y}_0 &= \{\dot{u} + i\dot{v} + i\omega(u + iv)\}e^{i\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Пусть, далее, $x + iy$ определяет положение точки S в плоскости x, y . Имеем:

$$\left. \begin{aligned} x + iy &= x_0 + iy_0 + ae^{i\varphi}, \\ \dot{x} + i\dot{y} &= (u + iv + i\omega a)e^{i\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (1')$$

$$\ddot{x} + i\ddot{y} = [\dot{u} + i\dot{v} + i\dot{\omega}a + i\omega(u + iv) - \omega^2 a]e^{i\varphi}. \quad (2)$$

Внешней силе R соответствует в плоскости x, y комплексная величина

$$F = Rie^{i\varphi}. \quad (2')$$

Закон движения центра тяжести $\ddot{x} + i\ddot{y} = F/M$ дает, согласно (2) и (2'),

$$\dot{u} + i\dot{v} + i\dot{\omega}a + i\omega(u + iv) - \omega^2 a = \frac{iR}{M}$$

или, отделяя вещественную и мнимую части,

$$\dot{u} - \omega v - \omega^2 a = 0, \quad (3)$$

$$\dot{v} + \dot{\omega}a + \omega u = \frac{R}{M}. \quad (4)$$

Далее, согласно закону площадей (уравнению момента импульса) имеем:

$$\Theta\dot{\omega} = -Ra. \quad (5)$$

б) В силу условий $v = 0, \dot{v} = 0$, уравнения (3) и (4) упрощаются и принимают вид:

$$\dot{u} - \omega^2 a = 0, \quad (3')$$

$$\dot{\omega}a + \omega u = \frac{R}{M}. \quad (4')$$

Исключая R из (4') и (5), получим:

$$\dot{\omega}a \left(1 + \frac{\Theta}{Ma^2}\right) + \omega u = 0. \quad (6)$$

Положим $\Theta = Mb^2$ (b — радиус инерции) и

$$k^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} > 1, \quad (7)$$

вследствие чего уравнение (6) перейдет в

$$k^2 \dot{\omega} a + \omega u = 0. \quad (6')$$

После интегрирования системы уравнений (3') и (6') R определяется с помощью формулы (4') или (5).

в) Исключая u из (3) и (6), имеем:

$$k^2 \frac{d}{dt} \frac{\dot{\omega}}{\omega} = -\omega^2. \quad (8)$$

После умножения на $\frac{\dot{\omega}^2}{\omega}$ это уравнение может быть проинтегрировано и дает:

$$k^2 \left(\frac{\dot{\omega}}{\omega} \right)^2 = k^2 c^2 - \omega^2. \quad (9)$$

$$k \dot{\omega} = \omega \sqrt{k^2 c^2 - \omega^2}, \quad (9')$$

где c — постоянная интегрирования.

От квадратного корня избавляемся, полагая

$$\omega = kc \cos \psi. \quad (10)$$

Тогда при соответствующем выборе знака квадратного корня в (9') получаем:

$$\dot{\psi} = c \cos \psi \quad (10')$$

или

$$c dt = \frac{d\psi}{\cos \psi}, \quad ct = \frac{1}{2} \lg \frac{1 + \sin \psi}{1 - \sin \psi}. \quad (11)$$

Тем самым определена величина ψ как функция t . Через ψ выражаются остальные величины, а именно: ω — согласно формуле (10), а u и R — согласно формулам (6') и (4'):

$$u = ak^2 c \sin \psi, \quad (12)$$

$$R = \frac{M}{2} ak(k^2 - 1)c^2 \sin 2\psi. \quad (12')$$

Этим и заканчивается интегрирование.

Сравнение (10) с (10') дает, ввиду $\omega = \dot{\varphi}$, соотношение $\dot{\psi} = \dot{\varphi}/k$. Таким образом, наш вспомогательный угол ψ пропорционален углу поворота

$$\psi = \frac{\varphi}{k}, \quad (13)$$

поскольку при соответствующем выборе пока что произвольной оси x постоянная интегрирования может быть обращена в нуль.

г) Из (1') получаем при $v = 0$:

$$\begin{aligned} |\dot{x} + i\dot{y}|^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = u^2 + \omega^2 a^2, \\ T &= \frac{M}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{\Theta}{2}\omega^2 = \\ &= \frac{M}{2}(u^2 + \omega^2 a^2) + \frac{M}{2}(k^2 - 1)a^2\omega^2 = \frac{M}{2}(u^2 + k^2 a^2 \omega^2). \end{aligned} \quad (14)$$

Но, в силу формул (10) и (12), получаем:

$$T = \frac{M}{2}a^2k^4c^2(\sin^2\psi \cos^2\psi) = \text{const}. \quad (15)$$

д) Согласно (1) и (12), имеем:

$$\dot{x}_0 = ak^2c \sin\psi \cos\varphi, \quad \dot{y}_0 = ak^2c \sin\psi \cos\varphi;$$

следовательно, ввиду (10') и (13),

$$\frac{dx_0}{d\varphi} = ak \operatorname{tg} \psi \cos \varphi, \quad \frac{dy_0}{d\varphi} = ak \operatorname{tg} \psi \sin \varphi. \quad (16)$$

Из (11) вытекает:

$$\begin{aligned} \text{при } \psi = 0 \quad t &= 0, \\ \text{при } \psi = \pm \frac{\pi}{2} \quad t &= \pm \infty. \end{aligned}$$

Вся траектория проходит в следующих интервалах углов ψ и φ

$$-\frac{\pi}{2} < \psi < +\frac{\pi}{2}, \quad -k\frac{\pi}{2} < \varphi < +k\frac{\pi}{2}.$$

При $t = 0$ траектория имеет острие; именно — из (16), ввиду $\psi = 0$, $\varphi = 0$, получаем:

$$\frac{dx_0}{d\varphi} = \frac{dy_0}{d\varphi} = \frac{d^2y_0}{d\varphi^2} = 0, \quad \text{но} \quad \frac{d^2x_0}{d\varphi^2} \quad \text{и} \quad \frac{d^3y_0}{d\varphi^3} \neq 0.$$

Острие является точкой возврата кривой; касательная к траектории в этой точке параллельна оси x .

При $t = \pm\infty$ траектория стремится к асимптотам; угол φ становится постоянным, так как, вообще говоря,

$$\frac{dx_0}{d\varphi} = \frac{dy_0}{d\varphi} = \pm\infty$$

[на основании формул (16)].

Поскольку из (14) следует

$$\frac{dy_0}{dx_0} = \operatorname{tg} \varphi = \pm \operatorname{tg} k \frac{\pi}{2},$$

то асимптоты расположены симметрично относительно оси x под углами $\pm k \frac{\pi}{2}$, как показывает рис. 57 (стр. 328) для $k = 1, \frac{3}{2}, 2, 3$.

VI.1. Если направить ось z по направлению падения, т. е. вертикально вниз, то $V = -mgz$. Начальное положение $z = 0$ при $t = 0$ лежит выше конечного положения $z = z_1$ при $t = t_1$

а) При $z = \frac{1}{2}gt^2$ получаем:

$$\int L dt = \int_0^{t_1} \left[\frac{m}{2}(gt)^2 + mg \frac{g}{2} t^2 \right] dt = \frac{1}{3} mg^2 t_1^3.$$

б) В случае $z = ct$ постоянная c должна быть выбрана так, чтобы при $t = t_1$ имело место соотношение

$$z = z_1 = g \frac{t_1^2}{2};$$

таким образом, $c = \frac{gt_1}{2}$.

Отсюда находим:

$$\int L dt = \int_0^{t_1} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{gt_1}{2} \right)^2 + mg \frac{gt_1}{2} t \right] dt = \frac{3}{8} mg^2 t_1^3.$$

С другой стороны, в случае $z = at^3$, $a = g/2t_1$ имеем:

$$\int L dt = \int_0^{t_1} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{3g}{2t_1} \right)^2 t^4 + mg \frac{g}{2t_1} t^3 \right] dt = \frac{7}{20} g^2 t_1^3.$$

В то время как при пользовании принципом Гамильтона мы сравниваем лишь траектории, бесконечно мало отличающиеся друг от друга, траектории в фазовом пространстве «координат» q, \dot{q} (здесь z, \dot{z}) в обоих случаях отличаются от истинного движения на конечные величины. Несмотря на это, величина интеграла Гамильтона и теперь оказывается меньшей в случае а), чем в случае б):

$$\frac{1}{3} < \frac{3}{8} \quad \text{и} \quad \frac{1}{3} < \frac{7}{20}$$

и притом для любых длин траекторий, что, вообще говоря (ср. стр. 276), не обязательно должно иметь место.

VI.2. Пусть ξ, η (как в задаче V.1) — координаты, измеренные во вращающейся плоскости; $u = (\dot{\xi}, \dot{\eta})$ — скорость, измеренная также относительно этой плоскости. Тогда скорость относительно неподвижной плоскости равна

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = [\omega \mathbf{r}]$$

(ср., например, первую строку таблицы на стр. 185). Поэтому при разложении на слагающие получим:

$$w_x = \dot{\xi} - \omega\eta, \quad w_y = \dot{\eta} + \omega\xi, \\ |\mathbf{w}|^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + 2\omega(\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}) + \omega^2(\xi^2 + \eta^2).$$

Отсюда следует (вводим $T = \frac{m|\omega|^2}{2}$):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = m \frac{d}{dt} (\dot{\xi} - \omega\eta) = m(\ddot{\xi} - \omega\dot{\eta} - \dot{\omega}\eta), \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}} = m \frac{d}{dt} (\dot{\eta} + \omega\xi) = m(\ddot{\eta} + \omega\dot{\xi} + \dot{\omega}\xi), \\ \frac{\partial T}{\partial \xi} = m(\omega\dot{\eta} + \omega^2\xi), \quad \frac{\partial T}{\partial \eta} = m(-\omega\dot{\xi} + \omega^2\eta).$$

Если обозначить через F_ξ, F_η слагающие внешней силы F по движущимся осям ξ, η , то получим следующие уравнения Лагранжа:

$$\ddot{\xi} - 2\omega\dot{\eta} - \dot{\omega}\eta - \omega^2\xi = F_\xi, \\ \ddot{\eta} + 2\omega\dot{\xi} + \dot{\omega}\xi - \omega^2\eta = F_\eta.$$

Это в точности совпадает с уравнением (6) задачи V.1, если последнее написать в компонентах.

В случае движения материальной точки по вращающейся прямой, рассмотренном в задаче V.2, имеем:

$$v^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{dt^2} = \dot{r}^2 + r^2 \omega^2, \quad L = \frac{m}{2}(r^2 + r^2 \omega^2) - mgr \sin \omega t,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r}, \quad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\omega^2 - mg \sin \omega t.$$

Вытекающее отсюда уравнение Лагранжа тождественно с уравнением (2), приведенным в пояснении к задаче V.2.; оно непосредственно приводит к указанному там же решению (3). При этом вообще не приходится рассматривать кориолисову силу и т. п.; правда, при этом мы ничего не узнаем относительно давления на направляющую.

VI.3. Члены, опущенные в уравнении (4) данной задачи и обозначенные точками, имеют вид

$$\left(1 + \frac{\zeta}{R}\right) \dot{\eta} \quad \text{и} \quad -\frac{\eta}{R} \left(1 + \frac{\zeta}{R}\right) \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \dot{\xi}.$$

Эти члены после умножения на стоящий перед фигурными скобками множитель и последующего дифференцирования по t дали бы члены второго или высшего порядка малости относительно ξ , η , ζ или их производных. Относительно уравнений (5) и (6) нужно заметить, что после дифференцирования члены второго порядка, как $\zeta\ddot{\zeta}$, $\zeta\ddot{\xi}$ и т. д., в них, конечно, опущены. Заслуживает внимания, что при этом одновременно из результатов выпадает радиус Земли R . В уравнении (6) к выписанному члену прибавился бы член с ω^2 , а именно

$$R \sin \vartheta \cos \vartheta \omega^2.$$

Это, очевидно, слагающая обычной центробежной силы по оси ξ ; соответствующая слагающая по оси ζ вошла бы в $\frac{\partial T}{\partial \zeta}$. Однако эти члены нужно опустить, так как они уже учтены в эффективном ускорении свободного падения g [уравнение (30.1)].

В случае маятника Фуко следует, очевидно, применять не уравнения Лагранжа в их обычной форме (34.6), а смешанный тип уравнений (34.11), принимая во внимание условие связи (31.11).

Впрочем, нужно заметить, что в силу определений η и ψ_0 [формулы (1) и (2)] наша задача относится к охарактеризованному на стр. 288 классу задач, условия которых зависят от времени.

VI.4. Центр тяжести описывает «сплюснутую» циклоиду в плоскости, перпендикулярной к оси цилиндра. Мы получим ее параметрическое представление через угол поворота φ из уравнения (17.1) для «обыкновенной»

циклоиды, если a в этом уравнении частично заменим через s :

$$\begin{aligned}\xi &= a\varphi - s \sin \varphi, & \dot{\xi} &= (a - s \cos \varphi)\dot{\varphi}; \\ \eta &= a - s \cos \varphi, & \dot{\eta} &= s \sin \varphi \dot{\varphi}.\end{aligned}$$

а) Выбрав центр тяжести за точку отсчета O , получим:

$$\begin{aligned}T_{\text{пост.}} &= \frac{m}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) = \frac{m}{2}(a^2 + s^2 - 2as \cos \varphi)\dot{\varphi}^2, \\ T_{\text{вращ.}} &= \frac{\Theta}{2}\dot{\varphi}^2, \quad T_w = 0, \quad V = mg\eta = mg(a - s \cos \varphi).\end{aligned}$$

При этом надо принять во внимание, что величину $\omega = \dot{\varphi}$ можно рассматривать как угловую скорость вращения цилиндра не только вокруг его геометрической оси (как мы считаем первоначально), но с тем же правом и вокруг оси, проходящей через его центр тяжести [согласно (23.8)]. Если, кроме того, положить $\Theta = mb^2$ (b — радиус инерции), $c^2 = a^2 + s^2 + b^2$, то получим:

$$\left. \begin{aligned}L &= T_{\text{пост.}} + T_{\text{вращ.}} - V = \frac{m}{2}(c^2 - 2as \cos \varphi)\dot{\varphi}^2 - mg(a - s \cos \varphi), \\ \frac{1}{m} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= (c^2 - 2as \cos \varphi)\ddot{\varphi} + 2as \sin \varphi \dot{\varphi}^2, \\ \frac{1}{m} \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= as \sin \varphi \dot{\varphi}^2 - gs \sin \varphi.\end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Таким образом, уравнение движения имеет вид

$$(c^2 - 2as \cos \varphi)\ddot{\varphi} + as \sin \varphi \dot{\varphi}^2 + gs \sin \varphi = 0. \quad (2)$$

б) Если в качестве точки отсчета O выбрать центр поперечного сечения, проведенного через центр тяжести, то эта точка будет двигаться горизонтально со скоростью $a\dot{\varphi}$; полагая $\Theta' = \Theta + ms^2$ [ср. (16.8)], имеем:

$$T_{\text{пост.}} = \frac{m}{2}a^2\dot{\varphi}^2, \quad T_{\text{вращ.}} = \frac{\Theta'}{2}\dot{\varphi}^2, \quad V \text{ — как прежде,}$$

однако теперь T_w не равна нулю. Действительно, на основании (22.11),

$$T_w = -ma\dot{\varphi}^2 \cos \varphi.$$

Отсюда

$$L = T_{\text{пост.}} + T_{\text{вращ.}} + T_w - V = \frac{m}{2}(c^2 - 2as \cos \varphi)\dot{\varphi}^2 = mg(a - s \cos \varphi), \quad (3)$$

что совпадает с (1). Тем самым и в этом случае мы приходим к уравнению движения (2). Для малых колебаний при $\varphi = 0$ оно дает:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l_1} \varphi = 0, \quad l_1 \frac{c^2 - 2as}{s} = \frac{(a-s)^2 + b^2}{s} \dots (\text{устойчивость});$$

напротив, для малых колебаний при $\varphi = \pi$, полагая $\psi = \pi + \varphi$, получаем:

$$\ddot{\psi} - \frac{g}{l_2} \psi = 0, \quad l_2 \frac{c^2 + 2as}{s} = \frac{(a+s)^2 + b^2}{s} \dots (\text{неустойчивость}).$$

VI.5. 1. *Соотношения между угловыми скоростями.* Эти соотношения проще всего вывести, если учесть, что в местах сцепления конических шестерен (ω) с конической шестерней (ω_1), с одной стороны, и с конической шестерней (ω_2) — с другой, окружные скорости в любой момент должны быть одинаковы. Шестерни (ω) вращаются вокруг оси A с угловой скоростью ω ; кроме того, сама ось A вращается вместе с шестернями (ω) вокруг общей геометрической оси колес (Ω), (ω_1), (ω_2) с угловой скоростью Ω . Если r , r_1 и r_2 — средние радиусы конических шестерен (ω), (ω_1), (ω_2), то для места сцепления колес (ω), (ω_1) осуществляется равенство

$$r\omega + r_1\Omega = r_1\omega_1,$$

а для места сцепления колес (ω), (ω_2) — равенство

$$-r\omega + r_2\Omega = r_2\omega_2.$$

Отсюда при $r_1 = r_2$ получаются соотношения

$$\left. \begin{aligned} 2\Omega &= \omega_1 + \omega_2, \\ 2\omega &= \frac{r_1}{r}(\omega_1 - \omega_2). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Эти формулы могут быть, конечно, получены и путем введения виртуальных вращений.

2. *Соотношения между моментами.* Виртуальная работа момента M всегда должна быть равна сумме виртуальных работ моментов M_1 и M_2 , т. е.

$$M\Omega \delta t = M_1\omega_1 \delta t + M_2\omega_2 \delta t.$$

Заменяя Ω через ω_1 и ω_2 согласно (1), получим:

$$\left(\frac{M}{2} - M_1\right)\omega_1 + \left(\frac{M}{2} - M_2\right)\omega_2 = 0.$$

При произвольных ω_1 и ω_2 это возможно только в том случае, если

$$\frac{M}{2} = M_1 = M_2. \quad (2)$$

Таким образом, развиваемый двигателем момент распределяется на оба задних колеса поровну при произвольных значениях угловых скоростей ω_1 и ω_2 .

3. *Уравнение движения системы.* В этом случае проще всего пользоваться уравнениями Лагранжа второго рода. Имеем:

$$T = \frac{1}{2}(\Theta_1\omega_1^2 + \Theta_2\omega_2^2 + \Theta\omega^2 + \Theta'\Omega^2).$$

Если мы подставим сюда вместо ω и Ω их выражения через ω_1 и ω_2 и введем обозначения

$$L_{11} = \Theta_1 + \frac{\Theta'}{4} + \frac{\Theta r_1^2}{4r^2},$$

$$L_{22} = \Theta_2 + \frac{\Theta'}{4} + \frac{\Theta r_1^2}{4r^2},$$

$$L_{12} = L_{21} = \frac{\Theta'}{4} - \frac{\Theta r_1^2}{4r^2},$$

то, по Лагранжу, получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}(L_{11}\omega_1 + L_{12}\omega_2) &= \frac{M}{2} - W_1, \\ \frac{d}{dt}(L_{21}\omega_1 + L_{22}\omega_2) &= \frac{M}{2} - W_2. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Здесь W_1 и W_2 — приложенные к обоим задним колесам противодействующие моменты, вызванные трением сцепления с почвой, причем в эти моменты можно включить также и прочие сопротивления (сопротивление воздуха и т. д.)

Если M , W_1 , W_2 заданы как функции времени, то выражения в скобках в левых частях уравнений (3) вычисляются как интегралы по времени от правых частей этих уравнений, откуда определяются также ω_1 и ω_2 .

Средние по времени значения правых частей уравнений (3) равны нулю, а, следовательно, ω_1 и ω_2 постоянны; если сопротивление на одном колесе уменьшится [например, если колесо подскочит на неровной дороге и будет некоторое время вращаться в воздухе ($W = 0$)], то вращение этого колеса ускорится, тогда как вращение другого колеса замедлится.

4. *Электродинамическая аналогия.* Уравнения (3) имеют вид, напоминающий уравнение взаимодействия двух индуктивно связанных цепей тока

(ср. сказанное на стр. 299 о работе Больцмана). А именно, если отождествить величины L , с коэффициентами индукции этих цепей тока, а ω_1 и ω_2 — с токами, текущими в цепях, то левые части (3) будут выражать электродинамические индукционные воздействия. $\frac{M}{2}$ соответствует «сторонним» электродвижущим силам, действующим в цепях тока;

$$T = \frac{1}{2}L_{11}\omega^2 + L_{12}\omega_1\omega_2 + \frac{1}{2}L_{22}\omega_2^2$$

есть полная магнитная энергия. Согласно определению на стр. 262, системы, функция Лагранжа которых содержит только производные координат по времени (в данном случае $\omega_1 = \dot{\varphi}_1$, $\omega_2 = \dot{\varphi}_2$), называются циклическими системами. Таким образом, они являются механическими аналогами стационарных электрических токов. Дифференциальная передача, как и симметрический волчок, является «бициклом».

Предметный указатель

- Аномалия эксцентрическая 319
Атвуда машина 321
Афелий 64
- Байс – Балло закон 220
Бальмера серия 313
Бера закон размывания берегов рек 220
Биения 153, 156
Бильярд , высокие и низкие удары 326
— теория игры 212
Бицикл 298
Брахистохрона 128
- Вариация траектории 244, 273
Вектор 13
— аксиальный 161
— полярный 161
Велосипед 77
— гироскопические эффекты 208
Вес единицы 18
Винт 159, 173
Волчок свободный 179, 181, 185
— симметричный 166
— трехосный 195
— тяжелый симметричный 182, 261, 298
— шаровой 167
Вращение виртуальное 80
— твердого тела 85, 160
Время абсолютное 19, 23
Время собственное 27, 278
- Галилея преобразование 22
Гамильтона дифференциальное уравнение в частных производных 300
— дифференциальные уравнения 288
— принцип наименьшего действия 242, 328
— теория 288
— функция 253, 288
Гирокомпас 204
Гироскопические члены 226
Годограф 52
— движения планеты 60, 317
- Даламбера принцип 81, 84
Движение вращательное, основное уравнение 86
— материальной точки по заданному пути 89
— относительное 217
— — на плоскости 327
— планет 58, 308
Декремент затухания 141
Деривация 209
Джоуль, единица 18
Дина 18
Динамика свободной материальной точки 58
— твердого тела 178

- Дифференциальная передача автомобиля 330
 Закон Байса–Балло 220
 — Шулера 206
 — инерции Галилея 12, 20
 — площадей 95, 178
 — размывания берегов рек Бера 220
 — сохранения импульса 95
 — — энергии 30, 31
 — трения Кулона 110, 112
 — тяготения Ньютона 34, 59
 — ускорения Ньютона 14
 Законы Кеплера 59–61, 65, 310
 Затухание аperiodическое 140
 Изменение массы релятивистское 46
 Изохронизм колебаний маятника 118, 128
 Импульс 14
 — в теории относительности 27
 — вращательный полный 98
 — обобщенный 256
 — твердого тела 173
 Инерции закон Галилея 12, 20
 Инерция 50
 Интеграл действия 272
 Интегралы эллиптические 120, 121, 133, 265
 Карданов подвес 198
 Карно закон потери энергии при неупругом ударе 44, 48
 Квант действия Планка 243, 312
 Квантовые числа 312
 Кватернионов исчисление 161
 Кеплера задача 58, 99, 308
 — законы 59–61, 65, 310
 — уравнение 318
 Кинематика в пространстве 55
 — на плоскости 51
 — твердого тела 158
 Колебаний частота 38, 118
 Колебания 117
 — аperiodические 140
 — вынужденные 136, 323
 — гармонические 37, 118
 — изохронные 118
 — свободные 37, 139
 Количество движения (импульс) 14
 Компас гироскопический Аншютц-Кемпфа 205
 Координаты обобщенные 248, 267
 — полярные 59
 — циклические 263
 Кориолиса сила 82, 217
 Коэффициент трения 110, 112
 Кривизна 283
 — траектории 52
 Кривошипно-шатунный механизм 70
 Кулона закон трения 110, 112
 Лагранжа общие уравнения 242
 — уравнение первого рода 90
 — фиктивная сила 256
 — функция 247, 248
 Лежандра преобразование 300
 Линии геодезические 284
 Линия узлов 182
 Лиувилля теорема 42
 Лоренца преобразование 23
 Луна, движение узлов 194

- Луна, ускорение под действием
земного притяжения 316
- Майкельсона опыт 28
- Масса 13
— инертная 33
— переменная 45
— покоя 27
— поперечная 49
— приведенная 44, 87
— продольная 49
— тяготеющая 33
- Массы единицы 17, 18
- Маятник Фуко 228, 329
— баллистический 325
— двойной 150, 259
— математический 69, 117
— оборотный 123
— секундный 118
— сферический 69, 129, 257
— физический 69, 122
— циклоидальный 126, 256
- Многоугольник сил 168
- Момент вектора 54
— импульса 54, 98, 173
— —, связь с моментом инерции
87
— — твердого тела 173
— инерции 85
— — твердого тела 164
— — шара 88
— силы 54
— — относительно оси 56, 80
— — относительно точки 56
— скорости 54
— ускорения 54
— центробежный 164, 322
- Мост, нагрузка на опоры 77
- Напор скоростной 34
- Нутация 194, 265
- Ньютона абсолютное время 19, 22
— аксиома вторая 14
— — первая 12
— — третья 16
— — четвертая 16
— закон тяготения 34, 59
— закон ускорения 14
— опыт с ведром 20, 34
- Область фазовая 312
- Оси главные 166
- Относительности теория общая 28,
277
— — специальная 19–28
- Падение свободное вблизи земной
поверхности 32
— — на вращающейся Земле 223,
329
— — с большой высоты 34
— — с учетом сопротивления воз-
духа 36
- Пара сил 171
— угловых скоростей 171
- Параллелограмм сил 16
- Переменные канонические 294
- Перигелий 64
- Период колебаний 38
- Плоскость наклонная 88, 110, 322
— неизменяемая 99
— соприкасающаяся 285
- Площадей закон 95, 178
- Поггендорфа опыт с весами 321
- Поле силовое 30, 134
- Полиспаг 78
- Полодия 190

- Потенциал 135
 — кинетический 247
 Потенциальная энергия 31, 134
 Преобразование Галилея 22
 — Лежандра 300
 — Лоренца 23
 — к главным осям 165
 — касательное 294
 — точечное 267
 Прецессия астрономическая 192
 — псевдорегулярная 183, 194, 266
 — регулярная 183, 190, 194
 — сферического маятника 133
 Приведение системы сил 168
 Принцип «прямого пути» Герца 281
 — Даламбера 81, 84
 — Ферма 275
 — виртуальной работы 74
 — кратчайшего пути 275
 — наименьшего действия Гамильтона 242, 328
 — действия Мопертюи 271
 — — принуждения Гаусса 279
 — относительности классической механики 22
 — — электродинамики 26
 Принципы механики интегральные 242
 Проблема двух тел астрономическая 65, 109, 308
 — трех тел 108, 233
 Произведение векторное 54
 — векторов скалярное 16
 Пуансо построение 176
 Путь адгезионный 115
 Работа 16
 — виртуальная, связь с моментом силы 81
 — при виртуальном вращении 80
 — реакций 74
 Работы единицы 18
 Ракета для полета на Луну 316
 Распределение нагрузки 77
 Рассеяние энергии 225
 Расщепление ядер лития 318
 Рауса уравнения 296
 — функция 296
 Резонанс 103, 138, 143
 Рычаг 75
 Сила 14
 — Кориолиса 82, 217
 — внешняя 95, 101
 — внутренняя 95, 101
 — инерции 81, 105
 — потерянная 280
 — фиктивная 82
 — центробежная 82
 Силы единицы 18
 — обобщенные 256
 Симпатические маятники 142, 324
 Система единиц Джорджи 19
 — — техническая 17, 18
 — — физическая 17, 18
 — замкнутая 107
 — инерциальная 21
 — консервативная 135
 — отсчета 13, 19
 — циклическая 296
 Скамья вращающаяся Жуковского 101
 Скорость обобщенная 248, 267
 — произвольной точки твердого тела 162

- секториальная 55
- угловая 160
- Сложение вращений 159
- Сопротивление воздуха 36, 209
- Соударение электрона с атомом 315
- Статика 50, 56, 167
- Степени свободы 68, 158
- Таутохрона 128
- Твердое тело 158, 178
- Тензор симметричный 165
- Тензорная поверхность 165
- Теорема Лиувилля 42
- Якоби 306
- Теорема Штейнера 124
- Теория относительности общая 28, 277
- — специальная 19–28
- Торпеда, прибор для стабилизации 202
- Траектория снаряда 209
- Трение 75, 88, 109
- движения 109, 112
- на наклонной плоскости 110
- покоя 109
- скольжения 109
- сцепления 109
- Трех тел проблема 108, 233
- Тяготения закон Ньютона 34, 59
- постоянная 34, 59
- Угловая скорость 85, 160
- Угловое ускорение 85
- Удар бильярдных шаров 212
- неупругий 44
- упругий 41, 315
- Уравнение Кеплера 318
- вековое 147
- основное вращательного движения 86
- Уравнения Гамильтона 288
- Лагранжа 90, 247
- Рауса 296
- Эйлера 185
- движения, различные методы интегрирования 29–32
- канонические 294
- Уравновешивание масс 103
- Ускорение силы тяжести 124
- Условия связи голономные 71, 90
- — зависящие от времени 93
- — неголономные 71, 92
- — реономные и склерономные 254
- Успокоитель колебаний 325
- Ферма принцип 275
- Фуко маятник 228, 329
- Функция Гамильтона 253, 288
- Лагранжа 247, 248
- Рауса 296
- действия 272
- Центр инерции 99
- качаний 123
- тяжести 40, 96, 99
- Центра тяжести закон движения 40, 96
- Цепь падающая 316
- Циклоида 126, 256
- Чандлера период 191
- Частота колебаний 38, 118
- Штейнера теорема 124
- Шулера закон 206

- | | |
|--|-----------------------------------|
| Эволюта циклоиды 128 | Эллипсоид инерции 165, 176 |
| Эйлера круг 190 | Энергия 30 |
| — период 192 | — кинетическая 30, 50, 86 |
| — теория колебаний полюса 190 | — потенциальная 31, 34, 134 |
| — углы 261, 298 | — свободная 247 |
| — уравнения 185 | Эрг 18 |
| Эйнштейна общая теория относительности 28, 277 | «Эффе» в бильярдной игре 212, 214 |
| Электрон, изменение массы 48 | Якоби теорема 306 |

Арнольд Зоммерфельд

МЕХАНИКА

Дизайнер М. В. Ботя
Технический редактор А. В. Ширококов
Компьютерная верстка Ю. В. Высоцкий
Корректор М. А. Ложкина

Подписано к печати 05.05.01. Формат 60 × 84¹/₁₆.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 21,39. Уч. изд. л. 21,78.

Гарнитура Computer Modern Roman. Бумага офсетная № 1.

Тираж 1000 экз. Заказ №

Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика»
 426057, г. Ижевск, ул. Пастухова, 13.

Лицензия на издательскую деятельность ЛУ № 084 от 03.04.00.

<http://rcd.ru> E-mail: borisov@uni.udm.ru

Отпечатано в полном соответствии с качеством
 предоставленных диапозитивов в ГИПП «Вятка».

610033, г. Киров, ул. Московская, 122.
