ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 2 2019

УДК 517.51

О ТОЧНОСТИ НЕРАВЕНСТВА РАЗНЫХ МЕТРИК ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ В ОБОБЩЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЛОРЕНЦА[1]

Г. Акишев

В статье рассматривается обобщенное пространство Лоренца $L_{\psi,\tau}(\mathbb{T}^m)$, определенное по некоторой непрерывной, вогнутой функции ψ, $\psi(0)=0$. Для двух пространств $L_{\psi_1,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$ и $L_{\psi_2,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ при условии $\alpha_{\psi_1} = \underline{\lim}_{t\to 0}\psi_1(2t)/\psi_1(t) = \beta_{\psi_2} = \overline{\lim}_{t\to 0}\psi_2(2t)/\psi_2(t)$ доказано точное по порядку неравенство разных метрик для кратных тригонометрических полиномов. Кроме того доказано одно вспомогательное утверждение для функции одной переменной с монотонно убывающими коэффициентами Фурье по тригонометрической системе. В этом утверждении установлена двусторонняя оценка нормы функции $f\in L_{\psi,\tau}(\mathbb{T})$ через сумму ряда составленного из коэффициентов Фурье этой функции.

Ключевые слова: обобщенное пространство Лоренца, неравенство Джексона- Никольского, тригонометрический полином.

G. Akishev. On the exactness of the inequality of different metrics for trigonometric polynomials in the generalized Lorentz space.

We consider the generalized Lorentz space $L_{\psi,\tau}(\mathbb{T}^m)$ defined by some continuous concave function ψ such that $\psi(0)=0$. For two spaces $L_{\psi_1,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$ and $L_{\psi_2,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ such that $\alpha_{\psi_1} = \underline{\lim}_{t\to 0}\psi_1(2t)/\psi_1(t) = \beta_{\psi_2} = \overline{\lim}_{t\to 0}\psi_2(2t)/\psi_2(t)$, we prove an order-exact inequality of different metrics for multiple trigonometric polynomials. We also prove an auxiliary statement for functions of one variable with monotonically decreasing Fourier coefficients in a trigonometric system. In this statement we establish a two-sided estimate for the norm of the function $f\in L_{\psi,\tau}(\mathbb{T})$ in terms of the series composed of the Fourier coefficients of this function.

Keywords: generalized Lorentz space, Jackson–Nikol'skii inequality, trigonometric polynomial.

MSC: 42A05, 42A10, 46E30

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-2-9-20

Введение

Пусть $\mathbb{R}^m$ — m-мерное евклидово пространство точек $\bar{x}=(x_1,\dots,x_m)$ с вещественными координатами; $I^m=\{\bar{x}\in\mathbb{R}^m;\ 0\le x_j\le 1;\ j=1,\dots,m\}$ — m-мерный куб. В дальнейшем, для m-мерного куба одновременно с I^m будем использовать обобзначние $[0,1]^m$.

О п р е д е л е н и е (см. [1, с. 81]). Две неотрицательные, измеримые по Лебегу функции f, g называются равноизмеримыми, если

$$\mu\{\bar{x}\in I^m\colon f(\bar{x})>\lambda\}=\mu\{\bar{x}\in I^m\colon g(\bar{x})>\lambda\},\quad \lambda>0,$$

где μe — мера Лебега множества $e\subset I^m$.

Пусть X — банахово пространство измеримых по Лебегу на I^m функций f с нормой $\|f\|_X$. Пространство X называется *симметричным*, если

1) из того, что $|f(\bar{x})|\le|g(\bar{x})|$ почти всюду на I^m и $g\in X$, следует, что $f\in X$ и $\|f\|_X\le\|g\|_X$;

2) из того, что $f\in X$, и равноизмеримости функций $|f(\bar{x})|$ и $|g(\bar{x})|$ следует, что $g\in X$ и $\|f\|_X=\|g\|_X$ (см. [1, с. 123]).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Программы повышения конкурентоспособности Уральского федерального университета, постановления № 211 Правительства Российской Федерации, контракт № 02.A03.21.0006.

Норма $\|\chi_e\|_X$ характеристической функции $\chi_e(t)$ измеримого множества $e \subset I^m$ называется *фундаментальной функцией пространства* X и обозначается $\varphi(\mu e) = \|\chi_e\|_X$.

Известно, что невозрастающая перестановка характеристической функции χ_e измеримого множества $e \subset [0,1]^m$ равна функции $\chi_{[0,t]}$, где $t = \mu e$. Поэтому фундаментальная функция симметричного пространства X есть функция $\varphi(t) = \|\chi_{[0,t]}\|_X$, определенная на отрезке $[0,1]$. Она является вогнутой, неубывающей, непрерывной на $[0,1]$ функцией, причем $\varphi(0) = 0$ (см. [1, с. 70, 137, 164]). Такие функции называются Ф-*функциями*.

Для данной функции $\varphi(t)$, $t \in [0,1]$, положим $\alpha_\varphi = \underline{\lim}_{t\to 0}\frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)}$, $\beta_\varphi = \overline{\lim}_{t\to 0}\frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)}$. Известно, что для любого симметричного пространства $X(\varphi)$ справедливы неравенства [2] $1 \le \alpha_\varphi \le \beta_\varphi \le 2$. Числа $\alpha_\varphi, \beta_\varphi$ называются соответственно *нижним и верхним индексами фундаментальной функции* φ.

Одним из примеров симметричного пространства является $L_q(\mathbb{T}^m)$ — пространство Лебега с нормой

$$\|f\|_q = \left(\int\limits_{I^m} |f(2\pi\bar{x})|^q d\bar{x}\right)^{1/q}, \quad 1 \le q < \infty.$$

Здесь и в дальнейшем $\mathbb{T}^m = [0,2\pi]^m$, функции f — 2π-периодические по каждой переменной.

Пусть функция ψ непрерывна, не убывает, вогнута на $[0,1]$, $\psi(0) = 0$ и $0 < \tau < \infty$. *Обобщенным пространством Лоренца* $L_{\psi,\tau}(\mathbb{T}^m)$ называется множество измеримых на $\mathbb{T}^m = [0,2\pi]^m$, имеющих 2π-период по каждой переменной $x_j, j = 1,\ldots,m$, функций $f(\overline{x}) = f(x_1,\ldots,x_m)$, для которых (см. [3]) $\|f\|^*_{\psi,\tau} = \left(\int_0^1 f^{*^\tau}(t)\psi^\tau(t)\frac{dt}{t}\right)^{1/\tau} < \infty$.

Известно, что при условиях $1 < \alpha_\psi, \beta_\psi < 2$ пространство $L_{\psi,\tau}(\mathbb{T}^m)$ будет симметричным пространством с фундаментальной функцией ψ и функционал $\|f\|^*_{\psi,\tau}$ будет эквивалентен норме

$$\|f\|_{\psi,\tau} = \left(\int\limits_0^1 \left(1/t\int\limits_0^t f^*(y)dy\right)^\tau \psi^\tau(t)\frac{dt}{t}\right)^{1/\tau}$$

пространства $L_{\psi,\tau}(\mathbb{T}^m)$ [3, лемма 3.1].

Отметим, что при $\psi(t) = t^{1/q}$ пространство $L_{\psi,\tau}(\mathbb{T}^m)$ совпадает с пространством Лоренца, обозначаемым символом $L_{q,\tau}(\mathbb{T}^m)$, $1 < q,\tau < \infty$ (см. [4, с. 228]).

В силу того, что пространства $L_{\psi,\tau_2}(\mathbb{T}^m), L_{\psi,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$ имеют одну и ту же фундаментальную функцию ψ, при $0 < \tau_2 < \tau_1 < \infty$ справедливо включение $L_{\psi,\tau_2}(\mathbb{T}^m) \subset L_{\psi,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$. Значит, индексы тоже равны.

Для пространств Лебега $L_p(\mathbb{T}^m)$ и Лоренца $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ фундаментальные функции $\varphi(t) = t^{1/p}$ и $\alpha_\varphi = \beta_\varphi = 2^{1/p}$.

Отметим, что пространства $L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m), L_{q,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ при $p \ne q$ имеют разные фундаментальные функции $\varphi_{L_{p,\tau_1}}(t) = t^{1/p}$, $\varphi_{L_{q,\tau_2}}(t) = t^{1/q}$ и их индексы соответственно равны $2^{1/p}$, $2^{1/q}$.

В случае $p = q$ пространства $L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m), L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$ имеют одинаковые фундаментальные функции $\varphi_{L_{p,\tau_1}}(t) = \varphi_{L_{p,\tau_2}}(t) = t^{1/p}$ и их индексы соответственно равны $2^{1/p}$.

Рассмотрим кратный тригонометрический полином

$$T_{\overline{n}}(\overline{x}) = T_{n_1,\ldots,n_m}(\overline{x}) = \sum_{k_1=-n_1}^{n_1}\cdots\sum_{k_m=-n_m}^{n_m} a_{\overline{k}}e^{i\langle\overline{k},\overline{x}\rangle},$$

где $\langle\bar{k},\bar{x}\rangle = \sum_{j=1}^m k_jx_j$, $n_j \in \mathbb{N}$, $j = 1,\ldots,m$.

Для тригонометрического полинома одной переменной $T_n(x)$ хорошо известно неравенство Д. Джексона [5] $\|T_n\|_\infty = \max\limits_{x\in\mathbb{T}}|T_n(x)| \leqslant 2n^{1/p}\|T_n\|_p$ для $0 < p < \infty$.

С. М. Никольский в [6] доказал распространение этого неравенства сразу на многомерный случай и на пространство $L_q(\mathbb{T}^m)$, т. е. тогда имеем

$$\|T_{\bar n}\|_q \leqslant 3^m \prod_{j=1}^{m} n_j^{1/p-1/q} \|T_{\bar n}\|_p, \quad 1 \leqslant p < q \leqslant \infty.$$

В настоящее время имеются многочисленные обобщения неравенства Джексона — Никольского и тесно связанного с ним неравенства Бернштейна для полиномов об оценке нормы производной полинома через норму заданного пространства (см. [7–16] и библиографии в них). Одним из обобщений является распространение неравенства Джексона — Никольского на пространства Лоренца [13]. Для тригонометрического полинома одной переменной T_n в обобщенном пространстве Лоренца Л. А. Шерстнева [14] доказала точное по порядку неравенство

$$\|T_n\|_{\psi,\tau_2} \leqslant C(\ln(n+1))^{1/\tau_2-1/\tau_1} \|T_n\|_{\psi,\tau_1}, \quad 0 < \tau_2 < \tau_1 < \infty.$$

Настоящая работа является продолжением исследования автора (см. *Тр. Института математики и механики УрО РАН*, 2018, Т. 24, № 2, С. 5–18), в котором для кратных тригонометрических полиномов $T_{\overline{n}}$ доказано неравенство разных метрик

$$\|T_{\overline{n}}\|_{\psi_1,\tau_1} \leqslant C\Bigg[\int\limits_{\prod_{j=1}^{m}(n_j+1)^{-1}}^{1} \Big(\frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)}\Big)^{\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_2-\tau_1}} \frac{dt}{t}\Bigg]^{\frac{\tau_2-\tau_1}{\tau_1\tau_2}} \|T_{\overline{n}}\|_{\psi_2,\tau_2} \tag{1}$$

при условиях $1 \leqslant \tau_1 < \tau_2 < \infty$, $1 < \alpha_{\psi_1} = \beta_{\psi_2} < 2$ и

$$\sup_{0<t\leqslant 1} \frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)} < \infty. \tag{2}$$

Цель настоящей статьи — установить точность по порядку неравенства (1).

Для этого рассмотрим множество всех неотрицательных, непрерывных на $[0,1]$ функций $\psi(t)$, для которых $(\log 2/t)^{\varepsilon}\psi(t) \uparrow +\infty$ и $(\log 2t)^{-\varepsilon}\psi(t) \downarrow 0$ при $t \downarrow 0$ для любого числа $\varepsilon \in (0,\infty)$ (см. [17]), и для краткости это множество обозначим через SVL.

Для величин A, B запись $A \asymp B$ означает, что существуют положительные постоянные C_1, C_2 такие, что $C_1 A \leqslant B \leqslant C_2 A$. Все постоянные C, встречающиеся в формулах, не зависят от порядков тригонометрических полиномов.

Для доказательства основного результата статьи будем пользоваться следующей известной теоремой.

Теорема 1 (см. [18, теорема 1]). *Пусть $X(\varphi)$ — симметричное пространство, $a_k \downarrow 0$, $k \to \infty$ и*

$$g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos 2\pi k t, \tag{3}$$

$$\bar g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Bigg(\sum_{i=1}^{k} a_i\Bigg) \chi_{(1/(k+1),1/k]}(t).$$

Для того чтобы выполнялось соотношение $\|g\|_X \asymp \|\bar g\|_X$, необходимо и достаточно, чтобы $\beta_\varphi < 2$.

Из теоремы 1 для обобщенного пространства Лоренца получится следующее утверждение.

Следствие. *Пусть $X(\varphi) = L_{\psi,\tau}(\mathbb{T})$, $1 < \tau < \infty$, $\beta_\psi < 2$. Тогда для функции* (3) *справедливо соотношение*

$$\|g\|_{\psi,\tau} \asymp \Bigg(\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{\tau-1}\psi^{\tau}(1/\nu) a_\nu^{\tau}\Bigg)^{1/\tau}.$$

Доказательство. Так как функция $\bar{g}$ не возрастает, то $(\bar{g})^*(t) = g(t),\ t \in (0,1]$. Поэтому

$$\|\bar{g}\|_{\psi,\tau} = \Big[\int\limits_0^1 (\bar{g})^\tau(t)\psi^\tau(t)\frac{dt}{t}\Big]^{1/\tau} = \Big[\sum_{\nu=1}^\infty \Big(\sum_{i=1}^\nu a_i\Big)^\tau \int\limits_{1/(\nu+1)}^{1/\nu} \psi^\tau(t)\frac{dt}{t}\Big]^{1/\tau}.$$

Учитывая, что функция $\psi(t)/t$ не возрастает, нетрудно убедиться, что существуют положительные числа C_1, C_2, не зависящие от $\nu \in \mathbb{N}$, такие, что

$$C_1\psi^\tau(1/\nu)1/\nu \leqslant \int\limits_{1/(\nu+1)}^{1/\nu} \psi^\tau(t)\frac{dt}{t} \leqslant C_2\psi^\tau(1/\nu)1/\nu. \tag{4}$$

Поэтому

$$\|\bar{g}\|_{\psi,\tau} \asymp \Big[\sum_{\nu=1}^\infty \psi^\tau(1/\nu)1/\nu\Big(\sum_{i=1}^\nu a_i\Big)^\tau\Big]^{1/\tau}. \tag{5}$$

Так как $a_k \downarrow 0,\ k \to \infty$, то из (5) следует, что

$$\|\bar{g}\|_{\psi,\tau} \geqslant \Big[\sum_{\nu=1}^\infty \psi^\tau(1/\nu)\nu^{\tau-1}a_\nu^\tau\Big]^{1/\tau}. \tag{6}$$

Поскольку функция ψ не убывает и $a_k \downarrow 0,\ k \to \infty$, то

$$\sum_{\nu=1}^\infty \psi^\tau(1/\nu)1/\nu\Big(\sum_{i=1}^\nu a_i\Big)^\tau = \sum_{k=1}^\infty \sum_{\nu=2^{k-1}}^{2^k-1} \psi^\tau(1/\nu)1/\nu\Big(\sum_{i=1}^\nu a_i\Big)^\tau \leqslant 2\sum_{k=1}^\infty \psi^\tau(1/2^{k-1})\Big(\sum_{i=1}^{2^k-1} a_i\Big)^\tau$$

$$= 2\sum_{k=1}^\infty \psi^\tau(1/2^{k-1})\Big(\sum_{l=1}^k \sum_{i=2^{l-1}}^{2^l-1} a_i\Big)^\tau \leqslant 2\sum_{k=1}^\infty \psi^\tau(1/2^{k-1})\Big(\sum_{l=1}^k 2^{l-1}a_{2^{l-1}}\Big)^\tau$$

$$= 2\sum_{s=0}^\infty \psi^\tau(1/2^s)\Big(\sum_{\nu=0}^s 2^\nu a_{2^\nu}\Big)^\tau. \tag{7}$$

Далее в силу неравенств (4) и [14, лемма 5] справедливо неравенство

$$\sum_{s=\nu}^\infty \psi^\tau(1/2^s) \leqslant C\int\limits_0^{1/2^\nu} \psi^\tau(t)\frac{dt}{t} \leqslant C\psi^\tau(1/2^\nu).$$

Поэтому по [19, лемма 2.2] будем иметь

$$2\sum_{s=0}^\infty \psi^\tau(1/2^s)\Big(\sum_{\nu=0}^s 2^\nu a_{2^\nu}\Big)^\tau \leqslant C\sum_{s=0}^\infty \psi^\tau(1/2^s)(2^s a_{2^s})^\tau. \tag{8}$$

Учитывая, что функция $\psi(t)/t$ не возрастает и $a_k \downarrow 0,\ k \to \infty$, нетрудно убедиться, что

$$\sum_{s=0}^\infty \psi^\tau(1/2^s)(2^s a_{2^s})^\tau \leqslant C\sum_{s=0}^\infty \psi^\tau(1/2^s)a_{2^s}^\tau \sum_{k=2^s}^{2^{s+1}-1} k^{\tau-1} \leqslant C\sum_{s=0}^\infty \sum_{k=2^s}^{2^{s+1}-1} \psi^\tau(1/k)k^{\tau-1}a_k^\tau. \tag{9}$$

Теперь из соотношения (5) и неравенств (7)–(9) будем иметь, что

$$\|\bar{g}\|_{\psi,\tau} \leqslant C\Big[\sum_{k=1}^\infty \psi^\tau(1/k)\nu^{\tau-1}a_k^\tau\Big]^{1/\tau}.$$

Из этого неравенства и из (6) в силу теоремы 1 получим утверждение следствия.

Основным результатом статьи является следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $1 < \tau_1 < \tau_2 < \infty$, *Ф-функции* ψ_1, ψ_2 *удовлетворяют условию* (2) *и* $\frac{\psi_1}{\psi_2} \in SVL$. *Тогда для любых чисел* $n_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \ldots, m$, *справедливо соотношение*

$$\sup_{T_{\bar{n}} \neq 0} \frac{\|T_{\bar{n}}\|_{\psi_1,\tau_1}}{\|T_{\bar{n}}\|_{\psi_2,\tau_2}} \asymp \Bigg[\int\limits_{\prod_{j=1}^{m}(n_j+1)^{-1}}^{1} \Big(\frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)}\Big)^{\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_2-\tau_1}} \frac{dt}{t} \Bigg]^{\frac{\tau_2-\tau_1}{\tau_1\tau_2}}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценка $\sup_{T_{\bar{n}} \neq 0} \frac{\|T_{\bar{n}}\|_{\psi_1,\tau_1}}{\|T_{\bar{n}}\|_{\psi_2,\tau_2}} \leqslant C \Bigg[\int\limits_{\prod_{j=1}^{m}(n_j+1)^{-1}}^{1} \Big(\frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)}\Big)^{\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_2-\tau_1}} \frac{dt}{t} \Bigg]^{\frac{\tau_2-\tau_1}{\tau_1\tau_2}}$ следует из неравенства (1).

Так как $\frac{\psi_1}{\psi_2} \in SVL$, нетрудно убедиться, что

$$\Bigg[\int\limits_{\prod_{j=1}^{m}(n_j+1)^{-1}}^{1} \Big(\frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)}\Big)^{\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_2-\tau_1}} \frac{dt}{t} \Bigg]^{\frac{\tau_2-\tau_1}{\tau_1\tau_2}} \leqslant C \frac{\psi_1\Big(\prod_{j=1}^{m}(n_j+1)^{-1}\Big)}{\psi_2\Big(\prod_{j=1}^{m}(n_j+1)^{-1}\Big)} \Big(\log \prod_{j=1}^{m}(n_j+1)\Big)^{1/\tau_1 - 1/\tau_2}.$$

Поэтому нам достаточно установить, что

$$\sup_{T_{\bar{n}} \neq 0} \frac{\|T_{\bar{n}}\|_{\psi_1,\tau_1}}{\|T_{\bar{n}}\|_{\psi_2,\tau_2}} \geqslant \frac{\psi_1\Big(\prod_{j=1}^{m}(n_j+1)^{-1}\Big)}{\psi_2\Big(\prod_{j=1}^{m}(n_j+1)^{-1}\Big)} \Big(\log \prod_{j=1}^{m}(n_j+1)\Big)^{1/\tau_1 - 1/\tau_2}.$$

I. Для этого сначала рассмотрим полином одной переменной

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\psi_2(1/k)} \cos(2\pi kx), \quad x \in [0,1].$$

Фундаментальная функция обобщенного пространства Лоренца $L_{\psi_1,\tau_1}(\mathbb{T})$ эквивалентна функции $\psi_1(t),\ t \in (0,1]$.

Известно, что $\frac{t}{\psi_2(t)}$ является фундаментальной функцией ассоциированного пространства к пространству $L_{\psi,\tau}(\mathbb{T}^m)$ (см. [1], с. 144). Значит функция $\frac{t}{\psi_2(t)} \uparrow$ на $(0,1]$.

Следовательно,

$$a_k = \frac{1}{k\psi_2(1/k)} \downarrow 0 \ \text{ при } \ k \to +\infty.$$

Поэтому по следствию справедливо соотношение

$$\|T_n\|_{\psi_1,\tau} \asymp \Big(\sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{1}{k\psi_2(1/k)}\Big)^{\tau} \Big(\frac{\psi_1(1/k)}{1/k}\Big)^{\tau} \frac{1}{k} \Big)^{1/\tau} \tag{10}$$

для $1 < \tau < \infty$. Так как $\frac{\psi_1}{\psi_2} \in SVL$, то $(\log(2k))^{\varepsilon} \frac{\psi_1(1/k)}{\psi_2(1/k)} \leqslant (\log(2n))^{\varepsilon} \frac{\psi_1(1/n)}{\psi_2(1/n)}$ для $0 < \varepsilon < \infty$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому при $0 < \varepsilon < 1/\tau$ из соотношения (10) следует, что

$$\|T_n\|_{\psi_1,\tau} \leqslant C \Big(\sum_{k=1}^{n} \Big((\log 2k)^{\varepsilon} \frac{\psi_1(1/k)}{\psi_2(1/k)} \Big)^{\tau} \frac{(\log 2k)^{-\varepsilon\tau}}{k} \Big)^{1/\tau} \leqslant C (\log 2n)^{\varepsilon} \frac{\psi_1(1/n)}{\psi_2(1/n)} \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} (\log 2k)^{-\varepsilon\tau} \Big)^{1/\tau}$$

$$\leqslant C(\log 2n)^{\varepsilon}\frac{\psi_1(1/n)}{\psi_2(1/n)}\Big(\int\limits_1^n(\log 2t)^{-\varepsilon\tau}\frac{dt}{t}\Big)^{1/\tau}\leqslant C\frac{\psi_1(1/n)}{\psi_2(1/n)}\log^{1/\tau}(2n)\leqslant C\frac{\psi_1(1/n)}{\psi_2(1/n)}\log^{1/\tau}(n+1)$$

при $1<\tau<\infty$ и $1<\alpha_{\psi_1}\leqslant\beta_{\psi_1}<2$. Так как функция $1/\psi_2$ не возрастает и функция $\psi_1(t)/t$ не возрастает, то

$$\frac{\psi_1(1/n)}{\psi_2(1/n)}\leqslant 1/\psi_2(1/(n+1))\frac{\psi_1(1/n)}{1/n}1/n\leqslant 1/\psi_2(1/(n+1))\frac{\psi_1(1/(n+1))}{1/(n+1)}1/n$$

$$\leqslant 2\psi_1(1/(n+1))/\psi_2(1/(n+1)),\quad n\in\mathbb{N}.$$

Поэтому

$$\|T_n\|_{\psi_1,\tau}\leqslant C\frac{\psi_1(1/(n+1))}{\psi_2(1/(n+1))}\log^{1/\tau}(n+1). \tag{11}$$

Докажем противоположное неравенство. Так как $\dfrac{\psi_1}{\psi_2}\in SVL$, то

$$(\log 2n)^{-\varepsilon}\frac{\psi_1(1/n)}{\psi_2(1/n)}\leqslant(\log(2k))^{-\varepsilon}\frac{\psi_1(1/k)}{\psi_2(1/k)}$$

для $\varepsilon>0,\ k=1,2,\dots,n$. Поэтому

$$\Big(\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}\Big(\frac{\psi_1(1/k)}{\psi_2(1/k)}\Big)^{\tau}\Big)^{1/\tau}\geqslant(\log 2n)^{-\varepsilon}\frac{\psi_1(1/n)}{\psi_2(1/n)}\Big(\sum_{k=1}^n\frac{(\log 2k)^{\varepsilon\tau}}{k}\Big)^{1/\tau}$$

$$\geqslant C(\log(2n))^{-\varepsilon}\frac{\psi_1(1/n)}{\psi_2(1/n)}(\log(n+1))^{\varepsilon+1/\tau}\geqslant C\frac{\psi_1(1/n)}{\psi_2(1/n)}(\log(n+1))^{1/\tau}.$$

Следовательно, учитывая, что $\dfrac{\psi_1(1/n)}{\psi_2(1/n)}\geqslant 1/2\psi_1(1/(n+1))/\psi_2(1/(n+1))$, из соотношения (10) получим

$$\|T_n\|_{\psi_1,\tau}\geqslant C\frac{\psi_1(1/(n+1))}{\psi_2(1/(n+1))}(\log(n+1))^{1/\tau}. \tag{12}$$

Если $1<\alpha_{\psi_2}\leqslant\beta_{\psi_2}<2$, то по следствию имеем

$$\|T_n\|_{\psi_2,\tau}\asymp\Big(\sum_{k=1}^n\Big(\frac{1}{k\psi_2(1/k)}\Big)^{\tau}\Big(\frac{\psi_2(1/k)}{1/k}\Big)^{\tau}\frac{1}{k}\Big)^{1/\tau}=C\Big(\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}\Big)^{1/\tau}\asymp(\log(n+1))^{1/\tau} \tag{13}$$

для $1<\tau<\infty$.

Теперь, пользуясь неравенством (12) при $\tau=\tau_1$ и соотношением (13) при $\tau=\tau_2$, получим

$$\frac{\|T_n\|_{\psi_1,\tau_1}}{\|T_n\|_{\psi_2,\tau_2}}\geqslant C\frac{\psi_1(1/(n+1))}{\psi_2(1/(n+1))}(\log(n+1))^{1/\tau_1-1/\tau_2}\quad\text{для}\quad 1<\tau_1<\tau_2<\infty. \tag{14}$$

II. Далее рассмотрим многомерный случай. При $1<\tau<\infty$, $1<\alpha_\psi\leqslant\beta_\psi<2$ известно соотношение (см. [3])

$$\|f\|_{\psi,\tau}\asymp\sup_{\|g\|_{\bar\psi,\tau'}\leqslant 1}\int\limits_{[0,1]^m}f(2\pi\bar x)g(2\pi\bar x)d\bar x, \tag{15}$$

где $\bar\psi(t)=\dfrac{t}{\psi(t)},\ \dfrac{1}{\tau}+\dfrac{1}{\tau'}=1$.

Для краткости введем обозначения

$$\varphi_j(\bar x)=\prod_{k\in\{1,2,\dots,m\}\setminus\{j\}}e^{in_k2\pi x_k}\sum_{\nu_j=1}^{n_j}\frac{1}{\nu_j\psi_2(1/\nu_j)}\cos(2\pi\nu_jx_j),\quad x_j\in[0,1],\quad j=1,\dots,m,$$

и $\Im_{\bar n}(\bar x) = \sum_{j=1}^m \varphi_j(\bar x)$, $\bar x \in [0,1]^m$. $\Im_{\bar n}(\bar x)$ — тригонометрический полином порядка n_j по переменной x_j, $j = 1,\dots,m$.

По известной формуле [1, с. 89] $\int_0^t f^*(u)du = \sup\limits_{E\subset I^m,\, \mu E = t} \int_E |f(\bar x)|d\bar x$, где μE — мера Лебега множества E, получим

$$\int\limits_0^t \Big(\sum_{j=1}^m \varphi_j\Big)^*(u)du = \sup_{E\subset I^m,\, \mu E=t} \int\limits_E \Big|\sum_{j=1}^m \varphi_j(\bar x)\Big| d\bar x \leqslant \sum_{j=1}^m \sup_{E\subset I^m,\, \mu E=t} \int\limits_E |\varphi_j(\bar x)|d\bar x = \sum_{j=1}^m \int\limits_0^t \varphi_j^*(u)du.$$

Теперь в силу этого неравенства имеем

$$\Big\|\sum_{j=1}^m \varphi_j\Big\|_{\psi_1,\tau} = \Big[\int\limits_0^1 \Big(\int\limits_0^t \Big(\sum_{j=1}^m \varphi_j\Big)^*(u)du\Big)^\tau \Big(\frac{\psi_1(t)}{t}\Big)^\tau \frac{dt}{t}\Big]^{1/\tau}$$

$$\leqslant \Big[\int\limits_0^1 \Big(\sum_{j=1}^m \int\limits_0^t \varphi_j^*(u)du\Big)^\tau \Big(\frac{\psi_1(t)}{t}\Big)^\tau \frac{dt}{t}\Big]^{1/\tau}. \tag{16}$$

Если $1 \leqslant \tau < \infty$, то известно, что $\big(\sum_{j=1}^m a_j\big)^\tau \leqslant C\sum_{j=1}^m a_j^\tau$ для чисел $a_j \geqslant 0$, $j = 1,\dots,m$. Поэтому

$$\Big(\sum_{j=1}^m \int\limits_0^t \varphi_j^*(u)du\Big)^\tau \leqslant C\sum_{j=1}^m \Big(\int\limits_0^t \varphi_j^*(u)du\Big)^\tau.$$

Следовательно, из (16) получим

$$\Big\|\sum_{j=1}^m \varphi_j\Big\|_{\psi_1,\tau} \leqslant C\Big[\int\limits_0^1 \sum_{j=1}^m \Big(\int\limits_0^t \varphi_j^*(u)du\Big)^\tau \Big(\frac{\psi_1(t)}{t}\Big)^\tau \frac{dt}{t}\Big]^{1/\tau} = \Big[\sum_{j=1}^m \big(\|\varphi_j\|_{\psi_1,\tau}\big)^\tau\Big]^{1/\tau}. \tag{17}$$

Так как

$$|\varphi_j(\bar x)| = \Big|\sum_{\nu_j=1}^{n_j} \frac{1}{\nu_j\psi_2(1/\nu_j)}\cos(2\pi\nu_j x_j)\Big|, \quad x_j \in [0,1],$$

то их невозрастающие перестановки равны. Следовательно,

$$\|\varphi_j\|_{\psi_1,\tau} = \Big\|\sum_{\nu_j=1}^{n_j} \frac{1}{\nu_j\psi_2(1/\nu_j)}\cos(2\pi\nu_j x_j)\Big\|_{\psi_1,\tau}. \tag{18}$$

III. В одномерном случае в силу неравенства (11) получим

$$\Big\|\sum_{\nu_j=1}^{n_j} \frac{1}{\nu_j\psi_2(1/\nu_j)}\cos(2\pi\nu_j x_j)\Big\|_{\psi_1,\tau} \leqslant C\frac{\psi_1(1/(n_j+1))}{\psi_2(1/(n_j+1))}\log^{1/\tau}(n_j+1)$$

при $1 < \alpha_{\psi_1} \leqslant \beta_{\psi_1} < 2$, $1 < \tau < \infty$. Поэтому из (17) и (18) следует, что

$$\Big\|\sum_{j=1}^m \varphi_j\Big\|_{\psi_1,\tau} \leqslant C\Big[\sum_{j=1}^m \Big(\frac{\psi_1(1/(n_j+1))}{\psi_2(1/(n_j+1))}\Big)^\tau \log(n_j+1)\Big]^{1/\tau}. \tag{19}$$

Так как $\prod_{j=1}^m (n_j+1)^{-1} < (n_j+1)^{-1}$, $j = 1,\dots,m$, и по условию теоремы функция $\dfrac{\psi_1}{\psi_2} \in SVL$, то

$$(\log(2(n_j+1)))^{1/\tau}\,\frac{\psi_1(1/(n_j+1))}{\psi_2(1/(n_j+))} \leqslant \Big(\log\Big(2\prod_{j=1}^m (n_j+1)\Big)\Big)^{1/\tau}\frac{\psi_1(\prod_{j=1}^m (n_j+1)^{-1})}{\psi_2(\prod_{j=1}^m (n_j+1)^{-1})}$$

для $j=1,\ldots,m$. Поэтому

$$\Big[\sum_{j=1}^{m}\Big(\frac{\psi_1(1/(n_j+1))}{\psi_2(1/(n_j+1))}\Big)^{\tau}\log(2(n_j+1))\Big]^{1/\tau}$$

$$\leqslant C\Big(\log\Big(2\prod_{j=1}^{m}(n_j+1)\Big)\Big)^{1/\tau}\frac{\psi_1(\prod_{j=1}^{m}(n_j+1)^{-1})}{\psi_2(\prod_{j=1}^{m}(n_j+1)^{-1})}\Big[\sum_{j=1}^{m}1\Big]^{1/\tau}$$

$$\leqslant Cm^{1/\tau}\Big(\log\Big(2\prod_{j=1}^{m}(n_j+1)\Big)\Big)^{1/\tau}\frac{\psi_1(\prod_{j=1}^{m}(n_j+1)^{-1})}{\psi_2(\prod_{j=1}^{m}(n_j+1)^{-1})}. \tag{20}$$

Теперь из неравенств (19) и (20) следует, что

$$\Big\|\sum_{j=1}^{m}\varphi_j\Big\|_{\psi_1,\tau}\leqslant C\Big(\log\Big(\prod_{j=1}^{m}(n_j+1)\Big)\Big)^{1/\tau}\frac{\psi_1\Big(\prod_{j=1}^{m}(n_j+1)^{-1}\Big)}{\psi_2\Big(\prod_{j=1}^{m}(n_j+1)^{-1}\Big)} \tag{21}$$

при $1<\alpha_{\psi_1}\leqslant\beta_{\psi_1}<2$, $1<\tau<\infty$.

Неравенство (17) верно и в пространстве $L_{\psi_2,\tau}(\mathbb{T}^m)$, т. е.

$$\Big\|\sum_{j=1}^{m}\varphi_j\Big\|_{\psi_2,\tau}\leqslant C\Big[\sum_{j=1}^{m}\big(\|\varphi_j\|_{\psi_2,\tau}\big)^{\tau}\Big]^{1/\tau}.$$

В силу (13) имеем (см. (18))

$$\|\varphi_j\|_{\psi_2,\tau}=\Big\|\sum_{\nu_j=1}^{n_j}\frac{1}{\nu_j\psi_2(1/\nu_j)}\cos(2\pi\nu_j x_j)\Big\|_{\psi_2,\tau}\leqslant C(\log(n_j+1))^{1/\tau},\quad j=1,\ldots,m.$$

Поэтому

$$\Big\|\sum_{j=1}^{m}\varphi_j\Big\|_{\psi_2,\tau}\leqslant C\Big[\sum_{j=1}^{m}\log(n_j+1)\Big]^{1/\tau}=C\Big(\log\prod_{j=1}^{m}(n_j+1)\Big)^{1/\tau}. \tag{22}$$

Теперь норму $\big\|\sum_{j=1}^{m}\varphi_j\big\|_{\psi_1,\tau}$ оценим снизу. Введем обозначение $\bar\psi_2(t)=\dfrac{t}{\psi_2(t)}$.

Рассмотрим функцию

$$\sigma_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\bar\psi_2(1/k)}\cos(2\pi kx),\quad x\in[0,1].$$

Тогда в силу неравенства (11) имеем

$$\|\sigma_n\|^{*}_{\bar\psi_1,\tau'}\leqslant C\frac{\bar\psi_1(1/n)}{\bar\psi_2(1/(n+1))}(\log(n+1))^{1/\tau'}=C\frac{\psi_2(1/(n+1))}{\psi_1(1/(n+1))}(\log(n+1))^{1/\tau'}, \tag{23}$$

потому что, если $\dfrac{\psi_1}{\psi_2}\in SVL$, то $\dfrac{\bar\psi_1}{\bar\psi_2}\in SVL$, где $\tau'=\dfrac{\tau}{\tau-1}$, $1<\tau<\infty$.

Теперь рассмотрим тригонометрический полином

$$G_{\bar n}(\bar x)=\sum_{j=1}^{m}\prod_{k\in\{1,2,..,m\}\setminus\{j\}}e^{in_k2\pi x_k}\sum_{\nu_j=1}^{n_j}\frac{1}{\nu_j\bar\psi_2(1/\nu_j)}\cos(2\pi\nu_j x_j).$$

Повторяя рассуждения доказательства неравенства (17), можно убедиться в справедливости неравенства

$$\|G_n\|_{\bar\psi_1,\tau'} = \Big\| \sum_{j=1}^{m} g_j \Big\|_{\bar\psi_1,\tau'} \leqslant C\Big[\sum_{j=1}^{m} \left(\|g_j\|_{\bar\psi_1,\tau'}\right)^{\tau'} \Big]^{1/\tau'}, \tag{24}$$

где

$$g_j(\bar x) = \prod_{k\in\{1,2,..,m\}\setminus\{j\}} e^{in_k 2\pi x_k} \sum_{\nu_j=1}^{n_j} \frac{1}{\nu_j \bar\psi_2(1/\nu_j)} \cos(2\pi\nu_j x_j).$$

Теперь, учитывая, что $|\prod_{k\in\{1,2,..,m\}\setminus\{j\}} e^{in_k 2\pi x_k}| = 1$ в силу неравенства (23), из (24) получим

$$\|G_n\|_{\bar\psi_1,\tau'} \leqslant C\Big[\sum_{j=1}^{m} \Big(\frac{\psi_2(1/(n_j+1))}{\psi_1(1/(n_j+1))}\Big)^{\tau'} \log(n_j+1) \Big]^{1/\tau'}.$$

Так как $\dfrac{\psi_2}{\psi_1} \in SVL$, отсюда следует, что (см. доказательство неравенства (21))

$$\|G_n\|_{\bar\psi_1,\tau'} \leqslant C_0 \frac{\psi_2(\prod_{j=1}^{m}(n_j+1)^{-1})}{\psi_1(\prod_{j=1}^{m}(n_j+1)^{-1})} \Big(\log\Big(\prod_{j=1}^{m}(n_j+1) \Big)\Big)^{1/\tau'} \tag{25}$$

при $1 < \tau < \infty,\ \tau' = \dfrac{\tau}{\tau-1}$.

IV. Пусть $m = 2$.

$$\int_{I^2} \Big(\sum_{j=1}^{2} \varphi_j(\bar x) \Big)\Big(\sum_{l=1}^{2} g_l(\bar x) \Big) d\bar x$$

$$= \int_{I^2} e^{in_2 2\pi x_2} \sum_{\nu_1=1}^{n_1} \frac{1}{\nu_1\psi_2(1/\nu_1)} \cos(2\pi\nu_1 x_1) \cdot e^{in_2 2\pi x_2} \sum_{\nu_1=1}^{n_1} \frac{1}{\nu_1\bar\psi_2(1/\nu_1)} \cos(2\pi\nu_1 x_1) dx_1 dx_2$$

$$+ \int_{I^2} e^{in_1 2\pi x_1} \sum_{\nu_1=1}^{n_1} \frac{1}{\nu_1\psi_2(1/\nu_1)} \cos(2\pi\nu_1 x_1) \cdot e^{in_2 2\pi x_2} \sum_{\nu_2=1}^{n_2} \frac{1}{\nu_1\bar\psi_2(1/\nu_2)} \cos(2\pi\nu_2 x_2) dx_1 dx_2$$

$$+ \int_{I^2} e^{in_1 2\pi x_1} \sum_{\nu_2=1}^{n_2} \frac{1}{\nu_2\psi_2(1/\nu_2)} \cos(2\pi\nu_2 x_2) \cdot e^{in_2 2\pi x_2} \sum_{\nu_1=1}^{n_1} \frac{1}{\nu_1\bar\psi_2(1/\nu_1)} \cos(2\pi\nu_1 x_1) dx_1 dx_2$$

$$+ \int_{I^2} e^{in_1 2\pi x_1} \sum_{\nu_2=1}^{n_2} \frac{1}{\nu_2\psi_2(1/\nu_2)} \cos(2\pi\nu_2 x_2) e^{in_1 2\pi x_1} \sum_{\nu_2=1}^{n_2 1} \frac{1}{\nu_2\bar\psi_2(1/\nu_2)} \cos(2\pi\nu_2 x_2) dx_1 dx_2. \tag{26}$$

В силу ортогональности тригонометрической системы интегралы $\int_I e^{in_j 2\pi x_j} \cos(2\pi\nu_j x_j) dx_j = 0$ для чисел $\nu_j = 1, \dots, n_j - 1,\ j = 1, 2$. Поэтому, учитывая, что $\int_I (e^{in_j 2\pi x_j})^2 dx_j = 1,\ j = 1, 2$, из равенства (26) получим

$$\int_{I^2} \Big(\sum_{j=1}^{2} \varphi_j(\bar x) \Big)\Big(\sum_{l=1}^{2} g_l(\bar x) \Big) d\bar x = \int_0^1 \sum_{\nu_1=1}^{n_1} \frac{1}{\nu_1\psi_2(1/\nu_1)} \cos(2\pi\nu_1 x_1) \sum_{\nu_1=1}^{n_1} \frac{1}{\nu_1\bar\psi_2(1/\nu_1)} \cos(2\pi\nu_1 x_1) dx_1$$

$$+ \int_0^1 \sum_{\nu_2=1}^{n_2} \frac{1}{\nu_2\psi_2(1/\nu_2)} \cos(2\pi\nu_2 x_2) \sum_{\nu_2=1}^{n_2} \frac{1}{\nu_2\bar\psi_2(1/\nu_2)} \cos(2\pi\nu_2 x_2) dx_2. \tag{27}$$

Так как $\bar{\psi}_2(t) = \dfrac{t}{\psi_2(t)}$, то $\psi_2(1/\nu)\bar{\psi}_2(1/\nu) = 1/\nu$. Поэтому в силу равенства Парсеваля из формулы (27) получим

$$\int\limits_{I^2} \Big(\sum_{j=1}^{2}\varphi_j(\bar{x})\Big)\Big(\sum_{l=1}^{2} g_l(\bar{x})\Big) d\bar{x} = C\Big[\sum_{\nu_1=1}^{n_1}\frac{1}{\nu_1} + \sum_{\nu_2=1}^{n_2}\frac{1}{\nu_2}\Big] \asymp \log((n_1+1)(n_2+1)). \qquad (28)$$

Далее, методом математической индукции можно доказать, что (28) верно и в случае $m > 2$, т. е.

$$\int\limits_{I^m} \Big(\sum_{j=1}^{m}\varphi_j(\bar{x})\Big)\Big(\sum_{l=1}^{m} g_l(\bar{x})\Big) d\bar{x} \asymp \log\Big(\prod_{j=1}^{m}(n_j+1)\Big). \qquad (29)$$

Теперь, учитывая (25), (29), в силу соотношения (15) получим

$$\Big\|\sum_{j=1}^{m}\varphi_j\Big\|^*_{\psi_1,\tau} \geqslant C\Big\|\sum_{j=1}^{m}\varphi_j\Big\|_{\psi_1,\tau}$$

$$\geqslant C\frac{\psi_1(\prod_{j=1}^{m}(n_j+1)^{-1})}{\psi_2(\prod_{j=1}^{m}(n_j+1)^{-1})}\Big(\log\Big(\prod_{j=1}^{m}(n_j+1)\Big)\Big)^{1/\tau'}\int\limits_{I^m}\Big(\sum_{j=1}^{m}\varphi_j(\bar{x})\Big)\Big(\sum_{l=1}^{m} g_l(\bar{x})\Big) d\bar{x}$$

$$\geqslant C\frac{\psi_1(\prod_{j=1}^{m}(n_j+1)^{-1})}{\psi_2(\prod_{j=1}^{m}(n_j+1)^{-1})}\Big(\log\Big(\prod_{j=1}^{m}(n_j+1)\Big)\Big)^{1/\tau}.$$

Таким образом, при $\dfrac{\psi_1}{\psi_2} \in SVL$, $1 < \tau < \infty$ для полинома $\Im_{\bar{n}}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{m}\varphi_j(\bar{x})$ выполняется неравенство

$$\big\|\Im_{\bar{n}}\big\|_{\psi_1,\tau} \geqslant C\frac{\psi_1(\prod_{j=1}^{m}(n_j+1)^{-1})}{\psi_2(\prod_{j=1}^{m}(n_j+1)^{-1})}\Big(\log\Big(\prod_{j=1}^{m}(n_j+1)\Big)\Big)^{1/\tau}. \qquad (30)$$

Теперь, пользуясь неравенством (30) при $\tau = \tau_1$ и соотношением (22) при $\tau = \tau_2$, получим

$$\sup_{T_{\bar{n}}\neq 0}\frac{\|T_{\bar{n}}\|_{\psi_1,\tau_1}}{\|T_{\bar{n}}\|_{\psi_2,\tau_2}} \geqslant \frac{\|\Im_{\bar{n}}\|_{\psi_1,\tau_1}}{\|\Im_{\bar{n}}\|_{\psi_2,\tau_2}} \geqslant \frac{\psi_1(\prod_{j=1}^{m}(n_j+1)^{-1})}{\psi_2(\prod_{j=1}^{m}(n_j+1)^{-1})}\Big(\log\Big(\prod_{j=1}^{m}(n_j+1)\Big)\Big)^{1/\tau_1-1/\tau_2}$$

при $1 < \tau_1 < \tau_2 < \infty$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М.** Интерполяция линейных операторов. Москва: Наука, 1978. 400 с.
2. **Семенов Е.М.** Интерполяция линейных операторов в симметричных пространствах // Докл. АН СССР. 1965. Т. 164, № 4. С. 746–749.
3. **Sharpley R.** Space $\Lambda_\alpha(X)$ and interpolation. // J. Func. Anal. 1972. Vol. 11, no. 4. P. 479–513. doi: 10.1016/0022-1236(72)90068-7 .
4. **Стейн И., Вейс Г.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. Москва: Мир, 1974. 333 с.
5. **Jackson D.** Certain problems of closest approximation // Bull. Amer. Math. Soc. 1933. Vol. 39, no. 12. P. 889–906. doi: 10.1090/S0002-9904-1933-05759-2 .
6. **Никольский С.М.** Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. МИАН. 1951. Т. 38. С. 244–278.
7. **Бари Н.К.** Обобщение неравенств С. Н. Бернштейна и А. А. Маркова // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1954. Т. 18, № 2. С. 159–176.
8. **Ибрагимов И.И.** Экстремальные задачи в классе тригонометрических полиномов // Докл. АН СССР. 1958. Т. 121, № 3. С. 415–417.

9. **Потапов М.К.** Некоторые неравенства для полиномов и их производных // Вест. МГУ. Сер. Математика. Механика. 1960. № 2. С. 10–19.
10. **Nessel R.J., Wilmes G.**, Nikol'skii-type inequalities for trigonometric polynomials and entire functions of exponential type // J. Austral. Math. Soc. 1978. Vol. 25, no. 1. Ser. A. P. 7–18. doi: 10.1017/S1446788700038878 .
11. **Арестов В.В.** О неравенстве разных метрик для тригонометрических полиномов // Мат. зам. 1980. Т. 27, вып. 4. С. 539–547.
12. Arestov V.V., Glazyrina P.Yu. Sharp integral inequalities for fractional derivatives of trigonometric polynomials // J. Approxim. Theory. 2012. Vol. 164, no. 11. P. 1501–1512. doi: 10.1016/j.jat.2012.08.004 .
13. **Шерстнева Л.А.** Неравенства Никольского для тригонометрических полиномов в пространствах Лоренца // Вестн. МГУ. 1984. № 4. С. 75–79.
14. **Шерстнева Л.А.** О свойствах наилучших приближений Лоренца и некоторые теоремы вложения// Изв. вузов. Математика. 1987. Т. 10. С. 48–58.
15. **Ditzian Z., Prymak A.** Nikol'skii inequalities for Lorentz spaces // Rocky Mountain J. Math. 2010. Vol. 40, no. 1. P. 209–223. doi: 10.1216/RMJ-2010-40-1-209 .
16. **Gogatishvili A., Opic B., Tikhonov S., Trebels W.** Ulyanov-type inequalities between Lorentz–Zygmund spaces // J. Fourier Anal. Appl. 2014. Vol. 20, no. 5. P. 1020–1049. doi: 10.1007/s00041-014-9343-4 .
17. **Симонов Б.В.** О вложении классов Никольского в пространства Лоренца // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 4. С. 911–919.
18. **Родин В.А.** Теорема Харди — Литтльвуда для косинус-ряда в симметричном пространстве // Мат. заметки. 1976. Т. 20, вып. 2. С. 241–246.
19. **Johansson H.** Embedding of H_p^ω in some Lorentz spases. Research Report 6. Department of Mathematics, Umeå University. 1975. 36 p.

Поступила 31.03.2019
После доработки 19.05.2019
Принята к публикации 26.05.2019

Акишев Габдолла
д-р физ.-мат. наук, профессор
Евразийский Национальный университет имени Л. Н. Гумилева,
г. Нур–Султан, Республика Казахстан;
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург
e-mail: akishev_g@mail.ru

REFERENCES

1. Krein S.G., Petunin Yu.I., Semenov E.M. *Interpolation of linear operators.* Ser. Translat. Math. Monographs, vol. 54, Providence, R.I.: American Math. Soc., 1982, 375 p. Original Russian text published in Krein S.G., Petunin Yu.I., Semenov E.M. *Interpolyatsiya lineinykh operatorov.* Moscow: Nauka Publ., 1978. 400 p.
2. Semenov E.M. Interpolation of linear operators in symmetric spaces. *Sov. Math., Dokl.*, 1965, vol. 6, pp. 1294–1298.
3. Sharpley R. Space $\Lambda_\alpha(X)$ and interpolation. *J. Func. Anal.*, 1972, vol. 11, no. 4, pp. 479–513. doi: 10.1016/0022-1236(72)90068-7 .
4. Stein E.M., Weiss G. *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces.* Princeton: Princeton Univ. Press, 1971, 312 p. ISBN: 9781400883899 . Translated to Russian under the title *Vvedenie v garmonicheskii analiz na evklidovykh prostranstvakh*, Moscow: Mir Publ., 1974, 333 p.
5. Jackson D. Certain problems of closest approximation. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1933, vol. 39, no. 12, pp. 889–906. doi: 10.1090/S0002-9904-1933-05759-2 .
6. Nikol'skii S.M. Inequalities for entire functions of finite degree and their application in the theory of differentiable functions of several variables. *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, 1951, vol. 38, no. 38, pp. 244–278 (in Russian).
7. Bari N.K. Generalization of inequalities of S. N. Bernstein and A. A. Markov. *Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, 1954, vol. 18, no. 2, pp. 159–176 (in Russian).

8. Ibragimov I.I. Extremum problems in the class of trigonometric polynomials. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1958, vol. 121, no. 3, pp. 415–417 (in Russian).
9. Potapov M.K. Some inequalities for polynomials and their derivatives. *Vestnik Moskov. Univ. Ser. Mat. Mekh.*, 1960, no. 2, pp. 10–20.
10. Nessel R.J., Wilmes G. Nikol'skii-type inequalities for trigonometric polynomials and entire functions of exponential type. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, 1978, vol. 25, no. 1, pp. 7–18. doi: 10.1017/S1446788700038878 .
11. Arestov V.V. Inequality of different metrics for trigonometric polynomials. *Math. Notes*, 1980, vol. 27, no. 4, pp. 265–269. doi: 10.1007/BF01140526 .
12. Arestov V.V., Glazyrina P.Yu. Sharp integral inequalities for fractional derivatives of trigonometric polynomials // J. Approxim. Theory. 2012. Vol. 164, no. 11. P. 1501–1512. doi: 10.1016/j.jat.2012.08.004 .
13. Sherstneva L.A. Nikol'skij inequalities for trigonometric polynomials in Lorentz spaces. *Mosc. Univ. Math. Bull.*, 1984, vol. 39, no. 4, pp. 75–81.
14. Sherstneva L.A. On the properties of best Lorentz approximations and certain embedding theorems. *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, 1987, vol. 31, no. 10, pp. 62–73.
15. Ditzian Z., Prymak A. Nikol'skii inequalities for Lorentz spaces. *Rocky Mountain J. Math.*, 2010, vol. 40, no. 1, pp. 209–223. doi: 10.1216/RMJ-2010-40-1-209 .
16. Gogatishvili A., Opic B., Tikhonov S., Trebels W. Ulyanov-type inequalities between Lorentz–Zygmund spaces. *J. Fourier Anal. Appl.*, 2014, vol. 20, no. 5, pp. 1020–1049. doi: 10.1007/s00041-014-9343-4 .
17. Simonov B.V. Embedding Nikol'skii classes into Lorentz spaces. *Sib. Math. J.*, vol. 51, no. 4, pp. 728–744. doi: 10.1007/s11202-010-0074-8 .
18. Rodin V.A. The Hardy–Littlewood theorem for the cosine series in a symmetric space. *Math. Notes*, 1976, vol. 20, no. 2, pp. 693–696. doi: 10.1007/BF01155876 .
19. Johansson H. *Embedding of H_p^ω in some Lorentz spaces. Research Report 6.* Department of Mathematics, Umeå University, 1975, 36 p.

Received March 31, 2019
Revised May 19, 2019
Accepted May 26, 2019

Funding Agency: This work was supported by the Russian Academic Excellence Project (agreement no. 02.A03.21.0006 of August 27, 2013, between the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and Ural Federal University).

Gabdolla Akishev, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., L. N. Gumilyov Eurasian National University, Nur–Sultan, 100008 Republic Kazakhstan; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: akishev_g@mail.ru .

Cite this article as: G. Akishev. On the exactness of the inequality of different metrics for trigonometric polynomials in the generalized Lorentz space, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2019, vol. 25, no. 2, pp. 9–20 .