ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің 20 жылдығы және механика-математика факультеті «Механика» кафедрасының құрылғанына 10 жыл толуы аясында өтетін «МЕХАНИКА ЖӘНЕ МАТЕМАТИКАНЫҢ ӨЗЕКТІ МӘСЕЛЕЛЕРІ» атты Республикалық ғылыми-әдістемелік конференциясы

БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ

Республиканской научно-методической конференции «АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ МЕХАНИКИ И МАТЕМАТИКИ», посвященной 20-летию Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева и 10-летию основания кафедры «Механика» механико-математического факультета Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева

2016 жыл 14-15 қазан

Астана

ӘОЖ 531:510 (063)
КБЖ 22
М 49

В подготовке Сборника к печати принимали участие:
Джайчибеков Н.Ж., Ибраев А.Г., Бургумбаева С.К., Бостанов Б.О.

«Механика және математиканың өзекті мәселелері» атты Республикалық ғылыми-әдістемелік конференциясының БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ. Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің 20 жылдығы және механика-математика факультеті «Механика» кафедрасының құрылғанына 10 жыл толуына арналған = «Актуальные вопросы механики и математики», посвященной 20-летию Евразийского национального университета им.Л.Н. Гумилева и 10-летию основания кафедры «Механика» механико-математического факультета Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилев. СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ Республиканской научно-методической конференции. Қазақша, орысша. – Астана, 2016, 292 б.

ISBN 998-601-301-808-9

Жинаққа студентердің, магистранттардың, докоранттардың және ғалымдардың механика, математика, математикалық және компьютерлік модельдеу, механика және математиканы оқыту әдістемесінің өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

В Сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и ученых по актуальным вопросам механики, математики, математического и компьютерного моделирования и методика преподавания механики и математики.

Тексты докладов печатаются в авторской редакции

ISBN 998-601-301-808-9 ӘОЖ 531:510 (063)
КБЖ 22

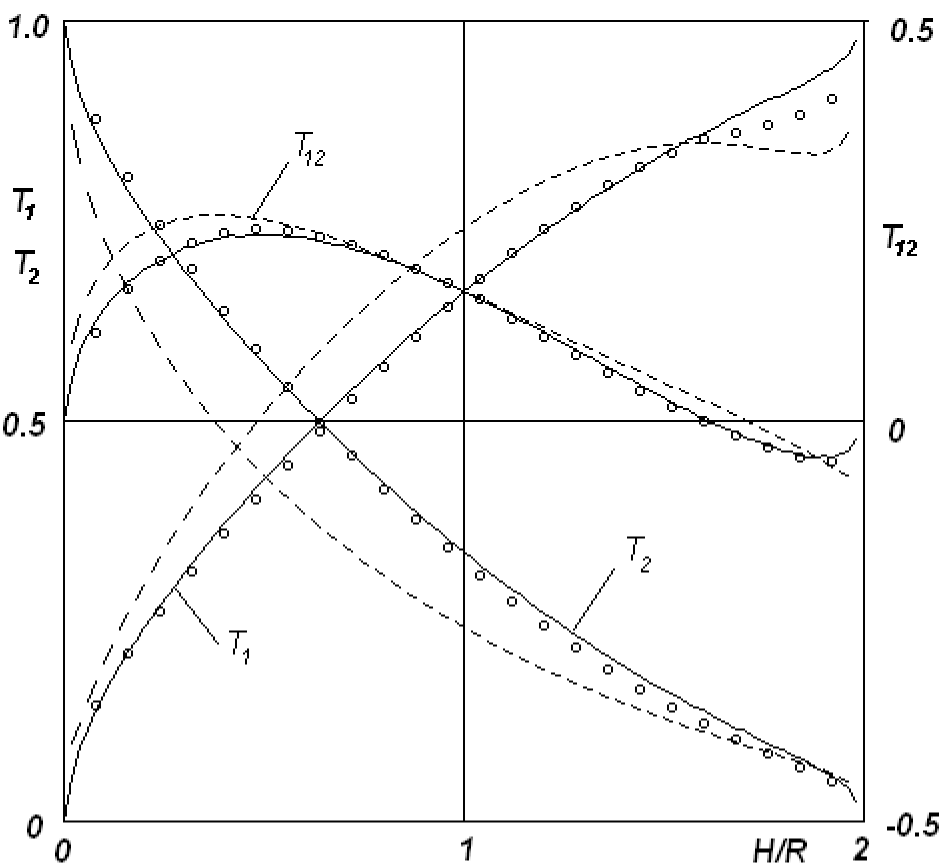

Рисунок 1 – Аппроксимация сил трения $D_1 / D_2 = 1$, $\mu_2 / \mu_1 = 0.1$

Список использованных источников

1. Матвеев С.К., Сидоров Д.Г. «Стационарное стратифицированное течение двух несжимаемых жидкостей в наклонной трубе». Международная научная конференция по механике «Седьмые Поляховские чтения». Санкт-Петербург, Россия, 2-6 февраля 2015 г.

УДК 625.122.627.824

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ “ЗЕМЛЯНОЕ ПОЛОТНО - ОСНОВАНИЕ”

Мухамбеталина Д.Ж., Исенова Ж.Ж., Дузбай А.

dana_61 @mail.ru

ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

На железных дорогах мира в настоящее время и в перспективе наблюдается общая тенденция к реализации скоростного и высокоскоростного движения пассажирских поездов. При введении скоростного движения возникают более сложные процессы взаимодействия пути и подвижного состава, чем при обычных скоростях. Например, в зоне контакта колеса и рельса образуются высокочастотные колебания, которые передаются подрельсовому основанию, вследствие чего происходит волнообразный износ рельса и расстройство балластного слоя, основной площадки и земляного полотна. Поэтому создание надежных методов расчета устойчивости системы “земляное полотно - основание” конечных размеров в сложных грунтовых условиях под действием статических и динамических нагрузок является весьма сложной задачей.

Все это вызывает необходимость проведения фундаментальных исследований с привлечением современного аппарата математики и механики деформируемого твердого тела, разработки нетрадиционных аналитических и численных методов решения поставленных задач и создания на их основе программных средств для анализа динамической устойчивости земляного полотна при совместной работе с верхним строением железнодорожного пути.

Изучения свободных колебаний системы “земляное полотно - основание” важны для выяснения влияния физико–механических свойств основания и окружающего массива сложного строения на резонансные амплитудно-частотные характеристики. С другой стороны, при изучении динамической реакции земляного полотна низшие частоты необходимы для формирования и решения основных разрешающих матричных уравнений движения.

В работе подробно излагается численная реализация свободных колебаний системы “земляное полотно - основание” на основе метода конечных элементов (МКЭ) в сочетании с итерационным методом в подпространстве.

Земляное полотно состоит из неоднородных слоев с различными физико-механическими свойствами. Упругое состояние каждого слоя описывается уравнениями обобщенного закона Гука [1,2]:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}, \qquad \varepsilon_y = -\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}, \qquad \varepsilon_z = -\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\nu\sigma_z}{E} = 0 \qquad (1)$$

Деформации элемента представляются вектором

$$\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z\}, \qquad \text{где} \quad \left\{\varepsilon_x = \frac{du}{dx}, \varepsilon_y = \frac{dv}{dy}, \varepsilon_z = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right\}.$$

Дифференциальные уравнения колебаний системы “земляное полотно - основание” можно представить в виде:

$$[M]\{U''(t)\} + [C]\{U'(t)\} + [K]\{U(t)\} = \{R(t)\}, \qquad (2)$$

где $\{R(t)\}$ - вектор внешних узлов сил, $\{U''(t)\}, \{U'(t)\}, \{U(t)\}$ - векторы узловых ускорений, скоростей и перемещений, [M],[C],[K] – соответственно, матрицы масс, затухания и жесткости системы.

Матричное уравнение свободных колебаний системы “земляное полотно - основание” получается из (2), когда эффект демпфирования и воздействие внешних сил отсутствуют т.е. [C]=0, $\{R\}$=0

$$[M]\{U''\} + [K]\{U\} = 0. \qquad (3)$$

Матрица жесткости четырехугольного квадратичного изпараметрического элемента вычисляется с помощью интеграла [3,4]:

$$[k] = \int_V [B]^T [D][B] dV = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [B]^T [D][B] \det[J] d\xi d\eta. \qquad (4)$$

Выражение интеграла (4) после применения квадратур Гаусса – Лежандра приводится к виду

$$[k] = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} H_i H_j [B]_{ij}^T [D][B]_{ij} \det[J]. \qquad (5)$$

Матрица жесткости системы [K] образуется путем суммирования матриц жесткости всех элементов

$$[K]=\sum_{i=1}^{k}[k_i].\qquad (6)$$

Матрица масс системы [M] формируется из матриц масс элементов аналогично матрице жесткости системы. Матрица масс четырехугольного квадратичного изопараметрического элемента имеет вид [3,4]:

$$[m]=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}H_iH_j\rho[P_{ij}]^T[P_{ij}]\det,\ .\qquad (7)$$

где $\lfloor P_{ijk}\rfloor$ - матрица, интерполирующая перемещения. Матрица масс системы получается путем суммирования матриц масс всех элементов.

$$[M]=\sum_{i=1}^{k}[m_i].\qquad (8)$$

Решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (3) можно записать в виде:

$$\{U\}=\{\varphi\}\sin(\omega(t-\alpha_0)).\qquad (9)$$

Подставляя (9) в (3), получим общую проблему собственных значений

$$[K]\{\varphi\}=\omega^2[M]\{\varphi\}.\qquad (10)$$

Введем обозначение $\lambda=\omega^2$, тогда (10) примет вид:

$$[K]\{\varphi\}=\lambda[M]\{\varphi\}.\qquad (11)$$

Для решения обобщенной проблемы собственных значений использован итеративный метод в подпространстве, основанный на алгоритме метода Якоби свойствах последовательности Штурма [5].

Основной целью в методе итераций в подпространстве является вычисление p наименьших собственных значений и соответствующих собственных векторов, удовлетворяющих соотношению

$$[K][\Phi]=[M][\Phi][\Lambda],\qquad (12)$$

где $[\Phi]=[\varphi_1,\varphi_2,.........,\varphi_n]$ и $[\Lambda]=diag(\lambda_i)$, i=1,2,…..…n.

Пусть $\{X_1\}$ представляет n начальных векторов, которые образуют начальное пространство E_1. Обратные итерации с векторами имеет вид:

$$[K][X_{k+1}]=[M][X_k],\ \text{k=1,2,………..n.}\qquad (13)$$

Векторы, вычисленные с помощью соотношения (13), образуют подпространство E_{k+1}; с каждой итерацией они становятся все более “параллельными” и ухудшают базис E_{k+1}. Поэтому для сохранения численной устойчивости необходимо построит ортогональный базис подпространства E_{k+1}. Для этого случая итерации проводятся по формулам:

$$[K][\overline{X}_{k+1}]=[M][X_k],\qquad (14)$$

$$[X_{k+1}]=[\overline{X}_{k+1}][R_{k+1}],\qquad (15)$$

где $[R_{k+1}]$ - верхняя треугольная матрица, выбранная так, что

$$[X_{k+1}^T][M][X_{k+1}]=[I],\qquad (16)$$

$$[\overline{X}_{k+1}]=[X_{k+1}]-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i[\varphi_i].\qquad (17)$$

Коэффициенты α_i в (17) получается из условия

[ц^T i] [M] { $\overline{X}_1$ }, i=1,2…… n и [ц^T i][M] [цj] = дij.

Умножая обе части (17) на ц^T i M, имеем

$$\alpha_i = [ц^{T}{}_{i}]\,[M]\,\{\bar{X}_1\},\ (i=1,2,\ldots\ldots,n). \qquad (18)$$

Предполагая, что начальные векторы $\{X_1\}$ не ортогональны к искомым собственным векторам $\{ц_1, ц_2, \ldots\ldots, ц_n\}$ в пределе получим

$$[X_{к+1}] \rightarrow [Ф],\ [R_{k+1}] \rightarrow [Л].$$

В итерациях по формулам (14) и (15) i-столбец из $[X_{\kappa+1}]$ сходится к $[ц_i]$ со скоростью, пропорциональной величине max $\{л_{i-1}/л_i, л_i/л_i+1\}$.

При итерационных методах необходимо на каждом шаге анализировать сходимость полученных приближений. Пусть на (k-1) и (k) – шаге итерации вычислены приближенные собственные значения $л_i^{(k)}$ и $л_i^{(k+1)}$, сходимость достигается при

$$\frac{\lambda_i^{(к+1)} - \lambda_i^{(к)}}{\lambda_i^{(к+1)}} \le \varepsilon, \qquad (i=1,2,\ldots\ldots,n). \qquad (19)$$

Эффективность выбранного метода объясняется, во-первых, возможностью выбора начального подпространства, достаточно близкого к искомым наименьшим собственным значениям; во- вторых, удобства алгоритма перехода от данного подпространства к другому, обеспечивающему “наилучшего” приближения собственных значений векторов. Кроме того, использование сдвигов и других ускоряющих процедур также способствует увеличению эффективности метода [5].

Список использованных источников

1. Безухов Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М.: Высшая школа, 1969, 512 с.
2. Теребушко О.И. Основы теории упругости и пластичности. М.: Наука, 1984, 319 с.
3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541с.
4. Сегерленд Л. Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. 392 с.
5. Бате К., Вильсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.: Мир, 1982. 442 с.

УДК 621.879.48

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СТРЕЛЫ РОТОРНОГО ЭКСКАВАТОРА ПО КРИТЕРИЮ ПРОЧНОСТИ

Нураков С., Калиев А.Б.

adilbekk@mail.ru

ЕНУ им.Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан

Роторный экскаватор с бесковшовым рабочим органом нижней разгрузки обладает рядом преимуществ по сравнению с традиционными конструкциями [1]. При этом областью его применения являются более прочные грунты – III и IV категории, что в свою очередь приводит к увеличению нагрузок на несущую конструкцию машины в целом и, в частности, стрелу, прочностной анализ которой рассматривается в данной работе.

Конструкция стрелы представляет собой сварную раму из продольных стальных балок, поперечных ребер жесткости и других конструктивных элементов. Материал – сталь простая углеродистая. Объемная модель объекта исследования, построенная в программной среде Solidworks, приведена на рисунке 1 [2, 3].