ӘОК 532.5

(1+1) ӨЛШЕМДІ ЖАЛПЫЛАНҒАН СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС ШРЕДИНГЕР ТЕҢДЕУІ ҮШІН САҚТАЛУ ЗАҢДАРЫ

Изгалиев Избасар
izbasar.enu@gmail.com
Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУниверситеті, Жалпы және Теориялық Физика кафедрасының студенті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі- Г.Н. Шайхова

Сызықты емес Шредингер теңдеуі дисперсиясы мен кубтық сызықты емес орталарда оралған толқындық пакетті сипаттайды. Бұл жағдай, мысалы, плазмада электромагниттік толқындардың таралуы кезінде кездеседі: бір жағынан плазма дисперсияланатын орта болса, екінші жағынан толқынның жеткілікті жоғары амплитудасы кезінде кейбір жағдайларда кубтық мүшемен жуықталуы мүмкін электромагниттік сызықтық емес көріне бастайды. Басқа мысал ретінде дисперсиясы бар сызықты емес кристалдарда жарықтың таралуы болып табылады: көп жағдайларда квадраттық сызықты емес аз немесе кристалл тордың орталық симметриясына байланысты теңдік нөлге тең, сондықтан тек кубтық мүшесі ғана есепке алынады [1-3]. Сызықты емес Шредингер теңдеуінің ең көп таралған қолданысы сызықтық емес оптикадағы сәулелердің өздігінен бағытталуы, толқынтұтқыш секілді әсер ететін электромагниттік импульстердің сызықтық емес оптикалық талшықтарда таралуын және судағы стокс толқындарының [8-9] көрсетілгендей тұрақтылығын модельдеуді қамтиды. Қарапайым дифференциалдық теңдеулерге қарағанда сызықты емес теңдеулерде, тіпті аз мөлшерде берілсе де, сақталу заңдарының толық жиыны көрсетілмейді [4-7].

Бұл берілген мақалада біз Лакс жұбының Риккати типті теңдеуі түрінен символдық есептеу арқылы жалпыланған сызықты емес Шредингер теңдеуі үшін бірнеше сақталу заңдарын аламыз.

Сақталу заңдары. (1+1) жалпыланған сызықты емес Шредингер теңдеуі былай жазылады:

$$\begin{aligned} & q_t + 2a_0 - ia_1 q_x q + a_2\left(q^2 r + \frac{1}{2}q_{xx}\right) + a_3\left(\frac{i}{4}(q_{xxx} - 4qq_x r - 2q^2 r_x) - \frac{i}{2}\left(q^2 r_x - rqq_x\right)\right) \\ & + a_4\left(-\frac{1}{8}q_{xxxx} + r_x qq_x + rq_x^2 + rqq_{xx} - \frac{1}{4}\left(qq_{xx} r + q^2 r_{xx} - qq_x r_x\right) + 2q^3 r^2\right). \end{aligned} \tag{1}$$

Лакс жұбы (1) теңдеу үшін былай жазылуы мүмкін

$$\Psi_x = U\Psi, \tag{2}$$

$$\Psi_t = V\Psi, \qquad (3)$$

мұндағы $\Psi = (\psi_1, \psi_2)^T$, және

$$U = \begin{pmatrix} -i\lambda & q \\ r & i\lambda \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix},$$

бұл жердегі A, B, C мынаған тең:

$$A = -\frac{1}{8}a_4\left(q_{xx}r + qr_{xx} - q_x r_x\right) + a_4 q^2 r^2 - \frac{i}{4}a_3\left(qr_x - rq_x\right) + \frac{1}{2}a_2 qr + a_0 +$$
$$+\left(-\frac{i}{4}a_4\left(qr_x - rq_x\right) + \frac{1}{2}a_3 qr + a_1\right)\lambda + \left(\frac{1}{2}a_4 qr + a_2\right)\lambda^2 + a_3\lambda^3 + a_4\lambda^4,$$
$$B = \frac{1}{8}a_4 q_{xxx} - a_4 rqq_x - \frac{i}{4}a_3(q_{xx} - 2q^2 r) - \frac{1}{2}a_2 q_x + ia_1 q +$$
$$+\left(-\frac{i}{4}a_4 q_{xx} - \frac{1}{2}a_3 q_x + \frac{i}{2}a_4 q^2 r + ia_2 q\right)\lambda + \left(-\frac{1}{2}a_4 q_x + iqa_3\right)\lambda^2 + iqa_4\lambda^3,$$
$$C = -\frac{1}{8}a_4 r_{xxx} + a_4 qrr_x - \frac{i}{4}a_3(r_{xx} - 2r^2 q) - \frac{1}{2}a_2 r_x + ia_1 r +$$
$$+\left(-\frac{i}{4}a_4 r_{xx} + \frac{1}{2}a_3 r_x + \frac{i}{2}a_4 r^2 q + ia_2 r\right)\lambda + \left(\frac{1}{2}a_4 r_x + ira_3\right)\lambda^2 + ira_4\lambda^3,$$

мұндағы λ- комплексті спектрлік параметр. $U_t - V_x + UV - VU = 0$ сәйкестік шартын пайдалану арқылы (1) теңдеу шығатынын көруге болады.

$\Gamma = \Psi_1 / \Psi_2$ өрнегін (2)-(3) теңдеулерге енгізгенде (1) теңдеуге сәйкес Г-Риккати типті теңдеуін аламыз

$$\Gamma_x = -r\Gamma^2 - 2i\lambda\Gamma + q. \qquad (4)$$

$\Gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n \lambda^{-n} / q$ кеңейтуін қолданып, λ дәрежесі бойынша жинақтап осыдан шыққан өрнектерді нөлге теңестіру арқылы Γ_n үшін рекурсивті теңдеуін аламыз.

$$\Gamma_1 = -\frac{i}{2}q^2, \quad \Gamma_2 = \frac{1}{4}qq_x, \quad \Gamma_3 = \frac{i}{8}qq_{xx} - \frac{1}{8}rq^3. \qquad (5)$$

Сонымен, $\left(\Psi_{2x}/\Psi_2\right)_t = \left(\Psi_{2t}/\Psi_2\right)_x$ және (5) пайдалана отырып, берілген теңдеу үшін шексіз сақталу заңдарын аламыз.

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_i = \frac{\partial}{\partial x}J_i, \quad (i = 1, 2, 3, \ldots), \qquad (6)$$

мұндағы ρ_i және J_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ сәйкесінше сақталу тығыздықтары мен сақталу ағындары. Ендігі төменде берілген екі жағдай бойынша алғашқы үш сақталу заңдарын жазайық.

1-жағдай: $a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = -2i, a_3 = -4i, a_4 = -2i, r = \mp q^*$

$$\rho_1 = \mp \frac{1}{2}|q|^2,$$

$$J_1 = \mp \frac{1}{8} q q^*_{xxx} - |q|^4 \mp \frac{1}{2} q q^*_{xx} \pm \frac{1}{2} q q^*_x \pm \frac{1}{8} q_x q^*_{xx} \mp \frac{1}{2}|q_x|^2 \mp \frac{1}{2} q_x q^* \mp \frac{1}{8} q_{xx} q^*_x \mp \frac{i}{2} q_{xx} q^* - \frac{i}{2}|q|^4 - \\ - \frac{9}{8} q^2 q^* q^*_x + \frac{1}{4} q q_x q^{*2},$$

$$\rho_2 = \mp \frac{i}{4} q_x q^*,$$

$$J_2 = \mp \frac{i}{16} q_x q^*_{xxx} - \frac{i}{2}|q|^2|q_x|^2 \mp \frac{i}{4} q_x q^*_{xx} \pm \frac{i}{4}|q_x|^2 \pm \frac{i}{16}|q_{xx}|^2 \mp \frac{1}{4} q_{xx} q^*_x \pm \frac{i}{8}|q|^6 \mp \frac{i}{4} q_{xx} q^* - \frac{i}{4}|q|^4 - \\ - \frac{i}{2} q q_x q^{*2} + \frac{i}{16} q^2 q^* q^*_{xx} - \frac{1}{4} q^2 q^* q^*_x + \frac{i}{8} q q_{xx} q^{*2},$$

$$\rho_3 = \frac{1}{8}\left(\mp |q|^4 \pm q^* q_{xx}\right),$$

$$J_3 = \pm \frac{1}{32} q_{xx} q^*_{xxx} + \frac{1}{4}|q|^2 q_{xx} q^*_x \pm \frac{1}{4}|q|^6 \pm \frac{1}{8}|q_{xx}|^2 \mp \frac{1}{8} q_{xx} q^*_x + \frac{1}{32} q^2 q^* q^*_{xxx} \pm \frac{1}{4} q^3 q^{*2} q^*_x + \frac{1}{8} q^2 q^* q^*_{xx} - \frac{1}{8} q^2 q^* q^*_x,$$

2-жағдай: $a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = -2i, a_3 = 0, a_4 = -2i, r = \mp \bar{q}$,

$$\rho_1 = \mp \frac{1}{2}|q|^2,$$

$$J_1 = \mp \frac{1}{8} q \bar{q}_{xxx} \pm \frac{1}{2} q \bar{q}_x \pm \frac{1}{8} q_x \bar{q}_{xx} \mp \frac{1}{2}|q_x|^2 \mp \frac{1}{2} q_x \bar{q} \mp \frac{1}{8} q_{xx} \bar{q}_x - \frac{9}{8} q^2 \bar{q} \bar{q}_x + \frac{1}{4} q q_x \bar{q}^2,$$

$$\rho_2 = \mp \frac{i}{4} q_x \bar{q},$$

$$J_2 = \mp \frac{i}{16} q_x \bar{q}_{xxx} \pm \frac{i}{4}|q_x|^2 \pm \frac{i}{16}|q_{xx}|^2 \pm \frac{i}{8}|q|^6 \mp \frac{i}{4} q_{xx} \bar{q} - \frac{i}{4}|q|^4 - \frac{i}{2}|q|^2|q_x|^2 + \frac{i}{16} q^2 \bar{q} \bar{q}_{xx} + \frac{i}{8} q q_{xx} \bar{q}^2,$$

$$\rho_3 = \frac{1}{8}\left(\mp |q|^4 \pm \bar{q} q_{xx}\right),$$

$$J_3 = \pm \frac{1}{32} q_{xx} \bar{q}_{xxx} + \frac{1}{4}|q|^2 q_{xx} \bar{q}_x \mp \frac{1}{8} q_{xx} \bar{q}_x + \frac{1}{32} q^2 \bar{q} \bar{q}_{xxx} - \frac{1}{8} q^2 \bar{q} \bar{q}_x.$$

Қорытынды. Осы мақалада кейбір сызықты емес эволюциялық теңдеулер үшін шексіз көптеген сақталу заңдары жүйелі түрде Лакс жұбының Рикатти, түрінен қарапайым түрде құрылады. Мұнда зерттелген (1+1) өлшемді жалпыланған сызықты емес Шредингер теңдеуі математикалық физикадағы қызығушылық пен маңыздылықты қамтиды. Шексіз көптеген сақталу заңдарының бар болуы осы модельдердің толығымен интеграцияланатын қасиетін көрсетеді.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Ablowitz M. J., Clarkson P. A. Solitons Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering // Cambridge University Press: Cambridge, 1991. P. 516.

2. Ablowitz M. J., Segur H. Solitons and the Inverse Scattering Transform // SIAM: Philadelphia, 1981. P. 424.

3. Wazwaz A. Partial differential equations and solitary waves theory. Springer, 2009. P.74

4. Qi F., Ju H., Li X. Conservation laws and Darboux transformation for the coupled cubic–quintic nonlinear Schrödinger equations with variable coefficients in nonlinear optics // Nonlinear Dynamic. 2016. P. 1203–1216.

5. Zhang Zh. Conservation laws of partial differential equations: Symmetry, adjoint symmetry and nonlinear self-adjointness // Computers and Mathematics with Applications 74 - 2017. P. 3129–3140.

6. Hereman W., Colagrosso M., Sayers R., Ringler A., Deconinck,B., Nivala M., Hickman M. S. In Differential Equations with Symbolic Computation// Birkhauser Verlag: Basel 2005. P. 1355-1377.

7. Hereman W., Sanders J. A., Sayers J., Wang J. P. In Group Theory and Numerical Methods, CRM Proc. Lect. Ser. 39, Winternitz, P. Gomez-Ullate, D., //AMS:Providence, Rhode Island, 2005. P. 267-282.

8. Lu X., Peng M. Systematic construction of infinitely many conservation laws for certain nonlinear evolution equations in mathematical physics // Commun Nonlinear Sci Numer Simulat- 2013. P. 2304-2312

9. Bruzón M. S., Garrido T. M., de la Rosa R. Conservation laws and exact solutions of a Generalized Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equation // Chaos, Solitons and Fractals. 2016. P. 578–583.