



БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

Республикалық ғылыми-практикалық конференция

«Математикалық және компьютерлік модельдеудің заманауи мәселелері

Қазақстанның цифрлы индустриясының дамуы жағдайында»

3-5 мамыр 2018 жыл, Астана, Қазақстан

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ

Республиканская научно-практическая конференция

«Современные проблемы математического и компьютерного моделирования

в условиях развития цифровой индустрии Казахстана»

3-5 мая 2018 года, Астана, Казахстан

ӘОЖ 004+519+316

КБЖ 22

М 49

В подготовке Сборника принимали участие:

Адамов А.А., Нугманова Г.Н., Сергибаев Р.А., Байдавлетов А.Т.

Математикалық және компьютерлік моделдеудің заманауи мәселелері Қазақстанның цифрлы индустриясының дамуы жағдайында: Республикалық ғылыми-практикалық конференциясының БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ = Современные проблемы математического и компьютерного моделирования в условиях развития цифровой индустрии Казахстана: СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ Республиканской научно-практической конференции. Қазақша, орысша, ағылшынша. – Астана, 2018, 161 б.

ISBN 978-601-337-014-9

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докторанттардың және ғалымдардың механика, математика, математикалық және компьютерлік моделдеу, математиканы оқыту әдістемесінің өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

В Сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и ученых по актуальным вопросам механики, математики, математического и компьютерного моделирования и методики преподавания математики.

Тексты докладов представлены в авторской редакции

ISBN 978-601-337-014-9

ӘОЖ 004+519+316

КБЖ 22.1

n-летнее смешанное страхование:

$$Z_{x:n} = \begin{cases} v^n, & T_x > n \\ v^{T_x}, & T_x \leq n \end{cases}, \quad A_{x:n} = EZ_{x:n}$$

Пожизненное страхование, отсроченное на *m* лет:

$${}_mZ_x = \begin{cases} 0, & T_x \leq m \\ v^{T_x}, & T_x > m \end{cases}$$

$${}_mA_x = \int_m^{\infty} v^t f_x(t) dt = \frac{1}{v^x s(x)} \int_m^{\infty} v^t f(t) dt$$

где

${}_mZ_x$ - величина страхового возмещения, приведенная на момент заключения для пожизненного страхования, отсроченного на *m* лет застрахованного в возрасте *x* лет;

${}_mA_x$ - разовая нетто-премия для пожизненного страхования, отсроченного на *m* лет, застрахованного в возрасте *x* лет.[6]

Рассчитаем разовые нетто-премии при 1-5-10-летнем смешанном страховании мужчин в возрасте *x*=18,20,55 лет с выплатой страховой суммы в конце года смерти. Эффективная годовая процентная ставка *i* = 5%.

Таблица 2
Разовые нетто-премии

	1	5	10
18	0,907091	0,784162	0,616726
40	0,907293	0,784543	0,622791
55	0,907845	0,791422	0,647534

Рассчитаем разовые нетто-премии при 1-5-10-летнем смешанном страховании женщин в возрасте *x*=18,20,55 лет с выплатой страховой суммы в конце года смерти. Эффективная годовая процентная ставка *i* = 5%.[7]

Таблица 3
Разовые нетто-премии

	1	5	10
18	0,907055	0,783778	0,614952
40	0,907121	0,784434	0,617924
55	0,907368	0,786818	0,628103

Список использованных источников

1. Г.И.Фалин. Математические основы теории страхования жизни и пенсионных схем. 3-е издание М.: АНКЦИЛ 2007.304с.
2. И.И.Елисеева. Практикум по эконометрике М.: Финансы и статистика 2003. 192с
3. И. Елисеева [и др.] ; под ред. И. И. Елисеевой. — М. : Издательство Юрайт, 2015. — 449 с.
4. Н.Бауэрс. Актуарная математика. Под ред. В.К.Малиновского-М.: Янус-К 2001. 656с.
5. Г.И.Фалин, А.И.Фалин Актуарная математика в задачах, 2-е издание М.: Физматлит 2004. 240с.
6. Г.И.Фалин Математический анализ рисков в страховании Москва: Российский юридический издательский дом 1994.
7. Адамчук Н.Г. Экономические основы страхования жизни. Страховое дело № 9–2003, с. 26–38

**ВЛИЯНИЕ ВИБРИРУЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ НА ДИНАМИКУ КАТКА
СО СМЕЩЕННЫМ ЦЕНТРОМ МАСС
Берсүгір М.Ә., Алимжанов М.Д., Айқын Айбек**

Динамика катка движущегося по вибрирующей поверхности, в общем случае рассматривались многими авторами, наиболее существенные результаты достигнуты в работе Блехмана И.И. [1]. В этих работах учитывались малые углы колебания, что вносит значительные упрощения в динамику поведения системы.

В рассматриваемой работе получены аналитические решения нелинейных дифференциальных уравнений движения катка методом частичной дискретизации, разработанного профессором А.Н.Тюреходжаевым [2].

Рассмотрим движение катка происходящего под действием силы тяжести mg и реакции поверхности N приложенной в точке P . Будем считать, что центр тяжести катка не совпадает с его геометрическим центром (Рис. 1).

Пусть плоскость совершает поступательные гармонические колебания по закону $\xi = A \sin(\omega t)$, направленные под углом β к вибрирующей поверхности.

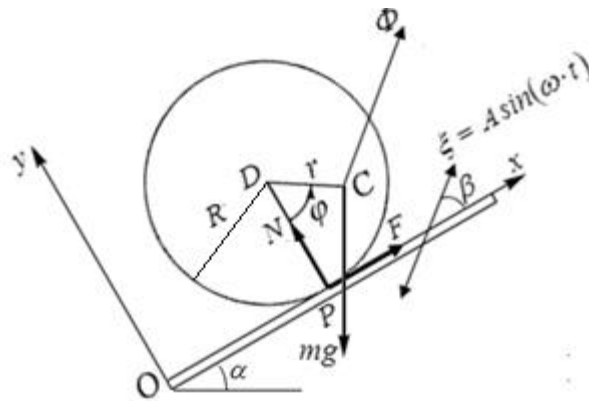


Рис. 1. Схема движения катка по шероховатой наклонной вибрирующей поверхности

Здесь: A, ω – амплитуда и частота колебаний, t – время.

Инерционные свойства катка характеризуются массой m и моментом инерции J_C относительно оси проходящей через центр масс C . Положение катка будем задавать координатами центра масс x_C, y_C в системе координат Oxy , связанной с вибрирующей поверхностью и углом поворота φ .

Будем считать, что трение скольжения F (трением качения пренебрегаем) подчиняется закону Амонтона-Кулона:

$$F \leq fN,$$

где f – коэффициент трения скольжения.

В данной работе будем рассматривать безотрывное движение катка.

В относительном движении ко всем действующим силам необходимо добавить переносную силу инерции:

$$\Phi = m \cdot A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t).$$

Относительное движение катка описывается системой дифференциальных уравнений, вытекающих из общих теорем динамики:

$$\begin{aligned}
m\ddot{x}_C &= F + \Phi \cos \beta - mg \sin \alpha, \\
m\ddot{y}_C &= N - mg \cos \alpha + \Phi \sin \beta, \\
J_C \ddot{\varphi} &= -F(R - r \cos \varphi) + Nr \sin \varphi,
\end{aligned} \tag{1}$$

где R – радиус катка; r – смещение центра масс катка от его геометрического центра; g – ускорения свободного падения.

Систему дифференциальных уравнений (1) рассмотрим совместно с начальными условиями:

$$t = 0: \quad \varphi = \varphi_0, \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0. \tag{2}$$

Из условия отсутствия скольжения следует, что во все время движения должны выполняться равенства:

$$\dot{x}_C = (R + r \cos \varphi) \dot{\varphi}; \quad \dot{y}_C = r \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}.$$

Следовательно,

$$\ddot{x}_C = (R + r \cos \varphi) \ddot{\varphi} - r \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2; \quad \ddot{y}_C = r \sin \varphi \cdot \ddot{\varphi} + r \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2. \tag{3}$$

Из первых двух уравнений (1) найдем составляющие реакций поверхности в зависимости от φ , $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$:

$$\begin{aligned}
N &= mr(\sin \varphi \cdot \ddot{\varphi} + \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2) + mg \cos \alpha - mA\omega^2 \sin(\omega t) \sin \beta, \\
F &= m[(R + r \cos \varphi) \ddot{\varphi} - r \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2] - mA\omega^2 \sin(\omega t) \cos \beta + mg \sin \alpha.
\end{aligned} \tag{4}$$

Подставив выражение (4) в третье уравнение, системы дифференциальных уравнений (1), придем к уравнению, описывающее изменение угла поворота катка в виде:

$$\ddot{\varphi} - \frac{rR \sin \varphi}{\frac{J_C}{m} + (R^2 - r^2)} \dot{\varphi}^2 - \frac{A\omega^2 \sin(\omega t) [R \cos \beta - r \cos(\beta + \varphi)] - g [R \sin \alpha - r \sin(\alpha + \varphi)]}{\frac{J_C}{m} + (R^2 - r^2)} = 0. \tag{5}$$

Для решения уравнение (5), используем метод частичной дискретизации нелинейных дифференциальных уравнений [2]. Тогда уравнение (5) примет вид:

$$\begin{aligned}
\ddot{\varphi} &= \frac{1}{2 \left[\frac{J_C}{m} + (R^2 - r^2) \right]} \sum_{i=1}^n (t_i + t_{i+1}) \left\{ rR \sin \varphi(t_i) \dot{\varphi}^2(t_i) + A\omega^2 \sin(\omega t_i) [R \cos \beta - r \cos(\beta + \varphi(t_i))] - \right. \\
&- g [R \sin \alpha - r \sin(\alpha + \varphi(t_i))] \left. \right\} \delta(t - t_i) - \left\{ rR \sin \varphi(t_{i+1}) \dot{\varphi}^2(t_{i+1}) + A\omega^2 \sin(\omega t_{i+1}) \times \right. \\
&\times [R \cos \beta - r \cos(\beta + \varphi(t_{i+1}))] - g [R \sin \alpha - r \sin(\alpha + \varphi(t_{i+1}))] \left. \right\} \delta(t - t_{i+1}),
\end{aligned} \tag{6}$$

где $\delta(t)$ – дельта функция Дирака.

Дважды интегрируя выражения (6) получим его общее решение в виде:

$$\begin{aligned}
\varphi(t) = & \frac{1}{2 \left[\frac{J_C}{m} + (R^2 - r^2) \right]} \sum_{i=1}^n (t_i + t_{i+1}) \left\{ rR \sin \varphi(t_i) \dot{\varphi}^2(t_i) + A \omega^2 \sin(\omega t_i) + [R \cos \beta - r \cos(\beta + \varphi(t_i))] - \right. \\
& - g [R \sin \alpha - r \sin(\alpha + \varphi(t_i))] \left. \right\} (t - t_i) H(t - t_i) - \left\{ rR \sin \varphi(t_{i+1}) \dot{\varphi}^2(t_{i+1}) + A \omega^2 \sin(\omega t_{i+1}) \times \right. \\
& \times [R \cos \beta - r \cos(\beta + \varphi(t_{i+1}))] - g [R \sin \alpha - r \sin(\alpha + \varphi(t_{i+1}))] \left. \right\} (t - t_{i+1}) H(t - t_{i+1}) \left. \right\} + C_1 t + C_2,
\end{aligned} \tag{7}$$

где $H(t)$ – функция Хевисайда; C_1, C_2 – постоянные интегрирования.

Используя начальные условия (2), представим решение в виде:

$$\begin{aligned}
\varphi(t) = & \frac{1}{2 \left[\frac{J_C}{m} + (R^2 - r^2) \right]} \sum_{i=1}^n (t_i + t_{i+1}) \left\{ rR \sin \varphi(t_i) \dot{\varphi}^2(t_i) + A \omega^2 \sin(\omega t_i) [R \cos \beta - r \cos(\beta + \varphi(t_i))] - \right. \\
& - g [R \sin \alpha - r \sin(\alpha + \varphi(t_i))] \left. \right\} (t - t_i) H(t - t_i) - \left\{ rR \sin \varphi(t_{i+1}) \dot{\varphi}^2(t_{i+1}) + A \omega^2 \sin(\omega t_{i+1}) \times \right. \\
& \times [R \cos \beta - r \cos(\beta + \varphi(t_{i+1}))] - g [R \sin \alpha - r \sin(\alpha + \varphi(t_{i+1}))] \left. \right\} (t - t_{i+1}) H(t - t_{i+1}) \left. \right\} + \dot{\varphi}_0 t + \varphi_0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Аналитические выражения угла поворота $\varphi(t_j)$ и угловой скорости $\dot{\varphi}(t_j)$ катка в моменты времени t_j находим из следующих алгебраических уравнений:

при $j = 1$;

$$\varphi(t_1) = \dot{\varphi}_0 t_1 + \varphi_0,$$

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi}(t_1) = & \frac{1}{2 \left[\frac{J_C}{m} + (R^2 - r^2) \right]} (t_1 + t_2) \left\{ rR \sin \varphi(t_1) \dot{\varphi}^2(t_1) + A \omega^2 \sin(\omega t_1) [R \cos \beta - r \cos(\beta + \varphi(t_1))] - \right. \\
& - g [R \sin \alpha - r \sin(\alpha + \varphi(t_1))] \left. \right\} + \dot{\varphi}_0,
\end{aligned}$$

при $j = 2$;

$$\begin{aligned}
\varphi(t_2) = & \frac{1}{2 \left[\frac{J_C}{m} + (R^2 - r^2) \right]} (t_1 + t_2) \left\{ rR \sin \varphi(t_1) \dot{\varphi}^2(t_1) + A \omega^2 \sin(\omega t_1) [R \cos \beta - r \cos(\beta + \varphi(t_1))] - \right. \\
& - g [R \sin \alpha - r \sin(\alpha + \varphi(t_1))] \left. \right\} (t_2 - t_1) + \dot{\varphi}_0 t_2 + \varphi_0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t_2) = & \frac{1}{2 \left[\frac{J_C}{m} + (R^2 - r^2) \right]} (t_1 + t_2) \left\{ rR \sin \varphi(t_1) \dot{\varphi}^2(t_1) + A \omega^2 \sin(\omega t_1) [R \cos \beta - r \cos(\beta + \varphi(t_1))] \right\} - \\ & - g [R \sin \alpha - r \sin(\alpha + \varphi(t_1))] \left\{ + \frac{1}{2 \left[\frac{J_C}{m} + (R^2 - r^2) \right]} (t_3 - t_1) \left\{ rR \sin \varphi(t_2) \dot{\varphi}^2(t_2) + A \omega^2 \sin(\omega t_2) \times \right. \right. \\ & \times [R \cos \beta - r \cos(\beta + \varphi(t_2))] - g [R \sin \alpha - r \sin(\alpha + \varphi(t_2))] \left. \right\} + \dot{\varphi}_0, \end{aligned}$$

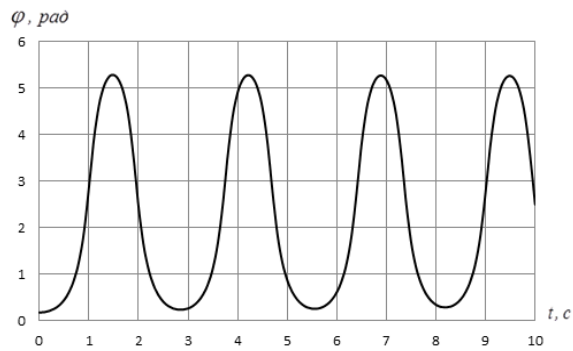
при $j = \overline{3, n}$;

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t_j) = & \frac{1}{2 \left[\frac{J_C}{m} + (R^2 - r^2) \right]} (t_1 + t_2) \left\{ rR \sin \varphi(t_1) \dot{\varphi}^2(t_1) + A \omega^2 \sin(\omega t_1) [R \cos \beta - r \cos(\beta + \varphi(t_1))] \right\} - \\ & - g [R \sin \alpha - r \sin(\alpha + \varphi(t_1))] \left\{ (t_j - t_1) + \frac{1}{2 \left[\frac{J_C}{m} + (R^2 - r^2) \right]} \sum_{i=2}^j (t_{i+1} - t_{i-1}) \left\{ rR \sin \varphi(t_i) \dot{\varphi}^2(t_i) + \right. \right. \\ & + A \omega^2 \sin(\omega t_i) [R \cos \beta - r \cos(\beta + \varphi(t_i))] - g [R \sin \alpha - r \sin(\alpha + \varphi(t_i))] (t_j - t_i) + \dot{\varphi}_0 t_j + \varphi_0, \end{aligned} \quad (20)$$

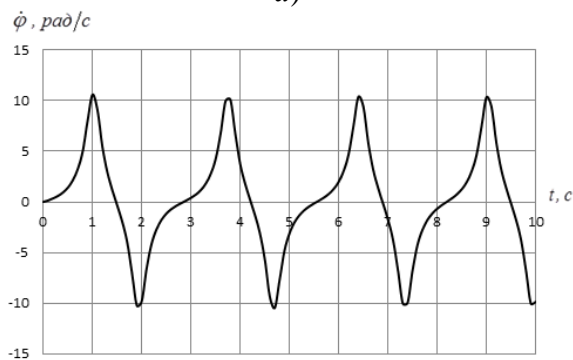
$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t_j) = & \frac{1}{2 \left[\frac{J_C}{m} + (R^2 - r^2) \right]} (t_1 + t_2) \left\{ rR \sin \varphi(t_1) \dot{\varphi}^2(t_1) + A \omega^2 \sin(\omega t_1) [R \cos \beta - r \cos(\beta + \varphi(t_1))] \right\} - \\ & - g [R \sin \alpha - r \sin(\alpha + \varphi(t_1))] \left\{ + \frac{1}{2 \left[\frac{J_C}{m} + (R^2 - r^2) \right]} \sum_{i=2}^j (t_{i+1} - t_{i-1}) \left\{ rR \sin \varphi(t_i) \dot{\varphi}^2(t_i) + \right. \right. \\ & + A \omega^2 \sin(\omega t_i) [R \cos \beta - r \cos(\beta + \varphi(t_i))] - g [R \sin \alpha - r \sin(\alpha + \varphi(t_i))] (t_j - t_i) + \dot{\varphi}_0. \end{aligned}$$

На рис. 2, 3 приведены кривые изменения угла поворота φ и угловой скорости $\dot{\varphi}$ катка для конкретных значений параметров $m = 50 \text{ кг}$, $\beta = 0,524 \text{ рад.}$, $\alpha = 0,105 \text{ рад.}$, $A = 0,0005 \text{ м}$, $\omega = 1 \text{ рад/с}$, $\varphi(0) = 0,175 \text{ рад.}$, $\dot{\varphi}(0) = 0$.

Из рис. 1 видно что, при заданных параметрах систем угол размаха колебаний составляет около $5,3 \text{ рад}$, период колебаний находится в пределах $2,5 \text{ с}$. Угловая скорость колебания катка при тех же параметрах системы имеет полуразмахи свыше 10 рад/с . Период этих же колебаний находится в пределах $2,8 \text{ с}$. При этом максимальные значения угла колебаний φ соответствуют минимальным значениям угловой скорости $\dot{\varphi}$. Это обстоятельство подтверждает правоту исследований и согласуется с общей теорией колебательных процессов в механике.



a)

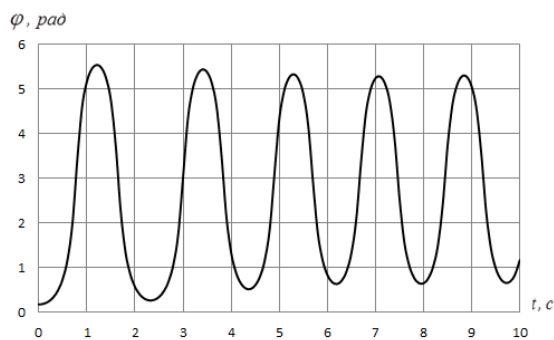


б)

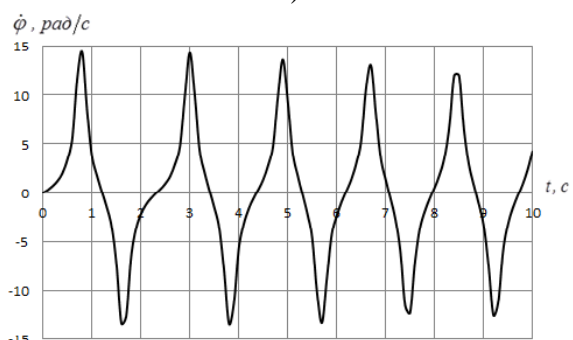
$$R = 0,25 \text{ м}, \quad r = 0,15 \text{ м}$$

Рис. 2. Кривые изменения: а) угла поворота φ ; б) угловой скорости $\dot{\varphi}$ катка

На рис. 2 представлены графики угла поворота φ и угловой скорости $\dot{\varphi}$ катка при смещении центра масс от его геометрического центра на величину $r = 0,2 \text{ м}$. Параметры системы останутся неизменными.



a)



б)

$$R = 0,25 \text{ м}, \quad r = 0,2 \text{ м}$$

Рис. 3. Кривые изменения: а) угла поворота φ ; б) угловой скорости $\dot{\varphi}$ катка

Из графиков следует, что при смещении центра масс, происходит изменение угла размаха колебаний до $5,5 \text{ rad}$, период уменьшается и составляет $1,8 \text{ с}$. Угловая скорость колебания катка имеет полуразмахи свыше 14 рад/с . Период составляет $1,9 \text{ с}$.

Из анализа кривых изменения угла поворота φ и угловой скорости $\dot{\varphi}$ следуют, что в целом характер колебаний имеет тенденцию к затуханию. Кроме этого полученные графики показывают, что при увеличении смещения центра масс катка от его геометрического центра, приводит к увеличению угла размаха колебаний. Однако период этих колебаний снижается.

Список используемых источников

1. Блехман И.И. Вибрационная механика. М.: Наука. 1994.
2. Tyurehodzhaev A.N. *Analytical solutions of nonlinear equations and differential equations with variable coefficients*. Proceedings of the «Actual Problems of Mechanics and Engineering» IV International Scientific Conference, II, Almaty, 40-57 (2014).

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГЛАДКОГО СОПРЯЖЕНИЯ ТРАЕКТОРИИ

Бостанов Б.О., Мухамбеталина Д.Ж., Исенова Ж.Ж.

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

E-mail: bostanov_bayandy@mail.ru

Рассматривается движение тела по траектории комбинированной формы, состоящей из полудуг окружности и параболы (коники). В месте сопряжения нет гладкости соединения, т.е. нет общей касательной линии, возникает скачок по скорости. Для того чтобы не было скачка предлагается вставить между дугами переходной участок, математической моделью которого является коника [1-2].

Пусть для движения некоторой материальной точки требуется формировать гладкую комбинированную беговую дорожку (траекторию), состоящей из дуг окружности

