EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY

БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

Республикалық ғылыми-практикалық конференция

«Математикалық және компьютерлік модельдеудің заманауи мәселелері Қазақстанның цифрлы индустриясының дамуы жағдайында»

3-5 мамыр 2018 жыл, Астана, Қазақстан

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ

Республиканская научно-практическая конференция

«Современные проблемы математического и компьютерного моделирования в условиях развития цифровой индустрии Казахстана»

3-5 мая 2018 года, Астана, Казахстан

ӘОЖ 004+519+316
КБЖ 22
М 49

В подготовке Сборника принимали участие:
Адамов А.А., Нугманова Г.Н., Сергибаев Р.А., Байдавлетов А.Т.

Математикалық және компьютерлік моделдеудің заманауи мәселелері Қазақстанның цифрлы индустриясының дамуы жағдайында: Республикалық ғылыми-практикалық конференциясының БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ = Современные проблемы математического и компьютерного моделирования в условиях развития цифровой индустрии Казахстана: СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ Республиканской научно-практической конференции. Қазақша, орысша, ағылшынша. – Астана, 2018, 161 б.

ISBN 978-601-337-014-9

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докоранттардың және ғалымдардың механика, математика, математикалық және компьютерлік моделдеу, математиканы оқыту әдістемесінің өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

В Сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и ученых по актуальным вопросам механики, математики, математического и компьютерного моделирования и методики преподавания математики.

Тексты докладов представлены в авторской редакции

ISBN 978-601-337-014-9 ӘОЖ 004+519+316
КБЖ 22.1

Для закрепления пройденной темы ученика выдаются задания разной сложности, которые будут оценены впоследствии соответственно уровню сложности.

Таким образом построенное занятие решает следующие методические задачи:

- развивать логическое мышление;
- обучать решению логических задач;
- развивать память, внимание, смекалку, быстроту решений;
- воспитывать культуру общения, прививать интерес к математике

Большую помощь в решении обсуждаемой методической проблемы могут оказать информационно-коммуникационные методы и технологии (ИКТ) в обучении, которые дают возможность оживить урок, то есть вызвать интерес к предмету.

Так, например, для иллюстрации решения задач методом таблиц, графов, кругов Эйлера-Венна активно используются ИКТ (интерактивная доска, стационарный компьютер, интернет и тд.), что позволит повысить качество обучения, развить внимание, позволит формировать культуру умственного труда, творческую активность, дисциплинированность школьников, и позволит экономить время на занятии.

Список использованных источников

1. Ведерникова, Т.Н., Иванов, О.А. Интеллектуальное развитие школьников на уроках математики. // Математика в школе. - 2002. - № 3.
2. Задачи для внеклассной работы по математике в 5-6 классах: Пособие для учителей /Сост. В. Ю. Сафонова; Под ред. Д.Б. Фукса, А.Л. Гавронского. – М.: МИРОС, 1983.
3. Шейнина, О.С., Соловьёва Г.М. Математика. Занятия школьного кружка. 5-6 кл. – М.: НЦ ЭНАС, 2003.
4. Засенок, В.П. Подумай и ответь (Логические задачи). - М., 1996.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ КАПЛИ: ТЕСТИРОВАНИЕ ПРОГРАММНОГО КОДА НА ОСНОВЕ МЕТОДА VOLUME-OF-FLUID

Киреев В.[1,2], Шалабаева Б.[3], Низамова А.[2]

[1] *Башкирский государственный университет, Уфа, Россия*

[2] *Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа, Россия*

[3] *Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан*

E-mail: kireev@anrb.ru

Введение

Теоретическое и экспериментальное изучение особенностей поведения отдельных капель одной вязкой жидкости в другой под действием различных физических полей (тепловых, акустических, электромагнитных) имеет важное значение при решении технологических задач в разных отраслях промышленности. Например, изучая процесс взаимодействия водяной капли, покрытой асфальтеновой («бронирующей») оболочкой, в нефти с электромагнитным полем сверхвысокой частоты можно определить такие закономерности, которые позволять разработать более эффективные, чем применяющиеся в настоящее время, технологии разделения водонефтяной эмульсии (а также других двухфазных сред) в аппаратах нефтехимических производств [1]. В общем случае форма капли является несферической и формируется в результате сложного взаимодействия целой совокупности факторов, таких как вязкости жидкостей, силы межфазного натяжения, сила тяжести, акустические и электромагнитные поля и др. Поэтому для адекватного описания нелинейной динамики одиночной капли необходимо использование современных методов численного моделирования, позволяющих определять положение границы раздела между фазами.

Наибольшее распространение в настоящее время получили три метода для отслеживания границ раздела между фазами: метод отслеживания фронта (FrontTrackingMethod, FT) [2], LevelSetMethod (LS) [3] и VolumeofFluid (VOF) [4].

Целями настоящей работы являются разработка и тестирование оригинального программного кода, основанного на алгоритме метода Volume Of Fluid, который в дальнейшем будет использоваться при численном моделировании динамики капли для отслеживания ее границы.

Постановка задачи

Рассмотрим прямоугольную область, в которой происходит течение двух различных несмешивающихся жидкостей (Рис. 1, а). Положение границ раздела между жидкостями будет определяться неявным уравнением

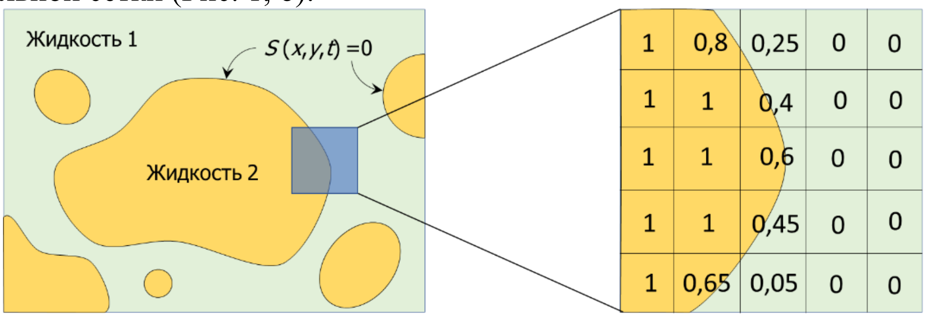
$$S(x, y, t) = 0. \quad (1)$$

Изменение положения границы раздела со временем в процессе течения описывается уравнением переноса

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u_x \frac{\partial S}{\partial x} + u_y \frac{\partial S}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

где $\vec{u} = (u_x, u_y)$ – скорость течения жидкостей.

В методе VolumeofFluid уравнение (2) не используется в явном виде для определения динамики границы раздела, а перемещение границы осуществляется с помощью специального алгоритма. Для этого вместо функции $S(x, y, t)$ вводится специальная сеточная маркерная функция C_{ij}, которая определяется как объемная доля одной из жидкостей в каждой ячейке вычислительной сетки (Рис. 1, б):



а) б)

Рис. 1. К постановке задачи: а) граница раздела между жидкостями; б) значения маркерной функции в ячейках сетки

- $C_{ij} = 0$, если ячейка (i, j) полностью заполнена жидкостью «1»;
- $C_{ij} = 1$, если ячейка (i, j) полностью заполнена жидкостью «2»;
- $0 < C_{ij} < 1$, если через ячейку (i, j) проходит граница раздела.

Поскольку от точного определения положения границы раздела между жидкостями во многом зависят результаты численного моделирования многофазных течений, в настоящей работе приводятся результаты некоторых тестов для проверки работоспособности созданного программного кода и оценки точности представления границы раздела фаз.

Результаты численного моделирования

В первой серии тестов первоначально круглая и квадратная области, занятые жидкостью «2», перемещались поступательно под действием постоянного поля скоростей. В одном случае скорость была направлена вдоль координатой оси Y ($\vec{u} = (0,1)$), а в другом случае скорость была направлена по диагонали расчетной области ($\vec{u} = (1,1)$). При численном моделировании выполнялось 1000 шагов по времени. При этом жидкость перемещалась на расстояние примерно в пять раз превышающее исходный размер области, занятой жидкостью «2». Размер ячейки был выбран таким образом, чтобы на характерной длине области жидкости «2» помещалось около 20 ячеек. На Рис. 2 и 3 представлены формы границы раздела, полученные в результате численных расчетов по предложенному авторами алгоритму, а также для сравнения приведены результаты аналогичных тестов из работы [5].

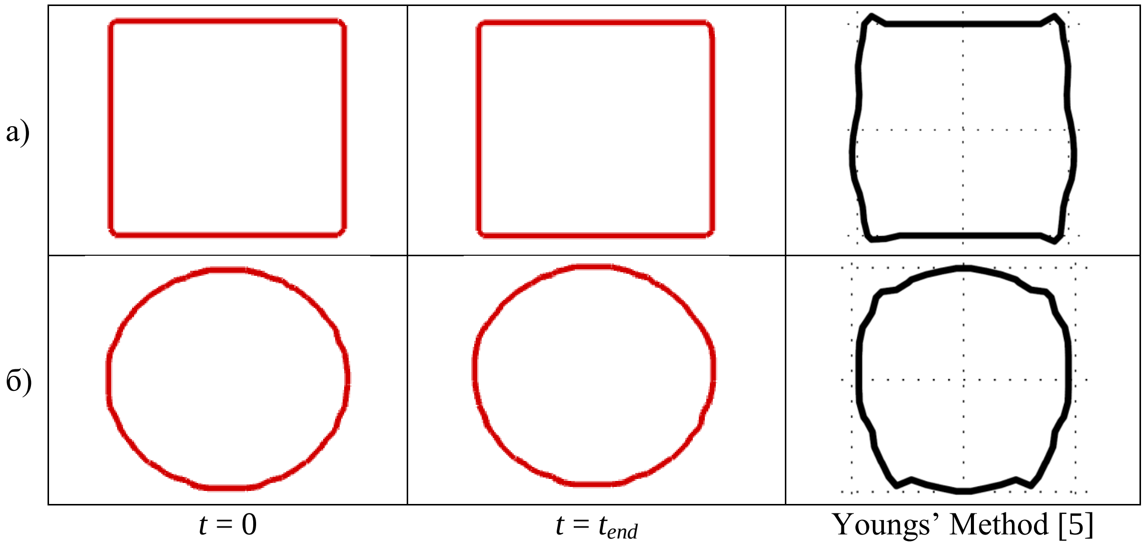


Рис. 2. Поступательное движение квадратной (а) и круглой (б) областей вдоль оси Y

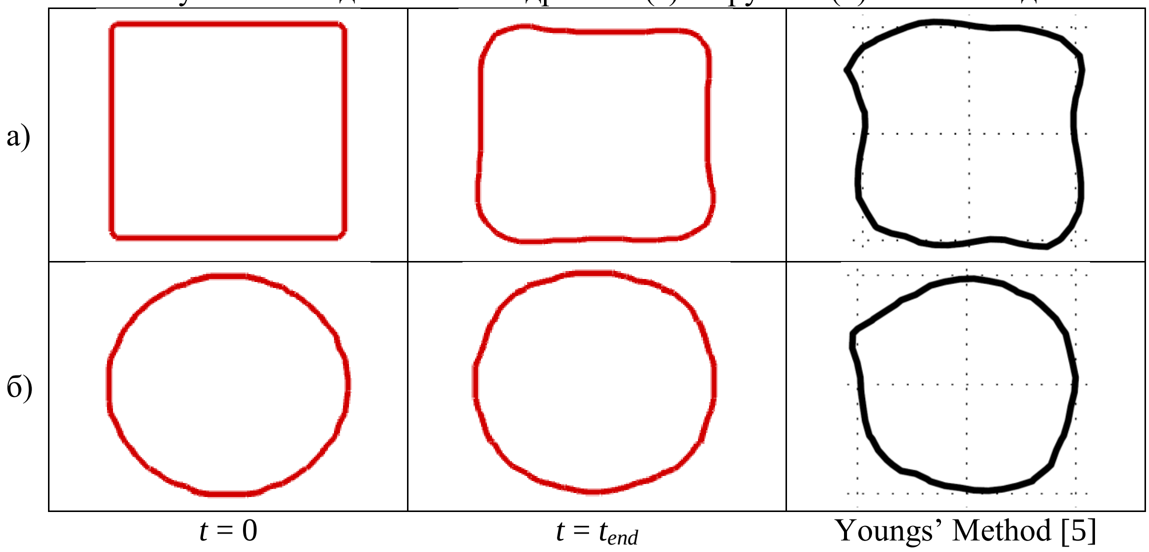
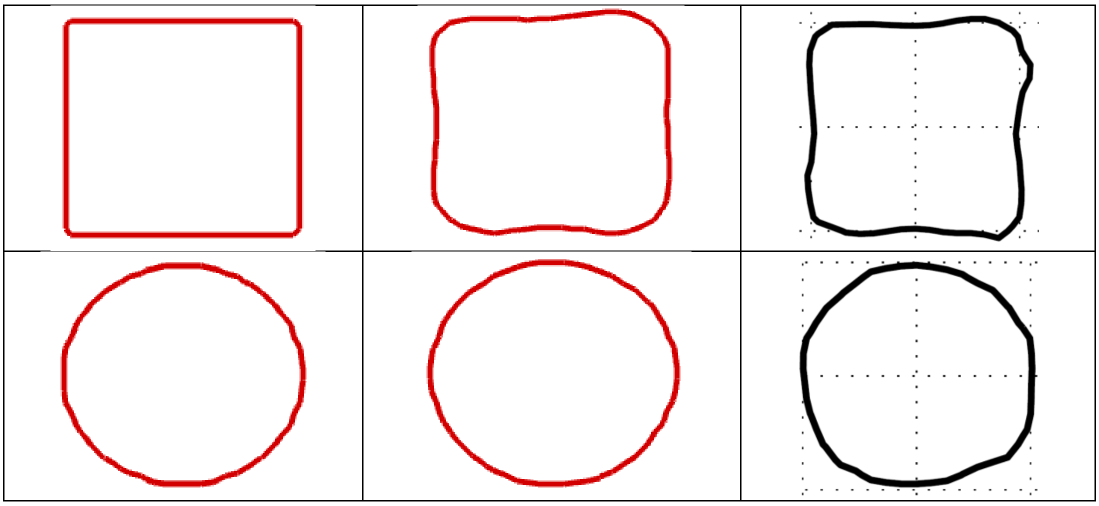


Рис. 3. Поступательное движение квадратной (а) и круглой (б) областей по диагонали

Во второй, более сложной, серии тестов круглая и квадратная области жидкости, занятые жидкостью «2», помещались в круговое поле скорости и вращались как твердое тело. Центр вращения находился от геометрического центра жидкой области на расстоянии примерно в два раза больше ее характерного размера. Выполнялось 600 шагов по времени, за который делался полный оборот и область возвращалась в исходное положение. Размер ячейки был выбран таким образом, чтобы на характерной длине области жидкости «2» помещалось около 20 ячеек. На Рис. 4 показаны результаты расчетов и данные из работы [5].

а)

б)



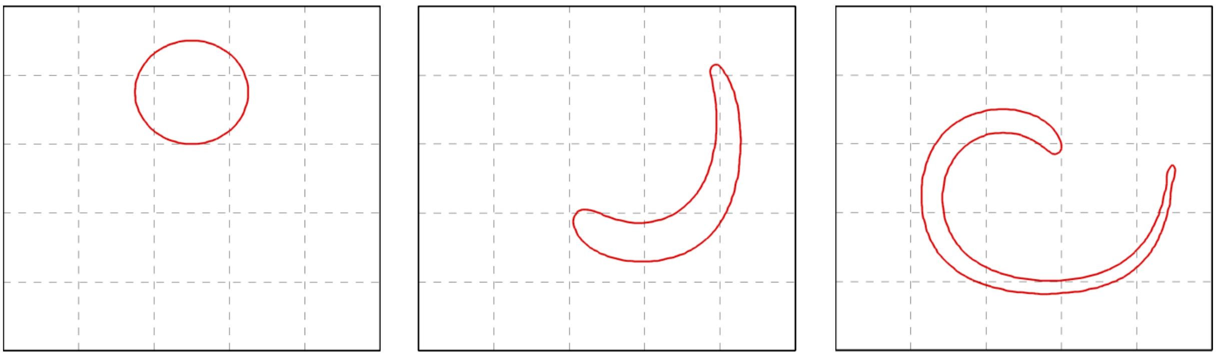
$t = 0$ $t = t_{end}$ Youngs' Method [5]

Рис. 4. Вращательное движение квадратной (а) и круглой (б) областей как твердого тела

Если в первых двух сериях тестов топология области не изменялась, то в третьей серии тестов, которые предложены в работе [6], использовалось соленоидальное поле скорости, в котором первоначально круговая форма капли вытягивается и закручивается в спираль вокруг центра вращения. Поле скорости в данном случае имеет вид:

$$\vec{u} = \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right), \quad \Phi = \frac{1}{\pi} \sin^2(\pi x) \sin^2(\pi y) \tag{3}$$

Численное моделирование продолжалось до достижения времени t_{max}. В момент времени $t_{max}/2$ направление вращения изменяется на противоположное и капля возвращается в исходное положение. В случае применения идеального метода отслеживания границы начальная и конечная форма капли совпали бы. На Рис. 5 показаны полученные в результате численного моделирования положения границы раздела в последовательные моменты времени. На графике, соответствующем моменту времени t_{max}, тонкой пунктирной линией показана граница капли в начальный момент времени. Видно, что в силу погрешностей численного метода начальная и конечная формы капли не совпадают, однако достаточно близки друг к другу.



$t = 0$ $t = 1/8 \cdot t_{end}$ $t = 1/4 \cdot t_{end}$

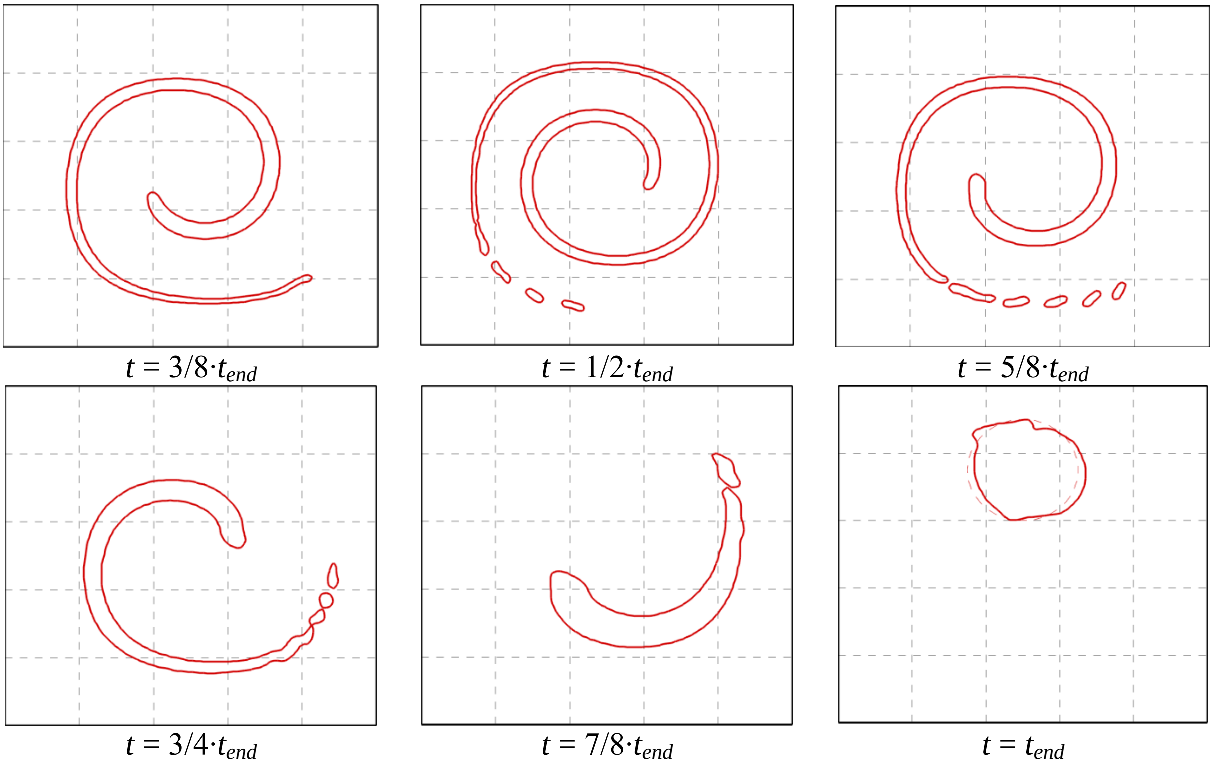


Рис. 5. Изменение формы жидкой капли в соленоидальном поле скорости

Анализ результатов, представленных на Рис. 2-5, позволяет сделать вывод, что разработанный авторами программный код позволяет адекватно моделировать положение границы раздела между фазами и дает лучшие результаты по сравнению с другими методами отслеживания границ (например, Youngs' method).

Для количественной оценки качества предложенного алгоритма можно оценить насколько хорошо выполняется закон сохранения массы. Это можно сделать с помощью следующей величины:

$$VOF_{error} = \left(\left(\sum_{i,j} C_{ij} \right)_{t=t_{\max}} - \left(\sum_{i,j} C_{ij} \right)_{t=0} \right) \Bigg/ \left(\sum_{i,j} C_{ij} \right)_{t=0}, \qquad (4)$$

где суммирование происходит по всем ячейкам вычислительной сетки.

Максимальное значение VOF_{error} наблюдается для теста с соленоидальным полем скорости и составляет $1{,}7 \cdot 10^{-3}$. Для остальных тестов VOF_{error} принимает меньшие значения, т.е. масса жидкости сохраняется с достаточной степенью точности.

Заключение

Результаты численного моделирования показали, что во всех тестах первоначальная форма сохраняется с достаточной степенью точностью – в первой и второй сериях экспериментов отклонение порядка 1%, а в третьей серии отклонение не превышает 5%. Таким образом показано, что созданный на основе метода Volume of Fluid программный код адекватно моделирует положение границы раздела фаз.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект AP05134098).

Список используемых источников

1. Ковалева Л.А., Миннигалимов Р.З., Зиннатуллин Р.Р. Исследование устойчивости водонефтяной эмульсии в электромагнитном поле в зависимости от её диэлектрических свойств // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. – 2010, № 2. – С.59-62.
2. Unverdi S.O., Tryggvason G. A front tracking method for viscous incompressible multi-fluid flows // Journal of Computational Physics. – 1992. – Vol. 100, Is. 1. – pp. 25–37
3. Osher S., Sethian J.A. Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations // Journal of Computational Physics. – 1988. – Vol. 79, Is. 1 – pp. 12– 49
4. Hirt C.W., Nichols B.D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries // Journal of Computational Physics. – 1981. – Vol. 39, Is. 1 – pp. 201 – 225
5. Young D.L. An interface tracking method for a 3D Eulerian hydrodynamics code: Technical report AWRE/44/92/35, Atomic Weapons Research Establishment. – 1987
6. Rider W.J., Kothe D.B. Reconstructing volume tracking // Journal of Computational Physics. – 1998. – Vol. 141, Is. 2 – pp. 112 – 152

ҚИЫНДЫҒЫ ЖОҒАРЫ ЕСЕПТЕР

Мусайбеков Р. К., Алип А.
Ш.Уәлиханов атындағы Көкшетау мемлекеттік университеті, Көкшетау қ-сы
E-mail: rashid1956@bk.ru

Қиындығы жоғары есептер – адамның жеке ойлау қабілетін жаттықтыратын және сынау қажеттілігін қамтамасыз ететін өзіндік «ой гимнастикасы». Математика сабағында қиындығы жоғары есептерді шығару барысында оқушының ойлау қабілеті дамып, пәнге деген қызығушылығы артады. Қазіргі заман математика ғылымының өте кең, жан - жақты тараған кезеңі. Ал талапқа сай математикалық білім берудің басты шарты математикалық мәдениеттің деңгейін көтеру болып табылады. Математикадан күрделі есептерді шешу оқушылардың ойын оятып, ойлау, есте сақтау қабілеттерін дамытуда, батыл қимылдар жасауға, шығармашылық ізденіске тәрбиелейді. Оқушылардың математикалық сауаттылығын арттыру – олардың алған білімінің тиянақты болуын қамтамасыз ету. Сондықтан, оқушылардың математикаға дайындығын жан - жақты жетілдіру – қазіргі аса маңызды міндеттердің бірі. Оқушылардың логикалық ой - өрісін арттыруда, оларды математикаға қызықтыруда олимпиадалық есептерді шығару сабағын өткізудің маңызы зор.

Математикалық есеп – оқушылардың ұғымдарды, теорияны және математика әдістерін меңгерудің тиімді де, айырбасталмайтын құралы. Оқушылардың ойлау қабілеттерін дамытуда, оларды тәрбиелеуде, біліктіліктері мен дағдыларының қалыптасуына математиканың практикамен байланысын көрсетуде есептің маңызы зор. Есеп шығару - ой жұмысы. Ой жұмысы арқылы оқушылар дербес ойлауға, қорытынды шығарып, математикалық ақиқатты көре білуге, дәлдікке үйренеді.

Енді кейбір тақырыптардан қиындығы жоғары есептерді келтіріп, шешімдерін көрсетейік:

1. <u>Мәтінді есептер [1]</u>

а) Үш трактор бригадасы бірігіп белгіленген жерді 4 күнде жыртады. Бірінші және екінші бригадалары осы жерді 6 күнде, ал бірінші мен үшінші бригадалар бірігіп осы жерді 8 күнде жыртады. Екінші бригада үшінші бригадаға қарағанда жерді бір күнде неше есе артық жыртады?

Шешуі:

Көптеген есептерде екі элемент туралы әңгіме жүргізілсе, осы есепте үш элемент бар (үш трактор бригадасы). Біздің ойымызша, есептің күрделілігі осында.

x,y,z – үш бригаданың әрқайсысының жырту жылдамдықтары болсын. Енді есепің шартын қанағаттандыруға тырысайық. S деп жердің ауданын белгілейік. Осы есепте назарға алынатын жағдай осындай:

1. Үш бригада белгіленген жерді неше күнде жыртады?
2. Бірінші және екінші бригадалар белгіленген жерді неше күнде жырады?
3. Бірінші және үшінші бригадалар белгілі жерді неше күнде жыртады?