



БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

Республикалық ғылыми-практикалық конференция

«Математикалық және компьютерлік модельдеудің заманауи мәселелері

Қазақстанның цифрлы индустриясының дамуы жағдайында»

3-5 мамыр 2018 жыл, Астана, Қазақстан

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ

Республиканская научно-практическая конференция

«Современные проблемы математического и компьютерного моделирования

в условиях развития цифровой индустрии Казахстана»

3-5 мая 2018 года, Астана, Казахстан

ӘОЖ 004+519+316

КБЖ 22

М 49

В подготовке Сборника принимали участие:

Адамов А.А., Нугманова Г.Н., Сергибаев Р.А., Байдавлетов А.Т.

Математикалық және компьютерлік моделдеудің заманауи мәселелері Қазақстанның цифрлы индустриясының дамуы жағдайында: Республикалық ғылыми-практикалық конференциясының БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ = Современные проблемы математического и компьютерного моделирования в условиях развития цифровой индустрии Казахстана: СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ Республиканской научно-практической конференции. Қазақша, орысша, ағылшынша. – Астана, 2018, 161 б.

ISBN 978-601-337-014-9

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докторанттардың және ғалымдардың механика, математика, математикалық және компьютерлік моделдеу, математиканы оқыту әдістемесінің өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

В Сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и ученых по актуальным вопросам механики, математики, математического и компьютерного моделирования и методики преподавания математики.

Тексты докладов представлены в авторской редакции

ISBN 978-601-337-014-9

ӘОЖ 004+519+316

КБЖ 22.1

Выбрав g_1 как $g_1 = e^{i\theta}$, с $\theta = k_1 x + l_1 t + m_1$, из системы уравнений (21) имеем для f_2 , q_1 , p_2 следующие выражения:

$$q_1 = -\frac{a}{2}(l_1 + k_1^2)e^{i\theta}, \quad (22)$$

$$f_2 = -\frac{a(l_1 + k_1^2)(l_1^* + k_1^{*2})}{(k_1 - k_1^*)^2} e^{i(\theta - \theta^*)}, \quad (23)$$

$$p_2 = -\frac{a(l_1 + k_1^2)}{(k_1 - k_1^*)} \left(\frac{a(l_1^* + k_1^{*2})}{4(k_1 - k_1^*)} + a \right) e^{i(\theta - \theta^*)}. \quad (24)$$

Уравнение (12) с учетом (15) в компонентах матрицы S имеет вид

$$S^+ = \frac{2fg}{f^2 + |g|^2}, \quad S^- = \frac{2fg^*}{f^2 + |g|^2}, \quad S_3 = \frac{f^2 - |g|^2}{f^2 + |g|^2}. \quad (25)$$

Подставляя (20) в (25) и учитывая (22)-(24), получим решения уравнений (11) в виде (17). Утверждение 2 доказано.

Список использованных источников

1. Myrzakulov R., Vijayalakshmi S., Nugmanova G., Lakshmanan M. A (2 + 1)-dimensional integrable spin model: Geometrical and gauge equivalent counterpart, solitons and localized coherent structures // Physics Letters A. – 1997. – Vol. 233. – P. 391-396.
2. Myrzakulov R., Danlybaeva A.K., Nugmanova G.N. Geometry and multidimensional soliton equations // Theoretical and Mathematical Physics. – 1999. – Vol.118, - N3, - P. 441-451.
3. Myrzakulov R., Lakshmanan M., Vijayalakshmi S., Danlybaeva A. A. Motion of curves and surfaces and nonlinear evolution equations in (2+1) dimensions // Journal of Mathematical Physics. – 1998. - Vol. 39, - N7. - P. 3765-3771.
4. Myrzakulov R., Nugmanova G., Syzdykova R. Gauge equivalence between (2+1)-dimensional continuous Heisenberg ferromagnetic models and nonlinear Schrodinger-type equations // Journal of Physics A: Mathematical & Theoretical. – 1998. – Vol.31, - N47, - P. 9535-9545.
5. Zhang Zh-H., Deng M., Zhao W-Zh., Wu K. On the integrable inhomogeneous Myrzakulov-I equation // arXiv:nlin/0603069 v1 [nlin.SI]. – 2006.
6. Chen Ch., Zhou Z-X. Darboux Transformation and Exact Solutions of the Myrzakulov-I Equations // Chinese Physics Letters. – 2009. – Vol.26, - N8. – P. 080504.
7. Myrzakulov R., Mamyrbekova G., Nugmanova G., Lakshmanan M. Integrable (2 + 1)-Dimensional Spin Models with Self-Consistent Potentials // Symmetry. - 2015. - Vol. 7. - P.1352.

УДК 532.529

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ ЖИДКОСТИ

Омаровой Ж.Ж., Шалабаева Б.С

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан
zhaniya.omarova@bk.ru, shalabaeva.b.s@mail.ru

1. Введение. Изучение динамики отдельных капель вязкой жидкости в другой под действием различных физических полей представляет интерес для понимания многих технических задач в промышленности. Исследование динамики дисперсных систем в различных областях является актуальной проблемой современной науки и техники. Пример такие системы представляют эмульсии, которые встречаются во многих отраслях промышленности: нефтегазовой, строительной, автомобильной, пищевой, биотехнологии, медицине, а также в микро и нанотехнологиях. В нефтяной области эмульсии возникают практически на каждом этапе добычи, переработки и транспортировки нефтяного сырья [1].

Изучение взаимодействия большого количества деформируемых капель особенно важно для прогнозирования реологических свойств систем “жидкость-жидкость” и выявления различных эффектов при их движении, например, в микроканалах, моделирующих пористый пласт. Кроме того, можно отметить, что многие пищевые продукты также представляют собой дисперсные системы. Переработка высококонцентрированных пищевых эмульсий сопровождается различными физико-химическими и механическими процессами, изучение которых позволяет лучше контролировать свойства системы и эффективно управлять технологическим циклом производства. В медицине и биофизике задача о течении капель в микроканалах произвольной формы является моделью процессов, происходящих при движении клеток крови по разветвленным сетям капилляров. Моделирование стоковых течений в различных областях имеет значение также для микрогидродинамики при создании лабораторий на чипе.

В то же время, существует весьма ограниченное количество решений подобных задач. Проведение лабораторных исследований по изучению динамики капель эмульсий в микроканалах в широком диапазоне значений различных параметров, влияющих на физические свойства всей системы в целом, дорогостояще и трудновыполнимо. Компьютерное моделирование позволяет планировать, частично заменять и существенно дополнять эксперименты [2].

Изучение заряженных жидких капель начато лордом Рэлеем, который в 1882 году показал, что если электрический заряд Q больше критического значения Q_{cr} , то сферические капли становятся неустойчивыми [3]. Было обнаружено, что критический заряд $Q_{cr}=64\gamma\pi^2\epsilon_0R^3$, где ϵ_0 - поверхностное натяжение, R - радиус капли, γ - диэлектрическая постоянная среды, в которой капля подвешена, после того, как капля становится неустойчивой, она разделяется на несколько меньших капелек. Более того, в недавних экспериментах [4] было замечено, что до деления капля превращается в вытянутый сфероид и развивает конический тип, из которого появляются тонкие 2 струи за конечное время. Анализ стабильности заряженных капель жидкости можно найти в [5], где доказано существование статических сплюснутых форм. Существует много работ, в которых используются численные методы для изучения движения осесимметричных капель. Наиболее популярным численным методом является метод граничных элементов (ВЕМ). ВЕМ используется в [6,7] для изучения эволюции капли жидкости, прикрепленной к поверхности, под воздействием внешнего электрического поля. Аналогично, [8] использует ВЕМ для численного исследования эволюции капли жидкости под действием электрического поля, когда капля погружается во внешнюю диэлектрическую жидкость. Что касается исследования заряженных капель жидкости, то [9] объединяет аналитические и численные результаты для изучения существования и устойчивости, стационарных не сферических форм для заряженных изолированных капелек.

Эволюция капель заряженных жидкостей актуальны во многих прикладных задачах, таких как явления, определяющие начало дождя, двигатели с полевым выбросом (FEEP), микрожидкостной чип, электронная бумага и т.д [10].

В результате изучения данной темы была использована математическая модель движения капли, в случае, когда капли проводящей вязкой жидкости погружаются в диэлектрическую вязкую жидкость бесконечной протяженности и развиваются под влиянием капиллярности и электростатического отталкивания.

2. Математическая модель заряженной капли жидкости

Рассмотрим каплю D жидкости A с вязкостью μ_{in} суспендированной в бесконечной жидкости B , с вязкостью μ_{out} . (Рисунок 1). Как внутренняя, так и внешняя жидкости развиваются в соответствии со стоковым приближением уравнений Навье-Стокса:

$$\mu_{in}\nabla^2u(x) = \nabla p(x), \quad x \in D(t) \quad (2.1a)$$

$$\mu_{out}\nabla^2u(x) = \nabla p(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus D(t) \quad (2.1b)$$

$$\nabla u(x) = 0, \quad x \notin \partial D \quad (2.1c)$$

где u - поле скорости, а p - давление в жидкости. Из уравнений (2.1a) - (2.1c) сразу следует, что давление p является гармонической функцией вне границы D :

$$\nabla^2 p(x, t) = 0, x \notin \partial D \quad (2.2)$$

Движения капли зависит от t , как объясняется ниже. Уравнения (2.1a) - (2.1c) являются допустимым приближением при условии, что число Рейнольдса невелико:

$$Re = \frac{uR\rho}{\mu} \ll 1 \quad (2.3)$$

где u - типичная скорость жидкости, R - характерная длина капли, ρ - плотность жидкости, а μ - вязкость. Размер капель, которые мы изучаем, составляет порядок микронов, и при этом условии эта гипотеза обычно выполняется. С другой стороны, капли достаточно велики, чтобы удовлетворить гипотезе континуума, которая диктует, что совокупность движения молекул жидкости может рассматриваться как континуум

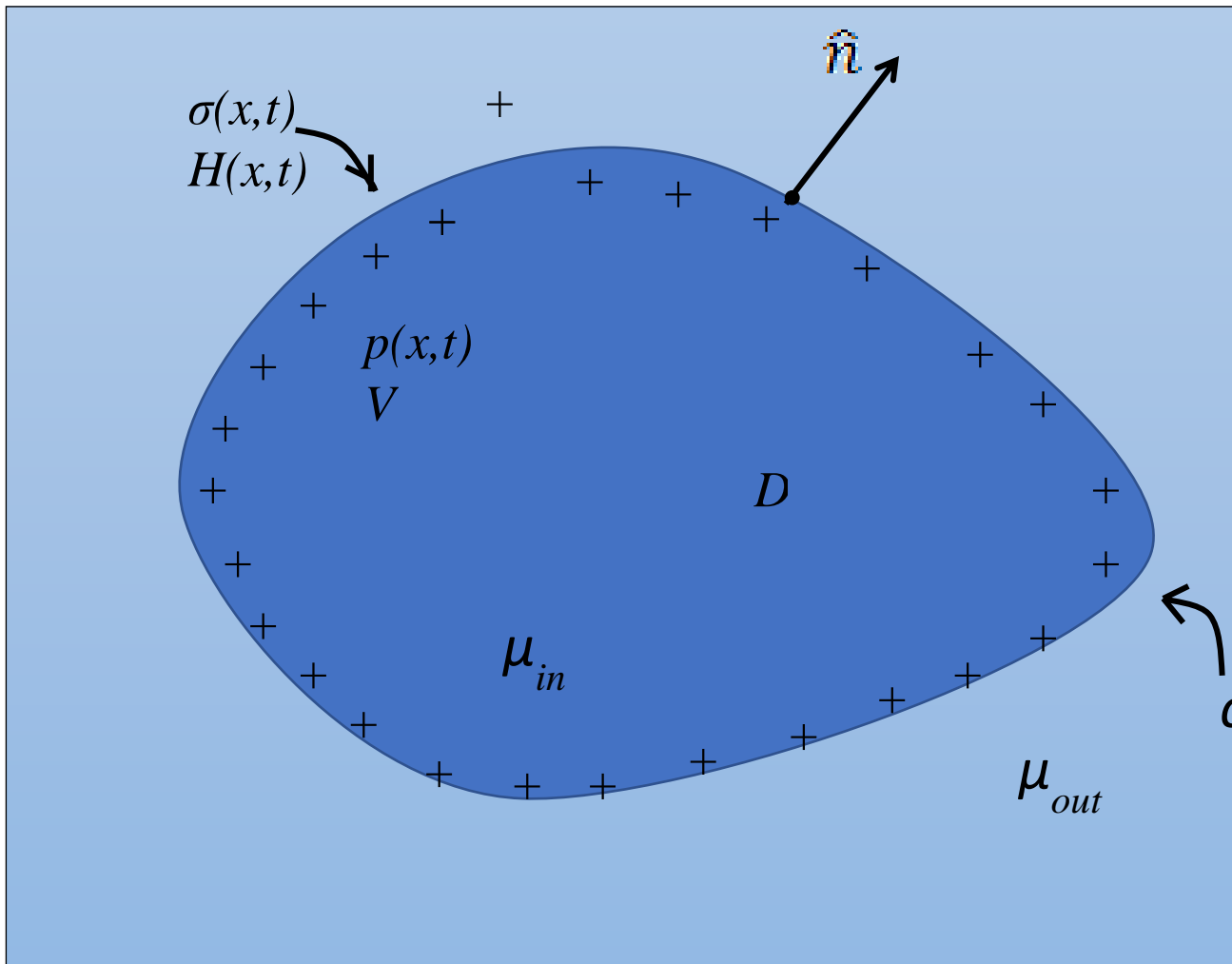


Рисунок 1. Капля заряженной жидкости

Стоит отметить что мы также игнорируем влияние испарения на эволюцию капли. Временной масштаб движения свободной границы составляет порядка миллисекунд, что явно недостаточно для значительных потерь массы из-за испарения.

Внутренняя жидкость является идеальным электрическим проводником, тогда как внешняя жидкость является идеальным электрическим изолятором. Кроме того, капля содержит количество электрического заряда Q . Внутри проводящей внутренней жидкости заряды отталкиваются друг от друга и поэтому движутся к свободной границе. Поскольку они не могут убежать в изолирующую внешнюю жидкость, они в конечном итоге распределяются вдоль свободной границы ∂D с плотностью поверхностного заряда σ и они создают электрическое поле с электрическим потенциалом V . Электрический потенциал V постоянный внутри капли (Рисунок 1)

$$V(x, t) = V_0, \quad \text{для } x \in D \quad (2.4)$$

и удовлетворяет уравнению Лапласа вне D

$$\nabla^2 V(x, t) = 0, \quad \text{для } x \notin D \quad (2.5)$$

На свободной границе потенциал V непрерывен, но нормальная производная $\frac{\partial V}{\partial n}$ является разрывным. Скачок нормальной производной и плотности поверхностного заряда σ на свободной границе связаны:

$$\left[\frac{\partial V}{\partial n} \right]_{\partial D} = -\frac{\sigma}{\epsilon_2} \quad (2.6)$$

где $\left[\frac{\partial V}{\partial n} \right]_{\partial D}$ обозначает скачок величины через ∂D и ϵ_0 - диэлектрическая проницаемость окружающей среды. Плотность поверхностного заряда также удовлетворяет условию

$$\int_{\partial D} \sigma ds = Q \quad (2.7)$$

В силу закона сохранения заряда Q постоянна во времени.

Для поля скорости u соответствует граничное условие на свободной границе:

$$[S\hat{n}]_{\partial D} = \left(2\gamma H - \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)^2 \right) \hat{n}, \quad \text{или } [S\hat{n}]_{\partial D} = \left(2\gamma H - \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \right) \hat{n} \quad (2.8)$$

где γ - константа капиллярности, H - средняя кривизна, а \hat{n} - (нормальный вектор направленности) свободной границы, а S - тензор напряжений определяется следующим образом:

$$S_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (2.9)$$

Заметим, что это граничное условие связывает поле скорости жидкости с электростатическим полем (через плотность поверхностного заряда σ).

Заметим что, движение самой свободной границы определяется кинематическим условием (движения координаты x)

$$\frac{dx}{dt} = u(x, t), \quad x \in \partial D \quad (2.10)$$

Интересная динамика возникает от существования двух противоположных сил, действующих на границе раздела между двумя жидкостями, капиллярности ($2\gamma H$ -терм в (2.8)) и электростатической силой (член $\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$ в (2.8)). В то время как капиллярность пытается сделать каплю максимально гладкой и сферической, электрические силы стремятся усилить любые «удары» формы капли, так как заряды накапливаются в частях свободной границы с высокой кривизной и тянут на поверхность в этих точках (Рисунок 2):

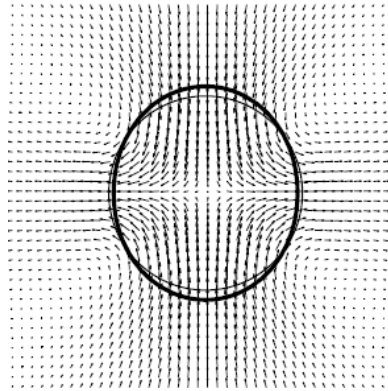


Рисунок 2. Изменение границы капли

Далее мы выводим явные линейные решения математической модели.

Наша цель - понять, как стабильность капли зависит от значений заряда, объема, поверхностного натяжения, вязкости, а также от формы капли.

3. Переход к сферическим координатам

Относительно просто проверить, что шар с радиусом R является равновесным решением для модели.

Поскольку на границе заряженной капли жидкости происходят возмущения, то для изучения возмущения сферы (сферической поверхности) удобно перейти к сферическим координатам (r, θ, φ) , где $r \geq 0$ - расстояние от точки от начала координат, $\theta \in [0, \pi]$ - полярный угол и $\varphi \in (0, 2\pi]$ - азимутальный угол (Рисунок 3).

Точка $x \in R^3$ со сферическими координатами (r, θ, φ) имеет декартовы координаты:

$$x(r, \theta, \varphi) = (r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta) \quad (3.1)$$

Базовые векторы e_r, e_θ, e_φ в точке x образуют ортонормированный базис, и поэтому любой вектор может быть однозначно выражен как линейная комбинация базовых векторов. Основными векторами могут быть выраженные в декартовых координатах как

$$\hat{e}_r = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta) \quad (3.2)$$

$$\hat{e}_\theta = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta) \quad (3.3)$$

$$\hat{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) \quad (3.4)$$

Уравнение сферы принимает следующий очень простой вид в сферических координатах

$$x \in \partial D \iff r = R \quad (3.5)$$

Чтобы решение для шара было статическим решением, скорость должна быть равна нулю всюду:

$$u(x) = 0, \quad x \in R^3 \quad (3.6)$$

так что кинематическое условие (2.10) переходит в условие равновесия

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad x \in \partial D \quad (3.7)$$

Давление p равно постоянной внутри сферы и нулю вне

$$p(x) = \begin{cases} \frac{2\gamma}{R} - \frac{Q^2}{32\pi^2 R^4 \epsilon_0}, & x \in D \\ 0, & x \notin D \end{cases} \quad (3.8)$$

и, следовательно, уравнения (2.1a) - (2.1c) тривиально выполнены.

Электрический потенциал V равен постоянной внутри и распадается как r^{-1} вне сферы

$$V(x) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} & , x \in D \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & , x \notin D \end{cases} \quad (3.9)$$

Ясно, что потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа (2.5) всюду, а также удовлетворяет (2.4) на поверхности сферы.

Распределение поверхностного заряда σ постоянное на сфере

$$\sigma(x) = \frac{Q}{4\pi R^2}, \quad x \in \partial D \quad (3.10)$$

и удовлетворяет уравнению (2.7):

$$\int_{\partial D} \sigma(x) ds(x) = 4\pi R^2 \frac{Q}{4\pi R^2} = Q \quad (3.11)$$

Для проверки граничного условия (2.6) заметим, что нормальный вектор \hat{n} в любой точке сферы равен базисному вектору \hat{e}_r . Поэтому нормальная производная $\frac{\partial V(x)}{\partial n}$ потенциала V в точке x сферы равна частной производной $\frac{\partial V(x)}{\partial r}$. Кроме того, поскольку V постоянно внутри сферы, то частные производные там равны нулю и, следовательно, скачок нормальной производной равен частной производной от «внешней» ветви V_{out} (3.9) по r :

$$\left[\frac{\partial V}{\partial n} \right]_{\partial D} = \frac{\partial V_{out}}{\partial n} = \frac{\partial V_{out}}{\partial r} = \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \right)' \Big|_{r=R} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (3.12)$$

которая, равна $-\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ в соответствии с (2.6).

Наконец, выполняется граничное условие (2.8). Так как скорость u равна нулю всюду, ее частные производные также равны нулю, а тензор напряжений S сводится к

$$S_{ij} = -p\delta_{ij}, \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (3.13)$$

и, следовательно, скачок в левой части (2.8) равен

$$[S\hat{n}]_{\partial D} = -[p]_{\partial D}\hat{n} = -\left(\frac{2\gamma}{R} - \frac{Q^2}{32\pi^2 R^4 \epsilon_0} \right) \hat{n} \quad (3.14)$$

Хорошо известно, что средняя кривизна H сферы радиуса R равна

$$H = \frac{1}{R} \quad (3.15)$$

и, следовательно, правая часть (2.8) равна левой стороне:

$$\left(2\gamma H - \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \right) \hat{n} = \left(\frac{2\gamma}{R} - \frac{1}{2\epsilon_0} \left(\frac{Q}{4\pi R^2} \right)^2 \right) \hat{n} = \left(\frac{2\gamma}{R} - \frac{Q^2}{32\pi^2 R^4 \epsilon_0} \right) \hat{n} \quad (3.16)$$

3.2. Изменение границы сферы (возмущенная): линеаризованные решения

Рассмотрим сферу радиуса R , возмущенную вещественной частью сферической гармоника $\mathcal{Y}_l^m(\theta, \varphi)$,

$$r(\theta, \varphi) = \epsilon \text{Re}\{\mathcal{Y}_l^m(\theta, \varphi)\} = R + \epsilon P_l^m(\cos\theta)\cos(m\varphi) \quad (3.17)$$

Здесь определены сферические гармоники $\mathcal{Y}_l^m(\theta, \varphi)$ (для $l, m \in \mathbb{Z}$, $0 \leq |m| \leq l$)

$$\mathcal{Y}_l^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2^{l+1}(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \quad (3.18)$$

Связанные многочлены Лежандра $P_l^m(x)$ определяются как,

$$P_l^m = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l \quad (3.19)$$

Сферические гармоники $Y_l^m(\theta, \varphi)$ можно умножать с соответствующими степенями r , чтобы сформировать солидные гармоники, которые удовлетворяют уравнению Лапласа $\nabla^2 f = 0$.

Имеются два случая: • Твердые гармоники формы:

$$f(r, \theta, \varphi) = Cr^l Y_l^m(\theta, \varphi), \quad C \neq 0$$

определены во всех \mathbf{R}^3 и расходятся при $r \rightarrow \infty$. Постоянная функция $f \equiv 1$ является частным случаем при $l = m = 0$.

• Твердые гармоники формы: $f(r, \theta, \varphi) = Cr^{-l-1} Y_l^m(\theta, \varphi)$, $C \neq 0$ не определены для $r = 0$ и ограничены при $r \rightarrow \infty$

Функция $f(r) = r^{-1}$ является частным случаем, снова для $l = m = 0$.

Более того, как действительная, так и мнимая часть твердых гармоник, также удовлетворяют уравнению Лапласа.

Проверим утверждение, что если свободная граница имеет форму, описываемую формулой (3.17) при $t = 0$, то в момент времени $t \geq 0$,

$$r(\theta, \varphi) = R + \epsilon P_l^m(\cos\theta) \cos(m\varphi) e^{gt} + O(\epsilon^2) \quad (3.21)$$

где мы использовали обозначение «большой O » для обозначения членов более высокого порядка разложения Тейлора по ϵ (Рисунок 3).

Здесь мы покажем, что параметр g , определяющий скорость роста возмущения, задается формулой

$$g = \frac{l(l-1)(l+1)(2l+1)(Q^2 - 16(l+2)\pi^2 R^3 \gamma \epsilon_0 (\mu_{in} + \mu_{out}))}{16\pi^2 R^4 \epsilon_0 ((2l^2 + 4l + 3)\mu_{in} + 2l(l+2)\mu_{out}(2(l^2-1)\mu_{in} + (2l^2+1)\mu_{out}))} \quad (3.22)$$

Алгебраические манипуляции, необходимые для вывода (3.22) и проверки (3.21), очень сложны. В результате мы в значительной степени использовали математическую алгебру Mathematica в следующих расчетах.

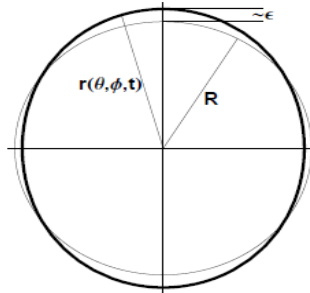


Рисунок 3. Сфера возмущена гармонической функцией с амплитудой ϵ

3.3. Нормальная векторная и средняя кривизна

Сначала мы получим нормальный вектор n и среднюю кривизну H на свободной границе за время $t \geq 0$. Параметризуем поверхность по углам (θ, φ) :

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = r(\theta, \varphi) (\cos\varphi \sin\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\theta) = r(\theta, \varphi) \hat{\mathbf{e}}_r \quad (3.23)$$

Нормальный вектор n может быть рассчитан путем нормировки поперечного произведения частных производных

$$\begin{aligned} \hat{n}(\theta, \varphi) &= \frac{\mathbf{r}_\theta \cdot \mathbf{r}_\varphi}{|\mathbf{r}_\theta \cdot \mathbf{r}_\varphi|} = \\ &= \hat{\mathbf{e}}_r + \epsilon \frac{(l+m)p_{l-1}^m(\cos\theta) - l \cos\theta p_l^m(\cos\theta)}{R \sin\theta} \cos(m\varphi) e^{gt} \hat{\mathbf{e}}_\theta + \epsilon \frac{m}{R \sin\theta} \sin(m\varphi) p_l^m(\cos\theta) e^{gt} \hat{\mathbf{e}}_\varphi + O(\epsilon^2) \\ |\hat{n}| &= 1 + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Средняя кривизна H может быть определена, используя ряд математических вычислений второй фундаментальной формы поверхности, которые мы здесь опустим.

Средняя кривизна H задается формулой

$$H(\theta, \varphi) = \frac{eG - 2fF + gE}{2J^2} = \frac{1}{R} + \epsilon \frac{l^2 + l - 2}{2R^2} p_l^m(\cos\theta) \cos(m\varphi) e^{gt} + O(\epsilon^2) \quad (3.33)$$

3.4. Электрический потенциал и плотность заряда

Покажем, что электрический потенциал V задается формулой

$$V(r, \theta, \varphi) = \begin{cases} \frac{A}{R}, & r \leq R \\ \frac{A}{r} + \epsilon B r^{-l-1} \cos(m\varphi) p_l^m(\cos\theta) e^{gt} + O(\epsilon^2), & r > R \end{cases} \quad (3.34)$$

где $A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}$, $B = \frac{QR^{l-1}}{4\pi\epsilon_0}$

Во-первых, внешняя ветвь (3.34) удовлетворяет уравнению Лапласа (2.5) во внешней области поверхности, так как оба члена нулевого и первого порядка являются сплошными гармониками, такие, что $V \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Кроме того, функция V должна быть непрерывной на свободной границе, и поэтому, если подставить $r = R$ в (3.34), мы должны получить B (плюс члены порядка ϵ^2). После некоторых алгебраических манипуляций это условие сводится к

$$AR^l - BR = 0 \implies B = AR^{l-1} \quad (3.37)$$

Непрерывность V на границе также гарантирует постоянство V на границе (выражение (2.4)).

Для проверки условия (2.7) нам нужно сначала рассчитать поверхностную плотность заряда на поверхности.

Используя (2.6), находим

$$\sigma(\theta, \varphi) = \frac{A\epsilon_0}{R^2} + \epsilon \frac{A(l-1)\epsilon_0}{R^3} \cos(m\varphi) p_l^m(\cos\theta) e^{gt} + O(\epsilon^2) \quad (3.38)$$

Интегрируя σ по всей поверхности, мы получаем

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \sigma ds &= \\ \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sigma(\theta, \varphi) r(\theta, \varphi)^2 \sin\theta d\varphi d\theta &= \\ \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left\{ A \epsilon_0 \sin\theta + \epsilon \frac{A(l+1)\epsilon_0}{R} \sin\theta \cos(m\varphi) p_l^m(\cos\theta) e^{gt} \right\} d\varphi d\theta &+ O(\epsilon^2) = 4\pi \epsilon_0 A + \\ \epsilon \frac{A(l+1)\epsilon_0}{R} e^{gt} \int_0^{2\pi} \cos(m\varphi) d\varphi \int_0^\pi \sin\theta p_l^m(\cos\theta) d\theta &+ O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (3.39)$$

Так как член первого порядка (3.39) равен нулю, то условие (2.7) плотность заряда становится:

$$Q = 4\pi \epsilon_0 A + O(\epsilon^2) \quad (3.40)$$

В результате изучения данной темы рассмотрена подходящая математическая модель заряженной капли жидкости. В данной работе рассматривалось изменение формы заряженной капли жидкости. Для понимания как стабильность капли зависит от значений заряда, объема, поверхностного натяжения, вязкости, а также от формы капли получены явные линейные решения математической модели. Представлен анализ линейной устойчивости семейства решений, возникающих из-за возмущения сферы радиуса R (являющейся равновесным решением). Были найдены явные линейные решения математической модели: нормальная векторная и средняя кривизна, электрический потенциал и плотность заряда. Найдены явные выражения для скорости роста каждого решения и для критического количества заряда, которое должно быть превышено, чтобы решение стало неустойчивым.

По итогам работы можно увидеть как стабильность капли зависит от значений заряда, объема, поверхностного натяжения и вязкости, а также от формы капли.

Списокиспользуемыхисточников

- 1 Абрамова О.А., Иткулова Ю.А., Гумеров Н.А. Моделирование трехмерного движения деформируемых капель в стоксовом режиме методом граничных элементов // Вычисл. Мех. Сплош. Сред. – 2013. – Т. 6, № 2. – С. 214-223I.
- 2 G. Loscertales, A. Barrero, I. Guerrero, R. Cortijo, M. Marquez, A. M. Gañan-Calvo, Micro/Nano Encapsulation
- 3 Lord Rayleigh, On the Equilibrium of Liquid Conducting Masses Charged with Electricity, Proc.Roy.Soc. 184-186, 1882
- 4 M. Abramowitz, I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical
- 5 Via Electrified Coaxial Liquid Jets, Science, Vol. 295, 5560 (2002), 1695-1698.
- 6 Архипов В. А. Курс лекций по теории и практике закрученных потоков./ В. А. Архипов. — Томск : Изд-во ТГУ, 1999. — 60 с.
- 7 N. A. Pelekasis, J. A. Tsamopoulos, G. D. Manolis, Equilibrium shapes and stability of charged and conducting.
- 8 Advances in Computation: Theory and Practice, Vol. 7, Kananskis, 2001
- 9 A. Z. Zinchenko, M. A. Rother, R. H. Davis, A novel boundary-integral algorithm for viscous interaction of deformable drops, Phys. Fluids, Vol. 9. No. 6, June 1997
- 9 B. Bazhlevkov, F. N. van de Vosse, H. E. H. Meijer, 3D Numerical Simulation of Drop Coalescence, Advances in Computation: Theory and Practice, Vol. 7, Kananskis, 2001.
- 10 R. A. Hayes and B. J. Feenstra, Video speed electronic paper based on electrowetting, Nature, 425, pp. 383-385 (2003).

ИНТЕРАКТИВНЫЕ МЕТОДЫ ОБУЧЕНИЯ НА ПРИМЕРЕ ТЕМЫ «МЕТОД КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ» В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ

Рабинович Б.В., Карманов М.А.

Северо-Казахстанский государственный университет им. М. Козыбаева, Петропавловск, Казахстан

E-mail: BVR130758@mail.ru, karmanovmihail@mail.ru

Интерактивное обучение основано на прямом взаимодействии обучаемого с внешним учебным окружением и приобретением новых знаний на основе старых, во взаимодействии со всей образовательной средой. Реализация интерактивного обучения, при помощи погружения в разнообразные формы общения и взаимодействия, повышается интерес к изучаемому предмету, учащийся добровольно начинает включаться в активную познавательную учебную деятельность. Средства обучения в этом случае выступают движущими силами, которые объединяют все компоненты процесса усвоения новых знаний в единое целое. Разнообразие средств обучения говорит о том, что общение может основываться на разных типах взаимодействия: с различными группами людей; с индивидом, со специальными устройствами, обеспечивающими непрерывность диалога, например, компьютеры или только интерактивная доска. С накоплением данных о позитивном взаимовлиянии индивидов в специально создаваемых группах, этот феномен начали использовать в образовании детей и взрослых в конце XX века [1].

В 80–90 годы XX века ряде работ В. К. Дьяченко убедительно представлена перспективность и эффективность технологии коллективного способа обучения, который строится на учебном диалоге. Неоспоримым стало то, что обучение в малых группах не может быть неэффективным, так как если слушатель не единственный, он не может не слушать партнера, контроль результатов работы обучаемого обучающим усиливает эффект. Дальше происходит своеобразный обмен ролями, в следствии которого обучаемый становится обучающим. При данной модели обучения создаются предпосылки к активизации познавательной деятельности. Активизация познавательной деятельности учащихся подразумевает некую целенаправ-