УДК 530.1

БЕЗДИСПЕРСИОННЫЙ ПРЕДЕЛ (2+1)-МЕРНОГО ИНТЕГРИРУЕМОГО УРАВНЕНИЯ ФОКАСА-ЛЕНЭЛЛСА

Жасыбаева Меруерт Бактыкеновна
mzhassybaeva@yahoo.com
Докторант Физико-технического факультета, ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
Научные руководители – Р. Мырзакулов, К.Р. Есмаханова

Нелинейные бездисперсионные уравнения могут быть получены как бездисперсионные пределы (квазиклассические пределы) хорошо известных интегрируемых иерархий уравнений или построением, системы гидродинамического типа [1]-[2]. В данной работе найдем (2+1)-мерное бездисперсионное уравнение Фокаса-Ленэллса (ФЛ) первым способом. (2+1)-мерное уравнение ФЛ нами было найдено с помощью (1+1)-мерного уравнения ФЛ в [3]. Уравнение ФЛ является обобщением нелинейного уравнения Шредингера.

Уравнение ФЛ относится к солитонным уравнениям. Известно, что солитоны сохраняют свою форму и скорость после столкновения. Солитонный раствор имеет не дисперсионную природу. Это происходит потому что, существует нелинейность системы, не смотря на дисперсионные эффекты. На рисунке 1 показано, что начальная конфигурация волны при $t=0$ будет расходиться с течением времени. Исключив дисперсионный член, получается чисто нелинейное уравнение.

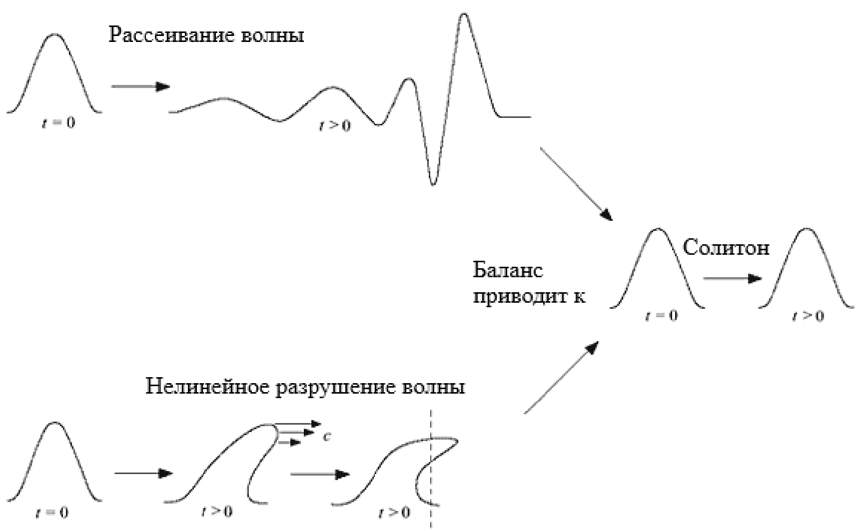

Рисунок 1– Балансные эффекты дисперсии и разрушения в солитоне

Итак, найденное нами (2+1)-мерное (две пространственные переменные и одна временная) уравнение ФЛ выглядит следующим образом:

$$iq_{xt} - iq_{xy} + 2q_x - q_x qr + iq = 0, \tag{1а}$$

$$ir_{xt} - ir_{xy} - 2r_x + r_x rq + ir = 0. \tag{1б}$$

где q - комплексная оболочка поле ($r = \pm q^*$, знак «+» означает притяжение и «-» отталкивание), индексы x, y и t обозначают частные производные по аргументам x, y и t, а i - мнимая единица.

Представление Лакса для уравнения (1) имеет вид

$$\partial_x \Psi = (\lambda^2 J + \lambda Q)\Psi = U\Psi, \tag{2а}$$

$$\partial_t \Psi = \partial_y \Psi + \left(W_0 + \frac{1}{\lambda} W_{-1} + \frac{1}{4\lambda^2} J \right)\Psi = \partial_y \Psi + W\Psi, \tag{2б}$$

где λ - произвольное комплексное число, называемое собственным значением (или спектральным параметром), а Ψ называется собственная функция собственного значения λ. Кроме того,

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & q_x \\ r_x & 0 \end{pmatrix}, \quad W_0 = \begin{pmatrix} i - \frac{1}{2} iqr & 0 \\ 0 & -i + \frac{1}{2} iqr \end{pmatrix}, \quad W_{-1} = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & q \\ -r & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

«Условие интегрируемости» уравнения (1) такова: $U_t - W_x + [U, W] - U_y = 0.$

Перепишем уравнение (1) при $r = q^*$, то есть

$$iq_{xt} - iq_{xy} + 2q_x - q_x |q|^2 + iq = 0. \tag{3}$$

Теперь, перейдем к нахождению бездисперсионного предела уравнения (3). Для этого произведем масштабное преобразование, именно

$$\frac{\partial}{\partial t} \to \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}, \qquad \frac{\partial}{\partial x} \to \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} \to \varepsilon \frac{\partial}{\partial y}$$

и принимаем предел $\varepsilon \to 0$. Здесь ε - масштабированная постоянная Планка. В этом случае, уравнение (3) примет вид

$$i\varepsilon^2 q_{xt} - i\varepsilon^2 q_{xy} + 2\varepsilon q_x - \varepsilon q_x |q|^2 + iq = 0. \tag{4}$$

Зададим подстановку в следующем виде:

$$q = \sqrt{u} \exp\left[\frac{iS}{\varepsilon}\right], \tag{5}$$

где $u(x,y,t)$ - амплитуда и $S(x,y,t)$- классическое действие, они являются вещественными функциями. А также, $|q|^2 = u$. Затем, подставляя (5) в уравнение (4), получаем

$$i\varepsilon^2\left\{\left(\frac{u_x}{2\sqrt{u}}\right)_t - \frac{S_xS_t\sqrt{u}}{\varepsilon^2} + \frac{i}{\varepsilon}\left(S_{xt}\sqrt{u} + \frac{S_xu_t}{2\sqrt{u}} + \frac{u_xS_t}{2\sqrt{u}}\right)\right\} - \varepsilon\left(\frac{u_x}{2\sqrt{u}} + i\frac{S_x\sqrt{u}}{\varepsilon}\right)u + i\sqrt{u} -$$
$$-i\varepsilon^2\left\{\left(\frac{u_x}{2\sqrt{u}}\right)_y - \frac{S_xS_y\sqrt{u}}{\varepsilon^2} + \frac{i}{\varepsilon}\left(S_{xy}\sqrt{u} + \frac{S_xu_y}{2\sqrt{u}} + \frac{u_xS_y}{2\sqrt{u}}\right)\right\} + 2\varepsilon\left(\frac{u_x}{2\sqrt{u}} + i\frac{S_x\sqrt{u}}{\varepsilon}\right) = 0, \quad (6)$$

Рассмотрим коэффициенты при различных степенях ε

$$\varepsilon^1: \quad -\left(S_{xt}\sqrt{u} + \frac{S_xu_t}{2\sqrt{u}} + \frac{S_tu_x}{2\sqrt{u}}\right) + S_{xy}\sqrt{u} + \frac{S_xu_y}{2\sqrt{u}} + \frac{S_yu_x}{2\sqrt{u}} + \frac{u_x}{\sqrt{u}} - \frac{u_xu}{2\sqrt{u}} = 0, \quad (7)$$

$$\varepsilon^0: \quad -iS_xS_t\sqrt{u} + iS_xS_y\sqrt{u} + 2iS_x\sqrt{u} - iS_xu\sqrt{u} + i\sqrt{u} = 0. \quad (8)$$

Уравнения (7) и (8) можно переписать как

$$2S_{xt}u + S_xu_t + u_xS_t - 2(S_xu)_y - u_xS_y + S_xu_y - 2u_x + uu_x = 0, \quad (9)$$
$$S_t - S_y + u - \tfrac{1}{S_x} - 2 = 0. \quad (10)$$

Пусть $S_x = v,$ тогда уравнения (9)-(10) примут следующий окончательный вид:

$$v_t - v_y + u_x + \tfrac{v_x}{v^2} = 0, \quad (11)$$
$$u_t + \left(2v_tu + \gamma u_x - 2(uv)_y - 2u_x + uu_x - u_x\kappa + u_yv\right)v^{-1} = 0, \quad (12)$$

где $\gamma = \partial_x^{-1}v_t$ и $\kappa = \partial_x^{-1}v_y$.

Итак, уравнения (11) и (12) это и есть наше искомое (2+1)-мерное бездисперсионное уравнение Фокаса-Ленэллса. В следующей работе будет построено представление Лакса для найденного бездисперсионного уравнения ФЛ, с его помощью нее возможно нахождение его «ударного» волнового решения.

Список использованных источников

1. Desjardins B., Chi-Kun Lin, Tai-Cheng Tso Semiclassical limit of the derivative nonlinear Schrodinger equations // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 1998. P. 261-285.

2. Brunelli J. C. Dispersionless Limit of Integrable Models // Brazilian Journal of Physics, V. 30, 2000. P. 476.

3. Zhassybayeva M.B., Yesmakhanova K.R. The construction of the (2+1)-Dimensional integrable Fokas-Lenells equation and its bilinear form by Hirota method // International Conference on Technology, Engineering and Science (IConTES). 2018. P. 61-67.