УДК 530.182, 517.957

БЕЗДИСПЕРСИОННЫЙ ПРЕДЕЛ УРАВНЕНИЯ ЯДЖИМЫ-ОЙКАВЫ

Умбетова Жанбала Сундетовна
zhanumbetova@gmail.com
Докторант Физико-технического факультета, ЕНУ им.Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
Научный руководитель – К.Р. Мырзакулов

Вопросы интегрируемости нелинейных уравнений и систем занимают одно из центральных мест в теоретической и математической физике. Наличие у таких уравнений физических приложений многократно увеличивает интерес к подобным исследованиям. На сегодняшний день известно богатое множество нелинейных интегрируемых уравнений, описывающих различные явления в разных областях физики. С интегрируемостью нелинейных волновых уравнений тесно связано такое понятие, как солитон [1]. Солитон - это объект, возникающий в нелинейных средах, сохраняющий свою форму при движении и при взаимодействии с себе подобными.

Часто возникают физические ситуации, когда нелинейность и дисперсия среды, приводящие к образованию солитонов, оказываются относительно слабыми. Нелинейность заставляет центральный участок догонять начало, а дисперсия стремится растащить холм, т.е. заставляет подошву холма "убегать" от вершины [2]. Предположим вначале, что дисперсия отсутствует. Это приведет к опрокидыванию волны, которое мы часто наблюдаем, когда волна набегает с моря на берег. Дисперсия способна воспрепятствовать опрокидыванию, так как она, напротив, стремится растянуть волну.

Среди систем динамики связанных волн длинно-коротковолновое резонансное взаимодействие представляет собой увлекательный физический процесс, в котором происходит резонансное взаимодействие между слабодиспергирующим длинноволновым и коротковолновым пакетом, когда фазовая скорость первого точно совпадает с групповой скоростью второго. Теоретическое исследование этого длинно-коротковолнового резонансного взаимодействия впервые было выполнено Захаровым на плазме волн Ленгмюра [3]. В случае распространения длинных волн в одном направлении общая система Захарова была сведена к системе Яджимы-Ойкавы [4]. Это явление было предсказано в различных областях, таких как физика плазмы, гидродинамика и нелинейная оптика.

(1+1)-мерную систему Яджимы-Ойкавы запишем в следующем виде:

$$iq_t + q_{xx} - wq = 0, \tag{1}$$

$$w_t + w_x + 2\delta(|q|^2)_x = 0, \tag{2}$$

где, q – коротковолновые, w – длинноволновые компоненты резонансного взаимодействия, индексы x и t обозначают частные производные по аргументам x и t, $\delta = \pm 1$, i – мнимая единица.

Введем масштабное преобразование, как [5]

$$\frac{\partial}{\partial t} \to \varepsilon \frac{\partial}{\partial t},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \to \varepsilon \frac{\partial}{\partial x},$$

здесь, ε - малый параметр

$$\varepsilon i q_t + \varepsilon^2 q_{xx} - wq = 0, \tag{3}$$

$$\varepsilon w_t + \varepsilon w_x + 2\delta\varepsilon(|q|^2)_x = 0, \tag{4}$$

q представим в следующем виде:

$$q = \sqrt{u} e^{\frac{iS}{\varepsilon}}. \tag{5}$$

Вычислим производную по переменной t и x от величин q в уравнении (5)

$$q_t = \left(\frac{u_t}{2\sqrt{u}} + \frac{iS_t\sqrt{u}}{\varepsilon} \right) e^{\frac{iS}{\varepsilon}}, \tag{6}$$

$$q_x = \left(\frac{u_x}{2\sqrt{u}} + \frac{iS_x\sqrt{u}}{\varepsilon} \right) e^{\frac{iS}{\varepsilon}}, \tag{7}$$

$$q_{xx} = \left\{ \left(\frac{u_x}{2\sqrt{u}} \right)_x + \frac{iS_{xx}\sqrt{u}}{\varepsilon} + \frac{iS_x u_x}{2\varepsilon\sqrt{u}} + \frac{iS_x}{\varepsilon} \left[\frac{u_x}{2\sqrt{u}} + \frac{iS_x\sqrt{u}}{\varepsilon} \right] \right\} e^{\frac{iS}{\varepsilon}}. \tag{8}$$

Уравнения (6)-(8) подставим в уравнение (3)

$$i\varepsilon \left(\frac{u_t}{2\sqrt{u}} + \frac{iS_t\sqrt{u}}{\varepsilon} \right) - S_x^{\,2}\sqrt{u} + i\varepsilon \left[S_{xx}\sqrt{u} + \frac{S_x u_x}{\sqrt{u}} \right] - w\sqrt{u} = 0. \tag{9}$$

Далее собираем по степеням ε

$$\varepsilon^0 : -S_t\sqrt{u} - S_x^{\,2}\sqrt{u} - w\sqrt{u} = 0, \tag{10}$$

$$\varepsilon^1 : \frac{iu_t}{2\sqrt{u}} + i\left(S_{xx}\sqrt{u} + \frac{S_x u_x}{\sqrt{u}} \right) = 0. \tag{11}$$

Бездисперсионный предел системы уравнений Яджимы-Ойкавы запишется как

$$\begin{cases} S_t + S_x^{\,2} + w = 0, \\ u_t + 2(S_{xx}u + S_x u_x) = 0, \\ w_t + w_x + 2\delta u_x = 0, \end{cases} \tag{12}$$

где

$$S_x = v.$$

Тогда система примет следующий вид

$$\begin{cases} v_t + (v^2 + w)_x = 0, \\ u_t + 2\left(uv\right)_x = 0, \\ w_t + w_x + 2\delta u_x = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Найдем первые интегралы законов сохранения, как

$$I_1 = \int v dx,$$
$$I_2 = \int u dx,$$
$$I_3 = \int w dx,$$

$$I_{kt} = 0,$$
$$I_k = const.$$

В данной работе мы получили бездисперсионный предел системы уравнений Яджимы-Ойкавы. В последнее время значительный интерес уделяется бездисперсионным или квазиклассическим пределам интегрируемых уравнений и их иерархий. Изучение бездисперсионных иерархий имеет большое значение, так как они возникают при анализе различных проблем физики, математики и прикладной математики от теории квантовых полей и струн до теории конформных отображений на комплексной плоскости. В последующих работах планируется нахождение представления Лакса бездисперсионного предела системы уравнений Яджимы-Ойкавы.

Список использованных источников

1. Сазонов С.В., Устинов Н.В. Векторное акустические солитоны при взаимодействии длинных и коротких волн в парамагнитном кристале, ТМФ, 2014, том 178, номер 2. С.230-254.
2. Ощепков А.Ю. Теория солитонов. Математическое описание и физические приложения // Учеб.-метод.пособие. - Перм.ун.-т. Пермь, 2007, С. 11.
3. Zakharov V.E. Collapse of Langmuir waves // Soviet physics jetp 35. 1972. №5. P.908–914.
4. Junchao Chen, Yong Chen, Bao-Feng Feng, Ken-ichi Maruno, Yasuhiro Ohta General high-order rogue waves of the (1+1)-dimensional Yajima-Oikawa system // The Physical Society of Japan. 2018. P.87.
5. Takashi Takebe Lectures on Dispersionless Integrable Hierarchies. – Moscow, 2014, P.95.