РУХАНИ ЖАҢҒЫРУ

20 АСТАНА

ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

Студенттер мен жас ғалымдардың
«ҒЫЛЫМ ЖӘНЕ БІЛІМ - 2018»
XIII Халықаралық ғылыми конференциясы

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ

XIII Международная научная конференция
студентов и молодых ученых
«НАУКА И ОБРАЗОВАНИЕ - 2018»

The XIII International Scientific Conference
for Students and Young Scientists
«SCIENCE AND EDUCATION - 2018»

12th April 2018, Astana

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

Студенттер мен жас ғалымдардың
«Ғылым және білім - 2018»
атты XIII Халықаралық ғылыми конференциясының
БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
XIII Международной научной конференции
студентов и молодых ученых
«Наука и образование - 2018»

PROCEEDINGS
of the XIII International Scientific Conference
for students and young scholars
«Science and education - 2018»

2018 жыл 12 сәуір

Астана

УДК 378

ББК 74.58
Ғ 96

Ғ 96

«Ғылым және білім – 2018» атты студенттер мен жас ғалымдардың XIII Халықаралық ғылыми конференциясы = XIII Международная научная конференция студентов и молодых ученых «Наука и образование - 2018» = The XIII International Scientific Conference for students and young scholars «Science and education - 2018». – Астана: http://www.enu.kz/ru/nauka/nauka-i-obrazovanie/, 2018. – 7513 стр. (қазақша, орысша, ағылшынша).

ISBN 978-9965-31-997-6

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докоранттардың және жас ғалымдардың жаратылыстану-техникалық және гуманитарлық ғылымдардың өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

The proceedings are the papers of students, undergraduates, doctoral students and young researchers on topical issues of natural and technical sciences and humanities.

В сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и молодых ученых по актуальным вопросам естественно-технических и гуманитарных наук.

УДК 378

ББК 74.58

ISBN 978-9965-31-997-6

УДК 521.11.2

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОЙ СИСТЕМЫ WDVV

Жадыранова Алия Амирбековна[1], **Мырзакул Жанбота Ратбайқызы**[2]
[1]Докторант кафедры общей и теоретической физики ЕНУ им. Л.Н.Гумилева,
[2]Преподаватель кафедры общей и теоретической физики ЕНУ им. Л.Н.Гумилева
Научный руководитель – К.Р. Мырзакулов

Введение. Система дифференциальных уравнений WDVV (Witten-Dijkgraaf-Verlinde-Verlinde) описывает пространство модулей топологических конформных теорий поля [4]. Б. Дубровин показал, что решения данной системы описывают дифференциально – геометрическую структуру, которая называется фробениусовой. Уравнения WDVV представляют собой следующие условия на функцию $F(t^1,...,t^n)$ от n переменных:

1. Матрица $\eta_{\alpha\beta} := \dfrac{\partial^3 F(t)}{\partial t^1 \partial t^\alpha \partial t^\beta}$ является постоянной, симметричной и невырожденной.

2. Функции $c^p_{\alpha\beta} = \eta^{pq} \dfrac{\partial^3 F(t)}{\partial t^q \partial t^\alpha \partial t^\beta}$, где $\eta^{pq} = \left(\eta_{pq}\right)^{-1}$, должны быть структурными константами некоторой ассоциативной алгебры.

Система уравнений WDVV в общем виде выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^p}\eta^{pq}\frac{\partial^3 F}{\partial t^q \partial t^\gamma \partial t^\delta} = \frac{\partial^3 F}{\partial t^\gamma \partial t^\beta \partial t^p}\eta^{pq}\frac{\partial^3 F}{\partial t^q \partial t^\alpha \partial t^\delta}, \quad \forall \alpha,\beta,\gamma,\delta,p,q \in \{1,...,n\} \qquad (1)$$

Приведем ниже лемму 1, которая позволит нам написать метрику в более простой форме и дает одну из форм решений уравнений WDVV [1, 3].

Лемма 1. Если $\eta_{11}=0$ и все корни $E(t)$ просты, то при линейном изменении координат t^α матрица $\eta_{\alpha\beta}$ может быть сведена к антидиагональной форме

$$\eta_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha+\beta,n+1}$$

В этих координатах

$$F(t^1,...,t^n) = \frac{1}{2}(t^1)^2 t^n + \frac{1}{2}t^1\sum_{\alpha=2}^{n-1} t^\alpha t^{n+1-\alpha} + f(t^2,...,t^n) \qquad (2)$$

для некоторой функции $f(t^2,..,t^n)$, сумма

$$d_\alpha + d_{n-\alpha+1} = m+2. \qquad (3)$$

Из вышеприведённой леммы следует, что единственными ненулевыми элементами метрики являются те, которые в сумме дают $n+1$, следовательно система (1) может быть переписана в следующем виде [3]:

$$\sum_{p=1}^{n}\frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^p}\frac{\partial^3 F}{\partial t^\gamma \partial t^\delta \partial t^{n+1-p}} = \sum_{p=1}^{n}\frac{\partial^3 F}{\partial t^\gamma \partial t^\beta \partial t^p}\frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^\delta \partial t^{n+1-p}} \qquad (4)$$

Определение 1. Пусть на области $U \subset K^n = \left\{\left(t^1,...,t^n\right)\right\}$ задана функцией $F\left(t^1,...,t^n\right)$ и векторное поле $E = \sum_\alpha \left(d_\alpha t^\alpha + r_\alpha\right)\left(\partial / \partial t^\alpha\right)$ такое, что $d_\alpha + d_{n+1-\alpha} = m+2$, $d_\alpha \cdot r_\alpha = 0$, $d_1 = 1$. Говорят, что пара (F,E) удовлетворяет WDVV иерархии, если она удовлетворяет:

1. уравнению ассоциативности
$$\sum_{p=1}^{n} \frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^p} \frac{\partial^3 F}{\partial t^\gamma \partial t^\delta \partial t^{\,n+1-p}} = \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial^3 F}{\partial t^\gamma \partial t^\beta \partial t^p} \frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^\delta \partial t^{\,n+1-p}};$$

2. условию нормализации
$$\frac{\partial^3 F}{\partial t^1 \partial t^\alpha \partial t^\beta} = \delta_{\alpha+\beta,n+1}; \tag{5}$$

3. уравнению однородности
$$L_E F = (m+3)F + \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta + \sum_\alpha B_\alpha t^\alpha + C, \quad A_{\alpha\beta}, B_\alpha, C = const. \tag{6}$$

Полиномиальные решения уравнения WDVV для n=3. В случае n=3 (4) имеет следующий вид:

$$\sum_{p=1}^{3} \frac{\partial^3 F}{\partial t^2 \partial t^3 \partial t^p} \frac{\partial^3 F}{\partial t^3 \partial t^2 \partial t^{n+1-p}} = \sum_{p=1}^{3} \frac{\partial^3 F}{\partial t^3 \partial t^3 \partial t^p} \frac{\partial^3 F}{\partial t^2 \partial t^2 \partial t^{n+1-p}} \tag{7}$$

Условие нормализации выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial^3 F}{\partial t^1 \partial t^\alpha \partial t^\beta} = \delta_{\alpha+\beta,4}, \quad \alpha,\beta \in \{1,2,3\} \tag{8}$$

Уравнение однородности имеет следующий вид:

$$L_E F = (m+3)F + \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta + \sum_\alpha B_\alpha t^\alpha + C, \quad A_{\alpha\beta}, B_\alpha, C = const \tag{9}$$

Согласно определению 1 найдём полиномиальные решения, удовлетворяющие условиям (7), (8), (9). В этом случае мы имеем $\eta_{11} = 0$, тогда согласно лемме 1 F имеет вид:

$$F(t^1,t^2,t^3) = \frac{1}{2}(t^1)^2 t^3 + \frac{1}{2} t^1 (t^2)^2 + f(t^2,t^3). \tag{10}$$

Для функции $f(t^2,t^3)$ в (10) уравнение однородности (9) запишется в следующем виде:

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial t^2 \partial t^3}\right)^2 = \frac{\partial^3 f}{\partial t^3 \partial t^3 \partial t^3} + \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial t^2 \partial t^2} \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial t^3 \partial t^3}. \tag{11}$$

Теорема 1. Существуют три различных полиномиальных решений для случая $n=3$ [3]:

1. $$F = \frac{(t^1)^2 t^3 + t^1 (t^2)^2}{2} + \alpha (t^2)^2 (t^3)^2 + \frac{4}{15} \alpha^2 (t^3)^5, \tag{12}$$
$$E = t^1 \frac{\partial}{\partial t^1} + \frac{3}{4} t^2 \frac{\partial}{\partial t^2} + \frac{1}{2} t^3 \frac{\partial}{\partial t^3}; \tag{13}$$

$$2.\quad F=\frac{(t^1)^2t^3+t^1(t^2)^2}{2}+\alpha(t^2)^3t^3+6\alpha^2(t^2)^2(t^3)^3+\frac{216}{35}\alpha^4(t^3)^7, \qquad (14)$$

$$E=t^1\frac{\partial}{\partial t^1}+\frac{2}{3}t^2\frac{\partial}{\partial t^2}+\frac{1}{3}t^3\frac{\partial}{\partial t^3}; \qquad (15)$$

$$3.\quad F=\frac{(t^1)^2t^3+t^1(t^2)^2}{2}+\alpha(t^2)^3(t^3)^2+\frac{36}{20}\alpha^2(t^2)^2(t^3)^5+\frac{18}{55}\alpha^4(t^3)^{11}, \qquad (16)$$

$$E=t^1\frac{\partial}{\partial t^1}+\frac{3}{5}t^2\frac{\partial}{\partial t^2}+\frac{1}{5}t^3\frac{\partial}{\partial t^3}. \qquad (17)$$

Доказательство. Все три решения удовлетворяют уравнению (7) и (8). Следовательно, остается проверить уравнение однородности. Из леммы 1 вытекают условия: $d_2,d_3\neq 0$ и $2d_2=d_3+1=m+2$, из чего имеем Эйлерово поле в виде:

$$E=t^1\frac{\partial}{\partial t^1}+\frac{m+2}{2}t^2\frac{\partial}{\partial t^2}+(m+1)t^3\frac{\partial}{\partial t^3}, \qquad (18)$$

где $m\neq -1,-2$.

Введём взаимозаменяемые переменные $x=t^2$, $y=t^3$. Подставляя (10) и (18) в уравнение однородности (9) получаем:

$$\frac{m+2}{2}xf_x+(m+1)yf_y=(m+3)f+\varphi(x,y), \qquad (19)$$

где $\varphi(x,y)$ - квадратный полиномиал в переменных *x,y*. Пусть $f(x,y)=\Sigma\alpha_{pq}x^py^q$, где $p,q\geq 0, p+q>2.$ Тогда (19) принимает вид:

$$\frac{m+2}{2}x\sum p\alpha_{pq}x^{p-1}y^q+(m+1)y\sum q\alpha_{pq}x^py^{q-1}=(m+3)\sum\alpha_{pq}x^py^q+\varphi$$

и, поэтому,

$$\frac{m+2}{2}p\alpha_{pq}+(m+1)q\alpha_{pq}=(m+3)\alpha_{pq},$$

тогда

$$m=-2\frac{p+q-3}{p+2q-2}. \qquad (20)$$

Вместе с условиями $p+q>2$, $d_i>0$ из (20) следует:

$$1)\quad m=\frac{(2s-n)}{(n-s)}, s,n\in Z\geq 0, n\equiv 1(mod2). \qquad (21)$$

$$2)\quad m=\frac{(2s-2n)}{(2n-s)}, s,n\in Z\geq 0, n\equiv 1(mod2). \qquad (22)$$

СЛУЧАЙ 1. Пусть $m=\frac{(2s-n)}{n-s}$, тогда

$$q=\frac{m+3}{m+1}-\frac{m+2}{2m+2}p=\frac{\frac{2s-n}{n-s}+3}{\frac{2s-n}{n-s}+1}-\frac{\frac{2s-n}{n-s}+2}{2\frac{2s-n}{n-s}+2}=\frac{2n-s}{s}-\frac{1}{2}\frac{n}{s}p$$

Введем $k=(q+1)/n$. Тогда $q=kn-1$ и $p=4-2ks$. Следовательно,

$$f(x,y)=\sum_k\alpha_kx^{4-2ks}y^{kn-1}. \qquad (23)$$

Условия $m\neq -1, kn-1\geq 0$ и $4-2ks\geq 0$ дают $s>0$, $k>0$, $s\leq 2$. Если $s=1$, тогда $f=\alpha_1x^2y^{n-1}-\alpha_2y^{2n-1}$; если $s=2$, тогда $f=\alpha_1y^{n-1}$.

СЛУЧАЙ 2. Пусть $m = \dfrac{2(s-n)}{2n-s}$, тогда

$$q = \frac{m+3}{m+1} - \frac{m+2}{2m+2}p = \frac{\dfrac{2(s-n)}{n-s}+3}{\dfrac{2(s-n)}{n-s}+1} - \frac{1}{2}\,\frac{\dfrac{2(s-n)}{n-s}+2}{\dfrac{2(s-n)}{2n-s}+1} = \frac{4n-s}{s} - \frac{n}{s}p$$

Введем $k = (q+1)/n$. Тогда $q = kn-1$ и $p = 4-2ks$. Следовательно,

$$f(x,y) = \sum_k \alpha_k x^{4-ks} y^{kn-1}. \tag{24}$$

Условия $m \neq -1, kn-1 \geq 0$ и $4-ks \geq 0$ дают $n \geq 0, 4 \leq k > 0, s = 1,3$. Если $s = 3$, тогда $f = \alpha_1 xy^{n-1}$; если $s = 1$, тогда $f = \alpha_1 x^3 y^{n-1} + \alpha_2 x^2 y^{2n-1} + \alpha_3 xy^{3n-1} + \alpha_4 y^{2n-1}$.

В итоге имеем следующие формы для *f*:

$$f = \alpha_1 y^{n-1} + \varphi, \quad n \equiv 1 mod 2; \tag{25}$$

$$f = \alpha_1 xy^{n-1} + \varphi; \tag{26}$$

$$f = \alpha_1 x^2 y^{n-1} + \alpha_2 y^{2n-1} + \varphi, \quad n \equiv 1 mod 2; \tag{27}$$

$$f = \alpha_1 x^3 y^{n-1} + \alpha_2 x^2 y^{2n-1} + \alpha_3 xy^{3n-1} + \alpha_4 y^{2n-1} + \varphi \tag{28}$$

Подставляя найденные виды *f* в (11) получаем $a_1 = 0$ для (25), (26).

Вид для *f* (27) дает:

$$n = 3, m = \frac{2s-n}{n-s} = -\frac{1}{2} \qquad \alpha_2 = \frac{4}{15}\alpha_1^2. \tag{29}$$

Тогда

$$F = \frac{(t^1)^2 t^3 + t^1 (t^2)^2}{2} + \alpha (t^2)^2 (t^3)^2 + \frac{4}{15}\alpha^2 (t^3)^5. \tag{30}$$

Аналогичным способом для (28) получаем следующие два решения:

$$m = -\frac{2}{3}, F = \frac{(t^1)^2 t^3 + t^1 (t^2)^2}{2} + \alpha (t^2)^3 t^3 + 6\alpha^2 (t^2)^2 (t^3)^3 + \frac{216}{35}\alpha^4 (t^3)^7, \tag{40}$$

$$m = -\frac{4}{5}, F = \frac{(t^1)^2 t^3 + t^1 (t^2)^2}{2} + \alpha (t^2)^3 (t^3)^2 + \frac{9}{5}\alpha^2 (t^2)^2 (t^3)^5 + \frac{18}{55}\alpha^4 (t^3)^{11}. \tag{41}$$

Решение аналогичной системы. Введем переменные $a = f_{t^2t^2t^2}$, $b = f_{t^2t^2t^3}$, $c = f_{t^2t^3t^3}$, где функция f была введена в (10). В [2] введена система в переменных a, b, c, аналогичная уравнению (11), в виде:

$$\begin{cases} a_{t^3} = b_{t^2}, \\ b_{t^3} = c_{t^2}, \\ c_{t^3} = (b^2 - ac)_{t^2}. \end{cases} \tag{42}$$

Покажем что следующие виды для функций f,

$$\alpha (t^2)^2 (t^3)^2 + \frac{4}{15}\alpha^2 (t^3)^5 \tag{43}$$

$$\alpha (t^2)^3 t^3 + 6\alpha^2 (t^2)^2 (t^3)^3 + \frac{216}{35}\alpha^4 (t^3)^7 \tag{44}$$

$$\alpha (t^2)^3 (t^3)^2 + \frac{9}{5}\alpha^2 (t^2)^2 (t^5)^5 + \frac{18}{55}\alpha^4 (t^3)^{11} \tag{45}$$

приведенные в предыдущей главе, удовлетворяют системе (42). Значения третьих производных решений f приведены в таблице (1)

Таблица 1. Значения функций f и третьих производных по соответствующим переменным.

№	f	$a = f_{t^2t^2t^2}$	$b = f_{t^2t^2t^3}$	$c = f_{t^2t^3t^3}$
1	$\alpha(t^2)^2(t^3)^2 + \frac{4}{15}\alpha^2(t^3)^5$	0	$4\alpha t^3$	$4\alpha t^2$
2	$\alpha(t^2)^3 t^3 + 6\alpha^2(t^2)^2(t^3)^3 + \frac{216}{35}\alpha^4(t^3)^7$	$6\alpha t^2$	$6\alpha t^2 + 36\alpha^2(t^3)^2$	$72\alpha^2 t^2 t^3$
3	$\alpha(t^2)^3(t^3)^2 + \frac{9}{5}\alpha^2(t^2)^2(t^5)^5 + \frac{18}{55}\alpha^4(t^3)^{11}$	$6\alpha(t^3)^2$	$12\alpha t^2 t^3 + 18\alpha^2(t^3)^4$	$6\alpha(t^2)^2 + 72\alpha^2 t^2(t^3)^3$

Подставляя полученные значения для a, b, c в систему (42) следует, что f в (43) (44) (45) являются частными решениями данной системы.

Список использованных источников

1. Dubrovin B.A. Geometry of 2D topological field theories. - Springer Lecture Notes in Math., 1996, P. 120-348.
2. Мохов О.И., Ферапонтов Е.В. Уравнения ассоциативности двумерной топологической теории поля как интегрируемые гамильтоновы недиагонализуемые системы гидродинамического типа. - Функ. Анализ и его прил., 1996, том 30, выпуск 3, С. 62-72.
3. Натанзон С.М. Курс «Фробениусовы многообразия» http://www.mcnmo.ru/ium/s00/frob.html
4. Тришин В.Н. Геометрические и топологические структуры физики, Математическая и теоретическая физика. - Сборник научных трудов РНОЦ "Логос", Вып. 4, 2009, С. 11-71.

УДК 517.9: 515.16

УРАВНЕНИЯ WDVV КАК ИНТЕГРИРУЕМАЯ СИСТЕМА

Жадыранова Алия Амирбековна[1], Мырзакул Жанбота Ратбайқызы[2], Ануарбекова Ырысты Еркиновна[3]

[1]Докторант, [2]преподаватель и [3]магистрант кафедры общей и теоретической физики

ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан

Научный руководитель – К.Р. Мырзакулов

Введение. В данной работе рассматривается система дифференциальных уравнений Witten-Dijkgraaf-Verlinde-Verlinde (WDVV), которая описывает пространство модулей топологических конформных теорий поля [1].

Система уравнений WDVV в общем виде выглядит следующим образом [2, 3]:

$$\frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^p}\eta^{pq}\frac{\partial^3 F}{\partial t^q \partial t^\gamma \partial t^\delta} = \frac{\partial^3 F}{\partial t^\gamma \partial t^\beta \partial t^p}\eta^{pq}\frac{\partial^3 F}{\partial t^q \partial t^\alpha \partial t^\delta}, \tag{1}$$