РУХАНИ ЖАҢҒЫРУ

20 АСТАНА

ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

Студенттер мен жас ғалымдардың
«ҒЫЛЫМ ЖӘНЕ БІЛІМ - 2018»
XIII Халықаралық ғылыми конференциясы

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ

XIII Международная научная конференция
студентов и молодых ученых
«НАУКА И ОБРАЗОВАНИЕ - 2018»

The XIII International Scientific Conference
for Students and Young Scientists
«SCIENCE AND EDUCATION - 2018»

12th April 2018, Astana

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

Студенттер мен жас ғалымдардың «Ғылым және білім - 2018» атты XIII Халықаралық ғылыми конференциясының БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ XIII Международной научной конференции студентов и молодых ученых «Наука и образование - 2018»

PROCEEDINGS of the XIII International Scientific Conference for students and young scholars «Science and education - 2018»

2018 жыл 12 сәуір

Астана

УДК 378

ББК 74.58
Ғ 96

Ғ 96

«Ғылым және білім – 2018» атты студенттер мен жас ғалымдардың XIII Халықаралық ғылыми конференциясы = XIII Международная научная конференция студентов и молодых ученых «Наука и образование - 2018» = The XIII International Scientific Conference for students and young scholars «Science and education - 2018». – Астана: http://www.enu.kz/ru/nauka/nauka-i-obrazovanie/, 2018. – 7513 стр. (қазақша, орысша, ағылшынша).

ISBN 978-9965-31-997-6

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докторанттардың және жас ғалымдардың жаратылыстану-техникалық және гуманитарлық ғылымдардың өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

The proceedings are the papers of students, undergraduates, doctoral students and young researchers on topical issues of natural and technical sciences and humanities.

В сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и молодых ученых по актуальным вопросам естественно-технических и гуманитарных наук.

УДК 378

ББК 74.58

ISBN 978-9965-31-997-6

УДК 517.957; 530.182

ОДНОСОЛИТОННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ СПИНОВОЙ СИСТЕМЫ

Сагидуллаева Жанна Муратбековна
Докторант 3-го курса специальности 6D060400 - Физика,
ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан,
Научный руководитель - Р. Мырзакулов

Введение. Солитоны представляют собой структурно устойчивые уединенные волны, распространяющиеся в нелинейной среде. Благодаря своим особым свойствам солитоны ведут себя подобно частицам (частицеподобная волна): при взаимодействии друг с другом или с некоторыми другими возмущениями они не разрушаются, а продолжают движение, сохраняя свою структуру неизменной. Данное свойство может использоваться для передачи данных на большие расстояния без помех, что открывает огромные возможности для использования солитонов. Следовательно, возрос интерес к изучению солитонов и связанных с ними решений. Солитоны проявляют себя в совершенно различных областях: в гидродинамике, оптике, магнетизме и ДНК человека [1].

В данной работе исследуется (1+1)-мерное двухкомпонентное уравнение Шредингера-Максвелла-Блоха (описывающее динамику квантовой системы двух состояний, взаимодействующей с электромагнитным режимом оптического резонатора) и калибровочно эквивалентная ему двухслойная спиновая система. Спиновые системы описывают динамику распространения волновых пакетов в магнетиках. Волны нарушений магнитной упорядоченности в ферро-, антиферро- и ферримагнетиках называют спиновыми. Спины атомов в этих веществах и связанные с ними магнитные моменты в основном состоянии упорядочены. Отклонение магнитного момента от преимущественного направления не локализуется на атоме, а в виде волны распространяется в среде. Таким образом, спиновая волна - это элементарное возбуждение магнитной системы в магнитоупорядоченной среде [2]. В нашем случае под двухслойной системой подразумевается совокупность двух рядов атомов в ферромагнетике.

Существует несколько способов нахождения солитонных и других точных решений интегрируемых уравнений: метод Хироты, обратное преобразование рассеяния, билинейный метод, преобразование Дарбу и т.д. В данной работе с помощью калибровочного преобразования получим двухслойную спиновую систему – так называемое двухслойное уравнение Мырзакулова-XCIX (M-XCIX) [3] и построем его односолитонное решение.

Двухкомпонентное уравнение Шредингера - Максвелла – Блоха. (1+1)-мерное двухкомпонентное уравнение Шредингера-Максвелла-Блоха (ШМБ) имеет вид

$$iq_{1t}+q_{1xx}+2(|q_1|^2+|q_2|^2)q_1-2ip_1 = 0, \tag{1}$$

$$iq_{2t}+q_{2xx}+2(|q_1|^2+|q_2|^2)q_2-2ip_2 = 0, \tag{2}$$

$$p_{1x}-2i\omega p_1+(\eta_{21}q_1+\eta_4 q_2) = 0, \tag{3}$$

$$p_{2x}-2i\omega p_2+(\eta_3 q_1+\eta_{51}q_2) = 0, \tag{4}$$

$$\eta_{1x}+p_1^*q_1+p_2^*q_2+p_1q_1^*+q_2^*p_2 = 0, \tag{5}$$

$$\eta_{2x}-(q_1^*p_1+p_1^*q_1) = 0, \tag{6}$$

$$\eta_{3x}-(q_1^*p_2+p_1^*q_2) = 0, \tag{7}$$

$$\eta_{4x}-(q_2^*p_1+p_2^*q_1) = 0, \tag{8}$$

$$\eta_{5x}-(q_2^*p_2+p_2^*q_2) = 0, \tag{9}$$

где q_j, p_j комплексные и η_j действительные функции, ω- действительная постоянная. (1+1)-мерное двухкомпонентное уравнение ШМБ является интегрируемым в том смысле, что допускает представление Лакса вида

$$\Psi_x \quad = \quad U\Psi, \tag{10}$$

$$\Psi_t \quad = \quad (2\varepsilon_1\lambda U + V)\Psi, \tag{11}$$

где

$$U \quad = \quad -i\lambda\Sigma + U_0 = \begin{pmatrix} -i\lambda & q_1 & q_2 \\ -r_1 & i\lambda & 0 \\ -r_2 & 0 & i\lambda \end{pmatrix},$$

$$V \quad = \quad V_0 + \frac{i}{\lambda+\omega}V_{-1},$$

а также, $\Sigma = diag(1,-1,-1)$

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 & q_1 & q_2 \\ -r_1 & 0 & 0 \\ -r_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_0 = \begin{pmatrix} i(|q_1|^2 + |q_2|^2) & iq_{1x} & iq_{2x} \\ iq_{1x}^* & -i|q_1|^2 & -iq_1^*q_2 \\ iq_{2x}^* & -iq_1q_2^* & -i|q_2|^2 \end{pmatrix}, \quad V_{-1} = \begin{pmatrix} \eta_1 & -p_1 & -p_2 \\ -k_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ -k_2 & \eta_4 & \eta_5 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\Psi = (\Psi_1(x,t), \Psi_2(x,t), \Psi_3(x,t))^T$ (T транспонированная матрица), q_1 и q_2 потенциалы, λ спектральный параметр. Связность матричных операторов U и V имеет условие нулевой кривизны

$$U_t - V_x + [U,V] - 2\varepsilon_1\lambda U_x = 0. \tag{12}$$

Здесь $[U,V] = UV - VU$ коммутатор. Условие совместности уравнений (10)-(11) дает уравнение ШМБ в форме (1)-(9).

Двухслойная спиновая система. Для получения новой интегрируемой модели, используем следующее калибровочное преобразование [4]

$$\Phi = g^{-1}\Psi, \quad g = \Psi|_{\lambda=\lambda_0}. \tag{13}$$

Далее представим новые матричные функции A, B, G и H как

$$\begin{aligned} A \quad &= \quad g^{-1}\sigma_3 g = \begin{pmatrix} A_3 & A^- \\ A^+ & -A_3 \end{pmatrix}, \quad B = h^{-1}\sigma_3 h = \begin{pmatrix} B_3 & B^- \\ B^+ & -B_3 \end{pmatrix}, \\ G \quad &= \quad g^{-1}\begin{pmatrix} \eta_1 & -p_1 \\ -p_1^* & -\eta_1 \end{pmatrix} g, \quad H = h^{-1}\begin{pmatrix} \eta_2 & -p_2 \\ -p_2^* & -\eta_5 \end{pmatrix} h, \end{aligned} \tag{14}$$

где

$$g = \begin{pmatrix} \varphi_1 & -\varphi_2^* \\ \varphi_2 & \varphi_1^* \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} \varphi_1 & -\varphi_3^* \\ \varphi_3 & \varphi_1^* \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Используя калибровочное преобразование (13) и матричные функции (14) получим калибровочно эквивалентную уравнению ШМБ двухслойную спиновую систему, так называемое двухслойное уравнение M-XCIX. Двухслойное уравнение M-XCIX для спиновых матриц A и B имеет форму

$$iA_t + \frac{1}{2}[A, A_{xx}] + i(u_1 - 4\lambda_0)A_x + \left(v_1 - \frac{\eta_1 + \eta_2}{2(\lambda_0 + \omega)}\right)[\sigma_3, A] - \frac{2}{(\lambda_0 + \omega)}G \quad = \quad 0, \tag{16}$$

$$iB_t + \frac{1}{2}[B, B_{xx}] + i(u_2 - 4\lambda_0)B_x + \left(v_2 - \frac{\eta_1 + \eta_5}{2(\lambda_0 + \omega)}\right)[\sigma_3, B] - \frac{2}{(\lambda_0 + \omega)}H \quad = \quad 0, \qquad (17)$$

где $u_1 = \frac{2ia}{\Delta_1}$, $u_2 = \frac{2ib}{\Delta_2}$, $v_1 = -\frac{|q_2|^2 \Delta}{\Delta_1}$, $v_2 = -\frac{|q_1|^2 \Delta}{\Delta_2}$, $\Delta_1 = |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2$ и $\Delta_2 = |\varphi_1|^2 + |\varphi_3|^2$, $a = q_2^* \varphi_1 \varphi_3^* - q_2 \varphi_1^* \varphi_3, b = q_1^* \varphi_1 \varphi_2^* - q_1 \varphi_1^* \varphi_2$, G и H некоторые матричные функции.

С учетом (14) и (15) компоненты матриц A и B запишутся как

$$A^+ = -\frac{2\varphi_1\varphi_2}{\Delta_1}, \quad A^- = -\frac{2\varphi_1^*\varphi_2^*}{\Delta_1}, \quad A_3 = \frac{|\varphi_1|^2 - |\varphi_2|^2}{\Delta_1}, \qquad (18)$$

$$B^+ = -\frac{2\varphi_1\varphi_3}{\Delta_2}, \quad B^- = -\frac{2\varphi_1^*\varphi_3^*}{\Delta_2}, \quad B_3 = \frac{|\varphi_1|^2 - |\varphi_3|^2}{\Delta_2}. \qquad (19)$$

Для G и H аналогично.

Односолитонное решение. Далее найдем тривиальное односолитонное решение двухслойной спиновой системы (16)-(17). Заметим, что нулевое решение уравнения ШМБ является односолитонным решением уравнения для калибровочно эквивалентной ему спин системы. Таким образом для нахождения тривиального односолитонного решения двухслойной спиновой системы (16)-(17), найдем решение уравнения ШМБ. Нулевое решение ШМБ находится при условии $q_1 = q_2 = p_1 = p_2 = \eta_3 = \eta 4 = 0$. Тогда линейная система представления Лакса (10)-(11) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \varphi_{1x} &= -i\lambda_0\varphi_1, \\ \varphi_{2x} &= i\lambda_0\varphi_2, \\ \varphi_{3x} &= i\lambda_0\varphi_3. \end{aligned} \qquad (20)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{1t} &= -2i\lambda_0{}^2\varphi_1 + \frac{i}{\lambda_0 + \omega}\eta_1\varphi_1, \\ \varphi_{2t} &= 2i\lambda_0{}^2\varphi_2 + \frac{i}{\lambda_0 + \omega}\eta_2\varphi_2, \\ \varphi_{3t} &= 2i\lambda_0{}^2\varphi_3 + \frac{i}{\lambda_0 + \omega}\eta_5\varphi_3, \end{aligned} \qquad (21)$$

где λ_0 - комплексная, а ω - действительная постоянные. Рассмотрим тривиальное решение

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \alpha e^{ia_1 x + ib_1 t}, \\ \varphi_2 &= \beta e^{ia_2 x + ib_2 t}, \\ \varphi_3 &= \gamma e^{ia_3 x + ib_3 t}. \end{aligned} \qquad (22)$$

Подставив значения φ_j в соответствующие уравнения, восстановим значения постоянных a_j b_j, $j = 1,2,3$

$$\varphi_1 = \alpha e^{-i\lambda_0 x - 2i\lambda_0^2 t + \frac{i\eta}{\lambda_0 + \omega} t},$$

$$\varphi_2 = \beta e^{i\lambda_0 x + 2i\lambda_0^2 t - \frac{i\eta}{\lambda_0 + \omega} t}, \tag{23}$$

$$\varphi_3 = \gamma e^{i\lambda_0 x + 2i\lambda_0^2 t - \frac{i\eta}{\lambda_0 + \omega} t},$$

где $\alpha = |\alpha| e^{i\delta_1}$, $\beta = |\beta| e^{i\delta_2}$, $\gamma = |\gamma| e^{i\delta_3}$, а $\delta_j, j = 1,2,3$ действительные постоянные. Для удобства обозначив $\frac{|\alpha|}{|\beta|} = e^{\delta}$, а $\frac{|\alpha|}{|\gamma|} = e^{\nu}$, найдем решение спиновой системы и получим компоненты матриц A, B, G, H

$$A^+ = -\frac{e^{i(\delta_1+\delta_2)}}{(\theta_1+\delta)}, \quad A^- = -\frac{e^{-i(\delta_1+\delta_2)}}{(\theta_1+\delta)}, \quad A_3 = (\theta_1+\delta), \tag{24}$$

$$B^+ = -\frac{e^{i(\delta_1+\delta_3)}}{(\theta_1+\nu)}, \quad B^- = -\frac{e^{-i(\delta_1+\delta_3)}}{(\theta_1+\nu)}, \quad B_3 = (\theta_1+\nu), \tag{25}$$

$$G^+ = -\frac{\eta e^{i(\delta_1+\delta_2)}}{(\theta_1+\delta)}, \quad G^- = -\frac{\eta e^{-i(\delta_1+\delta_2)}}{(\theta_1+\delta)}, \quad G_3 = \eta(\theta_1+\delta), \tag{26}$$

$$H^+ = -\frac{\eta e^{i(\delta_1+\delta_3)}}{(\theta_1+\nu)}, \quad H^- = -\frac{\eta e^{-i(\delta_1+\delta_3)}}{(\theta_1+\nu)}, \quad H_3 = \eta(\theta_1+\nu). \tag{27}$$

Здесь δ, ν - некоторые постоянные, а

$$\theta_1 = i(\lambda_0^* - \lambda_0)x + 2i(\lambda_0^{*2} - \lambda_0^2)t + i\left(\frac{\eta}{\lambda_0+\omega} - \frac{\eta}{\lambda_0^*+\omega}\right)t,$$

или $$\theta_1 = 2\lambda_{0R} x + 4\lambda_{0I}(2\lambda_{0R} + i\lambda_{0I})t + \frac{2\lambda_{0I}\eta}{\lambda_{0R}^2 + \lambda_{0I}^2 + 2\lambda_{0R}\omega + \omega^2} t.$$

Таким образом получили решения двухслойной спиновой системы в виде (24)-(27). Построенные по решению уравнения ШМБ, матрицы A, B, G и H удовлетворяют двухслойному уравнению M-XCIX.

Заключение. В данной работе получена двухслойная спиновая система, так называемое уравнение M-XCIX, калибровочно эквивалентное (1+1)-мерному двухкомпонентному уравнению Шредингера-Максвелла-Блоха. Также показали, что нулевое решение уравнения ШМБ является односолитонным решением уравнения для калибровочно эквивалентной ему спин системы. И получили односолитонное решение двухслойной спиновой системы (16)-(17) в виде (24)-(25). Восстановили соответствующие потенциалы системы (26)-(27).

Список использованных источников

1. Dauxois T., Peyrard M. Physics of Solitons - Cambridge University Press, 2006, P. 422.

2. Калиникос Б.А. Спиновые волны в ферромагнетиках // Соросовский образовательный журнал, №5, 1996. С.93-100.

3. Myrzakulov R., Mamyrbekova G., Nugmanova G., Lakshmanan M. // Symmetry, Vol. 72015, P. 1352.

4. Тахтаджян Л., Фадеев Л. Гамильтонов подход в теории солитонов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – С. 528.