РУХАНИ ЖАҢҒЫРУ

20 АСТАНА

ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

Студенттер мен жас ғалымдардың
«ҒЫЛЫМ ЖӘНЕ БІЛІМ - 2018»
XIII Халықаралық ғылыми конференциясы

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ

XIII Международная научная конференция
студентов и молодых ученых
«НАУКА И ОБРАЗОВАНИЕ - 2018»

The XIII International Scientific Conference
for Students and Young Scientists
«SCIENCE AND EDUCATION - 2018»

12[th] April 2018, Astana

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

Студенттер мен жас ғалымдардың
«Ғылым және білім - 2018»
атты XIII Халықаралық ғылыми конференциясының
БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
XIII Международной научной конференции
студентов и молодых ученых
«Наука и образование - 2018»

PROCEEDINGS
of the XIII International Scientific Conference
for students and young scholars
«Science and education - 2018»

2018 жыл 12 сәуір

Астана

УДК 378

ББК 74.58
Ғ 96

Ғ 96
«Ғылым және білім – 2018» атты студенттер мен жас ғалымдардың XIII Халықаралық ғылыми конференциясы = XIII Международная научная конференция студентов и молодых ученых «Наука и образование - 2018» = The XIII International Scientific Conference for students and young scholars «Science and education - 2018». – Астана: http://www.enu.kz/ru/nauka/nauka-i-obrazovanie/, 2018. – 7513 стр. (қазақша, орысша, ағылшынша).

ISBN 978-9965-31-997-6

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докоранттардың және жас ғалымдардың жаратылыстану-техникалық және гуманитарлық ғылымдардың өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

The proceedings are the papers of students, undergraduates, doctoral students and young researchers on topical issues of natural and technical sciences and humanities.

В сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и молодых ученых по актуальным вопросам естественно-технических и гуманитарных наук.

УДК 378

ББК 74.58

ISBN 978-9965-31-997-6

$$|q|^2 = \left|\frac{\gamma_1 - i}{\gamma_1 + i}\right|^2 = \frac{(\gamma_1 - i)(\overline{\gamma_1} + i)}{(\gamma_1 + i)(\overline{\gamma_1} - i)} = \frac{|\gamma_1|^2 + 1 - 2\,\mathrm{Im}\gamma_1}{|\gamma_1|^2 + 1 + 2\,\mathrm{Im}\gamma_1} \le q_0^2 < 1,$$

мұндағы q_0 – оң тұрақты сан.

Осылай (1) жүйе (9) Бельтрами типті эллипстік комплекс теңдеуге келтірілді.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Боярский Б.В. Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами// Матем. сб., 1957, том 43(85), № 4, С. 451-503.
2. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. – М.: Наука, 1988, 512с.

БЕЛЬТРАМИ ТИПТІ ЭЛЛИПСТІК ТЕҢДЕУ ҮШІН БІР ШЕКАРАЛЫҚ ЕСЕП

Сақтанова Гүлзат Таңатарқызы

gulzat93.ru@mail.ru

Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ іргелі математика кафедрасының 2-курс магистранты, Астана, Қазақстан

Ғылыми жетекшісі – М.М.Байбурин

Бельтрами типті эллипстік комплекс теңдеуді қарастырайық

$$Bu = \partial_{\bar z} u + q(z)\partial_z u + a(z)u(z) + b(z)\overline{u(z)} = f(z),\ |q| \le q_0 < 1,\ z \in G \qquad (1)$$

мұндағы $G = \{z \in E : |z| < 1\}$ – E комплекс жазықтығындағы бірлік дөңгелек, G дөңгелегінің шекарасын Γ деп белгілейік, яғни $t \in \Gamma$ үшін $|t| = 1$.

$\partial_{\bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \partial_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, ал a, b, f коэффициенттері $\mathrm{P}_1(G)$ кеңістігіне тиісті. $\mathrm{P}_1(G)$ арқылы $\overline{G}$ дөңгелегінде анықталған шексіз тегіс функцияларды

$$\|u\| = \sup_{z \in \overline{G}} \iint_G \frac{|u(s)|}{|s - z|} dG_s$$

нормасы бойынша толықтырғанда шығатын Банах кеңістігін белгілейміз [1,2].

B операторын алдымен

$$a)\,\mathrm{Im}u(t) = 0,\quad t \in \Gamma \qquad\qquad б)\,u(1) = 0, \qquad (2)$$

шарттарын қанағаттандыратын $u \in C^\infty(\overline{G})$ шексіз тегіс функциялар жиынында анықтап, шыққан $\tilde{b}$ операторын $\mathrm{P}_1(G)$ кеңістігінде тұйықтаймыз. Оператордың тұйықтауын $\tilde{B}$ арқылы белгілейік. Яғни, $\tilde{B}u = f$ теңдеуінің шешімі деп $\{u_n\} \subset D(\tilde{b})$ тізбегі үшін

$$\|u_n - u\|_{P_1(G)} + \|\widetilde{b}u_n - f\|_{P_1(G)} \to 0, n\to\infty \qquad (3)$$

шартын қанағаттандыратын $u \in P_1(G)$ функциясын айтамыз.

Енді біртекті емес Бельтрами эллипстік теңдеуін $C(\overline{G})$ кеңістігінде қарастырайық

$$B_0 u = \partial_{\bar z} u + q(z)\partial_z u = f, \qquad q\in C_\alpha(\overline{G}), \quad |q|\le q_0 < 1. \qquad (4)$$

Бұл теңдеудің шешімі деп классикалық шешімді түсінеміз.

Теорема 1.

$$\begin{cases} B_0 u = f, u \in C^1(\overline{G}) \\ a)\operatorname{Im}\widetilde{u}(t) = 0, t\in\Gamma \\ б)\widetilde{u}(1) = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

есебі $C(\overline{G})$ үзіліссіз функциялар кеңістігінде корректілі есепті анықтайды.

Дәлелдеуі. $s=\theta(z)$ $\overline{G}=\{z\in E: |z|\le 1\}$ дөңгелегін өзіне бейнелейтін және $\theta(0)=0, \theta(1)=1$ шарттарын қанағаттандыратын осы теңдеудің кейбір гомеоморфизмі болсын, сонымен қатар егер $|z|=1$ болса, онда $|s|=1$. Онда $s\in C^1_\alpha(\overline{G})$ [3]. Мұндағы $C_\alpha(\overline{G})$, $(0<\alpha<1)$ – Гельдер кеңістігі, $C^1_\alpha(\overline{G})$ – бірінші ретті туындылары $C_\alpha(\overline{G})$ кеңістігіне тиісті үзіліссіз дифференциалданатын функциялар жиыны.

$s=\theta(z)$ ауыстыруының көмегімен $B_0 u = f(z)$ біртекті емес теңдеуі

$$\partial_{\bar s}\widetilde{u} = \widetilde{f}(s)\overline{\partial_s \varphi} = f_1(s)$$

(6)

теңдеуіне келеді, мұндағы $\widetilde{u}(s)=\widetilde{u}(\theta(z))=u(z), \widetilde{f}(s)=\widetilde{f}(\theta(z))=f(z),$ ал $z=\varphi(s)$ функциясы $s=\theta(z)$ гомеоморфизміне кері гомеоморфизм.

(6) теңдеудің шешімін

$$\widetilde{u}(s) = \widetilde{T}f_1(s) - \widetilde{T}f_1(1) \qquad (7)$$

түрінде іздейік. Мұндағы $\widetilde{T}f_1(s) = Tf_1(s) + \overline{Tf_1(\frac{1}{\bar s})} = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_G \left(\frac{f_1(p)}{p-s} + \frac{s\overline{f_1(p)}}{1-s\bar p}\right) dG_p.$

$Tf_1(s)$ функциясы бірлік дөңгелектің сыртындағы голоморфты фукция. Осы функцияны аналитикалық жалғастыру арқылы дөңгелекте голоморфты функция алуға болады [4]. Ол $\overline{Tf_1(\frac{1}{\bar s})}$ функциясын береді. Сондықтан $\partial_{\bar s}\left(\overline{Tf_1(\frac{1}{\bar s})}\right)=0.$ Ал $\partial_{\bar s} Tf_1(s) = f_1(s)$ [5]. Онда (7) функция (6) теңдеудің шешімі. Бұл шешімнің (2) шекаралық шарттарды қанағаттандыратынын көрсетейік.

а) $\mathrm{Im}\tilde{u}(\tau)=\mathrm{Im}(\tilde{T}f_1(\tau)-\tilde{T}f_1(1))$, $\tau\in\Gamma$ өрнегін табайық. Онда $|\tau|^2=\tau\bar{\tau}=1$, сондықтан $\overline{Tf_1\left(\frac{1}{\bar{\tau}}\right)}=\overline{Tf_1(\tau)}$.

$\mathrm{Im}\tilde{T}f_1(\tau)=\frac{1}{2i}(\tilde{T}f_1(\tau)-\overline{\tilde{T}f_1(\tau)})=\frac{1}{2i}(Tf_1(\tau)+\overline{Tf_1(\tau)}-\overline{Tf_1(\tau)}-Tf_1(\tau))=0.$ Дәл осы сияқты $\mathrm{Im}\tilde{T}f_1(1)=0.$ Сондықтан $\mathrm{Im}\tilde{u}(\tau)=0$.

б) $\tilde{u}(1)=0$ шарты алуымыз бойынша орындалады $\tilde{u}(1)=\tilde{T}f_1(1)-\tilde{T}f_1(1)=0.$

Осы шарттарды қанағаттандыратын басқа шешім болмайтынын көрсетейік. Ол үшін мына есепті қарастырайық

$$\begin{cases}\partial_{\bar{s}}\tilde{u}=0\\ a)\,\mathrm{Im}\tilde{u}(t)=0, t\in\Gamma\\ б)\tilde{u}(1)=0.\end{cases}$$

Онда $\tilde{u}(s)$ голоморфты функция. а) шарты мен Коши-Риман шартынан $\tilde{u}(s)\equiv c$ болатыны шығады, мұндағы $c-$ тұрақты функция. б) шартынан $\tilde{u}(s)\equiv 0$ екендігі шығады. Онда (7) функция (6) теңдеудің а), б) шарттарын қанағаттандыратын жалғыз шешімі. $s=\theta(z)$ болғандықтан

$$u(z)=\tilde{u}(s)=\tilde{u}(\theta(z))=\tilde{T}f_1(\theta(z))-\tilde{T}f_1(\theta(1))=\tilde{T}f_1(\theta(z))-\tilde{T}f_1(1), \tag{8}$$

мұндағы $\tilde{T}f_1(\theta(z))=Tf_1(\theta(z))+\overline{Tf_1\left(\frac{1}{\overline{\theta(z)}}\right)}=T_\theta f(z)+\overline{Tf_1\left(\frac{1}{\theta(z)}\right)},$

$$f_1(s)=\tilde{f}(s)\overline{\partial_s\varphi}=\tilde{f}(s)\frac{\overline{\partial\varphi}}{\partial s}=f(z)\frac{\partial_z\theta}{|\partial_z\theta|^2-|\partial_{\bar{z}}\theta|^2},$$

$$T_\theta f(z)=-\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{f(\eta)\partial_\eta\theta}{\theta(\eta)-\theta(z)}dG_\eta,\ \overline{Tf_1\left(\frac{1}{\overline{\theta(z)}}\right)}=-\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{\theta(z)\overline{f(\eta)\partial_\eta\theta}}{1-\theta(z)\overline{\theta(\eta)}}dG_\eta .$$

$t\in\Gamma$ үшін $\theta(t)=\tau$ алайық. $u(t)=\tilde{u}(\theta(t))=\tilde{u}(\tau)$ болғандықтан $\mathrm{Im}u(t)=\mathrm{Im}\tilde{u}(\tau)=0$, $u(1)=\tilde{u}(\theta(1))=\tilde{u}(1)=0$. Олай болса $u(z)$ функциясы $\forall f\in C(\overline{G})$ үшін (5) есептің жалғыз шешімі. Онда тұйық график туралы Банах теоремасы [6] бойынша (5) есеп корректілі есеп. Теорема дәлелденді.

Теорема 2. $q \in C_\alpha(\overline{G})$ болсын. Онда $\widetilde{B}u = f$ теңдеуі, яғни (1), (2) есеп $\mathrm{P}_1(G)$ кеңістігінде корректілі есеп болады.

Дәлелдеуі. $u \in \mathrm{P}_1(G)$ (1), (2) есептің шешімі болсын. Онда $\{u_n\} \subset D(\widetilde{b})$ тізбегі табылып, $\|u_n - u\|_{\mathrm{P}_1(G)} + \|\widetilde{b}u_n - f\|_{\mathrm{P}_1(G)} \to 0, n \to \infty$ орындалады.

$$Bu_n = \partial_{\bar{z}}u_n + q(z)\partial_z u_n + a(z)u_n(z) + b(z)\overline{u\ (z)} = f_n(z) \qquad (9)$$

теңдеуін қарастырайық. $\partial_{\bar{z}}u_n + q(z)\partial_z u_n = g_n(z)$ белгілеуін енгізейік. u_n (2) шартты қанағаттандыратындықтан 1-теорема бойынша шыққан теңдеудің жалғыз ғана шешімі бар $u_n(z) = Rg_n(z)$. R $C(\overline{G})$ кеңістігінін өзіне бейнелейтін сызықты шенелген оператор.

$Rg_n(z)$ (8) теңдік арқылы анықталады. R операторы $C(\overline{G})$ кеңістігінде компактылы оператор болады [7].

(9) теңдеуді мына түрде жазайық

$$g_n(z) + aRg_n(z) + b\overline{Rg_n(z)} = f_n(z) \qquad (10)$$

Бұл Фредгольм типті интегралдық теңдеу. Оның шешімі болу үшін сәйкес біртекті теңдеудің тек нөлдік шешімі болуы қажетті және жеткілікті. Сондықтан

$$g_n(z) + aRg_n(z) + b\overline{Rg_n(z)} = 0$$

теңдеуді қарастырайық. Бұл теңдеу мына теңдеуге эквивалент:

$$Bu_n = \partial_{\bar{z}}u_n + q(z)\partial_z u_n + a(z)u_n(z) + b(z)\overline{u\ (z)} = 0.$$

[8] жұмыстағы 2-теорема бойынша

$$u_n = \Phi_n(\theta(z))e^{h_n(z)} \qquad (11)$$

$\Phi_n(s)$ G дөңгелегінде голоморфты функция ($s = \theta(z)$), $h_n(z)$ –а) шартын қанағаттандыратын үзіліссіз функция. а) шарты бойынша

$$\mathrm{Im}u_n(t) = \Phi_n(\theta(t))e^{h_n(t)} = \mathrm{Im}\Phi_n(\tau)e^{h_n(\varphi(\tau))} = 0, \quad t, \tau \in \Gamma.$$

Онда $\Phi_n(s)$ мына түрде жазылады [9]:

$$\Phi_n(s) = Ce^{\psi_n(s)}$$

мұндағы $\psi_n(s)$ - голоморфты функция, ал c кез келген нақты тұрақты сан. $б)u(1) = 0,$ шартынан $\Phi_n(1) = 0,$ бұдан $c = 0,$ онда $\Phi_n(s) \equiv 0$, ал одан $u_n(z) = \widetilde{u}_n(s) \equiv 0$ болатыны шығады. Ендеше $g_n(z) \equiv 0$, яғни біртекті интегралдық теңдеудің тек нөлдік шешімі бар, ал одан (10) интегралдық теңдеудің шешімі ылғида бар және жалғыз болатыны шығады. Ол шешім бір $S:C(\overline{G})\to C(\overline{G})$ сызықты шенелген оператор арқылы $g_n(z)=Sf_n(z)$ түрінде жазылады. Онда (8) теңдеудің (2) шартты қанағаттандыратын шешімі $u_n(z)=(RS)f_n(z)$ түрінде жазылады. RS - шенелген және компактылы операторлардың көбейтіндісі ретінде компактылы, сондықтан шенелген оператор. Ал $C(\overline{G})$ кеңістігі $\mathrm{P}_1(G)$ кеңістігіне енгізілген. Онда RS операторы $\mathrm{P}_1(G)$ кеңістігін $C(\overline{G})$ кеңістігіне бейнелейді. $n\to\infty$ ұмтылдырайық, онда шешімнің анықтамасы бойынша ((3) формула) $u(z)=(RS)f(z)$, яғни берілген есептің кез келген $f\in P_1(G)$ үшін жалғыз ғана үзіліссіз шешімі бар. Онда ол тұйық график туралы Банах теоремасы бойынша коррективті есеп. Теорема дәлелденді.

Теорема 3. а) B әсері (1) теңдік арқылы анықталған, анықталу облысы $C^{\infty}(\overline{G})$ болатын оператордың $\mathrm{P}_1(G)$ кеңістігіндегі тұйықтауы болсын. K операторы $\mathrm{P}_1(G)$ кеңістігін $D(B)$ -ға үзіліссіз бейнелесін, K операторының анықталу облысы - $D(K)=\mathrm{P}_1(G)$. Онда анықталу облысы

$$i)\operatorname{Im}(u(t)-Kf(t))=0,\quad t\in\Gamma$$

$$ii)u(1)-Kf(1)=0$$

шарттарын қанағаттандыратын $u\in C^{\infty}(\overline{G})$ функциялар жиыны болатын

$$b_k u=\partial_{\bar z}u+q(z)\partial_z u+au+b\bar{u},\qquad |q|\le q_0<1,\qquad z\in G,$$ ($q\in C_\alpha(\overline{G})$ $(0<\alpha<1)$, $a,b\in\mathrm{P}_1(G)$) операторының $\mathrm{P}_1(G)$ кеңістігіндегі тұйықтауы болатын B_k операторы B операторының корректі тарылуы болады, яғни B_k операторы $\mathrm{P}_1(G)$ кеңістігінде коррективті есепті анықтайды.

б) Керісінше, егер B_k операторы B операторының корректі тарылуы болса, онда $\mathrm{P}_1(G)$ кеңістігін $D(B)$–ға бейнелейтін K үзіліссіз бейнелеуі табылып, анықталу облысы i), ii) шарттарын қанағаттандыратын $u\in C^{\infty}(\overline{G})$ функциялар жиыны болатын $b_k u=Bu$ операторының $\mathrm{P}_1(G)$ кеңістігіндегі тұйықтауы B_k болады.

Дәлелдеуі. [10] жұмысында көрсетілген теорема бойынша, егер K операторы $\mathrm{P}_1(G)$ кеңістігін $D(B)$–ға үзіліссіз бейнелейтін болса, онда оған B операторының B_k корректі тарылуы сәйкес келеді, ол

$$u=\widetilde{B}^{-1}f+Kf-\widetilde{B}^{-1}(BKf),\quad u\in D(B_k)\qquad (12)$$

формуласы арқылы анықталады, мұндағы $f\in P_1(G)$. Онда

$\|u-u_n\|_{\mathrm{P}_1(G)}+\|f-Bu_n\|_{\mathrm{P}_1(G)}\to 0, n\to\infty$ және $u_n(z)=\widetilde{B}^{-1}f_n+Kf_n-\widetilde{B}^{-1}(BKf_n)$, мұндағы $f_n=Bu_n$, орындалатындай $\{u_n\}\subset C^{\infty}(\overline{G})$ тізбегі бар болады. $\widetilde{B}^{-1}g_n$ түріндегі функция а), б) шарттарын қанағаттандыратын болғандықтан $u_n(z)$ функциясы і), іі) шарттарын қанағаттандырады.

б) B_k - B операторының кейбір корректі тарылуы болсын. Онда сол теорема бойынша $P_1(G)$ кеңістігін $D(B)$ –ға бейнелейтін K үзіліссіз бейнелеуі табылып, $u \in D(B_k)$ функциясы (12) түрде жазылады. Онда $u(z)$ функциясын қайтадан шексіз тегіс функциялармен жақындатып, шекаралық шарттарға көшу арқылы анықталу облысы бастапқыда і), іі) шарттарын қанағаттандыратын $u \in C^\infty(\overline{G})$ функциялар жиыны болатын $b_k u = Bu$ операторының тұйықтауы B_k операторы болатынын аламыз [11]. Теорема дәлелденді.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Отелбаев М. К теории обобщенных аналитических функций Векуа // Применение методов функционального анализа к задачам математической физики и вычислительной математики. Новосибирск. 1979. С. 80-99.
2. Оспанов К.Н., Отелбаев М. Об обобщенной системе Коши-Римана с негладкими коэффициентами // Изв. высш. уч. заведений, Математика, №3, 1989, С. 48-56.
3. Монахов В.Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. –Новосибирск: Наука, 1977, 424 с.
4. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. - М.: Физматгиз, 1958, 639 с.
5. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. – М.: Наука, 1988, 512 с.
6. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Том 5. –М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1969, 562 с.
7. Байбурин М.М. Компактность основного интегрального оператора для эллиптической системы типа Бельтрами // Вестник КазГу, серия мат.мех.инф. №12, 1998, С. 20-27.
8. Байбурин М.М. О свойствах решений эллиптической системы первого порядка на плоскости с негладкими коэффициентами // Современные вопросы теории дифференциальных уравнений и их приложение. Жезказган. 1995. С. 31-37.
9. Н.И.Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения. –М. - Л.: Гостехиздат, 1946.
10. Кокебаев Б., Отелбаев М., Шыныбеков А. К теории сужения и расширения операторов // I.-Известия АН Каз ССР, серия физ.-мат., 1982, С. 24-26.
11. Байбурин М.М. Об одной краевой задаче для обобщенной системы Коши-Римана // Труды конференции по математике, посвященной памяти А.Д.Тайманова (1917-1990). Алматы. 1998. С. 5-9.