РУХАНИ ЖАҢҒЫРУ

20 АСТАНА

ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

Студенттер мен жас ғалымдардың
«ҒЫЛЫМ ЖӘНЕ БІЛІМ - 2018»
XIII Халықаралық ғылыми конференциясы

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ

XIII Международная научная конференция
студентов и молодых ученых
«НАУКА И ОБРАЗОВАНИЕ - 2018»

The XIII International Scientific Conference
for Students and Young Scientists
«SCIENCE AND EDUCATION - 2018»

12th April 2018, Astana

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

**Студенттер мен жас ғалымдардың
«Ғылым және білім - 2018»
атты XIII Халықаралық ғылыми конференциясының
БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ**

**СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
XIII Международной научной конференции
студентов и молодых ученых
«Наука и образование - 2018»**

**PROCEEDINGS
of the XIII International Scientific Conference
for students and young scholars
«Science and education - 2018»**

2018 жыл 12 сәуір

Астана

УДК 378

ББК 74.58
Ғ 96

Ғ 96
«Ғылым және білім – 2018» атты студенттер мен жас ғалымдардың XIII Халықаралық ғылыми конференциясы = XIII Международная научная конференция студентов и молодых ученых «Наука и образование - 2018» = The XIII International Scientific Conference for students and young scholars «Science and education - 2018». – Астана: http://www.enu.kz/ru/nauka/nauka-i-obrazovanie/, 2018. – 7513 стр. (қазақша, орысша, ағылшынша).

ISBN 978-9965-31-997-6

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докоранттардың және жас ғалымдардың жаратылыстану-техникалық және гуманитарлық ғылымдардың өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

The proceedings are the papers of students, undergraduates, doctoral students and young researchers on topical issues of natural and technical sciences and humanities.

В сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и молодых ученых по актуальным вопросам естественно-технических и гуманитарных наук.

УДК 378

ББК 74.58

ISBN 978-9965-31-997-6

УДК 517.443

S - МЕРНОЕ ДИСКРЕТНОЕ «АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ» ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ КАК БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Серікбаев Еркебұлан Қайырлыұлы
yerkewka@mail.ru
Магистрант второго года обучения специальности математика - 6М060100
Евразийского Национального университета им. Л.Н.Гумилева
Научный руководитель – Наурызбаев Н.Ж.

В математике многочисленные применения имеет следующее представление в одномерном случае $s=1$ характеристической функции решетки $ZN=\{kN:k\in Z\}$ из Z $(N\in Z)$:

$$\chi_N(m)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\exp\left(2\pi i\frac{k}{N}m\right)\quad(m\in Z).\qquad(1)$$

Дискретное преобразование Фурье – прямое и обратное, с последующим построением алгоритмов быстрого преобразования Фурье, предложенные в 1965 году Кули и Тьюки [1], основано также на равенстве (1) (см., напр., [2, стр. 171-178]).

В работе [3] были определены прямые и обратные s -мерные дискретные преобразования Фурье:

$$\hat{f}(m)=\frac{1}{|\det d|}\sum_{k \bmod Z^s d'} f\left(k(d')^{-1}\right)e^{-2\pi i\left(m,k(d')^{-1}\right)}\left(m \bmod Z^s d\right)\qquad(2)$$

и

$$f\left(k(d')^{-1}\right)=\sum_{m \bmod Z^s d}\hat{f}(m)e^{2\pi i\left(k,md^{-1}\right)}\left(k \bmod Z^s d'\right)\qquad(3)$$

где, d есть произвольная невырожденная целочисленная $s\times s$ -матрица, а d' - транспонирована по отношению к ней, $Z^s d=\{kd:k\in Z^s\}$, а приписка «$\alpha \bmod Z^s d$» к знаку суммы будет означать, что индекс α, по которому производится суммирование, должен пробежать полную систему вычетов $\bmod Z^s d$.

В данная статья посвящена алгоритмам быстрого «алгебраического» преобразования Фурье, когда матрицы d представимы виде произведения двух невырожденных не унимодулярных матриц.

Определение 1. Пусть $a,b\in Z^s$. Говорят, что a сравнимо с b по модулю d (в обозначении $a\equiv b(\bmod d)$), если $(a-b)\in t\cdot d$ некоторого $t\in Z^s$.

Определение 2. Пусть $a \in Z^s$. Классом K_a по данному модулю d называется множество, составленное из всех b из Z^s таких, что $a \equiv b(\operatorname{mod} d)$.

Для разных a классы $\{K_a\}$ либо совпадают, либо не пересекаются.

Вычет класса K_a по модулю d представляется любым из чисел $b \in Z^s$ из класса K_a.

Определение 3. Полной системой представителей классов вычетов по модулю d (в количестве $N = |\det d|$), или, коротко, полной системой вычетов (в обозначении $\operatorname{mod} Z^s d$) называется множество, составленное из элементов Z^s взятых по одному из разных классов K_a по этому модулю.

Матрица (базис) решетки $Z^s d$ определяется неоднозначно: для любой унимодулярной целочисленной $s \times s$ -матрицы U имеет место равенство $Z^s(Ud) = Z^s d$ (см., напр., [4, стр. 78]), причем матрицу U всегда можно подобрать так, чтобы базис решетки $Z^s d$ имел нормальную эрмитову форму (см. [4, стр. 72])

$$\Delta = Ud = \begin{pmatrix} \vartheta_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vartheta_{21} & \vartheta_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vartheta_{S1} & \vartheta_{S2} & \dots & \vartheta_{SS} \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

где $0 \le \vartheta_{kj} \le \vartheta_{kk}$ для всех $k = 1,...,s$, $j = 1,...,k$. Матрицы вида (4) технически весьма полезны тем обстоятельством, что в явном виде выписывается полная система вычетов, что делает (2)-(3) преобразованиями прямого применения (в том смысле, что отпадает необходимость нахождения $\operatorname{mod} Z^s d$).

Действительно, для целочисленной матрицы (4) множество $\operatorname{mod} Z^s d$ можно записать в виде

$$\{\beta \equiv (\beta_1,...,\beta_s) \in Z^s : 0 \le \beta_j < \vartheta_{jj} \quad (j = 1,...,s)\}.$$

Непосредственное вычисление по виду записи количества элементарных арифметических операций - умножения и сложения, необходимых для нахождения всех прямых или обратных s -мерных дискретных «алгебраических» преобразования Фурье заданных посредством треугольных целочисленных матриц d , показывают величину $\asymp (\det d)^2$. Важным фактором данного исследования является возможность построения быстрых алгоритмов прямых и обратных дискретных «алгебраических» преобразований Фурье, когда матрицы d представимы виде произведения двух невырожденных, не унимодулярных матриц.

Теорема. *Пусть дана целочисленная невырожденная составная $s \times s$ – матрица $d = d_1 d_2$, $\det d_1 \ne \pm 1$, $\det d_2 \ne \pm 1$. $\det d$ значений величины (2) (или (3)) могут быть вычислены за $\asymp |\det d|(|\det d_1| + |\det d_2|)$ элементарных арифметических операций.*

Доказательство. Для начала покажем, что можно ограничится рассмотрением матриц d_1 и d_2 вида (4), т.е. имеющие эрмитову нормальную форму. Пусть U и V некоторые унимодулярные матрицы, умножив их соответственно на d_1 и d_2 слева получим матрицы в нормальной эрмитовой форме Ud_1 и Vd_2. Из $Z^s d_2 = Z^s(Vd_2)$ следует, что $e_j(Vd_2) \in Z^s d_2$ для всех $j = 1,\ldots,s,$ т.е. все строки матрицы Vd_2 входят в $Z^s d_2$. Стало быть, все строки матрицы d_1Vd_2 есть линейная комбинация строк матрицы d_1d_2 . Это означает, что $Z^s(Ud_1Vd_2) = Z^s(d_1Vd_2) \subset Z^s(d_1d_2)$. Так как $|\det(d_1d_2)| = |\det(Ud_1Vd_2)|$ решетки $Z^s(d_1d_2)$ и $Z^s(Ud_1Vd_2)$ совпадают (см. [4, стр. 78]). Так что, не теряя общности, можно считать, что матрицы d_1 и d_2 имеют эрмитову нормальную форму.

Итак, пусть

$d_1 = (u_{kj})_{k,j=1}^{s}$, $d_2 = (v_{kj})_{k,j=1}^{s}$,

$0 \le u_{kj} \le u_{kk}$, $0 \le v_{kj} \le v_{kk}$ $(k = 1,\ldots,s,\ j = 1,\ldots,k)$, $u_{kj} = v_{kj} = 0$ $(k = 1,\ldots,s-1;\quad j = k+1,\ldots,s)$

.

Любые $k \in \operatorname{mod} Z^s d'$ и $m \in \operatorname{mod} Z^s d$ единственном виде представимы в виде $k = l + zd_1'$, $m \equiv n + td_2$, $l,t \in \operatorname{mod} Z^s d_1'$ $z,n \in \operatorname{mod} Z^s d_2$. Для $k \in \operatorname{mod} Z^s d'$ и $m \in \operatorname{mod} Z^s d$ положим

$$f_k = f\left(k(d')^{-1}\right),\ w_m^k = w_m^k(d) = e^{-2\pi i\left(m,k(d')^{-1}\right)} = e^{-2\pi i m d^{-1} k'} .$$

Тогда

$$\hat f(\mathrm{m}) = \hat f(n + td_2) = \frac{1}{|\det d|}\sum_{k \bmod Z^s d'} f_k w_m^k = \frac{1}{|\det d|}\sum_{l \bmod Z^s d_1'}\ \sum_{z \bmod Z^s d_2} f_{l+zd_1'} w_{n+td_2}^{l+zd_1'} =$$

$$= \left| \begin{array}{c} w_{n+td_2}^{l+zd_1'} = e^{-2\pi i (n+td_2) d^{-1}\left(l+zd_1'\right)'} = e^{-2\pi i n d^{-1} l'} e^{-2\pi i n d^{-1} d_1 z'} e^{-2\pi i t d_2 d^{-1} l'} e^{-2\pi i t d_2 d^{-1} d_1 z'} = \\ = w_n^l \cdot w_n^{zd_1'} \cdot w_{td_2}^l \cdot 1 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{|\det d|}\sum_{l \bmod Z^s d_1'}\ \sum_{z \bmod Z^s d_2} f_{l+zd_1'} w_n^l \cdot w_{td_2}^l w_n^{zd_1'} = \frac{1}{|\det d|}\sum_{l \bmod Z^s d_1'} A_{n,l} \cdot w_n^l \cdot w_{td_2}^l , \qquad (5)$$

где, $A_{n,l} = \sum\limits_{z \bmod Z^s d_2'} f_{l+zd_1'} w_n^{zd_1'}$,

Для подсчета $A_{n,l}$ нам потребуется $\det d_2$ умножений, следовательно все $\det d_1 \cdot \det d_2$ коэффициенты $A_{n,l}$ находятся за $\det d_1 \cdot (\det d_2)^2$ умножений. Для подсчета каждого $\hat f(n + td_2)$ уже при вычисленных коэффициентах $A_{n,l}$ по формуле (5) необходимо произвести $\det d_1$ произведений, значит для всех $\det d_1 \cdot \det d_2$ величин $\hat f(n + td_2)$

потребуется $\left(\det d_1\right)^2 \cdot \det d_2$ умножений. В итоге, для вычисления (2) (или (3)) нам потребуется $\asymp \left|\det d\right|\left(\left|\det d_1\right| + \left|\det d_2\right|\right)$ умножений, что и требовалось доказать.

Точно также можно разбить каждую из матриц d_1, d_2 на произведение двух других матриц аналогичным способом до тех пор, пока матрицы перестанут разбиваться на произведение двух других матриц, и тем самым уменьшить количество арифметических операции.

Соотношение (5) представляет собой первый уровень разбиения по методу Дж. Кули и Дж. Тьюки прореживания БПФ (2). Точно также проводится прореживание обратного БПФ (3).

Если матрицы d_1 и d_2 удовлетворяют условиям теоремы, возможно дальнейшее разбиение на меньшие ДПФ.

Приведем некоторые частные случаи БПФ.

Заметим, что прямоугольные ДПФ

$$\hat{f}\left(m_1,\ldots,m_s\right) = \frac{1}{N_1 \cdots N_s} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \cdots \sum_{k_s=0}^{N_s-1} f_{k_1,\ldots,k_s} e^{-2\pi i\left(m_1 \frac{k_1}{N_1} + \cdots + m_1 \frac{k_s}{N_s}\right)} \quad \left(0 \le m_j < N_j,\, j = 1,\ldots,s\right) \tag{2}$$

и

$$f_{k_1,\ldots,k_s} = \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \cdots \sum_{m_s=0}^{N_s-1} \hat{f}\left(m_1,\ldots,m_s\right) e^{2\pi i\left(m_1 \frac{k_1}{N_1} + \cdots + m_1 \frac{k_s}{N_s}\right)} \quad \left(0 \le k_j < N_j,\, j = 1,\ldots,s\right) \tag{3}$$

соответствует диагональной матрице

$$d = \begin{pmatrix} N_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & N_s \end{pmatrix}.$$

Если при этом все N_{j} четные, то матрица d представляется в виде произведения матриц

$$d_1 = \begin{pmatrix} 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 2 \end{pmatrix},\ d_2 = \begin{pmatrix} \frac{N_1}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{N_s}{2} \end{pmatrix},$$

если же N_{j} являются степенями двойки, то d можно разложить далее и получить

$$d=\begin{pmatrix}2&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}2&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&2\end{pmatrix}.$$

Это разложение соответствует использованию одномерного БПФ по основанию 2.

Список использованных источников

1. I. W. Cooly and I. W. Tukey, "An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series," *Mathematics and Computation,* vol. 90, no. 19, pp. 297-301, 1965.
2. Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков и Г. Н. Кобельков, Численные методы, М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007.
3. Ж. Н. Темиргалиева и Н. Темиргалиев , «Быстрые “алгебраические” преобразования Фурье на равномерно распределенных сетках,» *Изв. вузов. Матем.,* № № 5, p. 93–98, 2016.
4. А. Схрейвер, Теория линейного и целочисленного программирования, т. 1, М.: Мир, 1991, p. 360.

УДК 517.51

ЖАЛПЫЛАНҒАН МУЛЬТИПЛИКАТИВТЫ ХАРДИ ТЕҢСІЗДІГІ

Төлеміс Абылайхан Әзізханұлы

abylaikhan9407@gmail.com,

Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ механико-математика факультетінің математика мамандығы бойынша 2 курс магистранты, Астана, Қазақстан

Ғылыми жетекші – Р.Ойнаров

Айталық, $1<p,q,r,s<\infty$ болсын. $\rho_1(\cdot)$, $\rho_2(\cdot)$, $v_1(\cdot)$, $v_2(\cdot)$, $u(\cdot)$ - $(0,\infty)$ аралығында анықталған теріс емес, яғни салмақты функциялар болсын. Төмендегідей теңсіздікті қарастырайық:

$$\left(\int_0^\infty u^q(x)\left(\int_0^x\left(\int_0^s f(t)\right)^r ds\right)^{\frac{q}{r}}dx\right)^{\frac{1}{q}}\le C\left(\int_0^\infty \rho_2^p(t)f^p(t)dt\right)^{\frac{\alpha}{p}}\left(\int_0^\infty v_2^s(x)f(x)dx\right)^{\frac{1-\alpha}{s}}. \qquad (1)$$

Жоғарыдағы (1) теңсіздігі [1] жұмысындағы салмақты Харди теңсіздігінің жалпылануы. Сондай-ақ, [2-3] жұмыстарда салмақты Харди теңсіздігінің жалпылануы болып табылатын (1) түріндегі әртүрлі жалпыланған мультипликативты Харди теңсіздіктері қарастырылып, олардың орындалуының қажетті және жеткілікті шарттары алынған. Бұл жұмыста (1) теңсіздігінің орындалуының жеткілікті шартын аламыз. Алдымен негізгі нәтижеге керекті болатын келесідей шамаларды анықтап кетейік:

$$\varphi(z):=\inf_{0\le t\le z}\left[\left(\int_t^z \rho_1^{-p'}(t)dt\right)^{\frac{\alpha}{p'}}\left(\int_t^\infty v_1^s(s)ds\right)^{\frac{\alpha-1}{s}}\right];$$