РУХАНИ ЖАҢҒЫРУ

20 АСТАНА

ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

Студенттер мен жас ғалымдардың
«ҒЫЛЫМ ЖӘНЕ БІЛІМ - 2018»
XIII Халықаралық ғылыми конференциясы

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ

XIII Международная научная конференция
студентов и молодых ученых
«НАУКА И ОБРАЗОВАНИЕ - 2018»

The XIII International Scientific Conference
for Students and Young Scientists
«SCIENCE AND EDUCATION - 2018»

12th April 2018, Astana

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

Студенттер мен жас ғалымдардың «Ғылым және білім - 2018» атты XIII Халықаралық ғылыми конференциясының БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ XIII Международной научной конференции студентов и молодых ученых «Наука и образование - 2018»

PROCEEDINGS of the XIII International Scientific Conference for students and young scholars «Science and education - 2018»

2018 жыл 12 сәуір

Астана

УДК 378

ББК 74.58
Ғ 96

Ғ 96
«Ғылым және білім – 2018» атты студенттер мен жас ғалымдардың XIII Халықаралық ғылыми конференциясы = XIII Международная научная конференция студентов и молодых ученых «Наука и образование - 2018» = The XIII International Scientific Conference for students and young scholars «Science and education - 2018». – Астана: http://www.enu.kz/ru/nauka/nauka-i-obrazovanie/, 2018. – 7513 стр. (қазақша, орысша, ағылшынша).

ISBN 978-9965-31-997-6

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докоранттардың және жас ғалымдардың жаратылыстану-техникалық және гуманитарлық ғылымдардың өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

The proceedings are the papers of students, undergraduates, doctoral students and young researchers on topical issues of natural and technical sciences and humanities.

В сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и молодых ученых по актуальным вопросам естественно-технических и гуманитарных наук.

УДК 378

ББК 74.58

ISBN 978-9965-31-997-6

ӘОЖ 51:372.8

ТЕҢСІЗДІКТЕРГЕ БАЙЛАНЫСТЫ ОЛИМПИАДА ЕСЕПТЕРІ

Серікбаева Аружан Аманкелдіқызы
aruka_a94@mail.ru
Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті
Іргелі математика кафедрасы магистранты
Ғылыми жетекшісі - Жұмабаева Айнұр Аманкелдіқызы

Кілтті сөздер: теңсіздік, классикалық теңсіздіктер, олимпиада есептері

Түйіндеме: Бұл мақалада мектеп оқушыларына арналған олимпиада есептерінде кездесетін теңсіздіктерді қарастырамыз.Сонымен қатар сол теңсіздіктерді классикалық теңсіздіктердің көмегімен дәлелдеу жолдарына бірнеше есептер ұсынамыз.

Математика пәні бойынша олимпиада тарихы ертеректе бастау алған. Алғашқы математикалық конкурс 1886 жылы Румынияда , лицей түлектері үшін ұйымдастырылған. Ал қазіргі типтегі алғашқы математикалық олимпиада 1894 жылы Венгрияда , басқарушысы физика пәні бойынша болашақ Нобел лауреаты Л. Этвеш болған, Венгр физика-математика қоғамының бастамасы бойынша өткізілді.Содан бері екі дүниежізілік соғыстың әсерінен арада үзілістер болды.

Көптеген елдерде сырттай байқаулар да ұйымдастырылып тұрды.Оған мысал 1886 жылы Ресейде өткен математикалық байқау. Ресейдегі бірінші математикалық олимпиада Ленинградта 1934 жылы математик Б. Н.Делон бастамасы бойынша ұйымдастырылды.Осылайша келесі жылы Мәскеуде қалалық олимпиада өтті.

Өткен ғасырдың 50-ші - 60-шы жылдардың соңында математикалық олимпиадалар Кеңес үкіметінің көптеген қалалары үшін дәстүрге айналды, халыққа білім беру ұйымдарымен бірлесіп,университеттер және désинституттар да өткізіліп отырды.

Міне содан бері жыл сайын Қазақстан тәуелсіз ел атанғалы да түрлі олимпиадалар өткізіліп тұрады.

Қазақстанның өзінде бірнеше ***халықаралық*** (халықаралық Жәутіков олимпиадасы (IZHO) , математикадан халықаралық олимпиада (IMO), математикадан Балқан олимпиадасы (BMO), математикадан “туймаада” олимпиадасы) , ***республикалық*** (аудандық кезең, облыстық кезең, қорытынды кезең), ***қашықтық*** (Леонард Эйлер атындағы олимпиада, “Жібек жолы” математикалық олимпиадасы, Азия-тынық мұхит математикалық олимпиадасы, Геометриядан Иран олимпиадасы), ***қалалық*** (Мұсабай олимпиадасы , Смағұлов атындағы олимпиада) ***аудандық*** және т.б олимпиадалар түрі көп. Есептердің мазмұны жағынан да алуантүрлілік бар. Ал ол есептерді шешу әдістері шығармашылық жұмысты талап етіп қана қоймай белгілі бір заңдылықтармен де шығарылады.

Жалпы теңсіздіктің шығу тарихына тоқтала кетсек: заттарды санауға байланысты және әртүрлі шамаларды салыстыру қажеттілігінен теңдік ұғымымен қатар «артық» және «кем» ұғымы шыққан. Ежелгі гректер теңсіздік ұғымын пайдалана білген. Архимед (б. э. д. III ғ) шеңбердің ұзындығын есептеп шығарумен айналыса отырып, «кез-келген дөңгелектің периметрі артығымен алынған үш еселенген диаметрге тең,бұл диаметрдің жетіден бір бөлігінен кем,бірақ жетпіс бірден он бөлігінен артық» болатынын анықтаған: $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Евклид өзінің атақты «Бастамалар» трактатында бірқатар теңсіздіктер келтірілген. Мысалы,ол екі оң санның геометриялық ортасы бұлардың арифметикалық ортасынан артық болмайтынын,яғни $\sqrt{ab} \le \frac{ab}{2}$ теңсіздігі тура екенін дәлелдеген.

Үшінші ғасырда грек ғалымы Папптың «Математикалық жинағында» егер $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ болса,онда $ad > bc$ болатыны дәлелденген.
Теңсіздіктердің қазіргі таңбалары тек 17-18 ғасырларда пайда болды, <, > таңбаларын ағылшын математигі Г. Гарриот(1560-1621), $\le, \ge$ таңбаларын француз математигі П. Буге (1698-1758) енгізген.[1]
Мектеп курсында белгілі кезеңнен бастап сабақ мазмұнына «теңсіздіктер» ұғымы енгізіледі.
Мектепке келмей тұрып, балалар «көп», «аз», «бірдей емес» деген ұғымдармен таныс болады. Ал сандар арасындағы «көп» «аз» қатынастарымен бірінші сыныпта танысады. Бастауыш сыныптарда оқушылар $a+3$ және $a+1$ сандық өрнектерін салыстыра білуі тиіс. Сонымен қатар қарапайым теңсіздіктерді шеше біледі,бірақта оларда «теңсіздіктерді шешу» немесе «теңсіздіктің шешімі» енгізілмейді. Мысалғы: $x < 9$ өрнегі дұрыс болатындай *x*-тің орнына бірнеше сандар жазыңыз,деген секілді.
5 сыныпта натурал және ондық бөлшектерді салыстыру оқытылады. Және салыстырудың нәтежиесі « > » және « < » таңбаларымен жазылады.
6 сыныпта рационал сандар жиынындағы «көп» «аз» қатынастарын беру үшін модуль ұғымы енгізіледі. Соған орай $|x| \le a, |x-b| < b, |x-a| \le b$ секілді теңсіздіктер қарастыралады. Олардың шешімдерін табу сандар өсі арқылы жүзеге асады.
«Теңсіздіктер» тақырыбы 7-8 сыныптарда жүйелі түрде оқытылады. Келесідей бөлімдерден тұрады: «Санды теңсіздіктер және олардың қасиеттері», «Бір айнымалысы бар сызықты теңсіздіктер», «Бір айнымалысы бар сызықты теңсіздіктер жүйесі», «Санды теңсіздіктердің мүшелеп қосу және көбейтілуі».
8 сыныпта теңсіздіктерді дәлелдеудің әр түрлі тәсілдерін оқыту басталады. Материалдардың қолжетімділігіне байланысты теңсіздіктің оң және сол жағының айырмасын нөлмен салыстыру әдісі қолданылады және де $ax < b$ теңсіздіне де көңіл бөлінеді.
$ax^2 + bx + c > 0 \quad a \ne 0$ теңсіздігін шешу дағдысы 9 сыныптағы квадрат функциянынң графигі туралы ақпаратқа байланысты пайда болады. Бұл жерде оқушылар интервалдар әдісімен танысады.
Олимпиадалық есептерді шешу барысында жиі кездесетін есептер ол теңсіздіктерді дәлелдеуге берілетін есептер.Әрине оқушыларға бұл өзіндік қиындық туғызады.
Осыған орай классикалық теңсіздіктерді, нақтырақ айтқанда, Коши, Коши-Буняковский, Бернулли теңсіздіктерінің көмегімен олимпиадалық есептерді шешу жолдары тиімді әрі тез әдістердің қатарына жатады.
Ол теңсіздіктерге тоқталатын болсақ:

1. *Коши теңсіздігі*

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \qquad (1)$$

(1) теңсіздігі Коши теңсіздігі (арифметикалық орта сан-геометриялық орта сан теңсіздігі) делінеді. Бұл формуладағы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ -дер теріс болмаған нақты сандар,әрі $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ болғанда ғана теңдік белгісі құрылады.

$n = 2$ болғанда $\frac{a_1 + a_2}{2} \ge \sqrt{a_1 a_2}$. Бұл ең қарапайым арифметикалық орта-геометриялық орта теңсіздігі [2].

2. *Коши-Буняковский теңсіздігі:* Кез-келген нақты сандар $a_1, a_2, \ldots, a_n$ мен $b_1, b_2, \ldots, b_n$ үшін мына теңсіздік орынды болады:

$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2$

бұл жерде теңдік белгісі құрылудың қажетті және жеткілікті шарты $a_i = kb_i \ (i = 1,2,\ldots,n)$
$n = 2$ болғанда Коши-Буняковский теңсіздігі мынадай қарапайым көрініске ие болады:[3]

$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2)^2$

Бұны француз математигі О.Коши(1789-1857) дәлелдеген(1821 ж).Коши теңсіздігінің интегралдық түрін орыс математигі В.Я.Буняковский (1804-1889) көрсеткен (1859ж),ал неміс математигі Л.Гельдер(1859-1937) жалпылап берді. Буняковский теңсіздігі кейде Шварц теңсіздігі деп те атайды.(Г.А.Шварцтың аты бойынша)

3. *Бернулли теңсіздігі* деп төмендегідей үш этаптан тұратын теореманы айтады.

1) $x \geq -1$ болғанда,барлық $n \in N_0$ үшін $(1+x)^n \geq 1+nx$ теңсіздігі орындалады;
2) $x \geq -1$ және $p > 1, p < 0$ үшін $(1+x)^p \geq 1+px$ теңсіздігі орындалады;
3) $x \geq -1$ және $0 < p < 1$ үшін $(1+x)^p \leq 1+px$ теңсіздігі орындалады [4].

Төменде Жәутіков, Ильясов олимпиадаларынан және т.б. түрлі олимпиадаларда кездесетін теңсіздіктерге арналған мысалдар берілген.

№1. (Жәутіков олипиадасы. 10-олимпиада;2010. 8-сынып. II тур)[5]
Теңсіздікті дәлелдеңіз:

$$\frac{a^4 + a^2b + b^4}{3} \geq \frac{a^3b + ab^3}{2} \quad (a > 0, b > 0).$$

Дәлелдеу. Теңсіздікті мына түрге келтірейік:

$$2(a^4 + a^2b + b^4) \geq 3a^3b + 3ab^3$$

Бұл теңсіздікті төмендегі теңсіздіктердің қосындысы түрінде алуға болады:

$a^4 + a^2b^2 \geq 2a^3b$ - Коши теңсіздігі бойынша ақиқат;

$b^4 + a^2b^2 \geq 2ab^3$ - Коши теңсіздігі бойынша ақиқат;

$a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3 \Leftrightarrow (a-b)(a^3 - b^3) \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2(a^2 + ab + b^2) \geq 0$

№2. (Жәутіков олипиадасы. 10-олимпиада;2010. 9-сынып. II тур)[5]
Кез-келген a, b, c және d оң сандар үшін келесі теңсіздік дұрыс екенін көрсетіңіз:

$$\frac{(ab+cd)(ad+bc)}{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{abcd}$$

Дәлелдеу. Коши Буняковский теңсіздігі бойынша $(ab+cd)\left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d}\right) \geq (a+c)^2$ теңсіздігін аламыз. Ол өз кезегінде төмендегі теңсіздікке эквивалентті:

$\dfrac{(ab+cd)(ad+bc)}{bd} \geq (a+c)^2 \quad (*)$. Сәйкесінше $(ab+bc)\left(\dfrac{d}{a} + \dfrac{b}{c}\right) \geq (d+b)^2$ теңсіздік $\dfrac{(ad+bc)(cd+ab)}{ac} \geq (d+b)^2 \quad (**)$ теңсіздікке эквивалентті.

$(*)$ және $(**)$ теңсіздіктерін көбейтіп:

$$\frac{(ab+cd)^2\left(ad+bc\right)^2}{abcd} \geq (a+c)^2(d+b)^2$$ немесе

$$\frac{(ab+cd)\left(ad+bc\right)}{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{abcd}$$ теңсіздіктерін аламыз.

№3. (Жәутіков олипиадасы. 12-олимпиада;2012. 9-сынып. II тур)

k және n ерікті натурал сандары үшін келесі теңсіздікті дәлелдеңіз:[5]

$$\frac{n^{k+1}}{k+1} < 1^k + 2^k + \ldots + n^k < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1}\frac{n^{k+1}}{k+1}$$

Дәлелдеу. k,n,p натурал сандар және $1 \leq p \leq n$ орындалсын. Бірдей дәрежелі айырымдарды жіктеудің формуласы бойынша

$$(p+1)^k - p^{k+1} = (p+1-p)((p+1)^k + (p+1)^{k-1}p + \ldots + p^k) > (k+1)p^k;$$

$$(p)^{k+1} - (p-1)^{k+1} = (p-p+1)(p^k + p^{k-1}(p-1) + \ldots + (p-1)^k) < (k+1)p^k$$

Демек,

$$\frac{n^{k+1}}{k+1} = \frac{\sum_{p=1}^{n}\left(p^{k+1}-(p-1)^{k+1}\right)}{k+1} < \sum_{p=1}^{n} p^k < \frac{\sum_{p=1}^{n}\left((p+1)^k - p^k\right)}{k+1} =$$

$$= \frac{(n+1)^{k+1}-1}{k+1} < \frac{(n+1)^{k+1}}{k+1}$$

Олимпиадаларға қатысу балаға өзі-өзіне сенімділік , өзін-өзі танытуға мүмкіндік береді, оны ынталандырады және жауапты етеді, бұл болашақ көшбасшылар үшін өте жақсы қасиеттер. Ол оқушылардың математикаға деген қызығушылығын арттырып қана қоймай,ойлау жүйесін , шығармашылығын дамытып, есептердің мазмұнына қарай тәрбие құралы ретінде көрініс табады.

Соның ішінде теңсіздіктер оқушылардың белсенді ойлау әрекетін қалыптастырып, тапқырлыққа, логикалық ойлау қабілетін дамытуға өз септігін тигізеді.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Бекжігітов Е. Т. және б. Элементар математика (Алгебра) Анықтамалар және тарихи материалдар. -Алматы: Ұлағат,2013. -74-76
2. Б.Түсіпжан Қ. Теңсіздіктер(VIII-XI сынып):Оқу әдістемелік құрал- Астана: ӘлНаир, 2013. -114-115 Б.
3. Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г. Неравенства/Пер. с анг. В.И.Левина,с дополнениями В. И. Левина и С. Б. Стечкина.-М.: ГИИЛ, 1948. -438 С.
4. Махашов А. Оқушыларды математикалық олимпиадаларға дайындау//Математика және физика, №5,2014.-39-40 Б.
5. Курманалин Х. М., Кунгожин А. М. Математические олимпиады: Жаутыковская,Мусабаевская,Ильясовская. -Алматы:Өнер 21-ғасыр, 2014. 256-270 С.