УДК 532.5

МНОГОКОМПОНЕНТНОЕ ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ КАМАССЫ-ХОЛМА

Мусатаева Асем Болатбековна
a.b.mussatayeva@gmail.com
Докторант Физико-технического факультета, ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
Научный руководитель – Мырзакулов Н.А.

В этой статье мы предлагаем многокомпонентную систему уравнения Камассы-Холма, обозначенную КХ (N, H) с 2N компонентами и произвольной гладкой функцией H. Показано, что эта система интегрируема, следовательно имеет пару Лакса.

В 1993 году Камасса и Холм вывели уравнение, позднее ставшее известным как уравнение Камассы-Холма (КХ) [1]

$$m_t + 2mu_x + m_x u = 0, \qquad m = u - u_{xx} + k, \tag{1}$$

уравнение (1) является волновым уравнением в мелкой воде. Здесь $u = u(x,t)$ – скорость жидкости в направлении x, а постоянная k связана с критической скоростью волны на мелкой воде. Это уравнение является полностью интегрируемым, оно допускает пару Лакса [1]. Это уравнение впервые появилось в работе Б.Фуксштайнера и А.С.Фокаса по теории наследственных симметрий солитонных уравнений. Благодаря своему содержательному физическому смыслу, а также таким особым свойствам, таким как возможность применения метода обратного рассеяния, существование пары Лакса [1], бигамильтоновой структуры [3], солитонного и пиконного решений [5], уравнение КХ привлекло большое внимание.

Уравнение КХ допускает множество интегрируемых многокомпонентных обобщений. Солитонные уравнения представляют собой важные интегрируемые модели во многих областях физики – гидродинамике, физике твердого тела, физике плазмы и т.д. [5]. Например, уравнение Кортевега–де Фриза с самосогласованными источниками (КдФСИ) описывает взаимодействие длинных и коротких гравитационно-капиллярных волн [6]. Уравнение Кадомцева–Петвиашвили с самосогласованными источниками описывает взаимодействие длинной волны с коротким волновым пакетом, распространяющимся в плоскости (x, y), под некоторым углом друг к другу [7].

В последнее время уравнение Камассы-Холма вызывает значительный интерес как пример интегрируемой системы, имеющей более общие волновые решения.

Поскольку работы Камассы и Холма [1] более разнообразны, исследования по этому уравнению были хорошо развиты в работах [4]. Интересная особенность уравнения КХ (1) состоит в том, что оно допускает пиконные решения в случае k=0. Устойчивость и взаимодействие пиконов обсуждались в нескольких работах [7]. В дополнение к КХ уравнение, были найдены другие аналогичные интегрируемые модели с пиконными решениями [6]. Относительно недавно, найдено два интегрируемых пиконных уравнения с кубической нелинейностью и уравнение Новикова. Уравнение с кубической нелинейностью и уравнение Новикова имеют вид, соответственно:

$$m_t + \frac{1}{2}\left[m(u^2 - u_x^2)\right]_x = 0, \quad m = u - u_{xx}, \tag{2}$$

$$m_t = u^2 m_x + 3uu_x m, \quad m = u - u_{xx}. \tag{3}$$

Большое внимание также уделяется изучению интегрируемых многокомпонентных пиконных уравнений. Например, в [6] авторы предложили многокомпонентное обобщение уравнение КХ, а в [7] были изучены многокомпонентные расширения кубического нелинейного уравнения (2).

В этой статье мы рассматриваем следующую многокомпонентную систему

$$\begin{cases} m_{j,t} = & (m_j H)_x + m_j H + \dfrac{1}{(N+1)^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{N}[m_i(u_j - u_{j,x})(v_i + v_{i,x}) + m_j(u_i - u_{i,x})(v_i + v_{i,x})], \\ n_{j,t} = & (n_j H)_x - n_j H - \dfrac{1}{(N+1)^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{N}[n_i(u_i - u_{i,x})(v_j + v_{j,x}) + n_j(u_i - u_{i,x})(v_i + v_{i,x})], \\ m_j = & u_j - u_{j,xx}, \quad n_j = v_j - v_{j,xx}, \quad 1 \le j \le N, \end{cases} \tag{4}$$

где H - произвольная гладкая функция зависящая от u_j, v_j $\left(1 \le j \le N\right)$ и их производных. Для $N=1$, эта система сводится к стандартному уравнению КХ (1) при $v_1 = 2$, $H = -u_1$ и к кубическому нелинейному уравнению КХ (2) при $u_1 = v_1$, $H = -\frac{1}{2}(u_1^2 - u_{1,x}^2)$.

Следовательно, это своего рода многокомпонентная комбинация уравнения КХ (1) и кубического нелинейного уравнения КХ (2). Система (4) содержит произвольную функцию H, таким образом, что на самом деле это большой класс многокомпонентных уравнений. Отметим, что совсем недавно Ли, Лю и Попович предложили четырехкомпонентное уравнение Пикона, которое также содержит произвольную функцию. Они вывели пару Лакса и бесконечные законы сохранения для своего четырехкомпонентного уравнения и представили бигамильтонову структуру для своего уравнения в случае, когда произвольная функция принимается равной нулю [7].

В этой статье мы показываем, что многокомпонентная система (4) допускает представление Лакса.

Сначала введем N - компонентные векторные потенциалы $\vec{u}$, $\vec{v}$ и $\vec{m}$, $\vec{n}$

$$\begin{aligned} \vec{u} = &\quad (u_1, u_2, \cdots, u_N), \quad \vec{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_N), \\ \vec{m} = &\quad \vec{u} - \vec{u}_{xx}, \quad \vec{n} = \vec{v} - \vec{v}_{xx}. \end{aligned} \tag{5}$$

Используя это обозначение, уравнение (4) выражается в следующем векторном виде

$$\begin{cases} \vec{m}_t = & (\vec{m}H)_x + \vec{m}H + \dfrac{1}{(N+1)^2}[\vec{m}(\vec{v}+\vec{v}_x)^T(\vec{u}-\vec{u}_x) + (\vec{u}-\vec{u}_x)(\vec{v}+\vec{v}_x)^T\vec{m}], \\ \vec{n}_t = & (\vec{n}H)_x - \vec{n}H - \dfrac{1}{(N+1)^2}[\vec{n}(\vec{u}-\vec{u}_x)^T(\vec{v}+\vec{v}_x) + (\vec{v}+\vec{v}_x)(\vec{u}-\vec{u}_x)^T\vec{n}], \\ \vec{m} = & \vec{u} - \vec{u}_{xx}, \quad \vec{n} = \vec{v} - \vec{v}_{xx}, \end{cases} \tag{6}$$

где символ T обозначает транспонирование вектора. Введем пару $(N+1)\times(N+1)$ матричных спектральных задач

$$\phi_x = U\phi, \quad \phi_t = V\phi, \tag{7}$$

Здесь

$$\phi = (\phi_1, \phi_{21}, \cdots, \phi_{2N})^T \tag{8}$$

$$U = \frac{1}{N+1} \begin{pmatrix} -N & \lambda\vec{m} \\ \lambda\vec{n}^T & I_N \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$V = \frac{1}{N+1} \begin{pmatrix} -N\lambda^{-2} + \dfrac{1}{N+1}(\vec{u}-\vec{u}_x)(\vec{v}+\vec{v}_x)^T & \lambda^{-1}(\vec{u}-\vec{u}_x) + \lambda\vec{m}H \\ \lambda^{-1}(\vec{v}+\vec{v}_x)^T + \lambda\vec{n}^T H & \lambda^{-2}I_N - \dfrac{1}{N+1}(\vec{v}+\vec{v}_x)^T(\vec{u}-\vec{u}_x) \end{pmatrix} \tag{10}$$

где λ - спектральный параметр, I_N $N\times N$ единичная матрица, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{m}$ и $\vec{n}$ - векторные потенциалы, показанные в (5).

Предложение. *(7)* предоставляет пару Лакса для многокомпонентной системы (4).

Доказательство. Легко проверить, что условие совместности (7) порождает

$$U_t - V_x + [U,V] = 0. \tag{11}$$

Из (8, 9, 10), имеем

$$U_t = \frac{1}{N+1} \begin{pmatrix} 0 & \lambda \vec{m}_t \\ \lambda \vec{n}_t^T & 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$V_x = \frac{1}{N+1} \begin{pmatrix} \frac{1}{N+1}[\vec{m}(\vec{v}+\vec{v}_x)^T - (\vec{u}-\vec{u}_x)\vec{n}^T] & \lambda^{-1}(\vec{u}_x - \vec{u}_{xx}) + \lambda(\vec{m}H)_x \\ \lambda^{-1}(\vec{v}_x + \vec{v}_{xx})^T + \lambda(\vec{n}^T H)_x & \frac{1}{N+1}[\vec{n}^T(\vec{u}-\vec{u}_x) - (\vec{v}+\vec{v}_x)^T \vec{m}] \end{pmatrix} \tag{13}$$

и

$$[U,V] = UV - VU = \frac{1}{(N+1)^2} \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{pmatrix} \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11} &= \vec{m}(\vec{v}+\vec{v}_x)^T - (\vec{u}-\vec{u}_x)\vec{n}^T, \\
\Gamma_{12} &= (N+1)[\lambda^{-1}(\vec{u}_x - \vec{u}_{xx}) - \lambda \vec{m} H] - \frac{\lambda}{N+1}[\vec{m}(\vec{v}+\vec{v}_x)^T(\vec{u}-\vec{u}_x) + (\vec{u}-\vec{u}_x)(\vec{v}+\vec{v}_x)^T \vec{m}], \\
\Gamma_{21} &= (N+1)[\lambda^{-1}(\vec{v}_x + \vec{v}_{xx})^T + \lambda \vec{n}^T H] + \frac{\lambda}{N+1}[\vec{n}^T(\vec{u}-\vec{u}_x)(\vec{v}+\vec{v}_x)^T + (\vec{v}+\vec{v}_x)^T(\vec{u}-\vec{u}_x)\vec{n}^T], \\
\Gamma_{22} &= \vec{n}^T(\vec{u}-\vec{u}_x) - (\vec{v}+\vec{v}_x)^T \vec{m}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Заметим, что (14) записывается в виде блочной матрицы. Как показано выше, элемент Γ_{11} является скалярной функцией, элемент Γ_{12} является векторной функцией N-компонентной строки, элемент Γ_{21} является векторной функцией N-компонентного столбца, а элемент Γ_{22} является $N \times N$ матричной функцией.

Подставляя выражения (13) и (14) в (11), мы находим, что (11) приводит к

$$\begin{cases}
\vec{m}_t = & (\vec{m}H)_x + \vec{m}H + \frac{1}{(N+1)^2}[\vec{m}(\vec{v}+\vec{v}_x)^T(\vec{u}-\vec{u}_x) + (\vec{u}-\vec{u}_x)(\vec{v}+\vec{v}_x)^T \vec{m}], \\
\vec{n}_t^T = & (\vec{n}^T H)_x - \vec{n}^T H - \frac{1}{(N+1)^2}[\vec{n}^T(\vec{u}-\vec{u}_x)(\vec{v}+\vec{v}_x)^T + (\vec{v}+\vec{v}_x)^T(\vec{u}-\vec{u}_x)\vec{n}^T], \\
\vec{m} = & \vec{u} - \vec{u}_{xx}, \quad \vec{n}^T = \vec{v}^T - \vec{v}_{xx}^T,
\end{cases} \tag{13}$$

которое является ничем иным, как векторным уравнением (6). Следовательно, (7) точно дает пару Лакса многокомпонентного уравнения (4).

В нашей статье мы рассматриваем многокомпонентное обобщение уравнения Камассы-Холма и выводим его представление Лакса. Эта система содержит произвольную гладкую функцию, поэтому она представляет собой большой класс многокомпонентных уравнений пиконов. Из-за наличия произвольной функции мы ожидаем, что система не является бигамильтоновой в общем случае. Но мы показываем, что можно найти бигамильтоновы структуры для специального выбора. В частности, мы изучаем пиковые решения этой системы в данном случае и получаем новую интегрируемую систему, которая допускает стационарные пиконные решения.

Список использованных источников

1. Camassa R., Holm D.D. An integrable shallow water equation with peaked solitons // Physical Review Letters. 1993. V.71. P.1661.
2. Fuchssteiner B., Fokas A.S., Symplectic structures, their Bäcklund transformations and hereditarysymmetries // Physica D: Nonlinear Phenomena 1981 V.4. P.47.
3. Camassa R., Holm D.D, Hyman J.M. A New Integrable Shallow Water Equation // Advances in Applied Mechanics 1994 V.31. P.27.
4. Qiao Z.J. The Camassa-Holm Hierarchy, *N*-Dimensional Integrable Systems, and Algebro-Geometric Solution on a Symplectic Submanifold // Communications in Mathematical Physics 2003 V.239. P.30
5. Novikov V., Phys. J. Generalizations of the Camassa–Holm equation // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 2009 V. 42. P. 34.
6. Holm D.D, Ivanov R.I. Multi-component generalizations of the {CH} equation: Geometrical Aspects, Peakons and Numerical Examples // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 2010 № 49. P.20.
7. Qu C.Z., Song J.F., Yao R.X. Multi-Component Integrable Systems and Invariant Curve Flows in Certain Geometries // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications 2013 № 9. P.19.