УДК 524.834

НЕКОТОРОЕ КОСМОЛОГИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ В $f(R)$ ГРАВИТАЦИИ С ФЕРМИОННЫМ ПОЛЕМ

Стрелкова Асель Викторовна
strelkova@nurorda.kz
Магистрант Физико-технического факультета, ЕНУ им. Л.Н. Гумилева,
Нур-Султан, Казахстан
Научный руководитель - Е.М. Мырзакулов

В последние годы при теоретическом описаний эволюции Вселенной применяют различные модифицированные (не эйнштейновские) теории гравитации. Одним таких теории является $f(R)$ гравитация, где R является скаляром кривизны. Данная теория подробно была рассмотрена в работах [1-3]. Она также часто применяется для описания различных локализованных объектов во Вселенной, типа черных дых, кротовых нор и т.д. [4-5].

Действие в теории $f(R)$ гравитации можно будет записать в виде [1]:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g}\left[f(R) + L_m\right], \tag{1}$$

где $g = \det(g_{ik})$ является определитель метрического тензора, $f(R)$ является некой функцией от скаляра Риччи R и L_m является лагранжианом материи. Здесь рассматриваем случай, когда $8\pi G = 1$. Вариация действия (1) относительно метрического тензора дает следующие уравнения поля

$$f'(R)R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} f(R) - \nabla^i \nabla_k f'(R) + g_{ik}\Delta f'(R) = kT_{ik}\,, \tag{2}$$

где нижний индексы у буквы обозначают производную по R, R_{ik} является тензором Риччи и $\Delta = \nabla^i \nabla_k$ является ковариантной производной. Здесь $T_{\mu\nu}$ является тензором энергии-импульса, которую в общем виде можно записать как

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\left(\sqrt{-g}L_m\right)}{\delta g^{\mu\nu}} = g^{\mu\nu} L_m - 2\frac{\partial L_m}{\partial g^{\mu\nu}}\,, \tag{3}$$

Также в качестве полей материи во Вселенной, рассматриваю скалярные и/или векторные поля. Космологические модели со скалярными полями были рассмотрены в работах [6-7], и модели с фермионными (векторные) поля ранее были рассмотрены в работах [8-9]. Недавно была предложена модель обобщающая фермионные поля - f-эссенции [10].

В данной работе нами будут получена система нелинейных дифференциальных уравнения третьего порядка в рамках теории $f(R)$ гравитация с фермионными полями.

Действие и уравнения движения в $f(R)$ гравитации с f-эссенцией

Действие в $f(R)$ гравитации с f-эссенцией запишем как

$$S = \int d^4x \sqrt{-g}\left[h(u) f(R) + 2K(Y,u)\right], \tag{4}$$

Здесь $h(u)$ является функцией связи гравитационного поля и полей материи, зависящий от переменной $u = \bar{\psi}\psi$, где $\bar{\psi}$ является комплексной сопряженной волновой функции ψ и $K(Y,u)$ является лагранжианом f-эссенции.

Здесь

$$Y = \frac{i}{2}\left[\bar{\psi}\Gamma^{\mu}\left(\vec{\partial}_{\mu} - \Omega_{\mu}\right)\psi - \bar{\psi}\left(\overleftarrow{\partial}_{\mu} + \Omega_{\mu}\right)\Gamma^{\mu}\psi\right], \tag{5}$$

является кинетическим членом фермионного поля и индексы μ и ν принимают значения 0, 1, 2, 3.

Совместно с действием (3) рассмотрим метрику Фридмана-Робертсона-Уокера

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right), \tag{6}$$

где a является масштабным фактор зависящий от времени t . Для этой метрики тензор кривизны R и кинетический член фермионного поля Y принимают следующие значения:

$$R = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right), \quad Y = \frac{i}{2}\left(\bar{\psi}\gamma^0\dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\gamma^0\psi\right). \tag{7}$$

Здесь и далее точка над буквой обозначает производную по времени t . Функцию Лагранжа для метрики (3) можно записать в виде:

$$L = a^3hf - a^3hRf_R - 6a\dot{a}^2hf_R - 6a^2\dot{a}h'\dot{u}f_R - 6a^2\dot{a}h\dot{R}f_{RR} + 2a^3K, \tag{8}$$

Далее, для определения полевых уравнений нами будут использованы уравнения Эйлера-Лагранжа и условие нулевой энергии:

$$\frac{\partial L}{\partial a} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{a}} = 0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial L}{\partial R} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{R}} = 0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = 0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\psi}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{\psi}}} = 0, \tag{12}$$

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}}\dot{a} + \frac{\partial L}{\partial \dot{R}}\dot{R} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}\dot{\psi} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{\psi}}}\dot{\bar{\psi}} - L = 0. \tag{13}$$

Подставляя уравнение (8) в систему уравнений (9)-(13), то получаем полевые уравнения для рассматриваемой модели как

$$\dot{R}^2 f_{RRR} + \left(\ddot{R} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{h}}{h}\right)\dot{R}\right)f_{RR} - \left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{h}}{h} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{\dot{h}}{h} - \frac{1}{2}R\right)f_R + \frac{1}{2}f + \frac{1}{h}K = 0, \tag{14}$$

$$3\frac{\dot{a}}{a}\dot{R}f_{RR} + \left(3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3\frac{\dot{a}}{a}\frac{h'}{h}\dot{u} - \frac{1}{2}R\right)f_R + \frac{1}{2}f - \frac{1}{h}\left(K_YY - K\right) = 0, \tag{15}$$

$$\begin{aligned} &K_Y\dot{\psi} + \frac{1}{2}\left(3\frac{\dot{a}}{a}K_Y + \dot{K}_Y\right)\psi + iK_u\psi\gamma^0 + \\ &+\frac{i}{2}\left[\left(R + 6\frac{\ddot{a}}{a} + 6\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)h'\psi\gamma^0 + 6\frac{\dot{a}}{a}(h')_t\psi\gamma^0 - 6\frac{\dot{a}}{a}(h')_\psi\dot{u}\gamma^0\right]f_R + \frac{i}{2}fh'\psi\gamma^0 = 0 \end{aligned}, \tag{16}$$

$$
\begin{aligned}
& K_Y \dot{\bar{\psi}} + \frac{1}{2}\left(3\frac{\dot{a}}{a}K_Y + \dot{K}_Y\right)\bar{\psi} + iK_u\bar{\psi}\gamma^0 + \\
& + \frac{i}{2}\left[\left(R + 6\frac{\ddot{a}}{a} + 6\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)h'\bar{\psi}\gamma^0 + 6\frac{\dot{a}}{a}(h')_t\bar{\psi}\gamma^0 - 6\frac{\dot{a}}{a}(h')_\psi \dot{u}\gamma^0\right]f_R + \frac{i}{2}fh'\bar{\psi}\gamma^0 = 0
\end{aligned}, \tag{17}
$$

Заключение

В данной работе нами была исследована модель плоской и однородной Вселенной в теории $f(R)$ гравитации с f -эссенцией. С помощью уравнения Эйлера-Лагранжа и условия нулевой энергии нами были определены соответствующие полевые уравнения. Эти уравнения являются нелинейными дифференциальными уравнениями с частными производными. Для их решения необходимо определить явный вид функций $h(u)$, $K(Y,u)$ и $f(R)$, которые будут рассмотрены в дальнейших наших работах.

Список использованных источников

1 Perlmutter S. Measurements of omega and lambda from 42 high-redshift supernovae // The Astrophysical Journal. 1999. – Vol. 517, №2. P. 565-586.

2 Riess Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant // The Astronomical Journal. 1998. – Vol. 116, №3. P. 1009-1038.

3 Myrzakulov R.Accelerating universe from f(T) gravity // The European Physical Journal C.2011. - Vol. 71, №9. P. 1752.

4 Armendariz-Picon C., Damour T., Mukhanov V.F. k-inflation // Physical Letters B. 1999 №7.-P. 209-218.

5 Armendariz-Picon C., Mukhanov V.F., Steinhardt P.J. Essentials of k-essence // Physical Review D.- 2010. №10. P. 3510.

6 Bahamonde S., Capozziello S. Noether symmetry approach in f(T, B) teleparallel cosmology // European Physical Journal C 2017, №107.- P. 253-264.

7 Esmakhanova K., Myrzakulov N., Nugmanova G., Myrzakulov Y., Chechin L., Myrzakulov R. Dark energy in some integrable and nonintegrable FRW cosmological models // International Journal of Modern Physics D. 2011. №12. P. 2419-2446.