bulmathmc.enu.kz

ISSN 2616-7182

EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY

Л.Н.Гумилев атындағы
Еуразия ұлттық университетінің
ХАБАРШЫСЫ

BULLETIN
of L.N.Gumilyov Eurasian National University

№3 (124)/2018

ВЕСТНИК
Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева

МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА сериясы

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series

Серия МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА

ISSN 2616-7182

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің

ХАБАРШЫСЫ

BULLETIN

of the L.N. Gumilyov Eurasian
National University

ВЕСТНИК

Евразийского национального
университета имени Л.Н. Гумилева

МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА сериясы

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series

Серия **МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА**

№3(124)/2018

1995 жылдан бастап шығады

Founded in 1995

Издается с 1995 года

Жылына 4 рет шығады
Published 4 times a year
Выходит 4 раза в год

Астана, 2018
Astana, 2018

Редакцияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Астана қ., Сәтпаев к-сі, 2, 408 бөлме.
Тел: (7172) 709-500 (ішкі 31-428). E-mail: *vest_math@enu.kz*

Жауапты хатшы, компьютерде беттеген
А. Нұрболат

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы.
МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА сериясы
Меншіктенуші: ҚР БжҒМ "Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті" ШЖҚ РМК
Мерзімділігі: жылына 4 рет.
Қазақстан Республикасының Ақпарат және коммуникациялар министрлігімен тіркелген.
27.03.2018ж. № 17000-ж тіркеу куәлігі.
Тиражы: 20 дана
Типографияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Астана қ., Қажымұқан к-сі ,12/1,
тел: (7172)709-500 (ішкі 31-428).

Editorial address: 2, Satpayev str., of. 408, Astana, Kazakhstan, 010008
Tel.: (7172) 709-500 (ext. 31-428)
E-mail: *vest_math@enu.kz*

Responsible secretary, computer layout:
A. Nurbolat

Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University.
MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series
Owner: Republican State Enterprise in the capacity of economic conduct "L.N. Gumilyov Eurasian National University" Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan
Periodicity: 4 times a year
Registered by the Ministry of Information and Communication of the Republic of Kazakhstan.
Registration certificate №17000-ж from 27.03.2018.
Circulation: 20 copies
Address of printing house: 12/1 Kazhimukan str., Astana, Kazakhstan 010008;
tel: (7172) 709-500 (ext.31-428).

Адрес редакции: 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Сатпаева, 2, каб. 408
Тел: (7172) 709-500 (вн. 31-428). E-mail: *vest_math@enu.kz*

Ответственный секретарь, компьютерная верстка
А. Нурболат

Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева.
Серия МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА
Собственник: РГП на ПХВ "Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева" МОН РК
Периодичность: 4 раза в год.
Зарегистрирован Министерством информации и коммуникаций Республики Казакстан.
Регистрационное свидетельство №17000-ж от 27.03.2018г.
Тираж: 20 экземпляров. Адрес типографии: 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Кажымукана, 12/1, тел.: (7172)709-500 (вн.31-428).

Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІНІҢ ХАБАРШЫСЫ. МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА СЕРИЯСЫ, №3(124)/2018

МАЗМҰНЫ

BULLETIN OF L.N. GUMILYOV EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY. MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS SERIES, №3(124)/2018

CONTENTS

ВЕСТНИК ЕВРАЗИЙСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ Л.Н.ГУМИЛЕВА. СЕРИЯ МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА, №3(124)/2018

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА-ИНФОРМАТИКА
MATHEMATICS-COMPUTER SCIENCE

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Информатика. Механика сериясы, 2018, том 124, №3, 8-88 беттер
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: **27.25.19**

Н. Темиргалиев, А.Ж. Жубанышева

Институт теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан
(E-mail: ntmath10@mail.ru, axaulezh@mail.ru)

Теория приближений, Вычислительная математика и Численный анализ в новой концепции в свете Компьютерного (вычислительного) поперечника

Аннотация: Во времена стремительно надвигающейся 4-ой промышленной революции, вызванной развитием компьютерных технологий, особую значимость приобретают методы оптимальной обработки информации на вычислительных средствах в математических моделях.

Математическим эквивалентом чего является предложенный в 1996 году [1] и сразу же поддержанный академиком АН СССР и России С.М. Никольским представлением в Доклады РАН **Компьютерный (вычислительный) поперечник** (К(В)П), смысл которого состоит в, надеемся, новом осмыслении теории приближений, вычислительной математики и, в целом, численного анализа.

В К(В)П начальным является определение

$$\delta_N(\varepsilon_N; D_N)_Y \equiv \delta_N(\varepsilon_N; T; F; D_N)_Y \equiv \inf_{\left(l^{(N)},\varphi_N\right)\in D_N} \delta_N\left(\varepsilon_N; \left(l^{(N)},\varphi_N\right)\right)_Y, \qquad (*)$$

где

$$\delta_N\left(\varepsilon_N; \left(l^{(N)},\varphi_N\right)\right)_Y \equiv \delta_N(\varepsilon_N; T; F; \left(l^{(N)},\varphi_N\right))_Y \equiv$$
$$\equiv \sup_{\substack{f\in F,\{\gamma_N^{(\tau)}\}_{\tau=1}^N \\ \left|\gamma_N^{(\tau)}\right|\le 1 (\tau=1,...,N)}} \left\| Tf(\cdot) - \varphi_N\left(l_N^{(1)}(f) + \gamma_N^{(1)}\varepsilon_N^{(1)}, ..., l_N^{(N)}(f) + \gamma_N^{(N)}\varepsilon_N^{(N)}; \cdot\right)\right\|_Y.$$

Здесь *математическая модель* задается посредством (не обязательно линейного) оператора $T: F \mapsto Y$, где X и $Y-$ нормированные пространства функций, заданных соответственно на Ω_X и $\Omega_Y, F \subset X$ - класс функций. Числовая информация $l^{(N)} \equiv l^{(N)}(f) = \left(l_N^{(1)}(f), ..., l_N^{(N)}(f)\right)$ объема $N\,(N = 1, 2, ...)$ об f из класса F снимается с определенных на нем линейных функционалов $l_N^{(1)}, ..., l_N^{(N)}$ (в общем случае не обязательно линейных). *Алгоритм переработки информации* $\varphi_N(z_1, ..., z_N; \cdot) : C^N \times \Omega_Y \mapsto C$ есть соответствие, которое при всяком фиксированном $(z_1, ..., z_N) \in C^N$ как функция от $(\cdot)$ есть элемент Y. Запись $\varphi_N \in Y$ означает, что φ_N удовлетворяет всем перечисленным выше условиям, а $\{\varphi_N\}_Y$ будет обозначать множество, составленное из всех $\varphi_N \in Y$. Далее $\left(l^{(N)},\varphi_N\right)$ есть *вычислительный агрегат* восстановления *по точной информации* для функции $f \in F$, действующий по правилу $\varphi_N\left(l_N^{(1)}, ..., l_N^{(N)}; \cdot\right)$.

Восстановление $T(f)$ *по неточной информации* проводится следующим образом. Сначала задаются границы неточности – вектор $\varepsilon_N = \left(\varepsilon_N^{(1)}, ..., \varepsilon_N^{(N)}\right)$ с неотрицательными компонентами. Затем точные значения $l_N^{(\tau)}(f)$ заменяются с заданной точностью $\varepsilon_N^{(\tau)} \ge 0$ на приближенные значения $z_\tau \equiv z_\tau(f)$, $\left|z_\tau - l_N^{(\tau)}(f)\right| \le \varepsilon_N^{(\tau)}\,(\tau = 1, ..., N)$, числа $z_\tau \equiv z_\tau(f)\ (\tau = 1, ..., N)$ перерабатываются посредством алгоритма φ_N до функции

$\varphi_N(z_1(f),...,z_N(f);\cdot)$, которая и будет составлять вычислительный агрегат $\left(l^{(N)},\varphi_N,\varepsilon_N\right)\equiv\varphi_N(z_1(f),...,z_N(f);\cdot)$, построенный по информации точности $\varepsilon_N=\left(\varepsilon_N^{(1)},...,\varepsilon_N^{(N)}\right)$.

Пусть $D_N\equiv D_N(F)_Y$ - данный набор комплексов $\left(l_N^{(1)},...,l_N^{(N)};\varphi_N\right)\equiv\left(l^{(N)},\varphi_N\right)\equiv\left(l^{(N)},\varphi_N;0\right)$, подчеркнем, операторов восстановления "по точной информации", как исходных в данном круге вопросов.

Записи $A\ll B$ и $A\asymp B$ соответственно означают $|A|\le cB(c>0)$ и одновременное выполнение $A\ll B$ и $B\ll A$.

Величину (*) будем называть "*информативной мощностью набора вычислительных агрегатов (комплексов)* $D_N\equiv D_N(F)_Y$ *точности* $\varepsilon_N=\left(\varepsilon_N^{(1)},...,\varepsilon_N^{(N)}\right)$". В целях сокращения речи будем говорить "*Вычислительный агрегат* $\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)\in D_N$ *поддерживает оценку снизу* $\vartheta_N\ll\delta_N(0;T;F;D_N)_Y$", если выполнено неравенство $\delta_N\left(0;T;F;\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)\right)_Y\ll\vartheta_N$.

В рамках приведенных обозначений и определений проблема оптимального восстановления по неточной информации с сервисным обслуживанием вычислений на компьютерах, оформленная под названием *"Компьютерный (вычислительный) поперечник"*, заключается, в собирательном смысле, в последовательном решении нижеследующих трех задач – К(В)П-1, К(В)П-2 и К(В)П-3.

При заданных T,F,Y,D_N (фиксированных всюду по последующему контексту):

К(В)П-1: Находится порядок $\asymp\delta_N(0;D_N)_Y\equiv\delta_N(0;T;F;D_N)_Y$, – *информативная мощность набора вычислительных агрегатов* $D_N\equiv D_N(F)_Y$ с построением конкретного вычислительного агрегата $\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)$ из $D_N\equiv D_N(F)_Y$, поддерживающего порядок $\asymp\delta_N(0;D_N)_Y$.

К(В)П-2: Для $\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)$ исследуется задача существования и нахождения последовательности $\tilde{\varepsilon}_N\equiv\tilde{\varepsilon}_N\left(D_N;\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)\right)_Y\equiv\left(\tilde{\varepsilon}_N^{(1)},...,\tilde{\varepsilon}_N^{(N)}\right)$ с неотрицательными компонентами – К(В)П-2-предельной погрешности (соответствующей оптимальному вычислительному агрегату $\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)$) такой, что $\delta_N(0;D_N)_Y\asymp\delta_N\left(\tilde{\varepsilon}_N;\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)\right)_Y\equiv$
$\sup\left\{\|Tf(\cdot)-\bar{\varphi}_N(z_1,...,z_N;\cdot)\|_Y:\ f\in F,\left|\bar{l}_\tau(f)-z_\tau\right|\le\tilde{\varepsilon}_N^{(\tau)}(\tau=1,...,N)\right\}$,
с одновременным выполнением

$$\forall\eta_N\uparrow+\infty(0<\eta_N<\eta_{N+1},\ \eta_N\to+\infty):\overline{\lim_{N\to+\infty}}\delta_N\left(\eta_N\tilde{\varepsilon}_N;\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)\right)_Y/\delta_N(0;D_N)_Y=+\infty.$$

К(В)П-3: Устанавливается *массивность* предельной погрешности $\tilde{\varepsilon}_N\left(D_N;\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)\right)_Y$: находится как можно большое множество $M_N\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)$ из D_N (обычно связанное со структурой исходного $\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)$) вычислительных агрегатов $\left(l^{(N)},\varphi_N\right)$, построенных по функционалам $l_1^{(1)},...,l_N^{(N)}$ (в общей постановке не обязательно линейным), таких, что для каждого из них выполнено

$$\forall\eta_N\uparrow+\infty(0<\eta_N<\eta_{N+1},\ \eta_N\to+\infty):\overline{\lim_{N\to+\infty}}\delta_N\left(\eta_N\tilde{\varepsilon}_N;\left(l^{(N)},\varphi_N\right)\right)_Y/\delta_N(0;D_N)_Y=+\infty.$$

Если окажется, что в К(В)П-1 экстремальных вычислительных агрегатов будет больше одного, то по каждому из них проводится К(В)П-2,-3 анализ, поскольку их вычислительные качества определяются не только по величине предельной пограшности, но и по приспособленности структуры вычислительного агрегата к особенностям объекта применения.

"Теория приближений" и "Вычислительная математика" есть, по сути, замена сложного, в определенном смысле, объекта на простой объект, с конструктивными и вычислительными преимуществами соответственно, с обязательной оценкой возникающей при этом погрешности. Как нам представляется, К(В)П-1 в главном должен и может быть количественным описанием этой словестной формулировки. Именно, **Теорию приближений** и **Вычислительную математику** (линейный аспект) в контексте К(В)П-1 предлагается понимать так: при заданных T, F и Y с D_N , составленном из всех возможных линейных функционалов над F и из $\{\varphi_N\}_Y$, требуется построить конкретный вычислительный агрегат $\overline{\varphi}_N(\bar{l}_1(f), \ldots, \bar{l}_N(f), \cdot)$ со свойством

$$\delta_N(0; T; F; D_N)_Y \asymp \sup_{f \in F} \left\| Tf - \overline{\varphi}_N(\bar{l}_1(f), \ldots, \bar{l}_N(f), \cdot) \right\|_Y .$$

Разумеется, дальнейшая конкретизация D_N приводит к специальным задачам типа "Аппроксимативные возможности той или иной системы", "Приближенное вычисление значений функций, интегралов и иных сложных объектов" и т.п. Особый случай *Теории приближений* и *Вычислительной математики* составляют D_N с нелинейными функционалами.

И, конечно, К(В)П в полном объеме можно рассматривать как новый взгляд на весь **Численный анализ.**

Ключевые слова: Компьютерный (вычислительный) поперечник (сокращенно – К(В)П), Теория приближений в качественной и количественной постановках, Вычислительная математика, восстановление по точной и неточной информации, предельная погрешность, новая схема Численного анализа.

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-7182/2018-124-3-8-88

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

1. Потребность *"в новых математических идеях о том, как – решать возникающие вычислительные проблемы"* в XXI веке. На рубеже тысячелетий по инициативе Международного математического Союза был составлен сборник [2], в котором самые влиятельные математики мира (более половины из них в разные годы отмечены Филдсовскими медалями) подводили итоги прогресса своей науки в XX веке, делились своими мыслями о значении математики для человечества.

В статье [3] "Задача научных вычислений" Петер Лакс пишет: *"Все знают о достигнутом за последние 50 лет невероятном прогрессе в скорости компьютеров и объёме хранимой ими информации, а также об улучшениях в области графики и программного обеспечения. В результате задачи, ранее находившиеся на грани возможностей компьютера, сейчас могут быть решены гораздо быстрее и дешевле, и мы можем подступаться к задачам устрашающей сложности. Но многие люди не подозревают, что в значительной степени этот прогресс обязан не только улучшениям в техническом и программном обеспечении, но и* ***в равной мере новым математическим идеям (выделено нами)*** *о том, как решать возникающие вычислительные проблемы".*

Исследования реальных явлений математическими методами проводятся по схеме: от наблюдений и экспериментов к построению математической модели с последующим её изучением математическими средствами, завершающихся выводами в рамках модели и их сравнением с реальными фактами.

Мощным стимулом к применению математических методов к практическим задачам, своего рода математической экспансией, послужило появление в середине XX века электронных вычислительных машин (компьютеров), позволяющих в режиме реального (полиномиального) времени получать приемлемые решения в виде чисел.

В данной проблематике необходимо исходить из того, что компьютер дает возможность запомнить большие конечные массивы чисел (количество разрядов и объем которых ограничивается техническими характеристиками компьютера) и производит над ними четыре арифметические операции, а также выполняет простейшие логические операции и некоторое количество служебных программ (см., напр., [4–6]).

Вычисление функционалов – основных носителей числовой информации, как правило, не может быть математически точным, поэтому, самое лучшее, на что можно рассчитывать – это точность, с которой заданы сами используемые значения функционалов.

С другой стороны, излишняя точность вычислений при реализации алгоритма приводит к неоправданному увеличению объема памяти и количества арифметических операций, поскольку не улучшает заложенного в алгоритме порядка точности.

Отметим еще один важный момент сложившейся на сегодня обстановки: компьютер как техническое устройство постоянно совершенствуется, но в своем современном исполнении подходит к своему пределу скоростных возможностей, что связано с конечностью распространения электрического импульса – "*всего*" триста тысяч километров в одну секунду.

К тому же, как отмечается в [7, стр.34], " *Если учесть, чтовремя жизни Вселенной приблизительно равно* 10^{10} *лет* $< 10^{18}$ *секунд (* 1 *год* $= 365 \times 24 \times 60 \times 60$ *секунд = 31536000 секунд =* 10^a *, где* $a = \log_{10} 31536000 \approx 7,4988$ *), то ясно, что никакие фантастические скорости вычисления не обеспечат требуемой точности путем простого сложения членов ряда*", где речь идет о ряде $S = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^2 k}$, для вычисления суммы S которой с точностью 10^{-3} требуется сложить не менее $m, m+1 > e^{(10^3)} > 10^{300}$ членов.

Отсюда следует, что если бы все люди, прошедшие свой путь земной, в их числе Тот (Египет), Архимед и Пифагор, а также живущие ныне и которым надлежит родиться до конца XXI века (их не более миллиона миллиардов) работали все это время каждый на миллионе компьютеров со скоростью в миллиард миллиардов операций в секунду, то не смогли бы вычислить сумму всего одного числового ряда $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln^2 k}$ с точностью $\frac{1}{1000}$, поскольку все эти мыслимые люди и компьютеры за время от сотворения мира и до наших дней смогут выполнить не более $10^{18+15+6+18}=10^{57}$ элементарных арифметических операций, в данном случае – самой простой из них – сложений, тогда как их требуется не менее 10^{300}.

Можно сказать и так, даже при этих "бесконечно" завышенных предположениях (как и где содержать в рабочем состоянии миллиард миллиардов или, что тоже самое, миллион триллионов компьютеров и разместить миллион миллиардов людей на белом свете), выполнимо не более 10^{57} элементарных арифметических операций, а для обеспечения совсем небольшой точности в $\frac{1}{1000}$ компьютер должен выполнить 10^{261} действий в одну секунду, то есть в 10^{204} раз больше, чем могут выполнить все компьютеры со дня сотворения мира до конца XXI века.

Все эти грубые вычисления приведены с целью развеять бытующие совершенно неверные представления о *"всесилии компьютеров"*.

Представляется вполне возможным, что "*футуристический сценарий*" из книги [8, стр. 371-372] Ю.И.Манина *"Однако один футуристический сценарий напрашивается. Может оказаться, что мы приближаемся к пределу, которым интересующую нас информацию о природе мы просто не сможем воспринимать, не столько из-за величины ее колмогоровской сложности. Иными словами, даже в максимально сжатом виде ее будет слишком много. Возможно, что работа генетического аппарата и мозга уже обречена остаться недоступной человеческому сознанию в силу этого фундаментального ограничения"* имеет подтверждение именно в приведенных выше грубых оценках.

Как отдаленный отзвук описанного сценария воспринимается *"Существуют традиционные общества с высокой гуманитарной культурой, которые обошлись бы без научного эксперимента, без светского образования и без компьютеров, если бы наша западная цивилизация им все это не навязывала"*, таковым в понимании старшего из авторов являлось казахское (и, конечно, далеко не одно оно) село своего детства (разумеется, в определенном отношении, светское образование как выход во внешний мир, например, в нем было).

Конечно же, вопрос нахождения числа S не только с точностью 10^{-3}, а практически с любой точностью легко решается с помощью имеющихся средств математического анализа. Так, в [7] разработана **математическая идея** эффективного нахождения S с "*весьма большой точностью* ".

Из всего этого принципиальный вывод такой: технические возможности компьютера подходят к исчерпанию и опять на первое место выходитматематика. Так, 15 мировых компаний с годовым доходом не менее 2 миллиардов евро провели в Германии (апрель 2007 года) научную конференцию о развитии и использовании опять же *"новых математических идей"*.

Тем самым, потребность **"в новых математических идеях"** нуждается в пристальном изучении.

В Казахстане эта проблема выведена на государственный уровень в заданиях вхождения в 4-ую промышленную революцию и по цифровизации, во исполнение чего ИТМиНВ выдвинул Программу *"Казахстан выходит на массовое производство математиков и IT-специалистов высшей квалификации с основательной базовой подготовкой и опытом решения задач на переднем крае математики-информатики со значимыми и фундаментальными результатами"* с цельной стратегией её исполнения в [9].

Конечно же, **"в новых математических идеях"** надо определиться в предмете осмысления и обсуждения, что отражено в теме данной статьи *Компьютерный (вычислительный) поперечник как новый взгляд на Теорию приближений, Вычислительную математику и Численный анализ*, как это было выполнено в отношении "*случайности"* в [10].

Здесь по *"случайности"* имеется ввиду следующее. Компьютерные науки составляют основу Государственной программы "Цифровой Казахстан", к основным учебникам по ним относится "Искусство программирования" Д.Кнута:

"**Искусство программирования** (англ. *The Art of Computer Programming* [11]) — *фундаментальная монография известного американского математика и специалиста в области компьютерных наук Дональда Кнута, посвященная рассмотрению и анализу важнейших алгоритмов, используемых в информатике. В 1999 году книга была признана одной из двенадцати лучших физико-математических монографий столетия"*.

Как это всегда особо выделяется, данный журнал преследует внутриказахстанские интересы, поэтому в целях возвышения творческого духа казахов-казахстанцев, да и ещё в условиях Государственной программы "Цифровой Казахстан", когда в статье [10] фактически закрыта проблема спектрального тестирования основного датчика случайных чисел, тогда как этой проблемой в течение 50 лет постоянно занимался весь мир Компьютерных наук во главе со знаменитым Дональдом Эрвин Кнутом из *Стэнфордского* университета, – мозгового центра Силиконовой долины, надо ввести обязательную общую дисциплину *"Полное спектральное тестирование по методу Ковэю-Макферсона генераторов случайных чисел Лехмерас максимальным периодом"* для специальностей математика, информатика, физика и, с математическим *"ликбезом"*в случае необходимости, для всех инженерных и технических, финансовых и экономических, для всех медиков, юристов и т.д., использующих статистические методы, в полном объеме статьи *"Элементарное построение линейной конгруэнтной последовательности Лехмера с той степенью случайности, с какой требованиям случайности отвечает спектральный тест Ковэю и Макферсона*", и далее по убывающей по степени гуманитаризации, но с увеличением прикладной составляющей.

Тем самым, в учебном процессе Казахстана по Компьютерным наукам возникает уникальная ситуация, с колоссальным психологическим воздействием на восприятие процесса обучения, когда заданную тему не надо учить по всемирно признанному учебнику, а только по тексту проследить путь, который не приводит к решению, при этом зная решение.

2. Опыт К(В)П-исследований по предлагаемому новому пониманию Теории приближений и Вычислительной математики, с переходом в Численный анализ. Потребность в новых математических идеях обсудим на примере "Теории приближений", согласно советской Математической энциклопедии [12, IV том, стр. 627] с предметным содержанием (список таких определений дан в §12):

"**ПРИБЛИЖЕНИЯ ТЕОРИЯ,** аппроксимации теория, - раздел математич. анализа, изучающий **методы приближения** *одних математич. объектов другими* и вопросы, связанные с исследованием и оценкой возникающей при этом погрешности".

Вряд ли такое определение относится к удовлетворительным:

- ***"Приближения теория"***определяется через ***"методы приближения"***, что недопустимо, поскольку определение даётся через название самого подлежащего описанию объекта.
- ***"...Одних математических объектов другими"***, приближаемый и приближающий объекты неразличены (на равных правах), чем теряется сама суть приближения: неравенство

  $$|\sin x - \cos x| \le \max_{0\le y\le 2\pi} |\sin y - \cos y| < 2$$

  попадает под определение ***Приближения теории***, но непонятно, какая из этих (равнозначных) функций *приближает* другую, да и нет смысла функцию $\sin x$ *приближать* функцией $\cos x$, и наоборот.
- Теорема К. Вейерштрасса, установившего в 1885 году принципиальную возможность приблизить непрерывную на конечном отрезке функцию алгебраическими многочленами со сколь угодно малой наперед заданной погрешностью относится к *структурному*, но не к *вычислительному приближению:*трудность вычисления в точке значения алгебраического многочлена неограниченно возрастает с ростом его степени.

- *"Основное содержание* **Приближений теории** *относится к приближению функций"*, в статье через произвольный (без обязательного свойства линейности) оператор постановка шире до предельно возможного.

Свой взгляд на **"Теорию приближений"** покажем через нижеследующие результаты.

Пусть при $2 \le p < q \le \infty$ функцию $\overline{f} \in L^p(0,1)$ в метрике $L^q(0,1)$ требуется при произвольном фиксированном $N (N = 2, 3, ...)$ наилучшим образом приблизить вычислительными агрегатами вида $\varphi_N \left(l_1(\overline{f}), ..., l_N(\overline{f}); x \right)$, где $l_1, ..., l_N$ -линейные функционалы над $L^p(0,1)$, а $\varphi_N (z_1, ..., z_N; x) \in L^q(0,1)$ при всех фиксированных числах $z_1, ..., z_N$ как функция от x.

Ответ на поставленный вопрос получим включившись в ранее проведенное в статье [13] К(В)П-исследование (далее используемые определения, обозначения и результаты оттуда, и еще из основного текстав полном изложении).

Начнем со случая конечного q. Полагая $\bar{\omega}(\delta) := \omega_p(\delta; \overline{f})$, тем самым, включая каждую функцию $\overline{f}(x) \in L^p(0,1)$ в зону рассмотрения, и ещё предполагая сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{q}{p}-2} \omega_p^q \left(\frac{1}{n}; \overline{f} \right) < +\infty, \tag{0.1}$$

получаем $\overline{f}(x) \in H_p^{\bar{\omega}}$ и $\overline{f}(x) \in L^q(0,1)$, поскольку, согласно Критерию Ульянова [14] $H_p^{\omega} \subset L^q$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{q}{p}-2} \omega^q \left(\frac{1}{n} \right) < +\infty.$$

Отметим, что условие (0.1) для выполнения условия $\overline{f}(x) \in L^q(0,1)$, без которого задача теряет смысл, в обсуждаемых терминах наиболее широкое, ибо в случае его невыполнения найдется функция $\overline{\overline{f}} \in H_p^{\bar{\omega}}$, и потому $\overline{\overline{f}} \in L^p(0,1)$, такая что $\overline{\overline{f}} \notin L^q(0,1)$, понятно, для неё

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{q}{p}-2} \omega_p^q \left(\frac{1}{n}; \overline{\overline{f}} \right) = +\infty,$$

так что высказанное в этом предложении утверждение можно подтвердить на примере функции $\overline{\overline{f}}$.

Вместе с тем для всякого $\overline{f} \in L^p(0,1)$ с условием (0.1) для системы Хаара $\{\chi_n\}$ имеем (см. [15] и [13])

$$\left\| \overline{f}(x) - \sum_{n=1}^{N} \left(\overline{f}, \chi_n \right) \chi_n(x) \right\|_{L^q(0,1)} \ll \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} n^{\frac{q}{p}-2} \omega_p^q \left(\frac{1}{n}; \overline{f} \right) \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{0.2}$$

Оценка снизу, подтверждающая оценку сверху в (0.2), для всякой индивидуальной функции $\overline{f}(x)$, например для $\overline{f}_N(x) = \sum_{n=1}^{N} 2^{-n^2} \chi_n(x)$, невозможна, ибо тогда получили бы

$$0 < \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} n^{\frac{q}{p}-2} \omega_p^q \left(\frac{1}{n}; \overline{f}_N \right) \right)^{\frac{1}{q}} \ll \left\| \overline{f}_N(x) - \sum_{n=1}^{N} \left(\overline{f}_N, \chi_n \right) \chi_n(x) \right\|_{L^q(0,1)} = 0.$$

Поэтому перейдем к классу $H_p^{\bar{\omega}}$, определенному по данной функции $\overline{f}(x) \in L^p(0,1)$ и, в смысле поведения L^p-модуля гладкости, самой "*плохой*" в этом классе: для всякой функции $f(x) \in H_p^{\bar{\omega}}(0,1)$ выполнено неравенство

$$\omega_p(\delta; f) \le \bar{\omega}(\delta) = \omega_p\left(\delta; \overline{f}\right) \ (0 \le \delta \le 1).$$

Стало быть, в силу соотношения (см. [13])

$$\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} n^{\frac{q}{p}-2}\omega_p^q\left(\frac{1}{n};\bar{f}\right)\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} n^{\frac{q}{p}-2}\bar{\omega}_p^q\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \inf_{l_1,\ldots,l_N;\varphi_N}\ \sup_{f\in H_p^{\bar{\omega}}}\left\|f(x)-\varphi_N\left(l_1\left(\bar{f}\right),...,l_N\left(f\right);x\right)\right\|_{L^q(0,1)},$$

приходим к выводу, что для класса $H_p^{\bar{\omega}}$, содержащего среди прочих и функцию $\bar{f}\,(x)$, среди всех вычислительных агрегатов $\varphi_N\left(l_1\left(f\right),...,l_N\left(f\right);x\right)$ лучше частичных сумм Фурье по системе Хаара $\{\chi_n\}$ не существует.

Другими словами, при заданных $2\le p<q<\infty$ для произвольной функции $f(x)$ из Лебегова класса $L^p\left(0,1\right)$ в терминах её модуля непрерывности $\omega_p\left(\delta;f\right)$ получен полный ответ на задачу восстановления по норме $L^q\left(0,1\right)$: при неулучшаемом условии П.Л. Ульянова

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{q}{p}-2}\omega_p^q\left(\frac{1}{n};f\right)<+\infty,$$

обеспечивающую содержательность поставленной задачи, лучше чем частичные суммы ряда Фурье-Хаара функции $f(x)$, осуществляющих приближение со скоростью суммы остаточного ряда Ульянова, среди всех возможных вычислительных агрегатов $\varphi_N\left(l_1\left(f\right),...,l_N\left(f\right);x\right)$ предъявить нельзя.

Отсюда приходим к принципиальному выводу, фактически закрывающую проблему приближения при $2\le p<q<\infty$ Лебегова пространства $L^p\left(0,1\right)$ в метрике $L^q\left(0,1\right)$ - любые построенные по линейной информации вычислительные агрегаты лучше чем частичные суммы Фурье-Хаара не дадут.

Все то же самое повторяется и при $q=\infty, L^\infty\equiv C\left[0,1\right]$, когда поставленная задача на уровне каждой функции из Лебегова пространства $L^p\left(0,1\right)$ решается в шкале классов $H_p^\omega\left(0,1\right)$, составленного из всех функций $f\left(x\right)\in L^p(0,1)$, для которых $\omega_p\left(\delta;f\right)\le\omega\left(\delta\right)\quad\left(0\le\delta\le1\right)$. В шкале настолько тонкой, что через выбор определяющего класс H_p^ω модуля непрерывности $\omega\left(\delta\right)=\omega_f\left(\delta\right)\equiv\omega_p\left(\delta;f\right)$ спускается до каждой функции $f\left(x\right)\in L^p(0,1)$.

Решается на основе Критерия Ульянова [16]

$$H_p^\omega\left(0,1\right)\subset C\left[0,1\right]\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{p}-1}\omega\left(\frac{1}{n}\right)<+\infty$$

и заменой частичных сумм Фурье-Хаара на конечные свертки с ядром Дирихле – дискретного аналога частичных сумм тригонометрического ряда Фурье, построенного по значениям $f(x)$ в узлах равномерной сетки.

Именно, в условиях, когда для числа p, $2\le p<\infty$ и модуля непрерывности $\omega\left(\delta\right)$ выполнено неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{p}-1}\omega\left(\frac{1}{n}\right)<+\infty,$$

имеет место двусторонняя оценка

$$\inf_{l_1,\ldots,l_N;\,\varphi_N}\ \sup_{f\in H_p^\omega(0,1)}\left\|f\left(x\right)-\varphi_N(l_1(f),....,l_N(f);x)\right\|_{L^\infty}\asymp\sum_{n=N+1}^{\infty} n^{\frac{1}{p}-1}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\ \left(N=1,2,...\right). \quad (0.3)$$

Оценка снизу в (0.3) из [13] означает, что при любом выборе N функционалов, линейных на линейной оболочке H_p^ω, при любом выборе алгоритма φ_N, в совокупности составляющих вычислительный агрегат $\varphi_N(l_1(f),....,l_N(f);x)$, восстановить всякую функцию f из класса H_p^ω лучше, чем указано в (0.3), нельзя.

Оценка сверху в (0.3) следует из следующий оценки погрешности приближения тригонометрическими интерполяционными многочленами типа конечной свертки с ядром Дирихле по равноотстоящим узлам в равномерной метрике, полученной К.И. Осколковым [17]:

Пусть $1 < p < \infty$ *. Если* $f(x) \in L^p(0,1)$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{p}-1}\omega_p\left(\frac{1}{n}; f\right) < \infty$ *(тогда* f *эквивалентна некоторый непрерывной функции, за которой сохраним то же обозначение), то*

$$\left\| f(x) - \frac{1}{2N+1}\sum_{k=0}^{2N} f\left(\frac{k}{2N+1}\right)\frac{\sin(2N+1)\pi\left(x-\frac{k}{2N+1}\right)}{\sin\pi\left(x-\frac{k}{2N+1}\right)}\right\|_{C[0,1]} \ll \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{\frac{1}{p}-1}\omega_p\left(\frac{1}{n}; f\right). \tag{0.4}$$

Понятно, решение поставленной задачи распространяется на всякий класс F из $L^p(0,1)$, поскольку к каждой функции $\overline{f}(x) \in F$ можно применить полученные для H_p^{ω} результаты при $\omega(\delta) = \omega_p(\delta; \overline{f})$ (с соответствующими оговорками типа $F \subset L^q(0,1)$).

В итоге, следуя (разумеется, что называется, *"на почтительном расстоянии"*) Н.Н.Лузину [18, стр. 59] *"Можно сказать, что границы области измеримых множеств и функций суть, вместе с тем, и границы анализа"*, за,грубо говоря, *границы Теории приближений* принять оценки снизу погрешности вычислительных агрегатов, построенных по числовой информации от всех возможных линейных функционалов, с последующей переработкой по всем возможным алгоритмам, а за *верхние границы*– оптимальные вычислительные агрегаты вместе с оценками сверху, конечно,по порядку совпадающими с оценками снизу.

То же в точных определениях и обозначениях: по-видимому, целесообразно *Теорию приближений*при данных классе F, определенной на нем математической модели Tf и метрике Y измерения возникающей погрешности определить как задачу оптимизации

$$\inf_{l_1,\dots,l_N;\varphi_N}\sup_{f\in F}\|Tf(\cdot) - \varphi_N(l_1(f),...,l_N(f);\cdot)\|_Y \asymp \sup_{f\in F}\left\|Tf(\cdot) - \bar{\varphi}_N(\bar{l}_1(f),...,\bar{l}_N(f);\cdot)\right\|_Y, \tag{0.5}$$

где inf берётся по всем линейным функционалам $l_1, ..., l_N$ над линейной оболочкой F и по всем алгоритмам $\varphi(z_1, ..., z_N; \cdot) \in Y$, с передачей в лоно *Вычислительной математики,* если оптимальный агрегат приближения $\bar{\varphi}_N(\bar{l}_1(f), ..., \bar{l}_N(f); \cdot)$ носит выраженный вычислительный характер.

В связи с чем уточним, что в случай $q < \infty$ с оптимальной частичной суммой по системе Хаара в (0.2) надлежит отнести к *Теории приближений* (ибо, для применений надо ещё вычислить все N коэффициентов Фурье-Хаара), в то время как при $q = \infty$тригонометрическиемногочлены типа конечной свертки в (0.4)- к *Вычислительной математике.*

Если это будет дозволено, то старший из авторов не может скрыть своего, как в те времена говорили, *"глубокого удовлетворения",* что результаты близких ему Петра Лаврентьевича Ульянова ("Вечная память!") и Константина Ильича Осколкова ("Долгие лета!") в шкале Лебеговых (вкупе с этим именем фундаментального звучания в математике) пространств фактически имеют статус *"На вечные времена"* - на все времена *Теории приближений* и *Вычислительной математики!*

Особо подчеркнем, что предлагаемое здесь содержание *Теории приближений* через К(В)П-постановку состоит из трех объектов – это F, Tf, Y и зависящего от F и Y множества (обозначаемого нами через $L_N \equiv L_N(F)_Y \equiv L_N(F,T)$), составленного из всех возможных вычислительных агрегатов по линейной информации. Получается обширное поле исследований для каждой тройки F, Tf, Y с сопровождающим $L_N(F,Y)$ - свои методы исследования, свои результаты.

Нелинейные агрегаты приближений составят отдельную тему. На фоне чего заметим, что поперечник Колмогорова привел бы к N - мерному оптимальному подпространству $c_1g_1(x) + \cdots + c_Ng_N(x)$, по которому надо построить нелинейный объект – многочлен наилучшего приближения (в случае их существования и единственности)

$$\inf_{c_1,\dots,c_N}\left\|f(x) - \sum_{k=1}^{N} c_k g_k(x)\right\|_Y = \left\|f(x) - \sum_{k=1}^{N}\bar{c}_k(f)g_k(x)\right\|_Y,$$

откуда получаем искомый нелинейный вычислительный агрегат

$$f \mapsto \sum_{k=1}^{N} \bar{c}_k(f) g_k(x).$$

Конечно, особый интерес представляют классы гладких функций, – это классы Соболева, Никольского, Бесова, Лизоркина-Трибеля ит.п. Да ещё с их *"доминирующими смешанными производными и разностями"* аналогами, включая классы Коробова как основной индикатор эффективности различных методов исследования, в первую очередь теоретико-числовых.

Если же обратиться к гладким функциям, то ограничимся двумя примерами.

Переход к гладким функциям начнем с *"нижних границ"* численного дифференцирования $Tf = Tf \equiv f^{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)}(x)$ - этой "*вечной*" темы Теории приближений, на примере многомерного класса Соболева $F = W_p^r(0,1)^s$, напрямую определенного через обобщенные производные,с измерением погрешности в метрике $Y = L^q(0,1)^s$ (см. [19]):

Пусть даны целое положительное число s *и числа* $1 \le p \le q \le \infty$. *Пусть также даны неотрицательные целые числа* $r, \alpha_1, \dots, \alpha_s$ *такие, что* $r > \alpha_1 + \dots + \alpha_s + sA$, *где* A *равно* $\frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$ *или 0, смотря по тому* $2 \le p \le q \le \infty, 1 \le p < 2 \le q \le +\infty$ *или* $1 \le p \le q < 2$. *Тогда*

$$\inf_{\substack{l_1,\dots,l_N - \text{все возможные} \\ \text{линейные функционалы}\, \varphi_N}} \sup_{f \in W_p^r(0,1)^s} \left\| f^{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)}(\cdot) - \varphi_N(l_1(f),\dots,l_N(f);\cdot) \right\|_{L^q(0,1)^s} \gg$$

$$\gg \begin{cases} N^{-\frac{r}{s} + \frac{\alpha_1+\dots+\alpha_s}{s} + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)}, & \text{если } 2 \le p \le q \le \infty, \\ N^{-\frac{r}{s} + \frac{\alpha_1+\dots+\alpha_s}{s} + \frac{1}{2} - \frac{1}{q}}, & \text{если } 1 \le p < 2 \le q \le +\infty, \\ N^{-\frac{r}{s} + \frac{\alpha_1+\dots+\alpha_s}{s}}, & \text{если } 1 \le p \le q < 2. \end{cases} \tag{0.6}$$

Теперь перейдем к оценкам сверху. Каждый вычислительный агрегат, подтверждающий оценку снизу по всем вычислительным агрегатам, построенным по произвольной возможной линейной информации и по возможному алгоритму, сразу же попадает в разряд неулучшаемых по порядку (разумеется, при своих заданных условиях), включая многие известные задачи и результаты, поскольку задача К(В)П-1 в качестве конкретизаций содержит самые различные постановки (см.об этом ниже в §3).

К вычислительным агрегатам, подтверждающим оценку снизу (0.6) в случае $2 \le p \le q \le \infty$ относятся $(\alpha_1, \dots, \alpha_s)-$ производные частичных сумм по кубам тригонометрического ряда Фурье-Лебега (см. [19]):

Пусть даны целое положительное число s, *числа* $2 \le p \le q \le \infty$ *и неотрицательные целые числа* $r, \alpha_1, \dots, \alpha_s$ *такие, что* $r > \alpha_1 + \dots + \alpha_s + s\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$. *Тогда справедливы следующие утверждения* $(n = 1, 2, \dots; N = 2^{ns})$

$$\inf_{\substack{l_1,\dots,l_N - \text{все возможные} \\ \text{линейные функционалы}\, \varphi_N}} \sup_{f \in W_p^r(0,1)^s} \left\| f^{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)}(\cdot) - \varphi_N(l_1(f),\dots,l_N(f);\cdot) \right\|_{L^q(0,1)^s} \asymp$$

$$\asymp \sup_{\substack{f \in W_p^r(0,1)^s \\ \left|\gamma_N^{(\tau)}\right| \le 1 (\tau = 1,\dots,N)}} \left\| f^{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)}(x) - \sum_{m=(m_1,\dots,m_s) \in Z^s:} \hat{f}(m) \prod_{j=1}^{s} \left(e^{2\pi i m_j x_j}\right)^{(\alpha_j)} \right\|_{L^q(0,1)^s} \asymp$$

$$\asymp N^{-\frac{r}{s} + \frac{\alpha_1+\dots+\alpha_s}{s} + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)}, \tag{0.7}$$

Принципиальный вывод из (0.6) – (0.7) состоит в том, что на все будущие времена,как было сказано выше, в *"вечной"* теме численного дифференцирования обозначены нижние и верхние границы, дальнейшее развитие лишь в различных уточнениях по разным причинам.

Последний пример посвящен, если так можно будет выразиться в контексте рекомендации из [6, стр. 192] "*Не следует использовать в вычислительной практике алгебраические интерполяционные многочлены с равноотстоящими узлами при значительном числе* *узлов"*, К(В)П – реабилитации интерполяционных многочленов Лагранжа (чему посвящено диссертационное исследование [20]).

В случае класса Никольского $H_p^r(0,1)$ $(2 \le p < +\infty, r > 1 + \frac{1}{p})$ в задаче восстановления функций по норме $q = \infty$, $L^\infty \equiv C[0,1]$ справедливы соотношения

$$\inf_{\left(l^{(N)},\varphi_N\right)\in \mathrm{L}_N(H_p^r(0,1))\times\{\varphi_N\}_{C[0,1]}} \sup_{f\in H_p^r(0,1)} \|f(x) - \varphi_N(l_0(f), l_1(f), ..., l_N(f); x)\|_{C[0,1]} \asymp$$

$$\asymp \sup_{f\in H_p^r(0,1)} \left\| f(x) - L_{N,\rho}(f(0), f(\frac{1}{N}), ..., f(\frac{N-1}{N}), f(1); x)\right\|_{C[0,1]} \asymp N^{-r+\frac{1}{p}}, \qquad (0.8)$$

где оценка сверху проводится по Лагранжевым сплайнам: при $\rho \ge 2$, $N = \rho k\,(k = 1, 2, ...)$ для набора чисел $z_0, z_1, ..., z_N$ через $L_{N,\rho}(z_0, z_1, ..., z_N; x) \equiv L_{N,\rho}(x)$ обозначена определенную на $[0,1]$ функция, рассматриваемая на отрезке $\frac{i\rho}{N} \le x \le \frac{(i+1)\rho}{N}\,(i = 0, 1, ..., k-1)$ в виде алгебраического многочлена (интерполяционного многочлена Лагранжа по узлам $\left\{\frac{i\rho+\tau}{N}\right\}_{\tau=0}^{\rho}$)

$$L_{N,\rho}^{(i)}(x) = \sum_{\tau=0}^{\rho} z_{i\rho+\tau} \prod_{\substack{t=0\\ t\ne\tau}}^{\rho} \frac{N}{\tau - t}\left(x - \frac{i\rho + t}{N}\right) .$$

При $\rho = 1$ под $L_{N,1}^{(i)}(x; f)\,(i = 0, ..., N-1)$ понимается линейная на $\left[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}\right]$ функция, совпадающая с f в точках $\frac{i}{N}$ и $\frac{i+1}{N}$.

На основе соотношений (0.8) приходим к выводу, что многочлен Лагранжа необходимо использовать не глобально на всем отрезке, а локально в сплайн-форме. Тогда восстановление (более того -интерполяция) будет наилучшей среди всех возможных вычислительных агрегатов по линейной информации.

По-видимому, целесообразно *Теорию приближений* при данных классе F, определенной на нем математической модели Tf и метрике Y измерения возникающей погрешности через набор вычислительных агрегатов D_N из множества всех возможных вычислительных агрегатов по линейной информации $L_N(F, Y)$ расширить до задачи оптимизации

$$\inf_{(l_1,...,l_N;\varphi_N)\in D_N} \sup_{f\in F} \|Tf(\cdot) - \varphi_N(l_1(f), ..., l_N(f); \cdot)\|_Y \asymp \sup_{f\in F} \left\|Tf(\cdot) - \bar\varphi_N(\bar l_1(f), ..., \bar l_N(f); \cdot)\right\|_Y ,$$

с передачей в сферу *Вычислительной математики,* если агрегат приближения $\bar\varphi_N(\bar l_1(f), ..., \bar l_N(f); \cdot) \in D_N$ носит выраженный вычислительный характер.

Далее, в рамках К(В)П-исследования идет сервисное обслуживание компьютерных вычислений оптимальных агрегатов, оформленных в виде К(В)П-2 и -3, что, в совокупности с К(В)П-1 составит новое содержание *Численного анализа.*

§1. КОМПЬЮТЕРНЫЙ (ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ) ПОПЕРЕЧНИК (сокращенно – К(В)П) – НЕОБХОДИМЫЕ ИЗВЕСТНЫЕ И НОВЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

1.1 Список названий и обозначений. С определением этого поперечника связаны как известные, так и новые понятия численного анализа, вычислительной математики и теории приближений, среди которых

1°. ***Математическая модель***

2°. ***Числовая информация о функции*** f

3°. ***Все возможные (мыслимые) линейные функционалы над*** F

4°. ***Числовая информация объема*** N ***о классе*** F

5°. ***Числовая информация объема*** N ***об*** f ***из класса*** F ***снимается с определенных на нем функционалов*** $l_1, \ldots, l_N$ ***в виде*** $(l_1(f), \ldots, l_N(f))$ – ***"кода" функции*** f

6°. ***Линейная информация объёма*** N ***о классе*** F ***и функции*** f ***из неё***

7°. ***Алгоритм переработки информации***

8°. ***Вычислительный агрегат (комплекс) восстановления по точной информации***

9°. ***Вычислительный агрегат (комплекс) по искаженным данным заданной точности***

10°. ***Погрешность приближения значения оператора (математической модели)*** T ***при*** $f \in F$ ***вычислительным агрегатом*** $\varphi_N\left(l_1\left(f\right),...,l_N\left(f\right);\cdot\right)$ ***в метрике*** Y ***по точной информации***

11°. ***Погрешность приближения оператора (математической модели)*** T ***на классе*** F ***вычислительным агрегатом по точной информации*** $\left(l^N, \varphi_N\right)$ ***в метрике*** Y

12°. ***Погрешность приближения значения оператора (математической модели)*** Tf ***при*** $f \in F$ ***вычислительным агрегатом*** $\left(l^{(N)}, \varphi_N\right) \equiv \varphi_N\left(l_1\left(f\right),...,l_N\left(f\right);\cdot\right)$ ***в метрике*** Y ***с заданной информативной точностью*** $\varepsilon^{(N)} = (\varepsilon_1,...,\varepsilon_N)$

13°. ***Погрешность приближения оператора (математической модели)*** T ***вычислительным агрегатом*** $\left(l^{(N)}, \varphi_N\right) \equiv \left(l_1,...,l_N;\varphi_N\right)$ ***в метрике*** Y ***на классе*** F ***с информативной точностью*** $\varepsilon^{(N)} = (\varepsilon_1,...,\varepsilon_N)$

14°. ***Множество всех возможных (мыслимых) вычислительных агрегатов при заданных*** F ***и*** Y

15°. ***Произвольный фиксированный набор (множество) вычислительных агрегатов***

16°. ***Все вычислительные агрегаты по линейной информации***

17°. ***Наименьшая (наилучшая) погрешность приближения оператора (математической модели) всеми вычислительными агрегатами из набора*** D_N ***на классе*** F ***в метрике*** Y ***по точной информации***

18°. ***Наименьшая (наилучшая) погрешность приближения оператора (математической модели) вычислительными агрегатами набора*** D_N ***на классе*** F ***в метрике*** Y ***с информативной точностью*** $\varepsilon^{(N)} = (\varepsilon_1,...,\varepsilon_N)$

19°. ***Используемые символы: знак Виноградова "***$\ll$***" и порядковые соотношения "***$\asymp$***"***

20°. ***Вычислительный агрегат*** $\left(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N\right) \in D_N$ ***поддерживает оценку снизу*** $\vartheta_N \ll \delta_N(0;T;F;D_N)$

21°. ***Оптимальный (наилучший) вычислительный агрегат*** $\left(\bar{l}^{(N)}, \overline{\varphi}_N\right)$: $\delta_N\left(0, D_N\right)_Y \asymp \delta_N\left(0, \left(\bar{l}^{(N)}, \overline{\varphi}_N\right)\right)_Y$

22°. ***Информативная мощность набора вычислительных комплексов*** $D_N \equiv D_N\left(F\right)_Y$ ***точности*** $\varepsilon^{(N)} = (\varepsilon_1,...,\varepsilon_N)$

23°. ***Информативная мощность данного класса (семейства) линейных функционалов***

24°. ***Компьютерный (вычислительный) поперечник-1***

25°. ***Компьютерный (вычислительный) поперечник-2***

26°. ***Компьютерный (вычислительный) поперечник-3***.

1.2 Названия и обозначения в описании. Всюду ниже считаем заданными комплекснозначный функциональный класс F, банахово пространство Y и функцию T из F в Y.

Последовательно, по всему тексту статьи, перейдем к их точному определению с подробными комментариями.

1°. ***Математическая модель*** есть (не обязательно линейный) оператор $T = Tf$, действующий из F в Y: "*В традиционных областях математическими моделями служат функции, производные, интегралы, дифференциальные уравнения. Для использования компьютеров эти исходные модели надо приближенно заменить такими, которые описываются конечными наборами чисел с указанием конечных последовательностей действий (конечных алгоритмов) для их обработки*" (см. [4, стр.5-6]), в качестве Tf, в частности, рассматриваются математические модели $Tf = f-$ модель "*Функция*", $Tf = f^{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)}-$ "*Производная*", $Tf = \int_\Omega f(x)\,dx-$ "*Интеграл*", $Tf = u(y,f)-$ "*Решения уравнений в частных производных с теми или иными начальными и (или) граничными условиями* f ".

2° . Числовая информация о функции f поставляется функционалом (не обязательно линейным) $l(f)$, т.е. функцией, которая f (в полном объёме этого бесконечно емкого объекта) ставит в соответствие число (действительное или комплексное), на протяжении всей этой статьи обозначаемое $l(f)$.

Если через F обозначено множество, составленное из рассматриваемых функций f , определенных на одном и том же множестве Ω , то, как обычно, определенный на F функционал l записывается в виде $l:\ F \mapsto \mathbb{C}$, где $\mathbb{C}$ здесь и всюду ниже поле комплексных чисел.

Если от функционала l требуется линейность, то множеством определения l полагается линейная оболочка F , т.е. множество всех линейных комбинаций $c_1f_1 + c_2f_2$, где c_1 и c_2 из C , f_1 и f_2 из F .

В качестве примеров приведем следующие три типа функционалов (которые в статье ниже будут многократно применены):

1. Набор P всех функционалов – значений функции f в фиксированной точке ξ из множества определения $\Omega : l_\xi(f) := f(\xi)$.

2. Набор Φ всех функционалов – тригонометрических коэффициентов Фурье

$$l_m(f) \equiv \hat{f}(m) := \int_{[0,1]^s} f(x)e^{-2\pi i(m,x)}dx \quad (m \in Z^s)\,,$$

что в общем случае есть

3. Скалярное произведение $l_g(f) = (f,g) = \int_\Omega f(x)\overline{g}(x)d\mu(x)$, реализуемое в виде *"Общий вид линейного функционала над* $F = L^p(\Omega)$ *,* $F = C\,[0,1]$ *,* F *-гильбертово пространство и т.д."*

3° . Все возможные (мыслимые) линейные функционалы над F . С каждым функциональным классом F связан свой набор $L(F)$, состоящий из всех *возможных* линейных функционалов $l(f)$, определенных на линейной оболочке данного класса F .

Здесь слово ***"возможные"*** вызвано тем фактом, что не всякий функционал l определен для каждой функции f из F . Например, для $F = L\,(0,1)^s-$ класса интегрируемых по Лебегу функций, функционалы $\hat{f}(m)(m \in Z^s)$ – тригонометрические коэффициенты Фурье определены, в то время как при любом заданном $\xi \in [0,1]^s$ функционалы $l_\xi(f) = f(\xi)$ - значения функций в точке не определены (поскольку из $\|f\|_{L(0,1)^s} = 0$ следует " $f(x) = 0$ *почти всюду* на $[0,1]^s$ "). Поскольку далеко не для каждого множества F получен общий вид линейного функционала над ее линейной оболочкой, то для более точного описания ситуации используется словосочетание "*все мыслимые*".

4° . Числовая информация объема N ***о классе*** F есть, по определению, набор из N функционалов (в общем случае не обязательно линейных) $l^{(N)} = (l_1,\dots,l_N)\,, l_\tau(\cdot)$: $F \mapsto \mathbb{C}\,(\tau = 1,...,N)$.

5.° Числовая информация объема N ***об*** f ***из класса*** F ***снимается с определенных на нем набора функционалов*** $l_1,\dots,l_N$ ***в виде вектора*** $(l_1(f),\dots,l_N(f))$ ***– "кода" функции*** f ***.***

6° . Линейная информация объёма N ***о классе*** F ***и функции*** f ***из неё.***

Если все функционалы $l_1,\dots,l_N$ линейные над F , то числовая информация от $l^{(N)} = (l_1,\dots,l_N)$ называется *линейной об* F *,* а для $f \in F$ вектор $(l_1(f),\dots,l_N(f)) \in \mathbb{C}^N$ *– линейной информацией объема* N *об* f *.*

7° . Алгоритм переработки информации есть, по определению, функция $(N+1)$-ой переменной φ_N, $\varphi_N(z_1,...,z_N;\cdot)$: $\mathbb{C}^N \times \Omega_Y \mapsto \mathbb{C}$, которая при всяком фиксированном $(z_1,...,z_N) \in \mathbb{C}^N$ как функция от $(\cdot)$ есть элемент нормированного пространства Y , причем $\varphi_N\,(0,...,0;\,\cdot) \equiv 0$, что означает *"по нулевой информации – нулевой алгоритм"*. Запись

$\varphi_N \in Y$ означает, что φ_N удовлетворяет всем перечисленным условиям, через $\{\varphi_N\}_Y$ будем обозначать множество, составленное из всех $\varphi_N \in Y$.

Тем самым, алгоритм переработки информации столь же широк, сколь и понятие функции (см. статью "Функция" Н.Н.Лузина в [21, стр. 797-804]).

Уточнение. Условие $\varphi_N\left(0,...,0;\,\cdot\,\right)\equiv 0$ используется в оценках снизу в виде

$$\sup_{f\in F}\left\|f\left(x\right)-\varphi_N(l_1(f),...,l_N(f);x)\right\|_Y \geq \left\|g_N(x)-\varphi_N(l_1(g_N),...,l_N(g_N);x)\right\|_Y =$$

$$= \left\|g_N(x)-\varphi_N(0,...,0;x)\right\|_Y = \left\|g_N(x)\right\|_Y .$$

Фактически это условие можно опустить (с дополнительным требованием симметричности класса F (когда из $f\in F$ следует $(-f)\in F$), оно накладывается только ради упрощения изложения (см. [22, стр. 39]).

Именно, в условиях $g_N \in F$, $l_\tau(g_N)=0\,(\tau=1,...,N)$ при оценке снизу имеем

$$\sup_{f\in F}\left\|f\left(x\right)-\varphi_N(l_1(f),...,l_N(f);x)\right\|_Y \geq \left\|g_N\left(x\right)-\varphi_N(l_1(g_N),...,l_N(g_N);x)\right\|_Y =$$

$$= \max_{k=0,1}\left\|(-1)^k g_N(x)-\varphi_N((-1)^k l_1(g_N),(-1)^k l_2(g_N),...,(-1)^k l_N(g_N),x)\right\|_Y \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(\left\|g_N(x)-\varphi_N(l_1(g_N),...,l_N(g_N);x)\right\|_Y + \left\|-g_N(x)-\varphi_N(-l_1(g_N),...,-l_N(g_N);x)\right\|_Y\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left\|g_N(x)-\varphi_N(0,0,...,0,x)\right\|_Y + \left\|g_N(x)+\varphi_N(0,0,...,0,x)\right\|_Y\right) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\left\|(g_N(x)-\varphi_N(0,0,...,0;x))+(g_N(x)+\varphi_N(0,0,...,0;x))\right\|_Y = \left\|g_N(x)\right\|_Y .$$

8°. Вычислительный агрегат (комплекс) восстановления по точной информации есть, по определению, функция $\left(l^{(N)},\varphi_N\right)\equiv\left(l^{(N)},\varphi_N;\cdot\right)$, составленная по паре $l^{(N)}\equiv(l_1,...,l_N)$ (состоящего из набора функционалов $l_1,...,l_N$) и алгоритма переработки информации φ_N , для функции $f\in F$ действующая по правилу $\varphi_N\left(l_1\left(f\right),...,l_N\left(f\right);\cdot\right)\in Y$ для переменной $(\,\cdot\,)$.

9°. Вычислительный агрегат (комплекс) по искаженным данным заданной точности. Восстановление по неточной информации проводится следующим образом. Сначала задаются границы неточности – вектор $\varepsilon^{(N)}=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_N)\in R^N$ с *неотрицательными* компонентами. Затем точные значения $l_\tau(f)$ заменяются с заданной точностью $\varepsilon_\tau\geq 0$ на приближенные значения $z_\tau\equiv z_\tau\left(f\right)$, $\left|z_\tau\left(f\right)-l_\tau\left(f\right)\right|\leq\varepsilon_\tau\left(\tau=1,...,N\right)$, числа $z_\tau\equiv z_\tau\left(f\right)\left(\tau=1,...,N\right)$ перерабатываются посредством алгоритма φ_N до функции $\varphi_N(z_1\left(f\right),...,z_N\left(f\right);\cdot)$, которая и будет составлять вычислительный агрегат $\left(l^{(N)},\varphi_N\right)\equiv\varphi_N(z_1\left(f\right),...,z_N\left(f\right);\cdot)$, построенный по числовой информации $\left(l_1\left(f\right),...,l_N\left(f\right)\right)$ точности $\varepsilon^{(N)}=(\varepsilon_1,...,\varepsilon_N)$.

Далее, приведем необходимые определения и обозначения для К(В)П.

10°. Погрешность приближения значения оператора (математической модели) при $f\in F$ вычислительным агрегатом $\varphi_N\left(l_1\left(f\right),...,l_N\left(f\right);\cdot\right)$ в метрике Y по точной информации:

$$\left\|Tf(\cdot)-\varphi_N\left(l_1(f),...,l_N(f);\,\cdot\,\right)\right\|_Y .$$

Здесь и всюду ниже

$$Tf(\cdot)=(Tf)(\cdot).$$

11°. Погрешность приближения оператора (математической модели) T на классе F вычислительным агрегатом по точной информации $\left(l^{(N)},\varphi_N\right)$ в метрике Y :

$$\delta_N\left(0;\left(l^{(N)},\varphi_N\right)\right)_Y=\delta_N\left(0;T;F;\left(l^{(N)},\varphi_N\right)\right)_Y=$$

$$=\sup\left\{\left\|Tf(\cdot)-\varphi_N(l_1(f),...,l_N(f);\,\cdot\,)\right\|_Y : f\in F\right\}\equiv\sup_{f\in F}\left\|Tf(\cdot)-\varphi_N(l_1(f),...,l_N(f);\,\cdot\,)\right\|_Y .$$

12°. Погрешность приближения значения оператора (математической модели) T при $f \in F$ вычислительным агрегатом $\left(l^{(N)}, \varphi_N\right) \equiv \varphi_N\left(l_1(f), ..., l_N(f); \cdot\right)$ в метрике Y с заданной информативной точностью $\varepsilon^{(N)} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_N)$:

$$\|Tf(\cdot) - \varphi_N(z_1(f), ..., z_N(f); \cdot)\|_Y ,$$

где

$$|l_\tau(f) - z_\tau(f)| \le \varepsilon_\tau \ (\tau = 1, ..., N),$$

то же, но в другой записи,

$$\|Tf(\cdot) - \varphi_N\left(l_1(f) + \gamma_1\varepsilon_1, ..., l_N(f) + \gamma_N\varepsilon_N; \cdot\right)\|_Y, \text{где} \, |\gamma_\tau| \le 1 \, (\tau = 1, ..., N).$$

13°. Погрешность приближения оператора (математической модели) T вычислительным агрегатом $\left(l^{(N)}, \varphi_N\right) \equiv (l_1, ..., l_N; \varphi_N)$ в метрике Y на классе F с информативной точностью $\varepsilon^{(N)} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_N)$:

$$\delta_N\left(\varepsilon^{(N)}; \left(l^{(N)}, \varphi_N\right)\right)_Y = \delta_N\left(\varepsilon^{(N)}; T; F; \left(l^{(N)}, \varphi_N\right)\right)_Y =$$
$$= \sup\left\{\|Tf(\cdot) - \varphi_N(z_1(f), ..., z_N(f); \cdot)\|_Y : f \in F, \ |l_\tau(f) - z_\tau(f)| \le \varepsilon_\tau \ (\tau = 1, ..., N)\right\} \equiv$$
$$\equiv \sup_{\substack{f \in F \\ |\gamma_\tau| \le 1 (\tau = 1, ..., N)}} \|Tf(\cdot) - \varphi_N\left(l_1(f) + \gamma_1\varepsilon_1, ..., l_N(f) + \gamma_N\varepsilon_N; \cdot\right)\|_Y .$$

Здесь sup означает *"наихудшую точность"* по классу F: для каждой функции $f \in F$ погрешность приближения *"не хуже"*.

14°. Множество всех возможных (мыслимых) вычислительных агрегатов при заданных F и Y. Через $\left\{\left(l^{(N)}, \varphi_N\right)\right\}_{F,Y}$ обозначим множество всех возможных вычислительных агрегатов $\varphi_N\left(l_1(f), ..., l_N(f); \cdot\right) : F \mapsto Y$.

15°. Произвольный фиксированный набор (множество) вычислительных агрегатов. Всегда через $D_N \equiv D_N(F)_Y$ будем обозначать любое подмножество $\left\{\left(l^{(N)}, \varphi_N\right)\right\}_{F,Y}$.

Примеры:

1. $D_N = P_N \times \{\varphi_N\}_Y \equiv \{\varphi_N\left(f(\xi_1), ..., f(\xi_N); \cdot\right) : f \in F, \ \xi_1, ..., \xi_N \in \Omega, \varphi_N \in \{\varphi_N\}_Y\}$ – все вычислительные агрегаты по значениям в точках,

2. $D_N = \Phi_N \times \{\varphi_N\}_Y \equiv \left\{\varphi_N\left(\hat{f}\left(m^{(1)}\right), ..., \hat{f}\left(m^{(N)}\right); \cdot\right) : f \in F, m^{(1)}, ..., m^{(N)} \in Z^s, \varphi_N \in \{\varphi_N\}_Y\right\}$ – все вычислительные агрегаты по тригонометрическим коэффициентам Фурье.

Ввиду особой значимости отдельно выделим

16°. Все вычислительные агрегаты по линейной информации.

$D_N = L_N(F, Y) \equiv L_N(F)_Y = L_N(F) \times \{\varphi_N\}_Y \equiv \{\varphi_N\left(l_1(f), ..., l_N(f); \cdot\right) : f \in F, l_1, ..., l_N \in L(F), \varphi_N \in \{\varphi_N\}_Y\} \equiv \left\{\left(l^{(N)}, \varphi_N\right)\right\}_{L_N(F) \times \{\varphi_N\}_Y} \equiv \left\{\left(l^{(N)}, \varphi_N\right)\right\}_{F,Y}$ – все возможные вычислительные агрегаты по линейной информации.

17°. Наименьшая (наилучшая) погрешность приближения оператора (математической модели) T всеми вычислительными агрегатами из набора D_N на классе F в метрике Y по точной информации:

$$\delta_N\left(0; D_N\right)_Y = \delta_N\left(0; T; F; D_N\right)_Y = \inf_{\left(l^{(N)}, \varphi_N\right) \in D_N} \delta_N\left(0; T; F; \left(l^{(N)}, \varphi_N\right)\right)_Y ,$$

где inf обеспечивает *"наименьшую (наилучшую) погрешность"*.

18°. Наименьшая (наилучшая) погрешность приближения оператора (математической модели) T вычислительными агрегатами набора D_N на классе F в метрике Y с информативной точностью $\varepsilon^{(N)} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_N)$:

$$\delta_N\left(\varepsilon^{(N)}; D_N\right)_Y = \delta_N\left(\varepsilon^{(N)}; T; F; D_N\right)_Y = \inf_{\left(l^{(N)}, \varphi_N\right) \in D_N} \delta_N\left(\varepsilon^{(N)}; T; F; \left(l^{(N)}, \varphi_N\right)\right)_Y .$$

19°. Используемые символы: знак Виноградова "$\ll$" и порядковые соотношения "$\asymp$". Через $c(\alpha, \beta, ...)$ будем обозначать некоторые положительные величины, разные, вообще говоря, в различных формулах и зависящие лишь от указанных в скобках параметров.

Если $\{A_N\}_{N=1}^{\infty}$ - последовательность положительных чисел и $\{B_N\}_{N=1}^{\infty}$ - произвольная числовая последовательность, то запись $B_N \underset{\alpha,\beta,...}{\ll} A_N$ означает, что найдется постоянная $c(\alpha,\beta,...)$, для которой при каждом целом положительном N выполнено неравенство $|B_N| \leq c(\alpha,\beta,...)\, A_N$. Если же $\{A_N\}_{N=1}^{\infty}$ и $\{B_N\}_{N=1}^{\infty}$ - две последовательности положительных чисел, то запись (порядковое равенство) $A_N \underset{\alpha,\beta,...}{\asymp} B_N$ означает, что одновременно выполнены соотношения $A_N \underset{\alpha,\beta,...}{\ll} B_N$ и $A_N \underset{\alpha,\beta,...}{\gg} B_N$.

Далее считаем заданным набор вычислительных агрегатов $D_N \equiv D_N(F)_Y$.

20°*. *"Вычислительный агрегат $\left(\bar{l}^{(N)},\overline{\varphi}_N\right) \in D_N$ ***поддерживает оценку снизу*** $\vartheta_N \ll \delta_N(0;T;F;D_N)$ "– так в целях сокращения речи будем говорить, если выполнено неравенство $\delta_N\left(0;T;F;\left(\bar{l}^{(N)},\overline{\varphi}_N\right)\right)_Y \ll \vartheta_N$.

В этих условиях $\left(\bar{l}^{(N)},\overline{\varphi}_N\right)$ называют *оптимальным (наилучшим) вычислительным агрегатом (комплексом)*:

21°*. *Оптимальный (наилучший) вычислительный агрегат $\left(\bar{l}^{(N)},\overline{\varphi}_N\right)$: $\delta_N(0,D_N)_Y \asymp \delta_N\left(0,\left(\bar{l}^{(N)},\overline{\varphi}_N\right)\right)_Y$

22°*. *"Информативной мощностью набора вычислительных агрегатов (комплексов) $D_N \equiv D_N(F)_Y$ ***точности*** $\varepsilon^{(N)} = (\varepsilon_1,...,\varepsilon_N)$ " будем называть величины $\delta_N(\varepsilon^{(N)};T;F;D_N)_Y$

23°*. *Информативная мощность данного класса (семейства) линейных функционалов заданной точности. Обозначим через $M_N \equiv M_N(F)_Y \subset L_N(F) = \underbrace{L(F)\times\cdots\times L(F)}_{N\text{раз}}$ –произвольное множество, составленное из N-членных последовательностей линейных функционалов $l^{(N)} \equiv (l_1,...,l_N)$ над линейной оболочкой F.

Тогда величины $\delta_N(\varepsilon^{(N)};T;F;D_N)_Y$ с $D_N(F)_Y = M_N(F)_Y \times \{\varphi_N\}$ будут называться *"Информативной мощностью набора линейных функционалов* $M_N(F)_Y$ *точности* $\varepsilon^{(N)} = (\varepsilon_1,...,\varepsilon_N)$ ", обоснованием введения чего может служить [6, стр. 182]:

"В вычислительной практике мы не всегда выбираем в качестве способа приближения функции набор её значений на сетке. Довольно часто мы используем в качестве аппроксимирующего агрегата набор коэффициентов Фурье данной функции, либо набор коэффициентов разложения функции в ряд по некоторому базису, либо набор значений функционалов и т.п.".

Постановка задачи К(В)П. При заданных T, F, Y, D_N, фиксированных всюду по последующему контексту:

***24°*. *К(В)П-1*:** *Находится порядок*

$$\asymp \delta_N(0;D_N)_Y \asymp \sup_{f\in F}\left\|Tf(\cdot) - \bar{\varphi}_N\left(\bar{l}_1(f),...,\bar{l}_N(f);\cdot\right)\right\|_Y,$$

в котором обязательно предполагается существование таких алгоритма $\bar{\varphi}_N$ *и набора функционалов* $\bar{l}^{(N)} = \left(\bar{l}_1,...,\bar{l}_N\right)$, *совокупно образующих вычислительный агрегат* $\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)$ *из* $D_N \equiv D_N(F)_Y$, удовлетворяющий указанному порядковому равенству.

В этом случае будем также пользоваться более информативным обозначением (с указанием вычислительного агрегата $\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)$, подтверждающего оценку снизу по всем $\left(l^{(N)},\varphi_N\right)$ из D_N)

$$\delta_N(0;D_N)_Y \asymp \delta_N\left(0;\left(\bar{l}^{(N)},\overline{\varphi}_N\right)\right)_Y.$$

25°*. *К(В)П-2: *Предельная погрешность оптимального вычислительного агрегата* $\left(\bar{l}^{(N)},\overline{\varphi}_N\right)$ *есть, по определению, положительная последовательность* $\tilde{\varepsilon}_N \equiv \tilde{\varepsilon}_N(D_N)_Y \equiv$

$\tilde{\varepsilon}_N\left(D_N;\left(\bar{l}^{(N)},\overline{\varphi}_N\right)\right)_Y$ – К(В)П-2 – *погрешность такая, что*

$$\delta_N\left(0;D_N\right)_Y\asymp\delta_N\left(\tilde{\varepsilon}_N;D_N\right)_Y\asymp\sup_{\substack{f\in F\\ \left|\bar{l}_\tau(f)-z_\tau(f)\right|\le\varepsilon_\tau\\ (\tau=1,...,N)}}\left\|Tf\left(\,\cdot\,\right)-\bar{\varphi}_N\left(z_1(f),...,z_N(f);\cdot\right)\right\|_Y,$$

с одновременным выполнением

$$\forall\eta_N\uparrow+\infty:\varlimsup_{N\to+\infty}\frac{\delta_N\left(\eta_N\tilde{\varepsilon}_N;\left(\bar{l}^{(N)},\overline{\varphi}_N\right)\right)_Y}{\delta_N(0;D_N)_Y}=+\infty.$$

26°. К(В)П-3. Устанавливается *массивность* предельной погрешности $\tilde{\varepsilon}_N\left(D_N;\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)\right)_Y$: находится как можно большое множество $B_N\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)$ из D_N (обычно связанное со структурой исходного $\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)$) вычислительных агрегатов $\left(l^{(N)},\varphi_N\right)$ (в общей постановке функционалы не обязательно линейные) таких, что для каждого из них выполнено

$$\forall\eta_N\uparrow\ +\infty(0<\eta_N<\eta_{N+1},\ \eta_N\to\ +\infty):\varlimsup_{N\to+\infty}\delta_N\left(\eta_N\tilde{\varepsilon}_N;\left(l^{(N)},\varphi_N\right)\right)_Y/\delta_N(0;D_N)_Y=+\infty.$$

§2. КОМПЬЮТЕРНЫЙ (ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ) ПОПЕРЕЧНИК ПО ТОЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ ($\varepsilon^{(N)}\equiv 0$) - К(В)П-1

2.1 К(В)П-1 –задача. Пусть даны число $k\,(k=1,2,...)$ и нормированные пространства $X^{(1)},...,X^{(k)}$ и Y числовых функций, определенных на множествах $\Omega_{X^{(1)}},...,\Omega_{X^{(k)}}$ и Ω_Y соответственно, множества $F^{(j)}\subset X^{(j)}(j=1,\,...,k)$ и $Tf=\left(Tf\right)(y)=u(y;f)\equiv u(y;f_1,...,f_k)$ - отображение $F\equiv F^{(1)}\times...\times F^{(k)}$ в Y, где $f\in F\Leftrightarrow f=(f_1,...,f_k)\in F^{(1)}\times...\times F^{(k)}$. Пусть также даны целое положительное число N и целые положительные числа $N_1,...,N_k$, связанные равенством $N_1+...+N_k=N$, набор функционалов $l^{(\mathrm{N})}=(l_1,...,l_k)\,,l_j\equiv(l_j^{(1)},...,l_j^{(N_j)}),l_j^{(n_j)}(\cdot):F^{(j)}\mapsto\mathbb{C}$, где $n_j=1,...,N_j$ и $j=1,...,k$. И, наконец, пусть дана функция $\varphi_N(z_1,...,z_N;y):\mathbb{C}^N\times\Omega_Y\mapsto\mathbb{C}$ такая, что $\varphi_N(z_1,...,z_N;y)$ при всех фиксированных $z_1,...,z_N$ как функция от y принадлежит пространству Y, где $\mathbb{C}$, как обычно, есть поле комплексных чисел. Тогда для каждого $f=(f_1,...,f_k)\in F$ соответствующую функцию $Tf=u(y;f)$ будем приближать в метрике Y функцией – вычислительным агрегатом $\varphi_N\left(l_1^{(1)}\left(f_1\right),...,\ l_1^{(N_1)}\left(f_1\right);\,...;\,l_k^{(1)}\left(f_k\right),...,\,l_k^{(N_k)}\left(f_k\right);y\right)\equiv\left(l^{(N_1,...,N_k)},\varphi_N\right)\equiv\left(l^{(N)},\varphi_N\right)$, построенного по числовой информации $l_1^{(1)}\left(f_1\right),...,\ l_1^{(N_1)}\left(f_1\right);...;l_k^{(1)}\left(f_k\right),...,\ l_k^{(N_k)}\left(f_k\right)$ объема N, полученной об $f=(f_1,...,f_k)$ посредством функционалов $l^{(N)}=l^{(N_1,...,N_k)}=(l_1,...,l_k)$ и переработанной по алгоритму φ_N до функции, зависящей от той же переменной, что и Tf. В качестве исходного показателя аппроксимативной возможности данной пары $\left(l^{(N_1,...,N_k)},\varphi_N\right)$ - вычислительного агрегата, положим

$$\delta_N\left(0;T;F;\left(l^{(N_1,...,N_k)},\varphi_N\right)\right)_Y\equiv$$

$$\equiv\sup_{f\in F}\left\|u\left(\cdot;f\right)-\varphi_N\left(l_1^{(1)}\left(f_1\right),...,\ l_1^{(N_1)}\left(f_1\right);...;l_k^{(1)}\left(f_k\right),...,\ l_k^{(N_k)}\left(f_k\right);\,\cdot\right)\right\|_Y.\qquad(2.1)$$

Пусть теперь $\left\{\left(l^{(N_1...,N_k)},\varphi_N\right)\right\}$ есть множество всевозможных пар $\left(l^{(\mathrm{N}_1...,\mathrm{N}_k)},\varphi_N\right)$ и пусть $D_N\equiv D_{N_1,...,N_k}\subset\left\{\left(l^{(\mathrm{N}_1,...,\mathrm{N}_k)},\varphi_N\right)\right\}_{F,Y}$ - заданный набор вычислительных агрегатов.

Задача К(В)П-1 заключается в получении оценок сверху и оценок снизу (желательно совпадающих с точностью до констант) для величины (условия предполагаются такими, что имеют смысл все формулируемые определения)

$$\delta_N\left(0,D_N\right)_Y\equiv\delta_N\left(0;T;F;\mathrm{D}_N\right)_Y=$$

$$=\min_{N_1+...+N_k=N}\ \inf_{\left(l^{(\mathrm{N}_1,...,N_k)},\varphi_N\right)\in D_{\mathrm{N}_1,...,N_k}}\delta_N\left(0;T;F;\left(l^{(N_1,...,N_k)},\varphi_N\right)\right)_Y\qquad(2.2)$$

– Компьютерного (вычислительного) поперечника по точной информации и в указании конкретного вычислительного агрегата, реализующего оценку сверху.

Тем самым, имеем две самостоятельные задачи, одна из которых заключается в получении оценок снизу погрешности восстановления с помощью всех вычислительных агрегатов из заданного множества D_N, другая – в нахождении оценок сверху для конкретных вычислительных агрегатов из D_N (построение которых, разумеется, можно продолжить с точки зрения улучшения вычислительных характеристик).

В более подробном изложении искомое соотношение

$$\delta_N\left(0, D_N\right)_Y \asymp \theta_N$$

состоит из двух задач, а именно требуется найти такую положительную числовую последовательность $\{\theta_N\}$, что выполнена

Оценка снизу $\delta_N(0;T;F;D_N)_Y \geq C_1\theta_N$: для некоторого числа $C_1 > 0$, для всех целых положительных N и для всякого вычислительного агрегата $\left(l^{(N)}, \varphi_N\right)$ из D_N найдется функция $\bar{f} \in F$, для которой

$$\left\| T\bar{f}(\cdot) - \varphi_N\left(l_1(\bar{f}), ..., l_N(\bar{f});\ \cdot\right)\right\|_Y \geq C_1\theta_N,$$

и, одновременно, имеет место

Оценка сверху $\delta_N(0;T;F;D_N)_Y \leq C_2\theta_N$: для некоторого $C_2 > 0$ и для всякого N из достаточно плотной (в связи с необходимостью указания конкретного вычислительного агрегата) возрастающей последовательности целых положительных чисел найдутся вычислительный агрегат $\left(\bar{l}^{(N)}, \overline{\varphi}_N\right) = \overline{\varphi}_N\left(\bar{l}_1(f), ..., \bar{l}_N(f); \cdot\right)$ из D_N такой, что для всякой функции $f \in F$ выполнено неравенство

$$\left\| Tf(\cdot) - \overline{\varphi}_N\left(\bar{l}_1(f), ..., \bar{l}_N(f);\ \cdot\right)\right\|_Y \leq C_1\theta_N.$$

Замечание. Здесь К(В)П-1 – задача дана в общей постановке, и потому, надо признать, в громоздких обозначениях. Однако при их конкретизациях, надеемся без потери точности, будем переходить к возможным максимально простым обозначениям.

2.2 Важнейшие примеры операторов – математических моделей Tf и функционалов $l(f)$ в определении Компьютерного (вычислительного) поперечника. Итак, по определению,

$$\delta\left(0;T;F;D_N\right)_Y \equiv \inf_{(l_1,...,l_N;\varphi_N)\in D_N} \sup_{f\in F} \left\|(Tf)\left(\cdot\right) - \varphi_N\left(l_1(f), ..., l_N(f);\ \cdot\right)\right\|_Y,$$

где $D_N \subset \{(l_1, ..., l_N; \varphi_N)\}_{F,Y}$.

Примеры операторов– математических моделей ***Tf:***

1°. $Tf = \int_\Omega f\left(x\right)dx$ — численное интегрирование,

2°. $Tf = f$ — восстановление функций,

3°. $Tf = f^{(\alpha)}$ — численное дифференцирование,

4°. $Tf = u\left(y, f\right)$ — дискретизация решений уравнений в частных производных (при заданных начальных и (или) краевых условиях):

$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} = 0, y = x$ — уравнение Лапласа,

$\Delta u = f$, $y = x$ — уравнение Пуассона,

$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$, $y = (t,\, x)$ — уравнение теплопроводности,

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$, $y = (t,\, x)$ — волновое уравнение,

и, вообще,

$Lu = 0$, где L – дифференциальный оператор.

Далее, $l_j\left(f\right)\left(j = 1, \ldots, N\right)$ - функционалы как объема N числовая информация об $f \in F$, функция $\varphi_N\left(z_1, ..., z_N; \cdot\right)$ - алгоритм переработки числовой информации $l_1\left(f\right), ..., l_N\left(f\right)$ объема N до $\varphi_N\left(l_1(f), \ldots, l_N(f),\ \cdot\right)$ - вычислительного агрегата, зависящего от тех же переменных, что и математическая модель Tf.

Примеры функционалов $l\left(f\right)$:

1°. $l\left(f\right) = f\left(\xi\right)$ - значения в точке;

2°. $l(f) = \langle f,g\rangle \equiv \int_\Omega f(x)\,\bar{g}(x)\,d\mu(x)$ -скалярное произведение, в частности, коэффициенты Фурье по той или иной ортогональной и нормированной системе (ОНС);

3°. $l(f)$ - линейные функционалы, определенные на линейной оболочке множества F. Если не оговорено противное, то всюду ниже через $\mathrm{L}_N \equiv \mathrm{L}_N(F)$ будем обозначать множество всех наборов $(l_1(f),...,l_N(f))$ функционалов означенного здесь типа;

4°. $l(f)$ - какие-то функционалы, не обязательно линейные, но не все.

Это вызвано тем фактом, что для сохранения содержательности задачи восстановления требуется наложить какие – либо ограничения на набор функционалов. А именно, если $\Omega = \Omega_1 = [0,1]^s$, класс F – произвольное подмножество пространства Лебега $L(0,1)^s = X = Y$, а $D_N\,(N=1,2,...)$ есть множество всевозможных пар $\left\{\left(l^{(N)},\varphi_N\right)\right\}$, то $\delta_N(0;Tf=f;F;D_N) \equiv 0\,(N=1,2,...)$. Действительно, мощность множества всех восстанавливаемых функций класса $F \subset L(0,1)^s$ не больше мощности континуума, поэтому можно установить взаимнооднозначное соответствие $F \ni f \leftrightarrow c_f \in \{c_f\} \subset R^1$.

Определим функционалы на F

$$l_1(f) = c_f,\; l_2(f) \equiv ... \equiv l_N(f) \equiv 0$$

и алгоритм $\varphi_N(z_1,...,z_N;x)$, тождественно равный нулю, если $z_1 \notin \{c_f\}$ и тождественно равный f(x), если $z_1 = c_f$ (при любых $(z_2,...,z_N) \in C^{N-1}$).

Тогда задача восстановления становится тривиальной: каждая функция f класса F оптимально приближается ею же самой (см. [23]).

2.3 К(В)П-1 в контексте информативной мощности заданного семейства функционалов. Пусть Λ_N - фиксированное множество наборов $l^{(N)}$ из N функционалов из L_N. Тогда при $D_N = \Lambda_N \times \{\varphi_N\}_Y$, то есть в случае приближения вычислительными агрегатами $(l^{(N)},\varphi_N)$ с $l^{(N)}$ из Λ_N и *произвольным* $\varphi_N \in Y$, величину $\delta_N(0;\Lambda_N)_Y$, зависящую только от Λ_N (разумеется, при заданных T, F и Y), как об этом было сказано в §1, назовем *Информативной мощностью семейства функционалов* Λ_N.

Для отмеченнных в предыдущем пункте случаев через:

$$\Lambda_N = P^{(N)} = \{(f(\xi_1),...,f(\xi_N)) : f \in F, \xi_1,...,\xi_N - \textit{точки из множества задания функций класса}\, F\}$$

обозначим множество из всех возможных наборов N функционалов, являющихся *значениями функции в N точках.* Продолжим введение специальных обозначений: через

$$\Lambda_N = \Phi^{(N)} = \left\{\left(\hat{f}\left(m^{(1)}\right),...,\hat{f}\left(m^{(N)}\right)\right) : f \in F, m^{(j)} \in Z^s, j=1,\ldots,N\right\}$$

обозначим множество *всех возможных наборов из N функционалов* - тригонометрических коэффициентов Фурье-Лебега, где Z^s - множество всех векторов $m = (m_1,...,m_s)$ из R^s с целочисленными компонентами.

Особый интерес представляет случай, когда Λ_N есть

$$\Lambda_N = \mathrm{L}_N(F) = \{(l_1(f),...,l_N(f)) : f \in F\}$$

- множество всех наборов из N возможных линейных функционалов, определенных на линейной оболочке класса F, что коротко будем называть *линейной информацией.*

Тогда в случае $D_N = \mathrm{L}_N(F) \times \{\varphi_N\}_Y$ величина $\delta_N(0,\mathrm{L}_N(F)\times\{\varphi_N\}_Y)$ *есть информативная мощность всех возможных линейных функционалов.* Образно говоря, случай оценки снизу при $\Lambda_N = \mathrm{L}_N$ с произвольным $\varphi_N \in Y$ можно понимать как *"привлечение любых мыслимых вычислительных агрегатов, построенных по линейной информации не может обеспечить большую скорость (порядковую величину) приближения".*

2.4 Иллюстрационный пример физического содержания к К(В)П-1. К металлическому стержню с комнатной температурой T_0 поднесли горящую спичку, в результате чего начальное распределение температуры стержня $u(x,0) = f(x)$ $(0 \le x \le 1)$ стала иной (см. Рисунок А). С течением времени приобретенная от зажженной спички температура распространяется по стержню, принимая значение $u(x,t)$ в точке x в момент времени t, стремясь к новой постоянной температуре T_∞. Имея N приборов для измерения температуры и измерив начальную температуру в N точках с максимально возможной точностью в любой точке x в любой момент времени t желаем знать температуру стержня $u\left(x,t\right)$.

Тогда математическая модель данного примера из физики описывается следующим образом: $\left(Tf\right)\left(x,t\right)=u\left(x,t;f\right)$ есть решение уравнения теплопроводности $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ с начальным условием $u\left(x,0\right)=f\left(x\right)$, функционалы $l\left(f\right)=f\left(\xi\right)$ представляют собой измеренную начальную температуру в точке $x=\xi$, значение Компьютерного (вычислительного) поперечника выражает максимально возможную точность измерения $u\left(x,t;f\right)$ по значению начальной температуры $u\left(0,x,f\right)=f\left(x\right)$

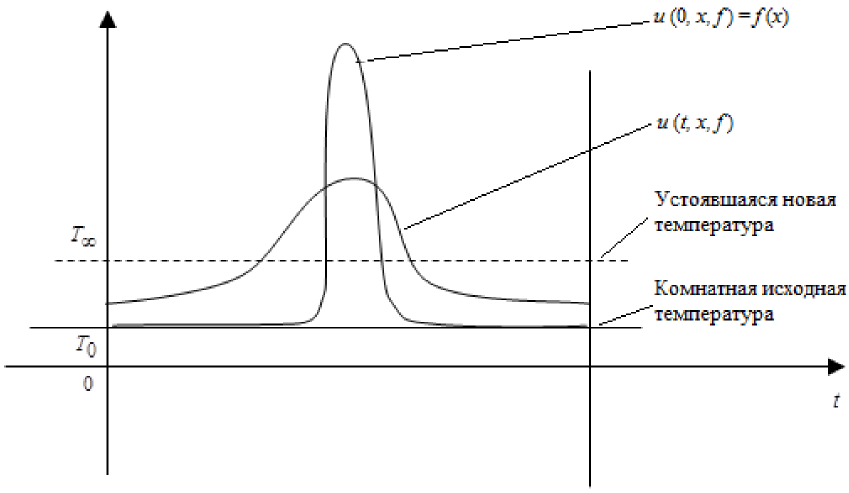

Рисунок А

2.5 О структуре наборов вычислительных агрегатов D_N в определении К(В)П-1. Пусть Λ_N-заданное множество наборов функционалов $l^{(N)}$ и Ψ_N - заданный набор алгоритмов $\varphi_N\in Y$. Случай $D_N:=\Lambda_N\times\Psi_N$ является хотя и важным, но только одним из возможных наборов вычислительных агрегатов.

Покажем на одном примере необходимость задания D_N способом, отличным от прямого произведения Λ_N и Ψ_N.

Пусть ставится задача приближения $(Tf)(x)$ операторами типа конечной свертки

$$\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\,K_N(x-\xi_k),$$

где K_N - специальное ядро.

Положим

$$\Lambda_N=\{l^{(N)}(f)\equiv(f(\xi_1),...,f(\xi_N))\},\ \Psi_N=\left\{\varphi_{\eta_1,...,\eta_N}\equiv\varphi_{\eta_1,...,\eta_N}\left(z_1,...z_N;x\right)=\sum_{k=1}^{N} z_k\,K_N(x-\eta_k)\right\}.$$

Тогда

$$\Lambda_N\times\Psi_N=\left\{\left(l_1(f),...,l_N(f),\varphi_{\eta_1,...,\eta_N}\right)\right\}=\left\{\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\,K_N(x-\eta_k)\right\}$$

и только переходом к подмножеству

$$D_N=\{\left(f(\xi_1),...,f(\xi_N),\,\varphi_{\eta_1,...,\eta_N}\right)\in\Lambda_N\times\Psi_N:\eta_1=\xi_1,...,\eta_N=\xi_N\}$$

множества $\Lambda_N\times\Psi_N$ получаем нужный набор операторов конечной свертки.

Замечание. Тем не менее, для задания множества вычислительных агрегатов D_N будем также употреблять записи вида прямого произведения $D_N=\Lambda_N\times\Phi_N$, полагая, что из контекста будет ясно о каких вычислительных агрегатах идет речь.

§3. ОСНОВНЫЕ АППРОКСИМАТИВНЫЕ СРЕДСТВА ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА КАК ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ К(В)П-1

3.1 Вычислительные агрегаты, построенные по линейным функционалам и линейным алгоритмам, представимые в виде аппроксимативных средств Теории функций, Теории приближений и Вычислительной математики. Вычислительные агрегаты $\varphi_N\left(l_1\left(f\right),\ldots,l_N\left(f\right),\cdot\right)$ составлены из функционалов $l_1\left(f\right),...,l_N\left(f\right)$- носителей числовой информации об f и алгоритма переработки этой информации $\varphi_N\left(z_1,...,z_N;\cdot\right)$.

В случае линейных функционалов $l\left(f\right)$ и *линейных алгоритмов,* т.е. функций вида

$$\varphi_N=\varphi_N\left(z_1,...,z_N;y\right)=\sum_{k=1}^{N}z_kg_k\left(y\right)$$

вычислительный агрегат $\varphi_N\left(l_1\left(f\right),\ldots,l_N\left(f\right),\cdot\right)$ сводится к широко изучаемым в математике – теоретической и прикладной – аппроксимативным средствам.

В контексте чего перейдем к различным конкретизациям Компьютерного (вычислительного) поперечника по точной информации, сводящимся к известным задачам из теории приближений, вычислительной математики и численного анализа.

1) Ряды Фурье – тригонометрические ряды, ряды по системе Хаара, Франклина, Уолша и т.д.: функционалы – коэффициенты Фурье по соответствующей системе $\{g_k\}$, вычислительные агрегаты – частичные суммы рядов Фурье

$$\sum_{k=1}^{N}\left(f,g_k\right)g_k\left(x\right),$$

где $l_k=\left(f,g_k\right)$, $\varphi_N\left(z_1,...,z_N;x\right)=\sum_{k=1}^{N}z_kg_k\left(x\right)$.

2) Линейные методы суммирования рядов Фурье по той или иной ортогональной системе *(см., напр., [24] и [25]),–*

$$U_N\left(x,f\right)=\sum_{k=1}^{N}\lambda_k^{(N)}\left(f,g_k\right)g_k\left(x\right),$$

где $\{g_k\left(x\right)\}$ *- ортогональная на* $\Omega\subset R^s$ *система,* $\left\{\lambda_k^{(N)}\right\}$ $(N=1,2,...;k=1,...,N)$ *- заданная последовательность комплексных чисел.*

3) Линейное восстановление по дискретной информации *(см., напр., [26, стр.375-376]).* Определим следующий алгоритм восстановления

$$\varphi_N\left(z_1,...,z_N;x\right)=\sum_{k=1}^{N}\gamma_kz_kg_k\left(x\right),$$

где $g_1(x),...,g_N(x)$ - некоторая система линейно независимых функций из нормированного функционального пространства X, а $\gamma_1,...,\gamma_N$ – числовые коэффициенты.

Цель введения этих коэффициентов состоит в том, чтобы наилучшим образом приспособить метод приближения к тому или иному классу $F\subset X$.

Таким образом (в обозначениях из [26]),

$$\rho_N\left(F;\gamma_1,...,\gamma_N\right)_X=\inf_{\substack{l_1(f),...,l_N(f)-\text{произвольные}\\ \text{функционалы}\\ g_1(x),...,g_N(x)-\text{система линейно}\\ \text{независимых функций}}}\sup_{f\in F}\left\|f(x)-\sum_{k=1}^{N}\gamma_kl_k(f)g_k(x)\right\|_X. \qquad (3.1)$$

Задача оптимального восстановления функций (3.1) при $Tf=f$ сформулирована в 1979 году Н.П. Корнейчуком [26, стр. 389].

4) Базисы (см., напр., [27, стр. 11-18]). Пусть дан базис $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ в банаховом пространстве **B,**что, по определению, означает

$$\forall f \in B \ \exists! \{b_k(f)\} : \lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{k=1}^{n} b_k(f)\psi_k \right\|_B = 0 \Leftrightarrow f \overset{B}{=} \sum_{k=1}^{\infty} b_k(f)\psi_k,$$

$b_k(f)$- линейный непрерывный функционал, $b_k(f) = (f, \psi_k^*)$, где $\{\psi_k^*\}$- система, сопряженная к $\{\psi_k\}$, $(\psi_k, \psi_l^*) = \delta_{kl}$.

Разумеется, в процессе исследований возникают различные уточнения общего определения, одним из которых является определение базиса Рисса (см., напр., [28, стр.13-20]):

Базис $\{\psi_k\}$ в гильбертовом пространстве H есть базис Рисса, если

$$\exists A_1 > 0\, u \exists A_2 > 0 : \forall \{A_k\}, \sum_k |c_k|^2 < +\infty \Rightarrow A_1 \left(\sum_k |c_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \left\| \sum_k c_k\psi_k \right\|_H \le A_2 \left(\sum_k |c_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Полагая

$$\varphi_N(l_1(f), \ldots, l_N(f), x) =: \sum_{k=1}^{N} b_k(f)\psi_k(x),$$

убеждаемся в том, что в составе Компьютерного (вычислительного) поперечника содержатся всевозможные базисы в произвольных банаховых пространствах:

$$l_k(f) = b_k(f), \varphi_N(z_1, \ldots, z_N; x) = \sum_{k=1}^{N} z_k\psi_k(x).$$

5) Фреймы(см. [29], а также [30, стр. 109-124]). Пусть H-сепарабельное гильбертово пространство. Последовательность ненулевых элементов $\psi \equiv \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ называется *фреймом*, если выполнены неравенства

$$\forall f \in H : \ A_1 \|f\|_H^2 \le \sum_{k=1}^{\infty} |(f, \psi_k)|^2 \le A_2 \|f\|_H^2,$$

где $0 < A_1 \le A_2 < \infty$-абсолютные константы. Постоянные A_1 и A_2 называются соответственно *нижней и верхней границами фрейма* ψ.

Заметим, что фреймом является любая полная ортонормированная система вH, а также произвольный базис Рисса. Для каждого фрейма $\psi \equiv \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ определен двойственный фрейм $\psi^* \equiv \{\psi_k^*\}_{k=1}^{\infty}$, причем каждый элемент $f \in H$ представим сходящимся по норме H рядом

$$f \overset{H}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \psi_k^* \rangle \psi_k.$$

Этот ряд называется *каноническим разложением* элемента $f \in H$ по фрейму ψ.

Пусть дано целое положительное число N и пусть G_N есть множество, составленное из всех возможных не более чем N–элементных непустых подмножеств множества всех положительных целых чисел $\aleph \equiv \{1; 2; ...\}$.

Наилучшим каноническим N *- членным приближением* ($N = 1, 2, ...$) элемента $f \in H$ по фрейму ψ будем называть величину

$$e_N(f, \psi, H) := \inf_{E\in G_N} \left\| f - \sum_{k\in E} (f, \psi_k^*)\psi_k \right\|_H.$$

Покажем, что теория фреймов вписывается в схему Компьютерного (вычислительного) поперечника. Пусть $E \in G_N$ и

$$E = \left\{k_1^{(E)}; ...; k_{|E|}^{(E)}\right\} \subset \aleph, \varphi_E \equiv \varphi_E(z_1, ..., z_{|E|}; x) = \sum_{j=1}^{|E|} z_j \psi_{k_j^{(E)}}(x), l_j^{(E)}(f) = \left(f, \psi_{k_j^{(E)}}^*\right).$$

Пусть $f \in H$. Определим F и D_E следующим образом: $F = F_f$ есть одноэлементное множество, состоящее из функции f , а одноэлементное множество D_E состоит из одной пары

$$\left(l_1^{(E)}(f), ..., l_{|E|}^{(E)}(f), \varphi_E\right) = \varphi_E\left(l_1^{(E)}(f), ..., l_{|E|}^{(E)}(f); x\right) = \sum_{j=1}^{|E|}\left(f, \psi^*_{k_j^{(E)}}\right)\psi_{k_j^{(E)}}(x) = \sum_{k\in E}(f, \psi_k^*)\,\psi_k.$$

Положим

$$\delta_N\left(0; Tf = f; F_f; D_E\right)_H := \left\|f - \sum_{j=1}^{|E|}\left(f, \psi^*_{k_j^{(E)}}\right)\psi_{k_j^{(E)}}(x)\right\|_H = \left\|f - \varphi_E\left(l_1^{(E)}(f), ..., l_{|E|}^{(E)}(f); x\right)\right\|_H.$$

Тогда

$$e_N\left(f; \psi; H\right) = \inf_{D_N := \{D_E\}_{E\in G_N}} \delta_N\left(0; Tf = f; F_f; D_E\right)_H := \delta_N\left(0; Tf = f; F; D_N\right)_H,$$

что и требовалось.

6) Всплески (см., напр., [28]). Функция $\psi \in L^2\left(R^1\right)$ называется *всплеском*, если система функций $\psi_{k,l}(x) = 2^{k/2}\psi\left(2^k x - l\right),\ x \in R^1,\ k \in Z,\ l \in Z$ является ортонормированным базисом пространства $L^2\left(R^1\right)$, стало быть, в силу 4) вписываются в схему Компьютерного (вычислительного) поперечника.

Ортопоперечник и линейный поперечник также вписываются в схему Компьютерного (вычислительного) поперечника.

7) Поперечник Темлякова (Ортопоперечник (orthowidths) или поперечник Фурье (Fourier widths)): Пусть $\{g_k\}_{k=1}^N$ - ОНС, $l_k(f) = (f, g_k), \varphi_N(z_1, ..., z_N; \cdot) = \sum_{k=1}^N z_k g_k(\cdot)$, тогда для ортопоперечника (поперечника Фурье)

$$\Phi_N(F, Y) \equiv \inf_{\{g_k\}_{k=1}^N OHC} \sup_{f\in F}\left\|f - \sum_{k=1}^N \langle f, g_k\rangle\, g_k\right\|_Y$$

имеем

$$\Phi_N(F, Y) = \inf_{\substack{D_N: l_k(f) = \langle f, g_k\rangle \\ \varphi_N = \sum_{k=1}^N z_k g_k}} \sup_{f\in F}\|f(\cdot) - \varphi_N(l_1(f), ..., l_N(f); \cdot)\|_Y \equiv \delta_N\left(0; Tf = f; F; D_N\right)_Y.$$

Ортопоперечники определены В.Н. Темляковым в 1982 году (см. [31]).

8) Поперечник Тихомирова - Линейный поперечник класса F ***в пространстве*** Y . Пусть L - линейный ограниченный оператор, действующий из линейной оболочки F в Y и имеющий ранг N (что обозначается в виде $rangL = N$), т.е. такой, что LF содержится в подпространстве размерности N с базисом $g_1, ..., g_N$.

Определим функционалы $l_j(f)\,(j = 1, ..., N)$ из равенства

$$Lf = l_1(f)\,g_1 + ... + l_N(f)\,g_N. \tag{3.2}$$

Тогда, с одной стороны,

$$L\left(c_1 f_1 + c_2 f_2\right) = l_1\left(c_1 f_1 + c_2 f_2\right) g_1 + ... + l_N\left(c_1 f_1 + c_2 f_2\right) g_N,$$

с другой стороны,

$$L\left(c_1 f_1 + c_2 f_2\right) = c_1 L\left(f_1\right) + c_2 L\left(f_2\right) = \left[c_1 l_1\left(f_1\right) + c_2 l_N\left(f_2\right)\right] g_1 + ... + \left[c_1 l_N\left(f_1\right) + c_2 l_N\left(f_2\right)\right] g_N,$$

откуда следует линейность функционалов $l_j(f)\ (j = 1, ..., N)$.

Ограниченность функционалов $l_j(f)$ следует из непрерывности оператора L .

Положим

$$\varphi_N\left(z_1, ..., z_N; \cdot\right) = \sum_{k=1}^N z_k g_k(\cdot), \tag{3.3}$$

тогда

$$\varphi_N\left(l_1(f), ..., l_N(f); \cdot\right) = \sum_{k=1}^N l_k(f)\, g_k(\cdot) = Lf, \tag{3.4}$$

тем самым, согласно (3.2)-(3.4) каждому линейному оператору L с $rangL \le N$ ставится в соответствие своя пара $\left(l^{(N)}, \varphi_N\right)_L$.

Поэтому для *линейного поперечника*

$$\lambda_N(F)_Y \equiv \inf_{\substack{L \\ rangL \le N}} \sup_{f \in F} \|f - Lf\|_Y , \qquad (3.5)$$

опять же в силу (3.2)-(3.4), имеем

$$\lambda_N(F)_Y \equiv \inf_{\left(l^{(N)}, \varphi_N\right) \in D_N := \left\{\left(l^N, \varphi_N\right)_L : L, rangL \le N\right\}} \sup_{f \in F} \|f(\cdot) - \varphi_N(l_1(f), ..., l_N(f); \cdot)\|_Y \equiv$$

$$\equiv \delta_N(0; Tf = f; F; D_N)_Y .$$

Линейные поперечники (3.5) определены В.М. Тихомировым в 1960 году (см. [32]).

9) Восстановление функций $Tf = f$ ***в случае функционалов типа*** $l(\xi) = f(\xi)$ ***- значения функции в точке.*** Различают интерполяцию и восстановление: "*Вместо теримина "интерполяция" здесь применяется термин "восстановление", поскольку значения приближаемой функции не совпадают, вообще говоря, со значениями приближающего вычислительного агрегата в узлах информационной сетки* [33]".

а) **Интерполяция** $\varphi_N\left(f(\xi_1), \ldots, f(\xi_N), x\right) = \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\, g_k^{(\xi_1, \ldots, \xi_N)}(x)$,– в форме Лагранжа, где $g_k^{(\xi_1, \ldots, \xi_N)}(x) = \frac{(x-\xi_1)\ldots(x-\xi_{k-1})(x-\xi_{k+1})\ldots(x-\xi_N)}{(\xi_k-\xi_1)\ldots(\xi_k-\xi_{k-1})(\xi_k-\xi_{k+1})\ldots(\xi_k-\xi_N)}$.

в) **Собственно восстановление.** Задача восстановления функции $f(x)$ операторами типа конечной свертки

$$\alpha_N(f) \equiv (f(\xi_1), f(\xi_2), ..., f(\xi_N), x) = \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\, K_N(x - \xi_k),$$

где K_N - стандартное ядро, представляет собой важную с теоретической и, в особенности, с практической точек зрения задачу (см. гл. X монографии А. Зигмунд [34]): " ... *имеет нечто общее с проблемой представления функций при помощи рядов Фурье*" (стр. 9)

$$S_N(x; f) \equiv \int_{\Omega} f(y)\, D_N(x - y)\, dy,$$

"... *в некоторых пределах это действительно так, хотя параллелизм не идет так далеко, как это можно было бы ожидать из формального сходства*" (стр.11), "*Причина в том, что поведение* $I_N(f)$ *зависит от значений* f *только на счетном множестве точек и поведение* f *на этом множестве может быть "плохим", хотя интегральный признак может выполняться*" (стр. 28-29), и хотя еще в 1959 году было отмечено " *Оповедении интерполяционных полиномов для общих систем известно мало*" (стр. 9), это положение сохраняется до сих пор.

с) ***Метод конечных разностей-*** метод сеток: искомое- таблица решений уравнения в частных производных в точках сетки (см., напр., [4, Часть III]).

Дискретизация решений дифференциальных уравнений (см. [4, стр. 8]): производные заменяются на разностные соотношения $\frac{du}{dx}(x) \approx \frac{u(x+h)-u(x)}{h}$, $\frac{d^2u}{dx^2}(x) \approx \frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2}$, и т.д., затем линейным образом записывается система алгебраических уравнений через начальные и граничные условия.

Соответствующее функциональное описание алгоритма $\varphi_N(f(\xi_1), \ldots, f(\xi_N); y)$ в виде выбора сетки $\{\xi_\tau\}_{\tau=1}^{N}$ и построения на ней разностной схемы с последующим решением уравнения на сетке (в принципе, быть может, с построением дискретного Y для оценки возникающей при этой дискретизации погрешности), с продолжением полученного дискретного решения до функции в первоначальном определении решения уравнения в частных производных возводит **Метод конечных разностей** в лоно К(В)П.

10) Жадный (гриди) алгоритм (Greedy algorithms) [35] - пример *нелинейной аппроксимации индивидуальной функции* - вписывается в схему Компьютерного (вычислительного) поперечника.

Пусть $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ - базис в банаховом пространстве B. Для каждого $f \in B$, по определению базиса, имеет место представление

$$f \overset{B}{=} \sum_{k=1}^{\infty} b_k(f) \cdot \psi_k.$$

Согласно критерию Коши

$$\lim_{k\to\infty} \|b_k(f) \cdot \psi_k\|_B = 0,$$

стало быть, существует невозрастающая перестановка (быть может, неоднозначная по отношению к нумерации $\rho(j) = k_j$)

$$\{\|b_k(f)\,\psi_k\|_B^*\}_{k=1}^{\infty} = \left\{\left\|b_{\rho(j)=k_j}(f) \cdot \psi_{\rho(j)=k_j}\right\|\right\}_{j=1}^{\infty}.$$

Определим гриди-аппроксимант

$$G_N(f;\psi) = \sum_{j=1}^{N} b_{\rho(j)}(f) \cdot \psi_{\rho(j)}.$$

Метод приближения $f \in B$ последовательностью $G_N(f;\psi)$ называется *жадным алгоритмом* по системе ψ, если

$$\lim_{N\to+\infty} \|f - G_N(f;\psi)\|_B = 0.$$

Все это вкладывается в схему Компьютерного (вычислительного) поперечника: дано $f \in B$. Класс $F = F_f = f \bigcap B$ состоит из одной функции f. Полагаем $Y = B,\ \ Tf = f$. Для данногоN ($N = 1, 2, \ldots$) определим

$$D_N = \begin{cases} l_1(f) = b_{k_1}(f), \ldots, l_N(f) = b_{k_N}(f)_{k_N}, \\ \psi_N(z_1, \ldots, z_N) = \sum_{j=1}^{N} z_j\,\psi_{k_j}. \end{cases}$$

Тогда (sup и inf одноэлементного числового множества есть само это число)

$$\inf_{\left(l^{(N)},\varphi_N\right)\in D_N} \sup_{f\in F} \|Tf - \varphi_N(l_1(f), \ldots, l_N(f))\|_Y = \|Tf - \varphi_N(l_1(f), \ldots, l_N(f))\|_B = \|f - G_N(f,\psi)\|_B.$$

Виды жадных алгоритмов [36] получаются из определений и соотношений

$$D \equiv \{f \in H : \|f\| = 1\}, \bar{D} = H, r_0(f) = f$$

$|(r_n(f), e_{n+1}(f))| \geq t_{n+1} \sup\limits_{e\in D} |(r_n(f), e)| - q_{n+1}\ \hat{f}_{n+1} = (r_n(f), e_{n+1}(f))(1 + \varepsilon_{n+1}) + \xi_{n+1}\ \ r_{n+1}(f) = r_n(f) - \hat{f}_{n+1} e_{n+1}(f) = f - \sum_{k=1}^{n+1} \hat{f}_k e_k(f)$

при следующих конкретизациях

- PGA – Pure (чистый) Greedy algorithm $q_n = \xi_n = \varepsilon_n = 0, t_n = 1,$
- WGA – Weak (слабый) greedy algorithm $q_n = \xi_n = \varepsilon_n = 0,$
- AWGA–Approximate (приближенный) WGA $q_n = \xi_n = 0,$

  и, наконец, в выписанном объеме
- gAWGA–generalized (обобщенный) AWGA

11) ***Ортоподобные разложения Т.П. Лукашенко*** [37].

К К(В)П-1 относятся и задачи восстановления операторов, зависящих от бесконечно гладких функций:

12) ***Восстановление голоморфных функций*** (см., напр., С.Д. Фишер и Ч.А. Мичелли [38] и Е.Е. Нурмолдин [39], и имеющуюся в них библ.).

13) **Наилучшее приближение** функции f в метрике Y системой линейно независимых функций $g_1, \ldots, g_N$

$$E_N(f)_Y := \inf_{(c_1,\ldots,c_N)\in R^N} \left\| f(x) - \sum_{k=1}^{N} c_k g_k(x) \right\|_Y$$

вписывается в схему К(В)П-1 (см.также 5)).

На самом деле, по $f \in Y$ определяется $F = \{f\}$ – одноэлементное множество, система нелинейных функционалов $l_c(h) \equiv c$, каждому числу c ставящие в соответствие для всех функций h число c, алгоритм

$$\overline{\varphi}_N(z_1, ..., z_N; x) = \sum_{k=1}^{N} z_k g_k(x)$$

и набор вычислительных агрегатов

$$D_N \equiv \left\{(l_{c_1}, ..., l_{c_N}) : (c_1, ..., c_N) \in R^N\right\} \times \left\{\overline{\varphi}_N(z_1, ..., z_N; x) = \sum_{k=1}^{N} z_k g_k(x)\right\}.$$

Тогда

$$\delta_N(0; Tf = f; F = \{f\}; D_N) = \inf_{(l_1,...,l_N;\varphi_N)\in D_N} \sup_{f\in F} \|Tf(x) - \varphi_N(l_{c_1}(f), ..., l_{c_N}(f); x)\|_Y =$$
$$= \inf_{(c_1,...,c_N)\in R^N} \sup_{f\in F} \left\|f(x) - \textstyle\sum_{k=1}^N c_k g_k(x)\right\|_Y = \inf_{(c_1,...,c_N)\in R^N} \left\|f(x) - \textstyle\sum_{k=1}^N c_k g_k(x)\right\|_Y \equiv E_N(f)_Y.$$

На этом остановимся, хотя, понятно, процесс неограниченный.

3.2 Поперечник Колмогорова как конкретизация Компьютерного (вычислительного) поперечника при восстановлении по точной информации, полученной от нелинейных функционалов.

Пусть дано банахово пространство $Y = X$, $F \subset Y$ и пусть M_N- есть N-мерное многообразие в Y с базисом $g_1, ..., g_N$ (которое будем обозначать через $M_N[g_1, ..., g_N]$).

Тогда с каждым отображением ψ из F в M_N связаны N функционалов $l_1^\psi, ..., l_N^\psi$,

$$\psi(f) = \psi_{M_N}(f) = l_1^\psi(f)g_1 + ... + l_N^\psi(f)g_N \;\; (f \in F), \tag{3.6}$$

непрерывные, если непрерывно ψ.

К.И.Бабенко [6, стр.176-179] для каждого $M_N[g_1, ..., g_N]$ доказал равенство

$$\sup_{f\in F} \inf_{b\in M_N} \|f - b\|_Y \equiv \sup_{f\in F} \inf_{c_1,...,c_N} \left\|f - \sum_{k=1}^{N} c_k g_k\right\|_Y = \inf_{\substack{\psi: F\mapsto M_N,\\ \psi-\textit{непрерывно}}} \sup_{f\in F} \|f - \psi(f)\|_Y. \tag{3.7}$$

Пусть множество вычислительных агрегатов

$$D_N = \left\{\psi_{M_N}\left(l_1^\psi, ..., l_N^\psi; \cdot\right) : F \overset{\psi}{\mapsto} M_N, \psi - \textit{непрерывно}\right\} \equiv \{M_N[g_1, ..., g_N]\} \times \{\psi\} \tag{3.8}$$

составлено из алгоритмов

$$\psi_{M_N}(z_1, ..., z_N; \cdot) = \sum_{k=1}^{N} \tau_k g_k(\cdot) \tag{3.9}$$

и определенных в (3.6) функционалов $l_1^\psi(f), ..., l_N^\psi(f)$, где $M_N[g_1, ..., g_N]$ пробегает множество всех возможных многообразий из Y с базисом $g_1, ..., g_N$, а ψ - множество всех возможных непрерывных отображений класса F в M_N.

Тогда, в силу (3.6)-(3.9) для поперечника Колмогорова d_N имеем

$$d_N(F)_Y \equiv \inf_{M_N\{g_1,..,g_N\}} \sup_{f\in F} \inf_{c_1,...,c_N} \left\|f - \sum_{k=1}^{N} c_k g_k\right\|_Y =$$
$$= \inf_{D_N=\{M_N[g_1,..,g_N]\}\times\{\psi\}} \sup_{f\in F} \left\|f - \sum_{k=1}^{N} l_k^\psi(f) g_k\right\|_Y =$$
$$= \inf_{(M_N,\psi)\in D_N} \sup_{f\in F} \left\|f(\cdot) - \psi_{M_N}\left(l_1^\psi, ..., l_N^\psi; \cdot\right)\right\|_Y = \delta_N(0; Tf = f; F; D_N)_Y,$$

что и утверждалось.

3.3 Аппроксимативные возможности множества всех полиномов по данной системе линейно независимых функций (Предпоперечник Колмогорова). Пусть таковой системой будет $g_1, ..., g_N$. В силу (3.6)-(3.9), полагая

$$D_N^*(g_1,...,g_N) = \left\{ \psi\left(l_1^{\psi}(f),...,l_N^{\psi}(f);\cdot\right) : \psi : F \mapsto M_N\left[g_1,...,g_N\right],\ \psi\left(z_1,...,z_N;\cdot\right) = \right.$$

$$\left. = \sum_{k=1}^{N} z_k g_k(\cdot), \psi\left(f\right)(\cdot) = \sum_{k=1}^{N} l_k^{\psi}\left(f\right) g_k(\cdot), \psi - \textit{непрерывно} \right\} \equiv M_N\left[g_1,...,g_N\right] \times \{\psi\},$$

для наилучших приближений по системе $g_1, ..., g_N$ имеем

$$\sup_{f\in F} E_N\left(f; g_1,...,g_N\right)_Y \equiv \sup_{f\in F} \inf_{c_1,...,c_N} \left\| f - \sum_{k=1}^{N} c_k g_k \right\|_Y =$$

$$= \inf_{\substack{\psi: F\mapsto M_N[g,...,g_N],\\ \psi-\textit{непрерывна}}} \sup_{f\in F} \|f - \psi\left(f\right)\|_Y \equiv \inf_{\substack{\psi\left(l_1^{\psi},...,l_N^{\psi};\cdot\right)\in D_N^*(g_1,...,g_N)=\\ =M_N[g,...,g_N]\times\{\psi\},\\ \psi-\textit{непрерывна}}} \sup_{f\in F} \left\| f(\cdot) - \psi\left(l_1^{\psi},...,l_N^{\psi};\cdot\right) \right\|_Y =$$

$$= \delta_N(0; Tf = f; F; D_N^*\left(g_1,...,g_N\right))_Y, \tag{3.10}$$

тем самым, Предпоперечник Колмогорова вписывается в схему Компьютерного (вычислительного) поперечника.

Задача (3.10) в случае, когда $g_1, ..., g_N$ есть специальное подмножество $\left\{e^{2\pi i(m,x)}\right\}_{m\in Z^s}$, изучена М. Сиховым [40]. Именно, им установлены следующие соотношения (необходимые определения и обозначения см. в [40]):

$$1 \le p < q < \infty : \sup_{f\in SH_p^{\Omega}} E_{Q(\Lambda,N)}(f)_q \asymp \left[\sum_{n\in\Gamma^{\perp}(\Lambda,N)} 2^{\|n\|_1\left(\frac{q}{p}-1\right)} \Omega^q(2^{-n}) \right]^{\frac{1}{q}}$$

и

$$1 < p \le q < \infty : \sup_{f\in SH_p^{\Omega}} E_{Q(\Lambda,N)}(f)_q \asymp \left[\sum_{n\in\Gamma^{\perp}(\Lambda,N)} \Omega^2(2^{-n}) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

3.4 Пример поперечника, не вписывающегося в схему Компьютерного (вычислительного) поперечника-1. К таковым относятся поперечники типа *"Оптимальное кодирование функций"*, основанные на следующих соображениях (см., напр., [26, стр. 380-384]): *"Всякий набор функционалов $l^{(N)} = (l_1, ..., l_N)$ задает "метод кодирования", сопоставляющий $f \in F$ вектор $(l_1(f), ..., l_N(f))$, поэтому если пожелаем по вектору $(l_1(f), ..., l_N(f))$ "вспомнить" функцию f, то с одинаковым правом можем остановить свой выбор на любой функции $g \in F$ такой, что*

$$(l_1\left(f\right),...,l_N\left(f\right)) = (l_1\left(g\right),...,l_N\left(g\right))".$$

Стало быть, величину

$$\sup\left\{\|f-g\|_Y : f\in F, g\in F, (l_1\left(f\right),...,l_N\left(f\right)) = (l_1\left(g\right),...,l_N\left(g\right))\right\}$$

можно интерпретировать как погрешность метода кодирования на классе F с помощью фиксированного набора функционалов $(l_1, ..., l_N)$.

Тем самым, приходим к еще одному виду поперечника

$$\lambda^N\left(F\right)_Y = \inf_{\substack{l_1,...,l_N-\textit{произвольный}\\ \textit{набор всевозможных}\\ \textit{линейных функционалов над } F}} \sup_{f\in F} \left\{\|f-g\|_Y : {\scriptstyle f\in F, g\in F, (l_1(f),...,l_N(f))=(l_1(g),...,l_N(g))}\right\}, \tag{3.11}$$

где при фиксированном $N\ (N = 1,\ 2,\ ...)$ требуется найти величину (3.11) и, если это возможно, указать набор линейных функционалов $l_1, ..., l_N$, реализующий inf и следовательно,определяющий, наилучший линейный метод кодирования классов функций F. Конечно, здесь не исключаются и порядковые оценки величины (3.11).

Поперечник (3.11) не содержится в схеме Компьютерного (вычислительного) поперечника, поскольку решаются совершенно разные задачи: задача оптимального кодирования и задача построения оптимальных вычислительных агрегатов, в составе алгоритма переработки информации включающую в себя и кодирование функции f в записи вычислительного агрегата $\varphi_N(l_1(f),\ldots,l_N(f);\cdot)_Y$.

3.5 Эффективизация поперечников. Через F обозначим один из анизотропных классов $SW_1^{r_1,\ldots,r_s}(0,1)^s$ и $E^{r_1,\ldots,r_s}$. Тогда имеет место

Теорема (К. Шерниязов [22], Н. Ташатов [41]). *Пусть,* $1<r_1=r_2=\cdots=r_\nu<r_{\nu+1}\leq\cdots\leq r_s, s(s=2,3,...)$ *-целое положительное число. Тогда*

$$\inf_{\substack{\xi^{(k)}\in[0,1]^s\\ k=1,\ldots,N}}\inf_{\substack{\psi_k\in[0,1]^s\\ k=1,\ldots,N}}\sup_{f\in F}\left\|f(\cdot)-\sum_{k=1}^N f(\xi^{(k)})\psi_k(\cdot)\right\|_{L^2(0,1)^s}\underset{r_1,\ldots,r_s}{\asymp}N^{-r_1+1/2}\ln^{r_1(\nu-1)}N\ (N=2,3,...),$$

причем оценка сверху достигается на операторе

$$\sum_{\substack{t\in Z^s:\\ \tau_j>0,(\tau,\delta)<n}}\frac{1}{detA_{n,\tau}}\sum_{k\in K(n,\tau)}f(k(A_{n,\tau}^{-1})')\sum_{m\in\rho(\tau)}e^{2\pi i(m,x-k(A_{n,\tau}^{-1}))},$$

где s-мерный вектор δ *и натуральное число* n *, множество индексов* $K(n,\tau)$ *матрицы* $A_{n,\tau}$ *по явным формулам выписываются по заданным числам* $r_1,...,r_s$ *и* N *.*

В качественном аспекте сравним задачи вычисления точных порядков поперечников по Колмогорову и задачи построения оптимальных операторов восстановления.

В.Н. Темляков [31] нашел, в частности, порядок поперечника по Колмогорову

$$\inf_{\substack{\psi_{k\in L_2}\\ k=1,\ldots,N}}\sup_{f\in SW_1^{r_1,\ldots,r_s}}\inf_{\substack{c_k\in R\\ k=1,\ldots,N}}\left\|f(\cdot)-\sum_{k=1}^N c_k\psi_k(\cdot)\right\|_{L^2(0,1)^s}\underset{r_1,\ldots,r_s}{\asymp}N^{-r_1+1/2}\ln^{r_1(\nu-1)}N.$$

Тем самым, получаем задачи нового типа, когда одна общая теоретическая некомпьютерная числовая характеристика принципиального характера с той же точностью реализуется посредством конкретного линейного вычислительного агрегата.

§4. ИЛЛЮСТРАТИВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ПО ТЕМЕ КОМПЬЮТЕРНОГО (ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО) ПОПЕРЕЧНИКА ПО ТОЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ С РАЗЛИЧНЫМИ ВЫВОДАМИ

4.1 Востребованность неулучшаемых теорем вложений в постановке К(В)П-1. Как оказалось, исследование Компьютерного (вычислительного) поперечника вовлекает в свою теорию много различных математических идей и результатов из разных областей математики в их взаимосвязи. Так, на этом пути в [13] установлены связи между совершенно различными теориями: между численным анализом и теорией вложений (см. [14] и [16])

$$\delta_N\left(0;Tf=f,H_p^\omega;L_N\times\{\varphi_N\}_{L^\infty}\right)_{L^\infty}\asymp\sum_{n=N+1}^\infty n^{\frac{1}{p}-1}\omega\left(\frac{1}{n}\right)<\infty\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow H_p^\omega\subset L^\infty\ (2\leq p<\infty)\,,$$

$$\delta_N\left(0;Tf=f,H_p^\omega;L_N\times\{\varphi_N\}_{L^q}\right)_{L^q}\asymp\left(\sum_{n=N+1}^\infty n^{\frac{q}{p}-2}\omega^q\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{q}}<\infty\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow H_p^\omega\subset L^q\ (2\leq p<q<\infty)\,, \tag{4.1}$$

где $F=H_p^\omega\equiv\left\{f\in L^p:\omega_p(\delta;f)=\sup\limits_{0<h\leq\delta}\left(\int_0^{1-h}|f(x+h)-f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\leq\omega(\delta)\,(0<\delta<1)\right\}.$

Подтвердим примером (4.1) вынесенное в заглавие этого пункта утверждение.

Сначала определимся с теорией вложений.

Вложение класса F в E: Пусть α есть комплекс свойств, наложенных на множество F, β – комплекс более сильных, чем α свойств, определяющих множество E. Если комплекс свойств γ совместно с условием α обеспечивает теоретико-множественное включение $F \subset E$, то говорят *"γ есть условие вложения F в E"*.

"Условие γ неулучшаемо для вложения F в E", если нарушение γ влечет существование элемента $\overline{f} \in F$ такого, что $\overline{f} \notin E$.

Итак, в (4.1) изучается задача восстановления функций $f \in L^p(0,1) \equiv F$ в метрике $Y = L^q(0,1)$ при $2 \le p < q \le \infty$. Классы функций H_p^ω образуют полную шкалу в $L^p(0,1)$ в том смысле, что для каждой функции f из $L^p(0,1)$ выполнено включение $f \in H_p^\omega$ при $\omega(\delta) = \omega_p(\delta; f)$ и, более того, эти классы составляют предельно тонкую шкалу классификации функций из $L^p(0,1)$.

В соотношениях (4.1) получаем окончательный ответ на поставленную задачу именно благодаря К(В)П–определению: какой бы вычислительный агрегат $\varphi_N(l_1(f), ..., l_N(f); x)$ по линейной информации ни привлекать, в их числе все, что сделано в теории приближений и вычислительной математике, включая все ряды Фурье, базисы, интерполяционные многочлены, всплески, поперечники Фурье и т.п. (см. об этом здесь §3) – лучше указанной скорости не приблизить. Причем в качестве оптимального агрегата приближения достаточно взять соответственно выписанный К.И. Осколковым в [17] оператор восстановления и отрезки рядов Фурье – Хаара [15], что перекликается с теорией всплесков.

Общий вывод: для корректности величины $\delta_N(0; T; F; L_N(F) \times \{\varphi_N\}_Y)_Y$ необходимы дополнительные связи между T, F и Y в виде вложения $TF \subset Y$, в котором неулучшаемость условия вложения γ обеспечивает постановку задачи в самых широких (минимальных) условиях.

4.2 "Нижние границы" численного дифференцирования. Отправным результатом К(В)П-исследования задачи приближенного дифференцирования является следующая оценка снизу, полученная для всех возможных вычислительных агрегатов, построенных по произвольной линейной информации. А именно, в рамках общепринятых обозначений $Tf \equiv f^{(\alpha_1,...,\alpha_s)}(x)$-оператор дифференцирования, $F = W_p^r(0,1)^s$-класс Соболева и $Y = L^q(0,1)^s$-лебегово пространство, справедлива [19]:

Теорема 4.1. *Пусть даны целое положительное число s и числа $1 \le p \le q \le \infty$. Пусть также даны неотрицательные целые числа $r, \alpha_1, ..., \alpha_s$ такие, что $r > \alpha_1 + \cdots + \alpha_s + sA$, где A равно $\frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$ или 0, смотря по тому $2 \le p \le q \le \infty, 1 \le p < 2 \le q \le +\infty$ или $1 \le p \le q < 2$. Тогда*

$$\delta_N(0; L_{\rm N}(W_p^r(0,1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^q(0,1)^s})_{L^q(0,1)^s} \equiv$$

$$\inf_{\substack{l_1,...,l_N - \text{все возможные} \\ \text{линейные функционалы}; \varphi_N}} \sup_{f \in W_p^r(0,1)^s} \left\| f^{(\alpha_1,...,\alpha_s)}(\cdot) - \varphi_N(l_1(f), ..., l_N(f); \cdot) \right\|_{L^q(0,1)^s} \gg$$

$$\gg \begin{cases} N^{-\frac{r}{s} + \frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_s}{s} + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)}, & \text{если } 2 \le p \le q \le \infty, \\ N^{-\frac{r}{s} + \frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_s}{s} + \frac{1}{2} - \frac{1}{q}}, & \text{если } 1 \le p < 2 \le q \le +\infty, \\ N^{-\frac{r}{s} + \frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_s}{s}}, & \text{если } 1 \le p \le q < 2. \end{cases} \tag{4.2}$$

Замечание 1. Здесь для любых наперед заданных системы линейных функционалов и линейно независимой системы функций требуется построение такого многочлена по этой системе, который обращает в нуль все функционалы системы и обладает нужными интегральными характеристиками, обеспечивающими оценку снизу.

Первая часть легко решается сведением к переопределенной системе линейных уравнений, основные трудности возникают во второй части (например, такая задача в [42, стр. 92-95] решается посредством далеко нетривиальных оценок объемов специальных множеств в конечномерных пространствах), которые у нас преодолены применением теоремы о среднем.

Замечание 2. В случае вложения класса F в пространство непрерывных функций на $[0,1]^s$ функций к числу возможных относятся функционалы по значениям в точках $l_\xi(f) = f(\xi)$ и, потому, вычислительные агрегаты вида $\varphi_N(f(\xi_1), ..., f(\xi_N); \cdot)$ содержат все возможные конечные разности с восполнением до функции из пространства Y. Поскольку, согласно [5, стр. 389] "*...разностный метод аппроксимации элементов компакта X требует катастрофически большого числа узлов по сравнению с оптимальным количеством вещественных параметров*", причем "*Этот вывод о крайней неэффективности разностного метода по количеству потребных для аппроксимации вещественных параметров имеет общий характер и справедлив для любой разностной схемы*", то оценки снизу (4.2) в отношении разностных схем, по-видимому, сильно занижены.

4.3 Численное интегрирование функций многих переменных также относится к теме К(В)П. Среди разнообразия квадратурных формул выберем по одному – с узлами по сетке Смоляка и по сетке Коробова, в которых в К(В)П-обозначениях:

$$Tf = \int_{[0,1]^s} f(x)dx \text{ и } \varphi_N\left(f(\xi_1),...,f\left(\xi_N\right);x\right) = \sum_{k=1}^{N} c_k f\left(\xi_k\right).$$

а) **Сетка Коробова.** Применением результатов алгебраической теории чисел в [33, 43–50] дан алгоритм численного интегрирования индивидуальных функций, представимых в виде суммы абсолютно сходящегося кратного тригонометрического ряда Фурье и классов из таких функций, спектр "больших" коэффициентов Фурье которых образуют "гиперболические кресты". Получающиеся квадратурные формулы имеют равные веса, а узлы образуют сетку Коробова, которая полностью определяется заданием двух целых положительных чисел, одно из которых – количество узлов. В случае классов функций с доминирующей смешанной гладкостью данный алгоритм почти оптимальный в том смысле, что сетка из N узлов находится за $\ll N\ln\ln N$ элементарных арифметических операций.

В связи с чем отметим, что в многочисленных исследованиях, посвященных применениям теоретико-числовых методов в приближенном интегрировании, утверждения носят условный характер: *"Если $a_1,...,a_s$ оптимальные коэффициенты, то ... "*, что отражено в обзоре 1988 года Вань Юаня [51]: *"По-видимому, одной из центральных проблем в численном интегрировании является нахождение прямых методов для получения оптимальных коэффициентов"*.

В следующей теореме показано, в каком формате решена известная проблема, сформулированная Вань Юанем:

Теорема 4.2 (см. [47]). *Пусть даны $l = s+1 \geq 3$ - простое число и $r > 1$.*

Тогда для всякого $T, T > c_1(l)$ существуют простое $p, p \equiv 1(modl), p \leq c(s)Rln^sR \equiv T$ и целое положительное число $a, (a,p) = 1, a^{\frac{p-1}{l}} \not\equiv 1\,(modp)$, для отыскания которых используется алгоритм, состоящий в последовательном выполнении следующих действий

Шаг 1. *Находится произведение $K(E) = \prod_{m\in E^*} N(m)$,*

$$E = \left\{ m = (m_1, m_2, ..., m_s) : \prod_{j=1}^{s} max\{1; |m_j|\} \leq R \right\}$$

Шаг 2. *Методом решета Эратосфена находятся все простые числа p из промежутка $(1, 18s\ln K(E))$*

Шаг 3. *Непосредственной проверкой каждого простого p, $p \equiv 1(modl), p \in (1, 18s\ln K(E))$ находится такое p, которое не делит $K(E)$*

Шаг 4. *Находится целое a такое, что $a^{\frac{p-1}{l}} \not\equiv 1(modp)$,*
для исполнения которого достаточно выполнить $\ll T\ln\ln T$ элементарных арифметических операций,
такие, что выполнены соотношения

$$\frac{(logT)^{s-1}}{T^r} \ll \sup_{r,s\ f\in E_s^r} \left| \int_{[0,1]^s} f(x)\,dx - \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} f\left(\frac{k}{p}, \left\{\frac{k}{p}a^{\frac{p-1}{l}}\right\}, ..., \left\{\frac{k}{p}a^{\frac{p-1}{l}(s-1)}\right\}\right)\right| \ll_{r,s} \frac{(\ln T)^{rs+(s-1)}}{T^r}. \quad (4.3)$$

Здесь оценка снизу по всем квадратурным формулам получена И.Ф. Шарыгиным [52].

Теперь обратимся к квадратурным формулам [53–58], получаемых модифицированным в [56] методом Смоляка [59, 60].

в)**Сетка Смоляка**. Пусть

$$\Lambda_q(f)=\sum_{l=0}^{s-1}(-1)^l\binom{s-1}{l}\sum_{\nu_1+\dots+\nu_s=q-l}\frac{1}{2^{q-l}}\sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1}\cdots\sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1}f(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},...,\frac{k_s}{2^{\nu_s}})=\sum_{k=1}^{N}a_kf(t_k),$$

где $l_k(f)=f(t_k)$, $\varphi(z_1,...,z_N)=\sum_{k=1}^N a_kz_k$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 4.3 (С.А.Смоляк [59], Н. Темиргалиев [54]). *Пусть дано число* $r>1$, *и пусть* $\nu^{(0)}=(\nu_1^{(0)},...,\nu_s^{(0)})$ *-фиксированный целочисленный вектор с неотрицательными компонентами. Тогда справедливо соотношение* $\left(q>\nu_1^{(0)}+...+\nu_s^{(0)}+s\right)$

$$\frac{(logN)^{s-1}}{N^r}\underset{r,s}{\ll}\sup_{f\in E_s^r}\left|\int_{[0,1]^s}f(x)dx-\Lambda_q(f)\right|\underset{s,r,v^{(0)}}{\asymp}\frac{\ln^{s-1}q}{2^{qr}}\asymp\frac{(\ln N)^{(r+1)(s-1)}}{N^r}. \tag{4.4}$$

Теорема 4.4 (Н.Темиргалиев, С.С.Кудайбергенов, А.А.Шоманова [53]). *Пусть* $\omega(\delta)=\delta^{\nu}\log_+^{\aleph}\delta,\ \delta>1$, *справедливы следующие утверждения:*

а) если $2r>1, -\infty<\aleph<+\infty$, *то*

$$\sup_{f\in SW_2^{\delta^r\log_2^{\aleph}\delta}(0,1)^s}\left|\int_{[0,1]^s}f(x)\,dx-\Lambda_q(f)\right|\asymp\begin{cases}\frac{(\ln N)^{(s-1)\left(r+\frac{1}{2}\right)-s\aleph}}{N^r} & \text{при } \aleph<\frac{1}{2},\\ \frac{(\ln\ln N)^{\frac{s-1}{2}}(\ln N)^{r(s-1)-\frac{1}{2}}}{N^r} & \text{при } \aleph=\frac{1}{2},\\ \frac{(\ln N)^{r(s-1)-\aleph}}{N^r} & \text{при } \aleph>\frac{1}{2},\end{cases}$$

b) если $2r=1, \aleph>1/2$, *то*

$$\sup_{f\in SW_2^{\sqrt{\delta}\log_2^{\aleph}\delta}(0,1)^s}\left|\int_{[0,1]^s}f(x)\,dx-\Lambda_q(f)\right|\asymp\begin{cases}\frac{(\ln N)^{(s-1)-s\left(\aleph-\frac{1}{2}\right)}}{N^{\frac{1}{2}}}, & \frac{1}{2}<\aleph<1\\ \frac{(\ln\ln N)^{\frac{s-1}{2}}(\ln N)^{\frac{s-1}{2}-\frac{1}{2}}}{N^{\frac{1}{2}}}, & \aleph=1\\ \frac{(\ln N)^{\frac{s-1}{2}-\aleph+\frac{1}{2}}}{N^{\frac{1}{2}}}, \aleph>1.\end{cases}$$

Здесь $q>\nu_1^{(0)}+\dots+\nu_s^{(0)}+s$ *и* $N\equiv N(q,s)\asymp 2^qq^{s-1}$.

Принципиального характера вывод. Результаты (4.3) и (4.4) в следующем смысле *"уравнивают"* роль узлов и весов в квадратурной формуле. Сетка узлов в (4.3) с дискрепансом порядка $\frac{(logN)^{2s}}{N}$ равномерна распределена на s-мерном единичном кубе (см. [47]), в то время сетка Смоляка в (4.4) имеет очень плохой дискрепанс порядка $\frac{1}{logN}$ (см. об этом [55] и [58]), но за счет специально подобранных весов обеспечивается неулучшаемая в степенной шкале погрешность приближенного интегрирования - все происходит в *"проблемном"* в этом круге вопросов классе Коробова E_s^r. Таким образом, "плохая" информация о функции может компенсироваться через веса, но с позиций оптимальных вычислений необходимы равномерно распределенные сетки.

4.4 Сравнительное восстановление по различным видам числовой информации. К(В)П – постановка содержит вопрос: *"Какая информация более информативна?". Например, получаемая от значений в точках* $D_N^{(1)}=\{\varphi_N(f(\xi_1),...,f(\xi_N);\cdot)\}$ *или от коэффициентов Фурье* $D_N^{(2)}=\left\{\varphi_N\left(\hat f\left(m^{(1)}\right),...,\hat f\left(m^{(N)}\right);\cdot\right)\right\}$ *(по той или иной ОНС)?*

Иллюстративный результат: При восстановлении решений задачи Дирихле для уравнения Пуассона $\Delta u=f,\ u|_{\partial[0,1]^s}=0$, составляющих математическую модель Tf, при равном объеме числовой информации при s=2 и s=3 тригонометрические коэффициенты Фурье в степенной шкале более информативны нежели значения функции в точке, в то время как при $s\geq 4$ порядки совпадают [41].

В данной работе будем рассматривать только операторы $Tf = f$ и $Tf = f^{(\alpha)}$. Операторам типа решений уравнений в частных производных будет посвящена отдельная статья.

4.5 Определения классов, использованных в статье. Для полноты изложения приведем эти определения (ограничившись первоначальными).

Класс Коробова. $E_s^r(r > 1, s = 1, 2, ...)$ состоит из всех 1-периодических по каждой переменной функций $f(x) = f(x_1, ..., x_s)$, тригонометрические коэффициенты Фурье которых удовлетворяют неравенству

$$\left|\hat{f}(m)\right| \leq \left(\prod_{j=1}^{s} \max\{1; |m_j|\}\right)^{-r}.$$

Классы Соболева $W_q^r(0,1)^s$ $(s = 1, 2, ..., r = 0, 1, ..., 1 \leq q \leq +\infty)$ есть множество всех 1-периодических по каждой переменной функций $f(x) = f(x_1, ..., x_s)$, которые в случае $r > 0$ вместе со своими частными производными до порядка r включительно принадлежат $L^q(0,1)^s$ и для которых выполнено неравенство

$$\|f\|_{W_q^r} \equiv \|f\|_{L^q} + \sum_{j=1}^{s} \left\| \frac{\partial^r}{\partial x_j^r} f \right\|_{L^q} \leq 1,$$

а в случае $r = 0$ полагаем $W_q^r(0,1)^s = L^q(0,1)^s$.

Классы H_p^ω. Пусть $\omega(\delta)$-непрерывная на [0,1] функция, удовлетворяющая условиям

$$0 = \omega(0) \leq \omega(\delta) \leq \omega(\delta + \eta) \leq \omega(\delta) + \omega(\eta) \, \text{при всех} \, 0 \leq \delta \leq \delta + \eta \leq 1.$$

Такие функции называют модулями непрерывности.

Пусть $1 \leq p \leq \infty$ (причем $L^\infty(0,1) \equiv C[0,1]$) и $f \in L^p(0,1)$. Модулем непрерывности (в L^p) функции f называют

$$\omega_p(\delta, f) = \begin{cases} \sup\limits_{0<h\leq\delta} \left(\int_0^{1-h} |f(x+h) - f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{при} \, 1 \leq p < \infty, \\ \sup\limits_{|x-y|\leq\delta} |f(x) - f(y)|, & \text{при} \, p = \infty. \end{cases}$$

где $\delta \in (0,1]$.

Пусть $\omega(\delta)$-модуль непрерывности и $1 \leq p \leq \infty$. Через H_p^ω обозначают множество всех функций $f \in L^p(0,1)$ таких, что $\omega_p(\delta; f) \leq \omega(\delta)$ при всех $\delta \in (0,1]$.

§5. КОМПЬЮТЕРНЫЙ (ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ) ПОПЕРЕЧНИК - ПРОДОЛЖЕНИЕ С ТОЧНОЙ НА НЕТОЧНУЮ ИНФОРМАЦИЮ $\left(\varepsilon_N^{(j)} \geq 0, \max\limits_{j=1,...,N} \varepsilon_N^{(j)} > 0\right)$: К(В)П-2 - ПРЕДЕЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ, К(В)П-3 - МАССИВНОСТЬ НОСИТЕЛЕЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТИ

5.1 Обозначения и определения в общей записи. Пусть при некотором $k \, (k = 1, 2, ...)$ даны нормированные пространства $X^{(1)}, ..., X^{(k)}$ и Y числовых функций, определенных на множествах $\Omega_{X^{(1)}}, ..., \Omega_{X^{(k)}}$ и Ω_Y соответственно, множества $F^{(j)} \subset X^{(j)} \, (j = 1, ..., k)$ и $T = Tf = u(y, f) \equiv u(y, f_1, ..., f_k)$ - отображение $F = F^{(1)} \times \cdots \times F^{(k)}$ в Y. Пусть также даны целые положительные числа $N_1, ..., N_k$, вектор $\varepsilon^{(N)} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_k) \in R^N \, (N = N_1 + \cdots + N_k)$, составленный из векторов $\varepsilon_j = \left(\varepsilon_j^{(1)}, ..., \varepsilon_j^{(N_j)}\right)$ с неотрицательными компонентами $\varepsilon_j^{(i)} \geq 0 \, (j = 1, ..., k; \, i = 1, ..., N_j)$, набор функционалов $l^{(N)} = (l_1, ..., l_k)$, $l_j = (l_j^{(1)}, ..., l_j^{(N_j)})$, $l_j^{(i)}(\cdot) : F^{(j)} \mapsto C$, $(j = 1, ..., k; i = 1, ..., N_j)$ и функция $\varphi_N(z_1, ..., z_k; y) : C^N \times \Omega_Y \mapsto C$ (где $\mathbb{C}$, как обычно, есть поле комплексных чисел), такая что $\varphi_N(z_1, ..., z_k; y)$ при всех фиксированных $z_j = \left(z_j^{(1)}, ..., z_j^{(N_j)}\right)$ $(j = 1, ..., k)$ как функция от y принадлежит пространству Y, выполнение всех этих условий на φ_N будем записывать в виде $\varphi_N \in Y$, а составленное из всех таких φ_N множество – через $\{\varphi_N\}_Y$.

Тогда для каждого $f \in F$ соответствующую функцию $Tf = u(y, f)$ будем приближать в метрике Y вычислительным агрегатом $(l^{(N)}, \varphi_N)$– функцией $\varphi_N(z; y) \equiv \varphi_N(z_1, ..., z_k; y)$, построенной по числовой информации $z \equiv (z_1, ..., z_k)$ объема N , полученной об $f \equiv (f_1, ..., f_k)$ посредством функционалов $l_1, ..., l_k$ с точностью $\varepsilon^{(N)}$ и переработанной по алгоритму φ_N до функции, зависящей от той же переменной, что и Tf .

Именно, для данной пары $\left(l^{(N)}, \varphi_N\right)$ положим (с очевидным взаимным переобозначением переменных типа $z_t\,(t = 1, ..., N)$ и $z_j = (z_j^{(1)}, ..., z_j^{(N_j)})\,(j = 1, ..., k)$ и соответствующим уточнением $l^{(N)}(f) = \left(l_N^1(f), \ldots, l_N^{(N)}(f)\right)$ через $l_j^{(i)}(f_j)$)

$$\delta_N\left(\varepsilon^{(N)}; T; F; \left(l^{(N)}, \varphi_N\right)\right)_Y = \sup\{\|u(\cdot; f) - \varphi_N(z_1, ..., z_k; \cdot)\|_Y : f \in F,$$

$$z_j(f_j) = z_j = (z_j^{(1)}, ..., z_j^{(N_j)}), \left|l_j^{(i)}(f_j) - z_j^{(i)}\right| \le \varepsilon_j^{(i)}(j = 1, ..., k; i = 1, ..., N_j)\Big\} \equiv$$

$$\equiv \sup_{\substack{f \in F \\ \left|\gamma_N^{(t)}\right| \le 1 (t=1,...,N)}} \left\|u(\cdot; f) - \varphi_N\left(l_N^{(1)}(f) + \gamma_N^{(1)}\varepsilon_{\mathrm{N}}^{(1)}, ..., l_N^{(N)}(f) + \gamma_N^{(N)}\varepsilon_N^{(N)}; \cdot\right)\right\|_y \tag{5.1}$$

Пусть теперь $\left\{\left(l^{(N)}, \varphi_N\right)\right\}_{F,Y}$ есть множество всевозможных пар $\left(l^{(N)}, \varphi_N\right)$ и пусть $D_N \subset \left\{\left(l^{(N)}, \varphi_N\right)\right\}_{F,Y}$, т.е. D_N есть некоторое множество вычислительных агрегатов $\left(l^{(N)}, \varphi_N\right)$.

Примем основное определение

$$\delta_N(\varepsilon^{(N)}, D_N) \equiv \delta_N(\varepsilon^{(N)}; T; F; D_N)_Y = \inf_{\left(l^{(N)}, \varphi_N\right) \in D_N} \delta_N\left(\varepsilon^{(N)}; T; F; \left(l^{(N)}, \varphi_N\right)\right)_Y \tag{5.2}$$

5.2 Полное определение Компьютерного (вычислительного) поперечника по точной и во взаимосвязи с ним неточной информации. В рамках приведенных обозначений и определений проблема оптимального восстановления по неточной информации, оформленная под названием " *Компьютерный (вычислительный) поперечник*" , заключается, в собирательном смысле, в последовательном решении нижеследующих трех задач – К(В)П-1, К(В)П-2 и К(В)П-3.

При заданных T, F, Y, D_N (фиксированных всюду по последующему контексту):

К(В)П-1: Находится порядок $\asymp \delta_N(0; D_N)_Y \equiv \delta_N(0; T; F; D_N)_Y$, – *информативная мощность набора вычислительных агрегатов* $D_N \equiv D_N(F)_Y$ с построением конкретного вычислительного агрегата $\left(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N\right)$ из $D_N \equiv D_N(F)_Y$, поддерживающего порядок $\asymp \delta_N(0; D_N)_Y$.

К(В)П-2: Для $\left(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N\right)$ исследуется задача существования и нахождения последовательности $\tilde{\varepsilon}_N \equiv \tilde{\varepsilon}_N\left(D_N; \left(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N\right)\right)_Y \equiv \left(\tilde{\varepsilon}_N^{(1)}, ..., \tilde{\varepsilon}_N^{(N)}\right)$ с неотрицательными компонентами – К(В)П-2-предельной погрешности (соответствующей оптимальному вычислительному агрегату $\left(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N\right)$) такой, что $\delta_N(0; D_N)_Y \asymp \delta_N\left(\tilde{\varepsilon}_N; \left(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N\right)\right)_Y \equiv \sup\left\{\|Tf(\cdot) - \bar{\varphi}_N(z_1, ..., z_N; \cdot)\|_Y : \ f \in F, \ \left|\bar{l}_\tau(f) - z_\tau\right| \le \tilde{\varepsilon}_N^{(\tau)}(\tau = 1, ..., N)\right\}$,

с одновременным выполнением

$$\forall \eta_N \uparrow +\infty (0 < \eta_N < \eta_{N+1}, \ \eta_N \to +\infty) : \varlimsup_{N \to +\infty} \delta_N\left(\eta_N \tilde{\varepsilon}_N; \left(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N\right)\right)_Y / \delta_N(0; D_N)_Y = +\infty.$$

К(В)П-3: Устанавливается *массивность* предельной погрешности $\tilde{\varepsilon}_N\left(D_N; \left(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N\right)\right)_Y$: находится как можно большое множество $M_N\left(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N\right)$ из D_N (обычно связанное со структурой исходного $\left(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N\right)$) вычислительных агрегатов $\left(l^{(N)}, \varphi_N\right)$, построенных по функционалам $l_1^{(1)}, ..., l_N^{(N)}$ (в общей постановке не обязательно линейным), таких, что для каждого из них выполнено

$$\forall \eta_N \uparrow +\infty (0 < \eta_N < \eta_{N+1},\, \eta_N \to +\infty) : \overline{\lim_{N\to+\infty}}\, \delta_N \left(\eta_N \tilde{\varepsilon}_N; \left(l^{(N)}, \varphi_N\right)\right)_Y / \delta_N (0; D_N)_Y = +\infty.$$

Если окажется, что в К(В)П-1 экстремальных вычислительных агрегатов будет больше одного, то по каждому из них проводится К(В)П-2,-3 анализ, поскольку их вычислительные качества определяются не только по величине предельной погрешности, но и по приспособленности структуры вычислительного агрегата к особенностям объекта применения.

5.3 Первичные комментарии по К(В)П-анализу. Задача восстановления К(В)П-1 через оперирование с точными значениями функционалов имеет идеализированную направленность с ответом на теоретический вопрос: "*На какую неулучшаемую скорость приближения ориентироваться?*".

В К(В)П-1, являющейся исходной для последующего, желательно использовать как можно больше функционалов (но, вообще говоря, не все – при всех линейных и нелинейных функционалах самым лучшим приближением к заданному объекту будет сам объект [23]).

Самостоятельная задача – изучение информативных мощностей отдельных классов линейных функционалов, важнейшие из которых значения функций в точках и коэффициенты Фурье, в первую очередь тригонометрические с возможностью привлечения мощного аппарата гармонического анализа (см., напр., [17, 22, 31, 33, 40–50] и.т.п.).

Теперь перейдем к задачам К(В)П-2, -3, что вместе с К(В)П-1 составляют новую схему исследований в численном анализе.

Полученный в К(В)П-1 оптимальный агрегат $\left(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N\right)$ подвергается изучению с позиций сервисного обслуживания вычислений через К(В)П-2 и К(В)П-3, в основе которых лежат следующие соображения. Вычисление функционалов – основных носителей числовой информации, за редкими исключениями, не может быть точным. Поэтому, самое лучшее, на что можно рассчитывать – это указание величины погрешности, в пределах которой допускается ошибаться в вычислениях с сохранением итоговых выводов восстановления по точной информации. К тому же излишняя точность вычисления информационных функционалов приводит к увеличению количества арифметических операций и объема памяти, что "*... часто приводит к расточительству и обеднению наших возможностей, не улучшая порядка точности вычислений математической модели*" (см. [5, Глава 4, §17 , п. 2] и [6]).

И, наконец, чем больше значение разрешенной погрешности, тем меньше цена проводимых вычислений, что делает актуальной задачу установления величины предельной погрешности.

Таким образом, в части К(В)П-2 решается основная вычислительная задача: так или иначе выбирается предназначенный для применений конкретный вычислительный агрегат $(\bar{l}^{(N)}, \overline{\varphi}_N)$ из К(В)П-1, для которого указывается предельная погрешность $\tilde{\varepsilon}_N$, с которой можно находить числа, вводимые в компьютер, но с сохранением той скорости приближения $\delta_N (0; D_N)_Y$, когда вычисления точны.

В части К(В)П-3 выявляется оптимальность $\left(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N\right)$ среди других вычислительных агрегатов из D_N с позиций величины предельной погрешности, которых желательно указать как можно больше, начиная с агрегатов вида $\varphi_N \left(l_N^{(1)} (f), ..., l_N^{(N)} (f); .\right)$, где функционалы $l_N^{(1)} (f), ..., l_N^{(N)} (f)$ одного типа с $\bar{l}^{(N)}$. Понятно, что в случае "большего" $\{\varepsilon_N\}$ с $\overline{\lim_{N\to+\infty}} \frac{\varepsilon_N}{\tilde{\varepsilon}_N} = +\infty$ соответствующий агрегат необходимо проверить на оптимальность.

Если $F_1 \subset F_2$, то для всех D_N выполнено неравенство

$$\delta_N (0; T; F_1; D_N)_Y \le \delta_N (0; T; F_2; D_N)_Y .$$

Действительно, пусть $\left(l^{(N)}, \varphi_N\right) \in D_N$. Тогда

$$\sup_{f\in F_1} \left\| (Tf)(\cdot) - \varphi_N \left(l^{(N)}, \cdot\right) \right\|_Y \le \sup_{f\in F_2} \left\| (Tf)(\cdot) - \varphi_N \left(l^{(N)}, \cdot\right) \right\|_Y ,$$

откуда

$$\delta_N\left(0;T;F_1;D_N\right)_Y=\inf_{\left(l^{(N)},\varphi_N\right)\in D_N}\sup_{f\in F_1}\left\|\left(Tf\right)(\cdot)-\varphi_N\left(l^{(N)},\cdot\right)\right\|_Y\leq$$

$$\leq\inf_{\left(l^{(N)},\varphi_N\right)\in D_N}\sup_{f\in F_2}\left\|\left(Tf\right)(\cdot)-\varphi_N\left(l^{(N)},\cdot\right)\right\|_Y=\delta_N\left(0;T;F_2;D_N\right)_Y.$$

Отметим, что в естественных условиях "однотипности" последовательности $\{D_N\}$, когда для всякого N каждую пару $\left(l^{(N)},\varphi_N\right)$ из D_N можно понимать как элемент D_{N+1}, числовая последовательность $\{\delta_N(\tilde{\varepsilon}_N;D_N)\}$ является невозрастающей.

5.4 Некоторые технические детали К(В)П-формулировок. Задача состоит из трех частей. Первая часть задачи заключается в получении оценок сверху и оценок снизу (желательно совпадающих с точностью до констант) для величины $\delta_N(0;T;F;D_N)_Y$, получающегося из (5.2) при $\varepsilon^{(N)}=0=(0,...,0)\in R^N$ и в указании набора функционалов $\left(\bar{l}_1,...,\bar{l}_k\right)=\left(\bar{l}_1^{(1)},...,\bar{l}_1^{(N_1)},...,\bar{l}_k^{(1)},...,\bar{l}_k^{(N_k)}\right)$ и алгоритма $\overline{\varphi}_N$, в совокупности в виде вычислительного агрегата реализующих оценку сверху.

Тем самым, сначала, в рамках К(В)П-1, решается задача восстановления по точной информации, в идеале с окончательными выводами для всех возможных вычислительных агрегатов по линейной информации $L_N(F,Y)$, с дальнейшими уточнениями для $D_N=D_N(F,Y)$ из $L_N(F,Y)$.

Вторая часть задачи, в свою очередь, состоит в нахождении такой числовой последовательности векторов $\tilde{\varepsilon}^{(N)}=\left(\tilde{\varepsilon}_N^{(1)},...,\tilde{\varepsilon}_N^{(N)}\right)\in R^N(\{N\}$ – достаточно плотная возрастающая последовательность целых положительных чисел) с неотрицательными компонентами, что одновременно выполнены три соотношения:

$$\textit{Оценка снизу}\ \delta_N(\tilde{\varepsilon}_N;T;F;D_N)_Y\geq C_1\delta_N(0;T;F;D_N),\tag{5.3}$$

$$\textit{Оценка сверху}\ \delta_N(\tilde{\varepsilon}_N;T;F;D_N)_Y\leq C_2\delta_N(0;T;F;D_N),\tag{5.4}$$

для всяких возрастающих к $+\infty$ при возрастании N при каждом j последовательностей $\left\{\eta_N^{(j)}\right\}(N=1,2,...;j=1,2,...,N)$ имеет место равенство

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{\delta_N\left(\left(\eta_N^{(1)}\tilde{\varepsilon}_N^{(1)},...,\eta_N^{(N)}\tilde{\varepsilon}_N^{(N)}\right);T;F;D_N\right)_Y}{\delta_N\left(0;T;F;D_N\right)_Y}=\infty.\tag{5.5}$$

Другими словами, задача заключается в нахождении предельно большой величины границы $\tilde{\varepsilon}^{(N)}$ неточности информации, поскольку величина допустимой ошибки, естественно, должна быть возможно большей. Здесь же сформулировано ее свойство быть предельной, но с сохранением максимально возможной скорости убывания погрешности уклонения при восстановлении по точной информации.

При этом, (5.3) и (5.4) соответственно означают:

Оценка снизу $\delta_N(\tilde{\varepsilon}_N;T;F;D_N)_Y\geq C_1\delta_N(0;T;F;D_N)$ для последовательности векторов $\tilde{\varepsilon}^{(N)}=\left(\tilde{\varepsilon}_N^{(1)},...,\tilde{\varepsilon}_N^{(N)}\right)\in R^N$ с неотрицательными компонентами: для некоторого $_1>0$ и для некоторой возрастающей последовательности целых положительных N и для всякого вычислительного агрегата $\left(l^{(N)},\varphi_N\right)$ из D_N найдутся функция $\bar{f}\in F$ и набор чисел $\overline{\gamma}_N^{(k)},\left|\overline{\gamma}_N^{(k)}\right|\leq 1\,(k=1,...,N)$ такие, что

$$\left\|T\bar{f}(\cdot)-\varphi_N\left(l_1(\overline{f})+\tilde{\varepsilon}_N^{(1)}\bar{\gamma}_N^{(1)},...,l_N(\overline{f})+\tilde{\varepsilon}_N^{(N)}\bar{\gamma}_N^{(N)};\cdot\right)\right\|_Y\geq C_1\delta_N(0;T;F;D_N).\tag{5.6}$$

Оценка сверху $\delta_N(\tilde{\varepsilon}_N;T;F;D_N)_Y\leq C_2\delta_N(0;T;F;D_N)$ для последовательности векторов $\tilde{\varepsilon}^{(N)}=\left(\tilde{\varepsilon}_N^{(1)},...,\tilde{\varepsilon}_N^{(N)}\right)\in R^N$ с неотрицательными компонентами: для некоторого $_2>0$ и для всякого N из достаточно плотной (в связи с необходимостью указания конкретного вычислительного агрегата) возрастающей последовательности целых положительных чисел найдется вычислительный агрегат $\left(\bar{l}^{(N)}, \overline{\varphi}_N\right) = \overline{\varphi}_N\left(\bar{l}_1(f), ..., \bar{l}_N(f); \cdot\right)$ из D_N такой, что для всякой функции $f \in F$ и всякого набора чисел $\gamma_N^{(k)}, \left|\gamma_N^{(k)}\right| \leq 1$ $(k = 1, ..., N)$, выполнено неравенство

$$\left\|Tf(\cdot) - \overline{\varphi}_N\left(\bar{l}_1(f) + \tilde{\varepsilon}_N^{(1)}\gamma_N^{(1)}, ..., \bar{l}_N(\overline{f}) + \tilde{\varepsilon}_N^{(N)}\gamma_N^{(N)}; \cdot\right)\right\|_Y \leq C_2\delta_N(0; T; F; D_N). \qquad (5.7)$$

И, наконец, в К(В)П-3 надо "*укрепить*" оптимальный вычислительный агрегат $\left(\bar{l}^{(k)}, \overline{\varphi}_N\right)$ из К(В)П-1,-2, указав как можно больше других вычислительных агрегатов, предельная погрешность $\{\varepsilon_N\}$ которых не лучше $\left\{\widetilde{\varepsilon_N}\right\}$ в том смысле, что для всех $\tau = 1, \ldots, N$ $\overline{\lim\limits_{N\to\infty}} \frac{\varepsilon_N^{(\tau)}}{\tilde{\varepsilon}_N^{(\tau)}} < +\infty$

5.5 К(В)П-постановка в символической короткой записи. В итоге приходим к задаче оптимального восстановления по неточной информации с установлением предельной погрешности, оформленного под названием **"Компьютерный (вычислительный) поперечник"**, и заключающегося, в самом коротком изложении, в последовательном выполнении трех действий (при фиксированных F, T, Y и $D_N = D_N(F, Y)$) и в упрощенных записях:

1^0. Находится порядок $\asymp \delta_N(0; D_N)_Y \asymp \delta_N\left(0; \left(\bar{l}^{(N)}, \overline{\varphi}_N\right)\right)$,

2^0. Находится $\{\tilde{\varepsilon}_N\}$ такое, что $\delta_N(0; D_N) \asymp \delta_N\left(\tilde{\varepsilon}_N; \left(\bar{l}^{(N)}, \overline{\varphi}_N\right)\right)_Y$, с одновременным выполнением

$$\forall \eta_N \uparrow +\infty : \overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{\delta_N(\tilde{\varepsilon}_N\eta_N; \left(\bar{l}^{(N)}, \overline{\varphi}_N\right))_Y}{\delta_N(0; D_N)_Y} = +\infty. \qquad (5.8)$$

3^0. Массовость оптимального вычислительного агрегата $\left(\bar{l}^{(N)}, \overline{\varphi}_N\right)$ относительно предельной погрешности $\tilde{\varepsilon}_N$.

5.6 К(В)П как сверхсжатый ответ на поставленную задачу восстановления. По сути дела, задача заключается в нахождении двух абсолютов: $\delta_N(0; D_N)_Y$ с соответствующим вычислительным агрегатом $\left(\bar{l}_1, ..., \bar{l}_N, \overline{\varphi}_N\right)$ с предельной погрешностью $\tilde{\varepsilon}_N(D_N)_Y \equiv \tilde{\varepsilon}_N(D_N; \text{К(В)П} - 2)_Y$ как сверхсжатая информация по оптимальной компьютерной обработке математической модели Tf.

Тем самым, первый абсолют - идеализированный абстрактный показатель, отражающий неулучшаемый порядок D_N-восстановления по точной информации: в обозначениях - К(В)П-1 это $\delta_N(0; D_N)_Y$.

Затем обращаемся к реальности, где вычисления неточны. Тогда задача будет состоять в установлении двух границ погрешности (в данных условиях), составляющих второй абсолют. Во-первых, - это нахождение погрешности вычислений входной информации, при которых еще сохраняется порядок восстановления по точной информации, выступающего в роли Эталона (в обозначениях: $\delta_N(\tilde{\varepsilon}_N; D_N)_Y \asymp \delta_N(0; D_N)_Y$, тогда $\tilde{\varepsilon}_N$ есть $\tilde{\varepsilon}_N \equiv \tilde{\varepsilon}_N(D_N; \text{К(В)П} - 2)_Y$ – К(В)П-2 - погрешность - первая часть второго абсолюта). Во-вторых, установление предельного значения первой части второго абсолюта, означающее, что любое, даже сколь угодно медленно возрастающее, послабление $\tilde{\varepsilon}_N$ из К(В)П-2 ведет к потере ее сущности – порядка восстановления по точной информации (в обозначениях:

$$\forall \eta_N \uparrow +\infty : \overline{\lim_{N\to+\infty}} \frac{\delta_N(\eta_N\tilde{\varepsilon}_N; D_N)_Y}{\delta_N(\tilde{\varepsilon}_N; D_N)_Y} = \overline{\lim_{N\to+\infty}} \frac{\delta_N(\eta_N\tilde{\varepsilon}_N; D_N)_Y}{\delta_N(0; D_N)_Y} = +\infty).$$

Другими словами, второй абсолют заключается в нахождении такой неотрицательной последовательности $\{\delta_N(\tilde{\varepsilon}_N; D_N)_Y\}$, что соответствующая последовательность $\{\tilde{\varepsilon}_N\}$ сохраняет порядок погрешности восстановления по точной информации $\{\delta_N(0; D_N)_Y\}$, которое теряется при всяком ее ухудшении $\{\eta_N\tilde{\varepsilon}_N(\eta_N \uparrow +\infty)\}$.

5.7 Обобщенные К(В)П-постановки.

1^0 Формулировки задач (5.1)-(5.8) могут быть распространены на более общие случаи операторов, функциональных пространств и мер. Так, например, норма в определении Y может быть заменена на ненормируемую метрику, *sup* по классу F - на среднее по вероятностей мере на F.

2^0 Отметим, что постановки задач (5.1)-(5.8) основаны на точных порядковых оценках $\delta_N\left(0, D_N\right)_Y$. Необходимость соответствующей переформулировки в общем случае объясняется следующим.

В действительности, уже первый этап К(В)П-1 в постановке задачи восстановления требует нахождения точного порядка $\asymp \delta_N\left(0; D_N\right)_Y$, что, как правило, составляет нетривиальную задачу, и потому не всегда удается. Поэтому приведем формулировку о нахождении предельной погрешности $\left\{\tilde{\varepsilon}^{(N)}\right\}$ в ослабленном варианте, ограничиваясь одним частным случаем.

Так, точность в степенной шкале можно понимать как следующее (ниже все функции ψ с индексами предполагаются положительными, возрастающими к $+\infty$ на $[0,+\infty)$ и такими, что для всякого $\tau > 0$ выполнено $\psi\left(N\right) = o\left(N^{\tau}\right)$ при $N \to +\infty$):

Для некоторых ψ_1, ψ_2, ψ_3, числа $\alpha > 0$ и всех $N = 1, 2, \ldots$ выполнены соотношения

$$\frac{\psi_1\left(N\right)}{N^{\alpha}} \leq \delta_N\left(0; T; F; D_N\right)_Y \leq \frac{\psi_2\left(N\right)}{N^{\alpha}}, \quad \delta_N\left(\tilde{\varepsilon}^{(N)}; T; F; D_N\right)_Y \leq \frac{\psi_3\left(N\right)}{N^{\alpha}}$$

и для некоторого ψ_4 и всякой положительной возрастающей к $+\infty$ последовательности $\{\eta_N\}$ имеет место равенство

$$\overline{\lim_{N\to+\infty}} \frac{\delta_N\left(\eta_N\tilde{\varepsilon}^{(N)}; T; F; D_N\right)_Y}{\psi_4\left(N\right)/N^{\alpha}} = +\infty.$$

Разумеется, все теоремы, где установлены порядки $\asymp \delta_N\left(0; D_N\right)_Y$ или $\psi_1\left(N\right) \leq \delta_N(0; D_N)_Y \leq \psi_2\left(N\right)$ должны быть дополнены исследованиями по нахождению предельных погрешностей $\asymp \tilde{\varepsilon}_N$ восстановления по неточной информации с сохранением соответственно $\asymp \delta_N\left(\tilde{\varepsilon}_N; D_N\right)_Y$ или $\psi_3\left(N\right) \leq \delta_N(\tilde{\varepsilon}_N; D_N)_Y \leq \psi_4\left(N\right)$.

5.8 Вычислительные и теоретические основания в определении Компьютерного (вычислительного) поперечника. Покажем, что постановки задач (5.1)-(5.8), помимо естественного теоретического содержания, действительно нацелены на практическое использование компьютеров.

Во-первых, поскольку на компьютере можно изучать только то, что поддается описанию конечными наборами конечных чисел, то именно этим продиктовано привлечение функционалов $l(f)$ - числовой информации о функции f, априоринесущей бесконечную информацию.

По сравнению с другими характеристиками функции (например, с наилучшими приближениями функции многочленами порядка N по той или иной системе, тем не менее, в важнейших случаях вписывающихся в схему Компьютерного (вычислительного) поперечника) требованию *"для использования компьютеров исходные математические модели надо приближенно заменить такими, которые описываются конечным набором чисел"*, непосредственно отвечает числовая информация $\left(l_1\left(f\right), ..., l_k\left(f\right)\right)$ объема N о функции f, с возможностью варьирования вида l получаемой числовой информации (но не безграничного, какие-то ограничения, например, линейность, для обеспечения содержательности должны быть (см. об этом [23]).

Во-вторых, основными объектами в математических моделях (в их числе и в традиционных областях – механике, физике, технике) являются функции, интегралы, производные, решения дифференциальных, алгебраических и иных уравнений, которые в (5.1)-(5.8) вводятся конкретизацией оператора Tf.

Далее следует алгоритм φ_N переработки полученной числовой информации, с допустимой ошибкой $\varepsilon^{(N)}$ - границей неточности используемой информации, до искомого Tf со способом измерения отклонения по норме Y и с оптимизацией по всем агрегатам приближения из D_N, что и составляет содержание задачи (5.1)-(5.8). Особо следует отметить роль классов F: без каких-либо количественных ограничений на характер изменения функции (даже бесконечная дифференцируемость недостаточна) всякая дискретная информация не будет достаточной для содержательных выводов.

В заключение отметим, что постановка задачи восстановления и дискретизации по неточной информации в какой-то мере созвучна методу регуляризации А.Н.Тихонова (см., напр., [61, стр.102-108]) .

5.9 Название Компьютерный (вычислительный) поперечник объясняется следующим:

Поперечник(с уточнением "вычислительный")– оптимизация проводится по наборам вычислительных агрегатов.

Компьютерный – вычислительные агрегаты строятся по значениям функционалов $l_1, ..., l_N$ как носителей числовой информации с последующей переработкой по алгоритму φ_N , в полном соответствии с описанием компьютера как технического устройства, который, по своей сути, оперирует с действительными числами в записи по тому или иному основанию (количество разрядов и объем которых ограничивается техническими характеристиками компьютера) и производит над ними четыре действия арифметики.

На **алгоритм переработки информации** $\varphi_N(z_1, ..., z_N; \cdot)$, как выше сообщалось, не налагаются какие-либо ограничения, кроме принадлежности пространству Y как функции $(\cdot) \in \Omega_Y$ при любых фиксированных $z_1, ..., z_N$ и $\varphi_N(0, ..., 0; \cdot) \equiv 0$.

При этом, оценка сверху предполагает конкретизацию φ_N (вместе с набором функционалов $\bar{l}_1, ..., \bar{l}_k$) с сопутствующей алгоритмической сложностью, содержащую, в частности, количество арифметических операций для своей реализации (без каких-либо предварительных условий), обусловленную лишь требованиями самой задачи обеспечить порядок оценки снизу.

§6. Иллюстративные результаты по теме Компьютерного (вычислительного) поперечника - предельная погрешность неточной информации при оптимальном восстановлении

6.1 Иллюстративные К(В)П-результаты по всем возможным вычислительным агрегатам по линейной информации. Когда формулируются постановки задач, в их числе и К(В)П-постановки, то заключенная в теоремах – ответах на них,– информация и по содержанию, и даже по эстетическому виду отвечает за качество поднятых проблем.

Как это следует из определения Компьютерного (вычислительного) поперечника, точные в смысле порядка $\delta_N(0; D_N) \asymp \psi(N)$ или справедливые в какой-либо шкале $\psi_1(N) \leq \delta_N(0; D_N) \leq \psi_2(N)$ оценки по точной информации $\delta_N(0; T; F; D_N)_Y$ представляют собой лишь первый этап решения задачи, чему был посвящен §4 . Здесь формулировки теорем, в которых в модельной ситуации даны полные К(В)П-решения задач в заявленной редакции.

В связи с чем отметим, что если по К(В)П-1 можно предложить неограниченное количество иллюстративных результатов, да и то только по $D_N \neq L_N(F) \times \{\varphi_N\}_Y$, в полном объеме по К(В)П с охватом К(В)П-2,-3 к настоящему времени имеются лишь теоремы Казахстанской подшколы П.Л. Ульянова и С.М. Воронина.

6.1.1. Полное К(В)П-исследование вычислительных возможностей многочленов Лагранжа, или, "*Когда и как в вычислительной практике правильно использовать интерполяционные многочлены Лагранжа?*".

Жозеф Луи Лагранжом (25.I.1736, Турин–10.IV.1813, Париж) в 1795 году была решена задача построения алгебраического многочлена наименьшей степени, проходящего через заданные точки $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$ с различными первыми координатами. Этим многочленом является функция (см. [62])

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{t=0, t\neq k}^{n} \frac{(x - x_k)}{(x_t - x_k)},$$

носящая имя Лагранжа (как обычно бывает в таких случаях, согласно К.Пирсону [63], они были известны Варингу (1779 г.) и Эйлеру (1783г.)).

Аппроксимативные возможности многочленов Лагранжа хорошо изучены Г.Фабером, С.Н.Бернштейном, Ю.Марцинкевичем, А.Зигмундом, Г.М.Фихтенгольцем, И.П.Натансоном, К.И.Бабенко, О.В.Локуциевским и др. (подробности см., напр., в [4-6,63-69] впрочем, начальные сведения имеются в любой книге по численному анализу). Установлено, что они в одних случаях – типа построенных по узлам Чебышева, подчеркнем, с иррациональными координатами – *приемлемы* (см., напр., [67]), в других – *плохи* (что отражено в названии главы "Результаты отрицательного характера" в [68]) с позиций теории приближений, точнее, конструктивной теории функций.

Как это сравнительно недавно выяснено, в качестве средства приближения функций по их значениям в точках интерполяционные многочлены Лагранжа относятся к наилучшим тогда и только тогда, когда количество узлов равно порядку дифференцируемости интерполируемой функции (см. [70]):

При измерении погрешности данных в метрике $\|\cdot\|_{l^p_n}$ *(где для* $\rho=(\rho_1,....,\rho_n)\in R^n$ *норма* $\|\rho\|_{l^p_n}$ *равна* $\left(\sum_{\tau=1}^n|\rho_\tau|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ *или* $\max\limits_{\tau=1,...,n}|\rho_\tau|$ *смотря по тому* $1\le p<\infty$ *или* $p=\infty$ *) для класса* $W_\infty^{(n)}(M;a,b)$ *функций, определенных на отрезке* $[a,b]$ *и имеющих на нем непрерывную производную порядка* n *, по модулю ограниченную константой* M *, где* n *- число различных точек* $x_1,...,x_n$ *из* $[a,b]$ *, в которых заданы с* ε *-точностью приближенные значения восстанавливаемой функции для всякого* $x, a\le x\le b$ *имеет место равенство* $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$

$$\inf_{\varphi}\sup\left\{|f(x)-\varphi(z_1,...,z_n;x,\varepsilon)|:\ f\in W_\infty^{(n)},\|\{z_\tau-f(x_\tau)\}_{\tau=1}^n\|_{l^p_n}\le\varepsilon\right\}=$$

$$=sup\left\{\left|f(x)-\sum_{\tau=1}^{B}\left(\prod_{i\neq\tau}\frac{x-x_i}{x_\tau-x_i}\right)z_\tau\right|:\ f\in W_\infty^{(n)},\|\{z_\tau-f(x_\tau)\}_{\tau=1}^n\|_{l^p_n}\le\varepsilon\right\}=$$

$$\frac{M}{n!}\prod_{i=1}^n(x-x_i)+\varepsilon\left(\sum_{\tau=1}^n\left|\prod_{i\neq\tau}\frac{x-x_i}{x_\tau-x_i}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Вместе с тем, в вычислительной практике многочлены Лагранжа используются в сплайновой форме, как отмечается в [5, стр. 377] *"...В численной практике чаще всего (без особых, впрочем, обоснований) берется лагранжев сплайн относительно системы равноотстоящих узлов"*.

Отсюда возникает задача специального изучения аппроксимативных возможностей вычислительных агрегатов, построенных с помощью интерполяционных многочленов Лагранжа в постановке "*Когда и как в вычислительной практике правильно использовать интерполяционные многочлены Лагранжа?*".

Сразу же подчеркнем, что для исследуемого здесь класса Соболева $W_p^r(0,1)$ неулучшаемые оценки погрешности восстановления (в $L^q(0,1)$) по точной информации, полученной от всех линейных функционалов и порядковые неулучшаемые оценки по значениям в точках известны (см., напр., [71, 72]).

Действительно, пусть гладкость задается в шкале классов Соболева $W_p^r(0,1)$, а погрешность восстановления измеряется в лебеговой метрике $L^q(0,1)$ при всех $1\le p,q\le\infty, rp>1$.

Из порядкового равенства (9.5) из §9 и порядкового равенства из [73, стр. 232] поперечника Гельфанда

$$d^N(T,F)_Y\equiv\inf_{(l_1,...,l_N)\in L_N(F)}\sup\left\{\|Tf\|_Y: f\in F,\, l_\tau(f)=0\,(\tau=1,...,N)\right\}$$

следует следующее утверждение для восстановления по всевозможной линейной информации:

При $r\ge2$ *и* $1\le p,q\le\infty$ *справедливы соотношения* $(N=2,3,\dots)$

$$\delta_N(0;Tf=f;\mathrm{L}_N(W_p^r(0,1))\times\{\varphi_N\}_{L^q(0,1)})_{L^q(0,1)}\asymp d^N(Tf=f;W_p^r(0,1)))_{L^q(0,1)}\asymp$$

$$\asymp \begin{cases} N^{-r}, при\, 1 \le q \le p \le \infty \, и\, 1 \le p \le q \le 2, \\ N^{-r+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)}, при\, 1 \le p \le 2 \le q \le \infty, \\ N^{-r+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}, при\, 2 \le p \le q \le \infty. \end{cases} \tag{6.1}$$

Отметим, что в двухсторонних оценках (6.1), полученных применением (9.5) из §9, не указаны оптимальные вычислительные агрегаты.

В отношении полного восстановления по значениям в точках согласно [71, 72] имеем:

Пусть даны числа $r = 1, 2, ...; 1 \le p, q \le +\infty$ *такие, что* $rp > 1$, тогда

$$\delta_N(0; Tf = f; \mathrm{P}_N(W^r_p(0,1)) \times \{\varphi_N\}_{L^q(0,1)})_{L^q(0,1)} \asymp N^{-r+\max\left\{0; \frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right\}}. \tag{6.2}$$

В соответствии с поставленной задачей, в качестве подлежащего изучению в К(В)П-2 вычислительного агрегата $\left(\bar{l}^{(N)}, \overline{\varphi}_N\right)$ будут выступать интерполяционные сплайны Лагранжа $L_{N,r}$, определение которых следующее. При $r \ge 2$, $N = k(r-1)\, (k = 1, 2, ...)$ для набора чисел $z_0, z_1, ..., z_N$ через $L_{N,r}(z_0, z_1, ..., z_N; x) \equiv L_{N,r}(x)$ обозначим определенную на $[0,1]$ функцию, на отрезке $\frac{i(r-1)}{N} \le x \le \frac{(i+1)(r-1)}{N}$ $(i = 0, 1, ..., k-1)$ равную $P_n(x)$ при $x_t = \frac{t}{N}$, $y_t = z_t$ $(t = i\,(r-1)\,, ..., (i+1)\,(r-1))$; при $r = 1$ полагаем $L_{N,1} \equiv L_{N,2}$.

Имеет место [20]

Теорема 6.1. *Пусть даны числа* $r \ge 2$ *и* $1 \le p, q \le \infty$ *такие, что* $1 \le q \le p \le \infty$ *или* $2 \le p \le q \le \infty$. *Тогда справедливы следующие утверждения*

К(В)П-1:

$$\delta_N(0; \mathrm{L}_N(W^r_p(0,1)) \times \{\varphi_N\}_{L^q(0,1)})_{L^q(0,1)} \equiv$$

$$\inf_{\left(l^{(N)}, \varphi_N\right) \in \mathrm{L}_N(W^r_p(0,1)) \times \{\varphi_N\}_{L^q(0,1)}} \sup_{f \in W^r_p(0,1)} \|f\,(x) - \varphi_N(l_0(f), l_1(f), ..., l_N(f); x)\|_{L^q(0,1)} \asymp$$

$$\asymp \sup_{f \in W^r_p(0,1)} \left\| f\,(x) - L_{N,r}\left(f(0), f(\frac{1}{N}), ..., f(\frac{N-1}{N}), f(1); x\right)\right\|_{L^q(0,1)} \asymp$$

$$\asymp \begin{cases} N^{-r}, \ при\, 1 \le q \le p \le \infty, \\ N^{-r+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}, \ при\, 2 \le p \le q \le \infty. \end{cases} \tag{6.3}$$

К(В)П-2: *Для лагранжева интерполяционного сплайна* $L_{N,r}(f, x)$ *величина* $\tilde{\varepsilon}_N \equiv \tilde{\varepsilon}_N(r, p, q) = N^{-r+\max\left\{0; \frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right\}}$ *является предельной погрешностью: во-первых,*

$$\delta_N(0; \mathrm{L}_N(W^r_p(0,1)) \times \{\varphi_N\}_{L^q(0,1)})_{L^q(0,1)} \asymp \delta_N(\tilde{\varepsilon}_N(r,p,q); L_N(W^r_p(0,1)) \times \{\varphi_N\}_{L^q(0,1)})_{L^q(0,1)} \equiv$$

$$\equiv \inf_{\left(l^{(N)}, \varphi_N\right) \in L_N(W^r_p(0,1)) \times \{\varphi_N\}_{L^q(0,1)}} \sup_{\substack{f \in W^r_p(0,1) \\ \left|\gamma^{(\tau)}_N\right| \le 1\ (\tau = 0,1,....,N)}} \Big\| f\,(x) - \varphi_N(l_0(f) + \gamma^{(0)}_N \tilde{\varepsilon}_N,$$

$$l_1(f) + \gamma^{(1)}_N \tilde{\varepsilon}_N, ..., l_N(f) + \gamma^{(N)}_N \tilde{\varepsilon}_N; x) \Big\|_{L^q(0,1)} \asymp$$

$$\asymp \sup \Big\{ \|f\,(x) - L_{N,r}(z_0(f), z_1(f), ..., z_N(f); x)\|_{L^q(0,1)} : f \in W^r_p(0,1),$$

$$\left| f\left(\frac{\tau}{N}\right) - z_\tau(f) \right| \le \tilde{\varepsilon}_N(r,p,q) \ \ (\tau = 0, 1, ..., N) \Big\},$$

во-вторых, для всякой возрастающей к $+\infty$ *положительной последовательности* $\{\eta_N\}_{N=1}^{\infty}$ *имеет место равенство*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\delta_N\left(\eta_N \tilde{\varepsilon}_N(r,p,q) = \eta_N N^{-r+\max\left\{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}; 0\right\}}; L_{N,r}\left(f(0), f(\frac{1}{N}), ..., f(\frac{N-1}{N}), f(1); x\right)\right)_{L^q(0,1)}}{\delta_N\left(0; \mathrm{L}_N(W^r_p(0,1)) \times \{\varphi_N\}_{L^q(0,1)}\right)_{L^q(0,1)}} = +\infty.$$

К(В)П-3: *Всякий вычислительный агрегат, построенный по произвольной линейной информации не может иметь предельную погрешность большую (по порядку) предельной* *погрешности лагранжевых интерполяционных сплайнов:для всякой возрастающей к* $+\infty$ *положительной последовательности* $\{\eta_N\}_{N=1}^{\infty}$ *и всякого* $c \geq 1$, *для любого набора возможных функционалов* $l^{(N)} \equiv \{l_0; l_1; ...; l_N\}$ *таких, что* $|l_\tau(1)| \leq c\,(\tau = 0, 1, ..., N)$, *для всех вычислительных агрегатов* $\left(l^{(N)}, \varphi_N\right) \equiv \varphi_N\left(l_0\left(f\right), l_1\left(f\right), ..., l_N\left(f\right); x\right)$ *из* $l^{(N)} \times \{\varphi_N\}_{L^q(0,1)}$, *выполнено равенство*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\delta_N\left(\eta_N \tilde{\varepsilon}_N(r,p,q) = \eta_N N^{-r+\max\left\{\frac{1}{p}-\frac{1}{q};0\right\}}; l^{(N)} \times \{\varphi_N\}_{L^q(0,1)}\right)_{L^q(0,1)}}{\delta_N\left(0; \mathrm{L}_N(W_p^r(0,1)) \times \{\varphi_N\}_{L^q(0,1)}\right)_{L^q(0,1)}} = +\infty.$$

Верхние оценки в (6.3) реализуются на интерполяционных сплайнах Лагранжа и это самое главное в изучаемой постановке, так как имеются и другие вычислительные агрегаты вида конечной свертки $\sum_{k=1}^N f(\xi_k)K_N(x-\xi_k)$ и средних частичных сумм тригонометрических рядов Фурье с той же порядковой точностью.

Отметим, что всякий набор функционалов $l^{(N)} \equiv \{l_0; l_1; ...; l_N\}$ удовлетворяет условию $|l_\tau(1)| \leq c\,(\tau = 0, 1, ..., N)$ при $c = \max\{|l_\tau(1)| : \tau = 0, 1, ..., N\}$.

Двусторонняя порядковая оценка (6.1), как выше отмечалось, получена без надлежащих построений, для δ_N сформулированных в §2. Вместе с тем, исследование К(В)П-2 и -3 требуют построения оптимального вычислительного агрегата, тем более – специального вида – Лагранжевых сплайнов. В связи с чем отметим, что в [71] анонсирована оценка сверху в (6.3), за доказательством которого отсылается к статье [72].Однако в этой работе полное доказательство не обнаружено, поэтому, ради полноты изложения, нужное доказательство проведено в [20].Также отметим, что оценки снизу в (6.1) также следуют из построений в [19] при $\alpha = 0$ и $s = 1$ в (0.6).

6.1.2 Иллюстративные К(В)П-результаты по численному дифференцированию функций по всем возможным вычислительным агрегатам по линейной информации. В продолжение оценок снизу (4.1) в Теореме 4.1 установлено, что к вычислительным агрегатам, подтверждающим оценку снизу в случае $2 \leq p \leq q \leq \infty$ относятся $(\alpha_1, ..., \alpha_s)-$ производные частичных сумм по кубам тригонометрического ряда Фурье-Лебега $S_N(x; f)$:

Теорема 6.2. *Пусть даны целое положительное число* s, *числа* $2 \leq p \leq q \leq \infty$ *и неотрицательные целые числа* $r, \alpha_1, ..., \alpha_s$ *такие, что* $r > \alpha_1 + ... + \alpha_s + s\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$. *Тогда справедливы следующие утверждения* $(n = 1, 2, ...;\ N = 2^{ns})$

К(В)П-1: $\delta_N(0; L_{\mathrm{N}}(W_p^r\,(0,1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^q(0,1)^s})_{L^q(0,1)^s} \equiv$

$$\equiv \inf_{\substack{l_1,...,l_N - \text{все возможные} \\ \text{линейные функционалы}, \varphi_N}} \sup_{f\in W_p^r(0,1)^s} \left\| f^{(\alpha_1,...,\alpha_s)}\left(\cdot\right) - \varphi_N\left(l_1\left(f\right), ..., l_N\left(f\right); \cdot\right)\right\|_{L^q(0,1)^s} \asymp$$

$$N^{-\frac{r}{s}+\frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_s}{s}+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}.$$

К(В)П-2:*Для* $(\alpha_1, ..., \alpha_s)-$ *производной частичной суммы ряда Фурье*

$$\bar{\varphi}\left(\left\{\hat{f}(m)\right\}_{m\in I_n}; x\right) \equiv S_N^{(\alpha_1,...,\alpha_s)}\left(x; f\right) = \sum_{\substack{m=(m_1,...,m_s)\in Z^s: \\ |m_j|\leq 2^n\ (j=1,...,s)}} \hat{f}(m) \prod_{j=1}^{s} \left(e^{2\pi i m_j x_j}\right)^{(\alpha_j)}$$

величина $\tilde{\varepsilon}_N \equiv \tilde{\varepsilon}_N\left(\Phi_N\right) \equiv \tilde{\varepsilon}_N\left(\Phi_N(W_p^r) \times \{\varphi_N\}_{L^q(0,1)^s}\right) = N^{-\frac{r}{s}-\left(1-\frac{1}{p}\right)}$ *является предельной погрешностью:*
во-первых,

$$\delta_N(0; L_{\mathrm{N}}(W_p^r\,(0,1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^q(0,1)^s})_{L^q(0,1)^s} \asymp$$

$$\delta_N(\tilde{\varepsilon}_N\left(\Phi_N\right) = N^{-\frac{r}{s}-\left(1-\frac{1}{p}\right)}; L_{\mathrm{N}}(W_p^r\,(0,1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^q(0,1)^s})_{L^q(0,1)^s} \equiv$$

$$\equiv \inf_{\substack{l_1,...,l_N - \text{все возможные} \\ \text{линейные функционалы}, \varphi_N}} \sup \left\{ \left\| f^{(\alpha_1,...,\alpha_s)}(\cdot) - \varphi_N \left(l_1(f) + \gamma_N^{(1)} \tilde{\varepsilon}_N, ..., l_N(f) + \gamma_N^{(N)} \tilde{\varepsilon}_N; \cdot \right) \right\|_{L^q(0,1)^s} : \right.$$

$$\left. f \in W_p^r(0,1)^s, \left|\gamma_N^{(\tau)}\right| \le 1 \ (\tau = 1, ..., N) \right\} \asymp$$

$$\asymp \delta_N(\tilde{\varepsilon}_N(\Phi_N) = N^{-\frac{r}{s} - \left(1 - \frac{1}{p}\right)}; S_N^{(\alpha_1,...,\alpha_s)}(x; f))_{L^q(0,1)^s} \equiv$$

$$\equiv \sup_{\substack{f \in W_p^r(0,1)^s \\ \left|\gamma_N^{(\tau)}\right| \le 1 (\tau = 1,...,N)}} \left\| f^{(\alpha_1,...,\alpha_s)}(x) - \sum_{\substack{m = (m_1,...,m_s) \in Z^s: \\ |m_j| \le 2^n \ (j=1,...,s)}} \left(\hat{f}(m) + \gamma_N^{(m)} \tilde{\varepsilon}_N \right) \prod_{j=1}^{s} \left(e^{2\pi i m_j x_j} \right)^{(\alpha_j)} \right\|_{L^p(0,1)^s} \asymp$$

$$\asymp N^{-\frac{r}{s} + \frac{\alpha_1 + ... + \alpha_s}{s} + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)},$$

во-вторых, для всякой возрастающей к $+\infty$ *положительной последовательности* $\{\eta_N\}_{N=1}^{\infty}$ *имеет место равенство*

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\delta_N \left(\eta_N N^{-\frac{r}{s} - \left(1 - \frac{1}{p}\right)}; \sum_{\substack{m = (m_1,...,m_s) \in Z^s \\ |m_j| \le 2^n \ (j = 1,...,s)}} \hat{f}(m) \prod_{j=1}^{s} \left(e^{2\pi i m_j x_j} \right)^{(\alpha_j)} \right)_{L^q(0,1)^s}}{\delta_N \left(0; \mathrm{L}_N(W_p^r(0,1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^q(0,1)^s} \right)_{L^q(0,1)^s}} = +\infty.$$

К(В)П-3: *Всякий вычислительный агрегат* $\varphi_N \left(\hat{f}\left(m^{(1)}\right), ..., \hat{f}\left(m^{(N)}\right); x \right)$, *построенный по тригонометрическим коэффициентам Фурье с произвольным спектром из* N *гармоник, не может иметь предельную погрешность большую (по порядку) предельной погрешности* $S_N^{(\alpha_1,...,\alpha_s)}(x; f)$: *для всякой возрастающей к* $+\infty$ *положительной последовательности выполнено равенство*

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\delta_N \left(\eta_N N^{-\frac{r}{s} - \left(1 - \frac{1}{p}\right)}; \varphi_N \left(\hat{f}\left(m^{(1)}\right), ..., \hat{f}\left(m^{(N)}\right); x \right) \right)_{L^q(0,1)^s}}{\delta_N \left(0; \mathrm{L}_N(W_p^r(0,1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^q(0,1)^s} \right)_{L^q(0,1)^s}} = +\infty.$$

6.2 Иллюстративные К(В)П-результаты по значениям в точках.

6.2.1 Иллюстративные К(В)П-результаты восстановления функций по значениям в точках. Имеет место

Теорема 6.3(см. [20]). *Пусть даны числа* $1 \le p, q \le \infty$ *и* $r \ge 1$ *такие, что* $rp > 1$. *Тогда при* $\tilde{\varepsilon}_N \equiv \tilde{\varepsilon}_N(r,p,q) = N^{-r + \max\left\{0; \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right\}}$ *выполнены соотношения*

К(В)П-1: $\delta_N(0; \mathrm{P}_N(W_p^r(0,1)) \times \{\varphi_N\}_{L^q(0,1)})_{L^q(0,1)} \equiv$

$$\equiv \inf_{\xi_0, \xi_1, ..., \xi_N; \varphi_N} \sup_{f \in W_p^r(0,1)} \|f(x) - \varphi_N(f(\xi_0), f(\xi_1), ..., f(\xi_N); x)\|_{L^q(0,1)} \asymp$$

$$\asymp \sup_{f \in W_p^r(0,1)} \left\| f(x) - L_{N,r} \left(f(0), f(\frac{1}{N}), ..., f(\frac{N-1}{N}), f(1); x \right) \right\|_{L^q(0,1)} \asymp N^{-r + \max\left\{0; \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right\}}, \quad (6.4)$$

К(В)П-2: *Для лагранжевого интерполяционного сплайна* $L_{N,r}$ *величина* $\tilde{\varepsilon}_N = N^{-r + \max\left\{0; \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right\}}$ *является предельной погрешностью: во-первых,*

$$\delta_N(0; \mathrm{P}_N(W_p^r(0,1)) \times \{\varphi_N\}_{L^q(0,1)})_{L^q(0,1)} \asymp \delta_N(\tilde{\varepsilon}_N(r,p,q); \mathrm{P}_N(W_p^r(0,1)) \times \{\varphi_N\}_{L^q(0,1)})_{L^q(0,1)} \equiv$$

$$\equiv \inf_{\xi_0, \xi_1, ..., \xi_N; \varphi_N} \sup_{\substack{f \in W_p^r(0,1) \\ \left|\gamma_N^{(\tau)}\right| \le 1 \ (\tau = 0,1,...,N)}} \left\| f(x) - \varphi_N(f(\xi_0) + \gamma_N^{(0)} \tilde{\varepsilon}_N, \right.$$

$$\left. f(\xi_1) + \gamma_N^{(1)} \tilde{\varepsilon}_N, ..., f(\xi_N) + \gamma_N^{(N)} \tilde{\varepsilon}_N; x) \right\|_{L^q(0,1)} \asymp$$

$$\asymp \sup_{\substack{f\in W_p^r(0,1)\\ \left|f(\frac{\tau}{N})-z_\tau(f)\right|\le\tilde{\varepsilon}_N(r,p,q)\\ (\tau=0,1,...,N)}} \left\|f\left(E\right)-L_{N,r}(z_0(f),z_1(f),...,z_N(f);x)\right\|_{L^q(0,1)}\asymp N^{-r+\max\left\{0;\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right\}},$$

во-вторых, для всякой возрастающей к $+\infty$ *положительной последовательности* $\{\eta_N\}_{N=1}^\infty$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\delta_N\left(\eta_N\tilde{\varepsilon}_N(r,p,q)=\eta_N N^{-r+\max\left\{\frac{1}{p}-\frac{1}{q};0\right\}};L_{N,r}\left(f(0),f(\frac{1}{N}),...,f(\frac{N-1}{N}),f(1);x\right)\right)_{L^q(0,1)}}{\delta_N\left(0;\mathrm{P}_N(W_p^r(0,1))\times\{\varphi_N\}_{L^q(0,1)}\right)_{L^q(0,1)}}=+\infty.$$

К(В)П-3: *Всякий вычислительный агрегат* $\varphi_N\left(f\left(\zeta_0\right),f\left(\zeta_1\right),...,f\left(\zeta_N\right);x\right)$, *построенный по значениям функции* f *в точках* $\zeta_0,\zeta_1,...,\zeta_N$ *не может иметь предельную погрешность большую (по порядку) предельной погрешности лагранжевых интерполяционных сплайнов: для всякой возрастающей к* $+\infty$ *положительной последовательности имеет место равенство*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\delta_N\left(\eta_N\tilde{\varepsilon}_N(r,p,q)=\eta_N N^{-r+\max\left\{\frac{1}{p}-\frac{1}{q};0\right\}};\mathrm{P}_N(W_p^r(0,1))\times\{\varphi_N\}_{L^q(0,1)}\right)_{L^q(0,1)}}{\delta_N\left(0;\mathrm{P}_N(W_p^r(0,1))\times\{\varphi_N\}_{L^q(0,1)}\right)_{L^q(0,1)}}=+\infty.$$

Следствие. *Во всех случаях* $1\le p,q\le\infty, r\ge1$ *и* $rp>1$,

$$\sup_{f\in W_p^r(0,1)}\left\|f\left(x\right)-L_{N,r}\left(f;x\right)\right\|_{L^q(0,1)}\asymp N^{-r+\max\left\{0;\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right\}}.$$

Замечание. В случае восстановления по значениям в точках соотношения (6.4) доказаны в [72] и [71].

6.2.2 Иллюстративные К(В)П-результаты численного дифференцирования функций по значениям в точках. Справедлива [19]

Теорема 6.4. *Пусть даны целое положительное число* s *и неотрицательные целые числа* $r,\alpha_1,...,\alpha_s$ *такие, что* $r>\max\left\{\alpha_1+\cdots+\alpha_s,\frac{s}{2}\right\}$. *Тогда справедливы следующие утверждения*

К(В)П-1: $\delta_N(0;P_{\mathrm{N}}(W_2^r\left(0,1\right)^s)\times\{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s})_{L^2(0,1)^s}\equiv$

$$\equiv\inf_{\xi_1,...,\xi_N\in[0,1]^s;\varphi_N-\text{любое}}\sup_{f\in W_2^r(0,1)^s}\left\|f^{(\alpha_1,...,\alpha_s)}\left(x\right)-\varphi_N\left(f\left(\xi_1\right),...,f\left(\xi_N\right);x\right)\right\|_{L^2(0,1)^s}\asymp N^{-\frac{r}{s}+\frac{\alpha_1+...+\alpha_s}{s}}.$$

К(В)П-2: *Для оператора приближенного дифференцирования* $(n=1,2,...;\ N=n^s)$

$$\Lambda_N^{(\alpha_1,...,\alpha_s)}\left(x;f\right)=\frac{1}{n^s}\sum_{\substack{k=(k_1,...,k_s)\in Z^s:\\ k_j=0,1,...,n-1(j=1,...,s)}}f\left(\xi^{(k)}\right)\times$$

$$\sum_{t=(t_1,...,t_s)\in A_N}{}^{*}\left(\overline{2\pi t_1}\right)^{\alpha_1}e^{\alpha_1 i\frac{\pi}{2}sign t_1}...\left(\overline{2\pi t_s}\right)^{\alpha_s}e^{\alpha_s i\frac{\pi}{2}sign t_s}e^{2\pi i\left(t,x-\xi^{(k)}\right)}$$

$\left(\xi^{(k)}=\left(\frac{k_1}{n},...,\frac{k_s}{n}\right)\right.$ и $A_N=\left\{(t_1,...,t_s):\ t_j=-\left[\frac{n}{2}\right]+y\quad(y=1,...,n;j=1,...,s)\right\},[x]$ - целая часть $\left.x,\bar{t}=\max\left\{1,|t|\right\}\right)$

величина $\tilde{\varepsilon}_N\equiv\tilde{\varepsilon}_N\left(P_N\right)=N^{-\frac{r}{s}+\frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_s}{s}}$ *является предельной погрешностью:во-первых,*

$$\delta_N(0;P_{\mathrm{N}}(W_2^r\left(0,1\right)^s)\times\{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s})_{L^2(0,1)^s}\asymp$$

$$\delta_N(\tilde{\varepsilon}_N\left(\mathrm{P}_N\right)=N^{-\frac{r}{s}+\frac{\alpha_1+...+\alpha_s}{s}};P_{\mathrm{N}}(W_2^r\left(0,1\right)^s)\times\{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s})_{L^2(0,1)^s}\equiv$$

$$\equiv\inf_{\xi^{(1)},...,\xi^{(N)}\text{ из }[0,1]^s;\varphi_N}\sup\left\{\left\|f^{(\alpha_1,...,\alpha_s)}\left(x\right)-\varphi_N\left(f\left(\xi^{(1)}\right)+\gamma_N^{(1)}\tilde{\varepsilon}_N,...,f\left(\xi^{(N)}\right)+\gamma_N^{(N)}\tilde{\varepsilon}_N;\cdot\right)\right\|_{L^2(0,1)^s}:\right.$$

$$\left.f\in W_2^r\left(0,1\right)^s,\left|\gamma_N^{(\tau)}\right|\le1\left(\tau=1,....,N\right)\right\}\asymp$$

$$\asymp \sup_{\substack{f\in W_2^r(0,1)^s \\ \left|\gamma_N^{(\tau)}\right|\le 1(\tau=1,\ldots,N)}} \left\| f^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)}(x) - \Lambda_N^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)}(x;f)\right\|_{L^2(0,1)^s} \asymp N^{-\frac{r}{s}+\frac{\alpha_1+\ldots+\alpha_s}{s}},$$

во-вторых, для всякой возрастающей к $+\infty$ *положительной последовательности* $\{\eta_N\}_{N=1}^{\infty}$ *имеет место равенство*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\delta_N\left(\eta_N N^{-\frac{r}{s}+\frac{\alpha_1+\ldots+\alpha_s}{s}};\Lambda_N^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)}(x;f)\right)_{L^2(0,1)^s}}{\delta_N\left(0;\mathrm{P}_N(W_2^r(0,1)^s)\times\{\varphi_N\}_{L^2(0,1)}\right)_{L^2(0,1)^s}}=+\infty.$$

К(В)П-3: *Утверждение К(В)П-3 справедливо при* $r=2$ *и* $\alpha_1+\ldots+\alpha_s=1$.

6.3 Иллюстративные К(В)П-результаты по восстановлению функций по тригонометрическим коэффициентам Фурье. Справедливы следующие теоремы (см. [74]).

Теорема 6.5. *Пусть даны числа* $s\ (s=1,2,\ldots)$ *и* $r>\frac{1}{2}$. *Тогда для*

$$D_N=\left\{l_1(f)=\hat f(m^{(1)}),\ldots,l_N(f)=\hat f(m^{(N)}):m^{(1)}\in Z^s,\ldots,m^{(N)}\in Z^s\right\}\times\{\varphi_N\}$$

и $N\asymp R(lnR)^{s-1}$ *справедливы следующие утверждения:*

К(В)П-1: $\delta_N(0;D_N)\equiv\delta_N(0;Tf=f;E_s^r;D_N)_{L^2}\asymp\frac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^{r-\frac{1}{2}}}$,

К(В)П-2: *Для частичной суммы ряда Фурье* $\bar\varphi_N(\left\{\hat f(m)\right\}_{m\in\Gamma_R};x)=\sum_{m\in\Gamma_R}\hat f(m)e^{2\pi i(m,x)}$, $\Gamma_R=\left\{m=(m_1,\ldots,m_s)\in Z^s:\prod_{j=1}^s\overline{m_j}\le R\right\}$, *величина* $\tilde\varepsilon_N=\frac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^r}\ (N=2,3,\ldots)$ *является предельной погрешностью:*
во-первых,

$$\delta_N(0;D_N)\equiv\delta_N(0;Tf=f;E_s^r;D_N)_{L^2}\asymp\delta_N(\tilde\varepsilon_N;Tf=f;E_s^r;D_N)_{L^2}\asymp\tilde\varepsilon_N\sqrt{N}=\frac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^{r-\frac{1}{2}}},$$

во-вторых, для всякой возрастающей к $+\infty$ *положительной последовательности* $\{\eta_N\}_{N=1}^{\infty}$ *имеет место равенство*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\delta_N\left(\eta_N\tilde\varepsilon_N;Tf=f;E_s^r;\bar\varphi_N\left(\left\{\hat f(m)\right\}_{m\in\Gamma_R};x\right)\right)_{L^2}}{\delta_N\left(0;Tf=f;E_s^r;D_N\right)_{L^2}}=+\infty.$$

К(В)П-3:*Всякий вычислительный агрегат* $\varphi_N\left(\hat f\left(m^{(1)}\right),\ldots,\hat f\left(m^{(N)}\right);\,x\right)$, *построенный по тригонометрическим коэффициентам Фурье с произвольным спектром из* N *гармоник, не может иметь предельную погрешность большую (по порядку) предельной погрешности* $\bar\varphi_N(\left\{\hat f(m)\right\}_{m\in\Gamma_R};x)=\sum_{m\in\Gamma_R}\hat f(m)e^{2\pi i(m,x)}$: *для всякой возрастающей к* $+\infty$ *положительной последовательности выполнено равенство*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\delta_N\left(\eta_N\tilde\varepsilon_N;Tf=f;E_s^r;\varphi_N\left(\hat f\left(m^{(1)}\right),\ldots,\hat f\left(m^{(N)}\right);\,x\right)\right)_{L^2}}{\delta_N\left(0;Tf=f;E_s^r;D_N\right)_{L^2}}=+\infty.$$

Теорема 6.6 *Пусть даны числа* $s(s=1,2,\ldots)$ *и* $r>\frac{1}{2}$. *Тогда для*

$$D_N=\left\{\ l_1(f)=\hat f(m^{(1)}),\ldots,l_N(f)=\hat f(m^{(N)}):m^{(1)}\in Z^s,\ldots,m^{(N)}\in Z^s\right\}\times\{\varphi_N\}$$

и $N\asymp R(lnR)^{s-1}$ *справедливы следующие утверждения:*

К(В)П-1: $\delta_N(0)\equiv\delta_N(D_N;Tf=f;SW_2^r(0,1)^s;0)_{L^2}\asymp\frac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^r}$,

К(В)П-2: *Для частичной суммы ряда Фурье* $\bar\varphi_N(\left\{\hat f(m)\right\}_{m\in\Gamma_R};x)=\sum_{m\in\Gamma_R}\hat f(m)e^{2\pi i(m,x)}$, $\Gamma_R=\left\{m=(m_1,\ldots,m_s)\in Z^s:\prod_{j=1}^s\overline{m_j}\le R\right\}$, *величина*

$\tilde{\varepsilon}_N = \frac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^{r+\frac{1}{2}}}$ $(N = 2, 3, ...)$ *является предельной погрешностью:*
во-первых,

$$\delta_N(0) \equiv \delta_N(D_N; Tf = f; SW_2^r(0,1)^s; 0)_{L^2} \asymp \delta_N(D_N; Tf = f; SW_2^r(0,1)^s; \tilde{\varepsilon}_N)_{L^2} \asymp$$

$$\asymp \tilde{\varepsilon}_N \cdot \sqrt{N} = \frac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^r},$$

во-вторых, для всякой возрастающей к $+\infty$ *положительной последовательности* $\{\eta_N\}_{N=1}^{\infty}$ *имеет место равенство*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\delta_N\left(\eta_N\tilde{\varepsilon}_N; Tf = f; SW_2^r(0,1)^s; \bar{\varphi}_N(\left\{\hat{f}\,(m)\right\}_{m\in\Gamma_R}; x)\right)_{L^2}}{\delta_N\,(0; Tf = f; SW_2^r(0,1)^s; D_N)_{L^2}} = +\infty.$$

К(В)П-3: *Всякий вычислительный агрегат* $\varphi_N\left(\hat{f}\left(m^{(1)}\right), ..., \hat{f}\left(m^{(N)}\right);\ x\right)$, *построенный по тригонометрическим коэффициентам Фурье с произвольным спектром из* N *гармоник, не может иметь предельную погрешность большую (по порядку) предельной погрешности* $\bar{\varphi}_N(\left\{\hat{f}\,(m)\right\}_{m\in\Gamma_R}; x) = \sum_{m\in\Gamma_R} \hat{f}\,(m)\, e^{2\pi i(m,x)}$ *: для всякой возрастающей к* $+\infty$ *положительной последовательности выполнено равенство*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\delta_N\left(\eta_N\tilde{\varepsilon}_N; Tf = f; SW_2^r(0,1)^s; \varphi_N\left(\hat{f}\left(m^{(1)}\right), ..., \hat{f}\left(m^{(N)}\right);\ x\right)\right)_{L^2}}{\delta_N\,(0; Tf = f; SW_2^r(0,1)^s; D_N)_{L^2}} = +\infty.$$

6.4 Выводы и заключительные замечания. Одним из показателей, быть может даже основным показателем качества, актуальности и необходимости данной постановки задачи является формулировка теоремы – ответа на поставленную задачу. Содержание теоремы, ее информативность показывают сущность задачи. Именно в этом ключе прокомментируем теоремы 6.1-6.6.

6.4.1 Выводы и заключительные замечания по Лагранжевым сплайнам. В задаче изучения аппроксимативных возможностей интерполяционных многочленов Лагранжа в контексте К(В)П на основе теорем 6.1 и 6.3 вырисовывается следующая картина.

1°. Основным результатом Теоремы 6.1 является установление всех случаев, когда интерполяционные сплайны Лагранжа подтверждают оценки снизу в (6.1)-(6.2) – это случаи $2 \le p \le q \le \infty$ и $1 \le q \le p \le \infty$, в оставшихся случаях – потери степенного порядка по отношению к оптимальным степенным скоростям.

Далее, в рамках задач восстановления по неточной информации для Лагранжева интерполяционного сплайна по равномерной сетке показано, что порядковые неулучшаемые оценки снизу совпадают с предельно допустимой погрешностью при вычислении значений функции в узлах интерполяции, при которых сохраняется оптимальность восстановления по точным значениям.

И, наконец, показано, что любые вычислительные агрегаты, построенные по линейной информации, не могут иметь предельную погрешность большую (по порядку) предельной погрешности лагранжевых интерполяционных сплайнов.

Такие выводы и результаты получены благодаря полному исследованию соответствующего поставленной здесь задаче Компьютерного (вычислительного) поперечника в объявленной выше конкретизации.

Если в деталях, то при $2 \le p \le q \le \infty$ и $1 \le q \le p \le \infty$ интерполяционные многочлены Лагранжа дают наилучшее(в $L^q(0,1)$) среди всех мыслимых вычислительных агрегатов по линейной информации (в порядковом отношении) восстановление, более того – интерполяцию, функций с ограниченной (в $L^p(0,1)$) r-й производной на отрезке $[0,1]$, со скоростью $\ll N^{-r+\max\left\{0;\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right\}}$, если только их использовать в сплайн-форме $L_{N,r}(x)$ с $N = (r-1)k$ $(k = 1, 2, ...)$, что позволяет при фиксированной r-гладкости осуществлять приближение с произвольной точностью.

В оставшихся случаях $1 \le p < q \le 2$ и $p < 2 \le q \le \infty$ скорость приближения лагранжевыми интерполяционными сплайнами хуже наибольшей возможной скорости восстановления функций по линейной информации, совпадающей со скоростью убывания *поперечников Гельфанда (см. [73]) и линейных поперечников (см. [75])* на степенной множитель, равный соответственно $N^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$ и $N^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$.

Если же ограничиться вычислительными агрегатами $\mathrm{P}_N(W^r_p(0,1)) \times \{\varphi_N\}_{L^q(0,1)}$, построенными по значениям в точках приближаемой функции, то во всех случаях $1 \le p, q \le \infty$ лагранжевы сплайны относятся к наилучшим (см. (6.2) и (6.4)), т.е. нет необходимости в поиске других вычислительных агрегатов, построенных по значениям в точках.

Тем самым, в шкале Соболевских пространств проведено полное исследование аппроксимативных возможностей интерполяционных многочленов Лагранжа, выяснены границы их неприменимости и эффективности, с полным сервисным обслуживанием по К(В)П-2 и -3 (подробности ниже в 4°). В итоге, *приходим к принципиально новому выводу, что использование многочленов Лагранжа в качестве базового сплайна в случаях $2 \le p \le q \le \infty$ и $1 \le q \le p \le \infty$ приводит к наилучшему среди всех мыслимых агрегатов приближения по линейной информацией. Такая высокая оценка даже в важнейших случаях $p = q = 2, p = q = \infty$ и $p = 2, q = \infty$ никогда не высказывалась, что можно понимать как полную реабилитацию этого вычислительного агрегата 1795 года создания. В оставшихся случая приходится обращаться к другим средствам приближения.*

2°. Множество, составленное из всех непрерывных на [0,1] функций, которые на каждом из сегментов $\left[\frac{j(r-1)}{N}, \frac{(j+1)(r-1)}{N}\right]$ $(j = 0, 1, ..., k;\ r = 2, 3, ...)$ есть алгебраический многочлен степени не выше $r-1$, образует N-мерное подпространство в $C[0,1]$. Поэтому, функция $L_{N,r}(f; x)$ есть линейный оператор, попадающий под определение поперечника Тихомирова (см. [76]). Отсюда (в силу неравенств (3.2)-(3.3) и независимого доказательства леммы 3 в [20]), получаем новое доказательство теоремы Исмагилова [75] при $2 \le p \le q \le \infty$ и $1 \le p = q < 2$.

3°. В пределах эффективности лагранжевой сплайн-интерполяции, при повышении гладкости r восстанавливаемых функций повышается скорость интерполяции, но, одновременно, усложняется базовый интерполяционный сплайн $L_{N,r}$ – многочлен Лагранжа степени $r-1$ с r равноотстоящими узлами. Отсюда можно точно определить потери при использовании популярных в вычислительной практике кубических сплайнов - при $r \ge 4$ теряется $\asymp N^{r-4}$ от наилучше возможного среди всех мыслимых вычислительных агрегатов.

4°. Речь до сих пор шла о последствиях К(В)П-1 – исследования восстановления по точной информации. В части К(В)П-2 установлена предельная погрешность восстановления лагранжевыми интерполяционными сплайнами. В части К(В)П-3 показано, что любой вычислительный агрегат, построенный по всевозможным наборам линейных функционалов не может дать предельную погрешность большую (по порядку) нежели лагранжевы интерполяционные сплайны. Как оказалось, предельные погрешности восстановления во всех случаях эффективности лагранжевой сплайн-интерполяции имеют порядок информативной мощности соответствующего набора вычислительных агрегатов $\delta_N(0; Tf = f; W^r_p(0,1); D_N)_{L^q(0,1)}$.

5°. Как известно (см., напр., в [5, стр. 190-191]), интерполяционные сплайны Лагранжа насыщаемы. Но здесь из теорем 6.1 и 6.3 следует, что степень насыщаемости управляема в том смысле, что выбором r можно обеспечить сколь угодно большую степенную скорость приближения лагранжевыми сплайнами $L_{N,r}(x)$ (дальше будет действовать эффект насыщаемости).

6°. Полагая $x = \frac{t}{N}$ $(0 \le t \le r-1)$ в записи многочлена Лагранжа с равноотстоящими узлами получим (C^j_{r-1}-биноминальные коэффициенты)

$$L_{N,r}(x) = L_{N,r}(\frac{t}{N}) = (-1)^{r-1}\frac{t(t-1)\cdot\dots\cdot(t-r+1)}{(r-1)!}\sum_{j=0}^{r-1}\frac{(-1)^{-j}C^j_{r-1}}{t-j}f(\frac{j}{N}).$$

Множители

$$A_{r,j} = (-1)^{r-1-j}\, C_{r-1}^{j} \frac{t(t-1)\cdot ... \cdot (t-r+1)}{(t-j)(r-1)!},$$

при $f(\frac{j}{N})$ называют *коэффициентами Лагранжа.* Коэффициенты $A_{r,j}$ широко протабулированы (см. [77]).

7°. Таким образом, в контексте Компьютерного (вычислительного) поперечника задача исследования аппроксимативных возможностей интерполяционных многочленов Лагранжа получила полное решение. В связи с чем обратим внимание на то обстоятельство, что здесь в доказательствах используются далеко нетривиальные свойства центральных понятий вычислительной математики – разделенных разностей, в частности, говоря словами из [6, стр.203], ее "*красивое интегральное представление*".

8°. Результаты К(В)П-2–К(В)П-3 формируются для конкретных оптимальных вычислительных агрегатов как поддерживающих оценки снизу в К(В)П-1, поэтому значения предельных погрешностей могут быть разными.

Так, в статье [78] изучается задача восстановления функций из класса Соболева $W_2^r(0,1)$ (в $L^2\,(0,1)$) по их тригонометрическим коэффициентам Фурье с произвольным спектром

$$D_N = \Phi_N \equiv \left\{ l_N^{(1)}\,(f) = \hat{f}\left(m^{(1)}\right), ..., l_N^{(N)}\,(f) = \hat{f}\left(m^{(N)}\right) :\ m^{(1)} \in Z^s, ..., m^{(N)} \in Z^s \right\} \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s}\,.$$

В этом случае, вытекающий из теоремы 6.1 К(В)П-1 – порядок $\delta_N(0; W_2^r(0,1))_{L^2(0,1)} \asymp N^{-r}$ поддерживается частичной суммой $S_N\,(f;x)$ соответствующего тригонометрического ряда Фурье с К(В)П-2 – предельным порядком $\tilde{\varepsilon}_N(\Phi;S_N\,(f;x)) = N^{-r-1/2}$. При этом в К(В)П-3 множество $D_N\,(S_N\,(x;f))$ состоит из всех вычислительных агрегатов $\varphi_N \left(\hat{f}\left(m^{(1)}\right), ..., \hat{f}\left(m^{(N)}\right); x \right)$ из Φ_N .Здесь выбор линейных функционалов в виде коэффициентов Фурье с произвольным спектром произведен в соответствии с условием "*связанных со структурой исходного* $\left(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N\right)$ "в определении К(В)П-3, когда $\left(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N\right) = S_N\,(f;x)$.

Таким образом, величина предельной погрешности при одинаковых порядках $\delta_N(0;F)_Y$ зависит от выбора вычислительного агрегата $\left(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N\right)$, поддерживающего $\delta_N(0;F)_Y$: $\tilde{\varepsilon}_N(\text{P};L_{N,r}) = N^{-r}$ и $\tilde{\varepsilon}_N(\Phi;S_N\,(f;x)) = N^{-r-1/2}$.

В итоге, по К(В)П-1 – одинаково точным разным вычислительным агрегатам имеем разные К(В)П-2 и К(В)П-3 – результаты. Далее, К(В)П-2 – равенства $\eta_N \tilde{\varepsilon}_N(\text{P};L_{N,r}) = \eta_N N^{-r} = \theta_N \tilde{\varepsilon}_N(\Phi;S_N\,(f;x)), \theta_N = \eta_N N^{1/2}$ показывают, что из $\theta_N \uparrow +\infty$ не следует $\eta_N \uparrow +\infty$ (например, при $\theta_N = \log N$), т.е. имеем разные К(В)П-2,-3 задачи.

9°. Вопреки интуитивному ожиданию, что восстановление по линейной информации будет всегда не лучше, чем восстановление по нелинейным функционалам, сравнение порядковых оценок поперечника по Колмогорову (как восстановление функций по нелинейным функционалам) и информативной мощности данного набора линейных функционалов в случае восстановления функций из классов Соболева $W_p^r\,(0,1)$ показывает, что это не всегда выполняется (по-видимому, этот эффект имеет место не только при $s=1$, но и в общем случае $s>1$).

Как это видно из теоремы 6.3, в случае восстановления функций из классов $W_p^r(0,1)$ в метрике $L^q(0,1)$ при $2 \le p \le q \le \infty$ неулучшаемая скорость восстановления по линейной информации на множитель $N^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$ хуже неулучшаемой скорости восстановления по нелинейной информации, что следовало и ожидать.

Но,такие же оптимальные восстановления дают неожиданный эффект: при $1 \le p \le q < 2$ нелинейный случай на множитель $N^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$ хуже линейного. И, наконец, в случае $1 \le p < 2 \le q \le +\infty$ при $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} \le 1$, нелинейные более точны чем любые линейные, при $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} > 1$ линейные точнее нелинейных, поскольку $\frac{1}{p}-\frac{1}{2} \le \frac{1}{2}-\frac{1}{q} \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q} \le 1$.

Из всех этих рассуждений можно сделать следующее заключение, восстановление по нелинейным функционалом не всегда может гарантировать лучший результат по сравнению с восстановлением по линейным функционалам.

6.4.2 Выводы и заключительные замечания по численному дифференцированию.

1°. В случае $p = q = 2$ при трех основных видах информации для оператора дифференцирования $Tf = f^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)}$ восстановление по всем возможным линейным функционалам (в $L^2(0,1)^s$) производных функций из класса Соболева по точной информации имеет К(В)П-1 – порядок $\asymp N^{\frac{\alpha_1+\ldots+\alpha_s}{s}-\frac{r}{s}}$, в то же время, в тех же условиях на К(В)П-1, предельные погрешности К(В)П-2 и К(В)П-3 при восстановлении по информации, полученной от значений функции в точках и тригонометрических коэффициентов Фурье есть соответственно $\tilde{\varepsilon}_N\left(P_N\right) = N^{\frac{\alpha_1+\ldots+\alpha_s}{s}-\frac{r}{s}}$ (см. [19]) и $\tilde{\varepsilon}_N\left(\Phi_N\right) = N^{-\frac{1}{2}-\frac{r}{s}}$ (см. [79]) . Отсюда видно, что если в первом случае предельные погрешности $\tilde{\varepsilon}_N$ зависят от порядка $(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)$ восстанавливаемой производной, во второмслучае – нет.

2°. Общий принцип "*Чем сложнее оператор, тем меньше можно ошибаться в вычислениях*", в данном случае означающий "*дифференцирование ухудшает функцию*" (тогда как "*интегрирование - улучшает*") не подтверждается: при восстановлении производных по значениям в точках предельная погрешность $\tilde{\varepsilon}_N\left(P\right) = N^{\frac{\alpha_1+\ldots+\alpha_s}{s}-\frac{r}{s}}$ тем больше, чем больше порядок производной $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_s \left(|\alpha| < r\right)$.

3°. Из теоремы 6.2 следует, что при $2 \leq p \leq q \leq \infty$ частичные суммы тригонометрических рядов Фурье со спектром из "больших" коэффициентов класса или индивидуальной функции в задаче численного дифференцирования относятся к неулучшаемым среди всех мыслимых вычислительных агрегатов, построенных по произвольной линейной информации, что свидетельствует о высоких апроксимативных возможностях гармонического анализа. Вместе с тем, практические применения частичных сумм тригонометрических рядов Фурье затруднены накоплением погрешностей за счет приближенного вычисления каждого тригонометрического коэффициента Фурье, что является самостоятельной задачей (см., например, п.3 из §4). В связи с чем, можно констатировать, что хорошее в теории может быть не совсем удовлетворительным на практике.

Здесь дальнейшее исследование можно проводить следующим образом: ориентируясь на оценки снизу можно строить конкретные вычислительные агрегаты, пусть и не подтверждающие оценки снизу, но покрывающие эти потери за счет выигрыша в вычислениях. В этом же ряду находятся задачи *"трактабилити"*, где в ключе *"вычислительный агрегат хорош, но с очень далекого места"* речь идет о константах, экспоненциально растущих с увеличением размерности (см. об этом [80, 81]).

6.4.3 Выводы и заключительные замечаниям по восстановлению функций по тригонометрическим коэффициентам Фурье.

1°.Изучается задача оптимального восстановления в гильбертовой метрике функций из классов Коробова $E_s^r(r > \frac{1}{2})$ по информации, полученной от тригонометрических коэффициентов Фурье и переработанной по произвольному алгоритму φ_N .

Сначала исследуется задача оптимального восстановления по точной информации $\delta_N(0;\Phi_N)$. Затем находится такая величина $\tilde{\varepsilon}_N$ погрешности вычисления тригонометрических коэффициентов Фурье, что порядок $\delta_N(\tilde{\varepsilon}_N;\Phi_N)$ оптимального восстановления по $\tilde{\varepsilon}_N$ -точным коэффициентам Фурье будет тот же, что и по их точным значениям. Но не только, на последовательность $\tilde{\varepsilon}_N$ налагается еще одно требование – замена $\tilde{\varepsilon}_N$ на $\eta_{\mathrm{N}}\tilde{\varepsilon}_N$ с сколь угодно медленно растущими к $+\infty$ членами последовательности η_{N} имеет последствием потерю точности восстановления $\delta_N(\tilde{\varepsilon}) \asymp \delta_N(0)$.

Сами же полученные в теореме 6.5 величины следующие: $\delta_N(0;\Phi_N) \asymp \frac{(lnN)^{r(s-1)}}{N^{r-\frac{1}{2}}}$ и $\tilde{\varepsilon}_N \asymp \frac{(lnN)^{r(s-1)}}{N^r}$, последнюю величину, имеющую порядок на $\frac{1}{\sqrt{N}}$ меньше $\delta_N(0)$, мы называем "предельной погрешностью", и именно в этом заключается дальнейшее развитие тематики восстановления.

То же самое в классах $SW_2^r(0,1)^s$: $\delta_N(0) \asymp \frac{(lnN)^{r(s-1)}}{N^r}$ с предельной погрешностью $\tilde{\varepsilon}_N \asymp \frac{(lnN)^{r(s-1)}}{N^{r+\frac{1}{2}}}$ (теорема 6.6).

Тем самым, задачи восстановления функций по тригонометрическим коэффициентам Фурье из классов Коробова и из классов Соболева функций с доминирующей смешанной производной в исследуемом модельном случае решены в полном объеме.

В соотношении (6.1) К(В)П-1 – порядковые оценки получены в виде теоремы существования, в то время как при $\alpha_1 = ... = \alpha_s = 0$ в Теореме 6.2 получены "*Конструктивные доказательства*" оценок снизу в виде построения экстремальных функций.

В итоге, не исключено, что определение Компьютерного (вычислительного) поперечника дает определенный ответ на вопрос, поставленный по теме "Постановка задачи приближения функций" Н.С. Бахваловым, Н.П.Жидковым, Г.М. Кобельковым в [66, стр.35]: "*Иногда возникает следующий вопрос. Может быть, наличие большого количества различных способов приближения объясняется просто отсутствием научного подхода к постановке и решению проблемы; если бы такой подход был, то, может быть, удалось бы предложить один оптимальный способ приближения, пригодный во всех случаях? Такой вопрос возникает и при рассмотрении других разделов численного анализа. Сколь бы ни было заманчиво разработать единый подход к решению всех задач, следует все-таки признать, что многообразие методов вызывается существом дела – многообразием различных постановок проблемы. В частности,* ***различные теоретические разделы теории приближений, например интерполяции, можно рассматривать как изучение абстрактных моделей некоторых реальных классов проблем*** *(выделено нами)*".

Задача и стиль результатов К(В)П-постановки имеют многочисленные продолжения как теоретического плана, так и прикладного значения (об этом см. ниже §§7-13).

§7. История величины $\delta_N(\varepsilon^{(N)};T;F;D_N)_Y$ как неистощимого источника получения окончательных результатов "На все времена!"

7.1 К(В)П-1–постановка как известная с многочисленными результатами. Величина

$$\delta\left(0;T;F;D_N\right)_Y \equiv \inf_{(l_1,...,l_N;\varphi_N)\in D_N} \sup_{f\in F} \left\|(Tf)\left(\cdot\right) - \varphi_N\left(l_1(f),...,l_N(f);\ \cdot\right)\right\|_Y$$

была определена десятилетия тому назад, причем вряд ли можно установить первого из авторов в этом ряду. Особо отметим, что несмотря на большое количество работ, здесь не установились единые обозначения и терминология. В обоснование приведем несколько формулировок (разумеется, в своих обозначениях, смысл которых можно восстановить по текстам статей):

— К.Ю.Осипенко [82], 1976 год: "*погрешностью данного метода естественно назвать величину* $r_n(S) = \sup\limits_{x\in W}\left|L(x) - S\left(l_1(x),...,l_n(x)\right)\right|$. *Назовем метод* $S_0\left(l_1(x),...,l_n(x)\right)$ *наилучшим методом приближения, если имеет место равенство* $r_n(S_0) = \inf\limits_S r_n(S)$,"

— С.Хенрик [71], 1993 год: "*Погрешность приближения* $A \in A_n(\Lambda)$ *оператора* S *определяется как* $e(S,A) = \sup\limits_{x\in X_0}\|S(x) - A(x)\|$. *n -я минимальная детерминистическая ошибка определяется как* $e_n^{\det}(S,\Lambda) = \inf\limits_{A\in A_{n-1}(\Lambda)} e(S,A)$ ".

В наших обозначениях δ_N особо подчеркнем роль D_N – множества вычислительных агрегатов, различные конкретизации которого обеспечивают получение практически всех изучаемых в теории приближений, вычислительной математике и численном анализе задач, что, по-видимому, ранее в должной мере не акцентировалось. Более того, многие специальные случаи поглощаются общим. В случае линейных функционалов $l(f)$ и произвольных алгоритмов φ_N вычислительный агрегат $\varphi_N\left(l_1(f),...,l_N(f),\cdot\right)$ сводится к широко изучаемым в математике средствам приближений и вычислений (что было показано в §3).

Тем самым, многочисленные конкретизации D_N доказывают, что тема К(В)П-1 разрабатывалась, разумеется, со своими обозначениями, в течение многих десятилетий в неограниченном количестве публикаций, из которых, помимо приведенных в §3, также надлежит назвать работы А.Н. Колмогорова [83] — основоположника направления, А. Сарда [84], С.М.Никольского [85], С.Б.Стечкина [86], Н.С. Бахвалова [87], Н.М.Коробова [88], И.Ф.Шарыгина [52], И.Бабушки и С.Л. Соболева [89], А.Д.Иоффе и В.М.Тихомирова [90], К.И.Бабенко [6], Ч.А.Митчелли и Т.Дж.Равлина [91], Н.П.Корнейчука [26], А. Питча [92], Дж.Ф. Трауба, Г. Васильковского, Х.Вожняковского [93], Э. Новака и Х.Вожняковского [80,81], О.В.Локуциевского и М.Б. Гаврикова [5], Б.И.Голубова, А.В.Ефимова, В.А.Скворцова [94], Л.Пласкоты [95], В.М.Тихомирова, К.Ю.Осипенко, Г.Г. Магарил-Ильяева [96], Г.Г. Магарил-Ильяева и В.М. Тихомирова [98], С.Хенрика [71] (и других авторов, полное перечисление которых не представляется возможным в рамках одной статьи).

7.2 "Теория приближений" и "Вычислительная математика" как К(В)П-теории. *"Теория приближений" и "Вычислительная математика"* есть, по сути, замена сложного, в определенном смысле, объекта на простой объект, со структурными и вычислительными преимуществами соответственно, с обязательной оценкой возникающей при этом погрешности. Как нам представляется, К(В)П-1 в главном должен и может быть количественным описанием этой словестной формулировки. Именно, *Теорию приближений* и *Вычислительную математику* (линейный аспект) в контексте К(В)П-1 предлагается понимать так: при заданных T, F и Y с $D_N \equiv L_N(F) \times \{\varphi_N\}_Y$, составленном из всех возможных линейных функционалов над F и из $\{\varphi_N\}_Y$, требуется построить конкретный вычислительный агрегат $\overline{\varphi}\left(\bar{l}_1(f), ..., \bar{l}_N(f), \cdot\right)$ со свойством

$$\delta_N\left(0; T, F, L_N(F) \times \{\varphi_N\}_Y\right)_Y \asymp \sup_{f \in F} \left\| Tf - \overline{\varphi}_N(\bar{l}_1(f), ..., \bar{l}_N(f), \cdot) \right\|_Y .$$

Дальнейшие конкретизации К(В)П-постановки через $D_N \subset L_N(F) \times \{\varphi_N\}_Y$ приводят к специальным задачам типа *"Аппроксимативные возможности той или иной независимой системы", "Приближенное вычисление интегралов и иных сложных объектов"* и т.п. Особый случай *Теории приближений*и *Вычислительной математики*составляют D_N с нелинейными функционалами.

Далее, задачи К(В)П-2, -3, вместе с К(В)П-1 в совокупности составляют новую схему исследований, образующих, по нашему пониманию, *Численный анализ.*

Поскольку понятие **Компьютерного (вычислительного) поперечника по точной информации** $\delta_N(0; ; D_N)$ есть основополагающая составляющая общего определения **Компьютерного (вычислительного) поперечника,**причем в различных своих конкретизациях выступающая как отдельные разработанные теории, то естественно привести важнейшие такие примеры.

7.3 Идея Компьютерного (вычислительного) поперечника состоит в изучении аппроксимативных возможностей данного набора вычислительных агрегатов, что отражено в его названии. Но сначала обратимся к некоторым обстоятельствам, лежащим в основе определения Компьютерного (вычислительного) поперечника по точной информации.

Теория приближений: А.Н. Колмогоровым в 1935 году было установлено, что $(r = 1, 2, ...)$

$$\sup_{f \in W_\infty^r} \|f - S_{n-1}(f)\|_C = n^{-r} \left\{ \frac{4}{\pi^2} \ln n + O_r(1) \right\}, \tag{7.1}$$

где $S_{n-1}(f)$ -отрезок тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$.

Вычислительная математика: при специальном выборе ядра D_n С. М. Никольский в 1941 году показал, что $(r = 1, 2, ...)$

$$\sup_{f \in W^r} \left| f(x) - \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} f\left(x_k^{(n)}\right) D_n\left(x - x_k^{(n)}\right) \right| =$$

$$= \frac{8}{\pi^2} \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\upsilon(r-1)}}{(2\upsilon+1)^{r+1}} \cdot \frac{\log n}{n^r} \left| \sin\left(n+\frac{1}{2}\right) x \right| + O\left(n^{-r}\right), \qquad (7.2)$$

где $D_n(u) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}$, $x_k^{(n)} = \frac{2\pi k}{2n+1}$, а константа в O не зависит от x.

Полагая (напомним, что здесь и всюду ниже $(f,\, g) := \int_\Omega f(x)\bar{g}(x)dx$)

$$l_k(f) = \left(f,\, e^{ikx}\right) = \int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx,\ \varphi_{2n-1}(z_{-(n-1)}, ..., z_{n-1}; x) = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} z_k e^{ikx}$$

и

$$l_k(f) = f\left(x_k^{(n)}\right),\ \varphi_{2n+1}(z_0, ..., z_{2n}; x) = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} D_n\left(x - x_k^{(n)}\right) z_k,$$

получаем, что агрегаты приближения в (7.1) и (7.2) могут быть записаны в общем виде

$$\varphi_N\left(l_1(f), ..., l_N(f), x\right).$$

Основываясь на этом наблюдении, а также на многочисленных аналогичных исследованиях из теории приближений и вычислительной математики, с учетом того, что (см. [4, стр. 5]): *"На компьютере можно изучать только те математические модели, которые описываются конечными наборами чисел, и использовать конечные последовательности арифметических действий, а так же сравнение чисел по величине (для автоматического управления дальнейшими вычислениями)"* и было предложено К(В)П-определение.

Как известно, монография "Тригонометрические ряды" А. Зигмунда [34] совместно с одноименной монографией Н.К. Бари [97] вызвали бурное развитие этой теории. За исключением X-ой главы [34] о дискретном аналоге рядов Фурье.

То же с величиной $\delta_N\left(0; T, F, D_N\right)_Y$, содержащей в себе неистощимый потенциал получения окончательных результатов "*На все оставшиеся времена*", что частично здесь показано.

О том, как новые идеи и подходы очень трудно приживаются в науке можно проследить всего на одном примере, когда совершенно прозрачная идея 1936 года А.Н.Колмогорова [83] с подтверждающим иллюстративным результатом в модельной ситуации о поиске оптимального подпространства заданной размерности спустя целых 18 лет, более того в математически бушующем Советском Союзе, была осознана и в математический обиход в качестве элитного направления введена С.Б.Стечкиным [86]. Тем же, но только в случае К(В)П, фактическим продолжением [83], объясняется настоящая статья.

§8. Поперечники как формулировки разных оптимизационных задач теории приближений (аппроксимаций)

8.1 Поперечник как объективная числовая характеристика аппроксимативных возможностей набора способов приближенного представления элементов компакта. Различные реализации этой идеи привели к различным видам поперечников (см. также §3 и [99, стр. 491-495]):

- N - поперечник по Колмогорову (1936г.) характеризует аппроксимативные возможности N - мерных линейных многообразий;
- N - поперечник по Александрову (1933г.) характеризует степень аппроксимации N - мерными компактами;
- N - поперечник по Гельфанду характеризует точность восстановления элементов множества по их образам при их аффинных отображениях в R^N ;
- N - поперечник по Урысону (1923г.) характеризует степень N – мерности данного множества,

где N – целое положительное число.

Изучению поперечников, или, более общо, различных вариантов постановок задач об оптимальном восстановлении, направленные на рассмотрение с единых позиций задач теории приближений и вычислительной математики посвящена обширная литература, частично представленная здесь в списке литературы.

Сделаем еще одно замечание общего характера.

8.2 Каждый поперечник решает свою, заложенную в нем оптимизационную задачу. Некоторые из них при определенных конкретизациях могут быть численно эквивалентны с точностью до констант и даже совпадать. Это вовсе не означает, что надо оставить одну из них, а остальные исключить из рассмотрения, поскольку численные порядки поперечников не относятся к их основным характеристикам. К тому же, не ставятся задачи минимизации поперечников по их численным значениям.

Более того, чем дальше друг от друга по постановке оптимизационные задачи, лежащие в основе определения поперечников, тем большую информацию несут соотношения между ними (если, конечно, таковые имеются). В таких случаях результаты не исчезают, а переформулируются (напр., см. [26, стр. 371]): *"Эти равенства позволяют переформулировать в терминах задачи оптимального восстановления все результаты, полученные для поперечников ... ".*

Например, есть два вида поперечников (как это было выше показано, являющиеся различными конкретизациями Компьютерного (вычислительного) поперечника по точной информации): $d_N(F)_Y$ - поперечник Колмогорова 1936 года, где ищется N - мерное подпространство из Y, элементы которого наилучшим образом приближают F и $\lambda_N(F)_Y$ - поперечник Тихомирова 1960 года, где ищется наилучший линейный оператор со значениями опять же из N-мерного подпространства пространства.

Для некоторых классов F эти поперечники численно совпадают или эквиваленты, так же допустим, что известен порядок:

$$d_N(F)_Y \asymp \lambda_N(F)_Y \asymp \frac{\ln^b N}{N^B}. \tag{8.1}$$

Это не означает, что в 1960 году надо было вывести из обращения поперечник Колмогорова 1936 года из-за нового (тогда) поперечника Тихомирова.

Это не означает, что в 1960 году надо было остановить В.М. Тихомирова, поскольку еще в 1936 году А.Н. Колмогоров предложил поперечник того же порядка.

На самом деле, как об этом было сказано выше, каждый поперечник решает свою оптимизационную задачу, что в случае (8.1) означает, что всякое N - мерное подпространство приближает F и всякий линейный оператор со значениями в N - мерном подпространстве приближает F со скоростью $\asymp \frac{\ln^b N}{N^B}$ и (в ряде случаев) можно указать соответственно N-мерные подпространство и линейный оператор, реализующие оценки (8.1).

Таким образом, даже в рамках одного Компьютерного (вычислительного) поперечника по точной информации, разные конкретизации решают разные задачи.

Поэтому, перефразируя известные строки, можно сказать *"Поперечники разные нужны, поперечники разные важны"*, даже если они равны или одинаковы в порядковом отношении.

§9. Связь К(В)П-1 с поперечниками кодирования и Гельфанда

9.1 Поперечники кодирования и Гельфанда, определения которых, ещё раз напомним, следующие:

Поперечник по Гельфанду и *поперечник "кодирования" функций в приведенных выше определениях и обозначениях,* есть соответственно величины

$$d^N(T,F)_Y \equiv \inf_{(l_1,\ldots,l_N)\in L_N(F)} \sup\left\{\|Tf\|_Y : f\in F,\, l_\tau(f)=0\,(\tau=1,\ldots,N)\right\} \tag{9.1}$$

и

$$\lambda^N(T,F)_Y = \inf_{(l_1,\ldots,l_N)\in L_N(F)} \sup\left\{\|Tf-Tg\|_Y : f,g\in F, l_\tau(f)=l_\tau(g)\,(\tau=1,\ldots,N)\right\}, \tag{9.2}$$

где $L_N(F)$ есть множество, составленное из всевозможных $N-$ членных последовательностей линейных функционалов над F.

Поперечником по Колмогорову называется величина

$$d_N(F)_Y = \inf_{\psi_1,...,\psi_N} \sup_{f \in F} \inf_{c_k \in R\,(k=1,...,N)} \left\| f(\cdot) - \sum_{k=1}^{N} c_k \psi_k(\cdot) \right\|_Y, \tag{9.3}$$

где $\psi_1, ..., \psi_N$ - системы линейно независимых функций из Y.

Обозначим через $Q_N \equiv Q_N(F) \subset L_N(F)$ произвольное множество, составленное из $N-$ членных последовательностей линейных функционалов $l^{(N)} \equiv \left(l_N^{(1)}, ..., l_N^{(N)}\right)$ над F.

Задача К(В)П-1 связана с другими известными задачами и в порядково-эквивалентных формулировках – это поперечники "кодирования" функций $\lambda^N(T, F, Q_N)_Y$, по Гельфанду $d^N(T, F, Q_N)_Y$ и, в рамках двойственности, поперечник по Колмогорову $d_N(T, F)_Y$, – представляющих собой активно развивающуюся обширную область математики (определения и обозначения см. в [26]).

При заданных выше условиях на T (не обязательно линейный оператор), F, Y и Q_N справедлива следующая

Теорема. *Имеют место соотношения*

$$\frac{1}{2}\lambda^N(T, F, Q_N)_Y \le \delta_N(0; T, F, Q_N \times \{\varphi_N\}_Y)_Y \le \lambda^N(T, F, Q_N)_Y, \tag{9.4}$$

где

$$\lambda^N(T, F, Q_N)_Y = \inf_{(l_1,...,l_N) \in Q_N} \sup \left\{ \|Tf - Tg\|_Y : f, g \in F, l_\tau(f) = l_\tau(g)\, (\tau = 1, ..., N) \right\}.$$

Отсюда для линейного оператора T и центрально-симметрических и $1/2-$ выпуклых классов F (т.е. из $f, g \in F$ следует $\frac{1}{2}(f+g) \in F$) в качестве следствия получаем:

$$d^N(T, F, Q_N)_Y \le \delta_N(0; T, F, Q_N \times \{\varphi_N\}_Y)_Y \le 2d^N(T, F, Q_N))_Y, \tag{9.5}$$

где

$$d^N(T, F, Q_N)_Y = \inf_{(l_1,...,l_N) \in Q_N} \sup \left\{ \|Tf\|_Y : f \in F,\ l_\tau(f) = 0\, (\tau = 1, ..., N) \right\}.$$

Далее, из известных в [90] и [92] соотношений двойственности между поперечниками по Гельфанду и по Колмогорову и из (9.5) следуют порядковые соотношения между $\delta_N(0, T)$ и $d_N(T)$ на языке поляр и сопряженных пространств и операторов (см. также [19]).

Особо отметим, что задача К(В)П-2, -3 требуют точного решения задачи К(В)П-1 во второй части нахождения оптимального вычислительного агрегата в том смысле, что точный порядок $\asymp \delta_N(0; Tf = f; F; Q_N \times \{\varphi_N\}_Y)_Y$ может быть через соотношения (9.4)–(9.5) следствием ранее найденных $\asymp \lambda^N$, $\asymp d^N$ или $\asymp d_N$.

9.2 Соотношения между информативной мощностью заданного класса функционалов и поперечником кодирования. В условиях приведенных обозначений и определений проведем доказательство неравенств (9.4) для всякого набора линейных функционалов Q_N (см. также [71]).

Сначала докажем оценки сверху. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда по определению $\lambda^{(N)}$ существует $\bar{l} = \left(\bar{l}_1, ..., \bar{l}_N\right) \in Q_N$ такое, что

$$\sup_{\substack{f,g \in F: \\ \bar{l}_\tau(f) = \bar{l}_\tau(g)\,(\tau=1,2,...,N)}} \|Tf - Tg\|_Y < \lambda^N(T, F, Q_N)_Y + \varepsilon. \tag{9.6}$$

Тогда (отдельное доказательство дано ниже)

$$\begin{aligned} \delta_N(0; T, F, Q_N)_Y &\equiv \inf_{Q_N \times \{\varphi_N\}} \sup_{f \in F} \|Tf(\cdot) - \varphi_N(l_N(f), ..., l_N(f); \cdot)\|_Y \le \\ &\le \inf_{\bar{l} \times \{\varphi_N\}} \sup_{f \in F} \left\|Tf(\cdot) - \varphi_N\left(\bar{l}_N(f), ..., \bar{l}_N(f); \cdot\right)\right\|_Y \le \\ &\le \inf_{\{\varphi_N\}} \sup_{t \in Q_{\bar{l}}(F)} \sup_{b \in F_t} \|b - \varphi_N(t_1, ..., t_N; \cdot)\|_Y, \end{aligned} \tag{9.7}$$

где

$$Q_{\bar{l}}(F) = \left\{ t = (t_1, ..., t_N) : \exists f_t \in F, \bar{l}_\tau(f_t) = t_\tau\ (\tau = 1, ..., N) \right\}$$

и

$$F_t = \left\{ Tf : f \in F, \bar{l}_\tau\left(f\right) = t_\tau \ \left(\tau = 1, 2, ..., N\right) \right\}.$$

Для всякого $t \in Q_{\bar{l}}(F)$ положим $radF_t = \inf\limits_{u \in Y} \sup\limits_{b \in F_t} \|b - u\|_Y$. Для любого $t \in Q_{\bar{l}}(F)$ существует $\bar{u}_t \in Y$ такое, что

$$\sup_{b \in F_t} \|b - \bar{u}_t\|_Y < radF_t + \varepsilon. \qquad (9.8)$$

Определим $\bar{\varphi}_N\left(t; \cdot\right) := \bar{u}_t\left(\cdot\right)$. Теперь, заменяя $\inf\limits_{\varphi_N}$ в (9.7) на $\bar{\varphi}_N\left(t; \cdot\right) = \bar{u}_t\left(\cdot\right)$, в силу (9.8) получим

$$\delta_N\left(0; T, F, Q_N\right)_Y \leq \sup_{t \in Q_{\bar{l}}(F)} \sup_{b \in F_t} \|b - \bar{\varphi}_N\left(t; \cdot\right)\|_Y \leq \sup_{t \in Q_{\bar{l}}(F)} \left(radF_t + \varepsilon\right) = \sup_{t \in Q_{\bar{l}}(F)} radF_t + \varepsilon, \qquad (9.9)$$

поскольку для всякой действительнозначной функции $h(t)$ всегда $\sup\limits_t (h(t) + \varepsilon) = \sup\limits_t h(t) + \varepsilon$.

Отметим, что $radF_t \leq diamF_t = \sup\limits_{b_1, b_2 \in F_t} \|b_1 - b_2\|_Y$. Действительно, для всякого b_1 из $F_t \subset Y$ имеем

$$diamF_t = \sup_{b_1, b_2 \in F_t} \|b_1 - b_2\|_Y \geq \sup_{b \in F_t} \|b - b_1\|_Y \geq \inf_{u \in Y} \sup_{b \in F_t} \|b - u\|_Y \overset{def}{=} radF_t. \qquad (9.10)$$

Отсюда, в силу (9.9) и (9.10),

$$\delta_N\left(0; T, F, Q_N\right)_Y \leq \sup_{t \in Q_{\bar{l}}(F)} diamF_t + \varepsilon.$$

Далее, $b \in F_t$ означает, что для некоторого $f = f_b \in F$ имеет место равенства $b = Tf$ и $\bar{l}_\tau\left(f\right) = t_\tau \ \left(\tau = 1, ..., N\right)$, так что

$$diamF_t = \sup\left\{\|b_1 - b_2\|_Y : \ b_1 = Tf \in F_t, \ b_2 = Tg \in F_t\right\}.$$

И потому

$$\delta_N\left(0; T, F, Q_N\right)_Y \leq \sup_{t \in Q_{\bar{l}}(F)} \sup_{\substack{f, g \in F \\ l_\tau(f) =_\tau (g) = t_\tau \\ \tau = 1, ..., N}} \|Tf - Tg\|_Y + \varepsilon \leq$$

$$\leq \sup\left\{\|Tf - Tg\|_Y : f, g \in F, \left(l_1, \ldots, l_N\right) \in Q_N, l_\tau\left(f\right) =_\tau \left(g\right), \tau = 1, ..., N\right\} + \varepsilon = \lambda^N\left(T, , F, Q_N\right)_Y + \varepsilon.$$

Полагая здесь $\varepsilon \to 0$ получаем $\delta_N\left(0; T, F, Q_N\right)_Y \leq \lambda^N\left(T, F, Q_N\right)_Y$, т.е. оценка сверху в (9.4) доказана.

Перейдем к оценке снизу. Поскольку для всех $f, g \in F : \bar{l}_\tau\left(f\right) = \bar{l}_\tau\left(g\right) \ \ \left(\tau = 1, 2, ..., N\right)$

$$\|Tf - Tg\|_Y \leq \left\|Tf - \varphi_N\left(\bar{l}_1\left(f\right), ..., \bar{l}_N\left(f\right); y\right)\right\|_Y + \left\|Tg - \varphi_N\left(\bar{l}_1\left(g\right), ..., \bar{l}_N\left(g\right); y\right)\right\|_Y,$$

то из определений λ^N и δ_N следует неравенство $\lambda^N\left(T, F, Q_N\right)_Y \leq 2\delta_N\left(0; T, F, Q_N\right)_Y$.

Осталось доказать (9.7). Для всякого $\varphi_N \in \left\{\varphi_N\right\}_Y$

$$\sup_{f \in F} \left\|Tf\left(\,\cdot\,\right) - \varphi_N\left(\bar{l}_1\left(f\right), ..., \bar{l}_N\left(f\right);\,\cdot\,\right)\right\|_Y \leq$$

$$\leq \sup_{t \in Q_{\bar{l}}(F)} \sup_{b \in F_t} \|b - \varphi_N\left(t_1, ..., t_N;\,\cdot\,\right)\|_Y.$$

Пусть $g \in F.$ Тогда существует $\bar{t} \in Q_{\bar{l}}\left(F\right)$ и $\bar{b} \in F_{\bar{t}}$ такое, что

$$Tg\left(\,\cdot\,\right) - \varphi_N\left(\bar{l}_1\left(g\right), ..., \bar{l}_N\left(g\right);\,\cdot\,\right) = \bar{b} - \varphi_N\left(\bar{t}_1, ..., \bar{t}_N;\,\cdot\,\right).$$

Действительно, положим

$$\bar{t}_\tau = \bar{l}_\tau\left(g\right) \ \left(\tau = 1, .., N\right). \qquad (9.11)$$

Тогда, по определению $Q_{\bar{l}}\left(F\right)$ имеет место включение $\bar{t} \in Q_{\bar{l}}\left(F\right)$. Тогда

$$F_{\bar{t}} = \left\{Tf : \ f \in F, \bar{l}_\tau\left(f\right) = \bar{t}_\tau \ \left(\tau = 1, .., N\right)\right\}$$

и потому полагая $\bar{b} := Tg,$ что возможно в силу (9.11), получаем (9.7).

Теорема полностью доказана.

9.3 Соотношения между информативной мощностью заданного класса функционалов и поперечником Гельфанда. Доказательство неравенства (9.5) следует из (9.4) и следующей леммы.

Лемма (см. также [26, стр. 381]). *Пусть T линейный оператор, а класс F является $\frac{1}{2}$-выпуклым и центрально симметричным, тогда справедливо равенство*

$$\lambda^N(T,F,Q_N(F))_Y = 2d^N(T,F,Q_N(F))_Y.$$

Доказательство. Действительно, пусть даны $f,g\in F$. Тогда $-g\in F$ в силусимметричности класса F и $\frac{f-g}{2}\in F$ в силу $\frac{1}{2}-$ выпуклости класса F. Пусть линейный функционал $\bar{l}$ таков, что $\bar{l}\,(f)=\bar{l}\,(g)=0$, тогда $\bar{l}\left(\frac{f-g}{2}\right)=0.$

Поэтому для всякого набора линейных функционалов $(l_1,...,l_N)$ из $Q_N(F)$ и функций f и g из F таких, что $l_\tau\,(f)=l_\tau\,(g)$ $(\tau=1,...,N)$ для линейного оператора T имеем

$$\|Tf-Tg\|_Y=\|T\,(f-g)\|_Y=2\cdot\frac{1}{2}\,\|T\,(f-g)\|_Y=2\left\|\frac{1}{2}T\,(f-g)\right\|_Y=2\left\|T\left(\frac{f-g}{2}\right)\right\|_Y\le$$

$$\le 2\sup\left\{\|Tf\|_{\ Y}:\ f\in F,\ \ l_\tau\,(f)=0\,(\tau=1,...,N)\right\}.$$

Откуда получаем

$$\lambda^N(T,F,l^{(N)})_Y\le 2d^N(T,F,l^{(N)})_Y.$$

С другой стороны, для всякого набора линейных функционалов $\left(\bar{l}_1,...,\bar{l}_N\right)$ из $Q_N(F)$ имеем

$$2d^N(T,F,Q_N(F))_Y\equiv 2\inf_{l_1,...,l_N\in M^{(N)}}\sup\left\{\|Tf\|_{\ Y}:\ f\in F,\ \ l_\tau\,(f)=0\,(\tau=1,...,N)\right\}\le$$

$$\le 2\sup\left\{\|Tf\|_{\ Y}:\ f\in F,\ \ \bar{l}_\tau\,(f)=0\,(\tau=1,...,N)\right\}.$$

Далее,

$$2\,\|Tf_1\|_{\ Y}=\|2Tf_1\|_{\ Y}=\|Tf_1+Tf_1\|_{\ Y}=\|Tf_1-T\,(-f_1)\|_Y\,,$$

и потому

$$2d^N(T,F,Q_N(F))_Y\le\sup\left\{\|Tf-Tg\|_Y:f\in F,g\in F,\bar{l}_\tau\,(f)=\bar{l}_\tau\,(g)\,(\tau=1,...,N)\right\},$$

Откуда, в силу произвольности $\bar{l}_1,...,\bar{l}_N$ из $Q_N(F)$ получаем

$$2d^N(T,F,Q_N(F))_Y\le\lambda^N(T,F,Q_N(F))_Y.$$

Тем самым, Лемма, вместе с ней и (9.5) доказаны.

Замечание 1. В формулировке Леммы в [26, стр. 381] наложено условие выпуклости класса F, однако, как показывает приведенное доказательство, достаточна $\frac{1}{2}$-выпуклость. Также заметим, что выпуклость и $\frac{1}{2}$-выпуклость класса F не эквивалентны, а именно, из выпуклости следует $\frac{1}{2}$-выпуклость класса, однако из $\frac{1}{2}$-выпуклости не следует выпуклость класса. Действительно, пусть класс F есть множество рациональных точек на числовой прямой. Данный класс является $\frac{1}{2}$-выпуклым, но не выпуклым. На самом деле, пусть x и y (не уменьшая общности можно полагать $x<y$) рациональные числа, принадлежащие F. Тогда $\frac{x+y}{2}$ также рациональное число, как среднее двух рациональных чисел,т.е. класс $F\frac{1}{2}$-выпуклый. Однако не все числа между x и y принадлежит F, поскольку согласно следствию аксиомы Архимеда в любом интервале (x,y) имеются рациональные и иррациональные числа, а F состоит только из множества рациональных чисел.

Замечание 2. Собственно поперечник по Гельфанду есть случай тождественного оператора $Tf=f$ и $Q_N=L_N(F)$ - множества всех возможных линейных функционалов $l(f)$ над линейной оболочкой F.

Тем самым, в случае собственно поперечника по Гельфанду с точностью до множителя 2 получаем оценки информативной мощности всех возможных линейных функционалов, и наоборот.

Замечание 3. Все эквивалентные соотношения между поперечниками δ_N,λ_N и d^N. доказываются на уровне определений. В задачах К(В)П-2 и К(В)П-3 остается проблема построения в известной задаче К(В)П-1 конкретных оптимальных вычислительных агрегатов.

Замечание 4. Соотношения $\delta_N\left(0; Tf=f; F; L_{\mathrm{N}}(F)\times\{\varphi_N\}_Y\right)_Y \asymp d^N(F)_Y$ по направлениям применения от известного к новому неравнозначны. По известному порядку $\asymp \delta_N\left(0; Tf=f; F; L_{\mathrm{N}}(F)\times\{\varphi_N\}_Y\right)_Y$ можно получить тот же порядок для $\lambda^N(F)_Y$, что есть полный и окончательный результат. Например, если параметры класса Бесова $B^r_{p,\theta}(0,1)^s$, а именно целое положительное число s, $2\le p\le q\le\infty$, $1\le\theta\le\infty$ и $r>0$ таковы, что $\frac{r}{s}-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)>0$, то из известного соотношения (см. [23])

$$\delta_N\left(0; Tf=f; B^r_{p,\theta}(0,1)^s; L_{\mathrm{N}}(B^r_{p,\theta}(0,1)^s)\times\{\varphi_N\}_{L^q(0,1)^s}\right)_{L^q(0,1)^s} \asymp N^{-\frac{r}{s}+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)},$$

для поперечника "кодирования" получаем

$$\lambda^N(B^r_{p,\theta}(0,1)^s)_{L^q(0,1)^s} \asymp N^{-\frac{r}{s}+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)},$$

что далее, в силу симметричности и выпуклости класса Бесова, для поперечника по Гельфанду влечет порядковые соотношения

$$d^N(B^r_{p,\theta}(0,1)^s)_{L^q(0,1)} \asymp N^{-\frac{r}{s}+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}.$$

В обратном направлении от $\lambda^N(F)_Y$ к $\delta_N\left(0; Tf=f; F; L_{\mathrm{N}}(F)\times\{\varphi_N\}_Y\right)_Y$ полученный результат для $\asymp \delta_N\left(0; Tf=f; F; L_{\mathrm{N}}(F)\times\{\varphi_N\}_Y\right)_Y$ требует дальнейшего уточнения в смысле получения оптимального вычислительного агрегата.

Замечание 5. К(В)П-задача, состоящая в исследовании компьютерного вычислительного процесса со всеми возникающими погрешностями, численно эквивалентна задаче, в которой функция f закодирована вектором $(l_1(f),...,l_N(f))$, практическое применение чего состоит в следующем: поперечник кодирования нацелен на восстановление, когда по данному числовому коду $t=(t_1,...,t_N)$ требуется восстановить ("вспомнить") функцию f с условием $(l_1(f),...,l_N(f))=t$, а величина λ^N показывает точность (погрешность) замены f на любую функцию g с тем же кодом.

§10. Проблемные вопросы на тему "Вычислительного (компьютерного) поперечника" в контексте общих проблем численного анализа.

1°. Имеется большое количество различных постановок оптимизационных задач теории приближений, в их числе, как уже отмечалось в §8, и в виде тех или иных "поперечников".

По-видимому, наибольший интерес с теоретической и практической точек зрения представляют задачи восстановления по неточной информации, с установлением предельной погрешности используемой информации, в определенном смысле носящие окончательный характер.

Несмотря на определенные различия даже в терминологии, тем более в формулировках результатов в работах (см. об этом §11), основная задача при постановке этих задач достаточно однозначна.

Приведем две из них. Во Введении к статье [100] читаем: "*При изучении численных методов мы сталкиваемся с огромным числом алгоритмов. Например, для вычисления интеграла от функции по ее значениям в точках существует множество квадратурных формул. Для интерполяции функции по ее значениям в точках можно тоже применять различные методы: кусочно – линейная интерполяция, интерполяция сплайнами, наконец, можно воспользоваться интерполяционным многочленом Лагранжа. Как разобраться в этом множестве методов? Можно ли выбрать каком-то смысле наилучший метод?*

Как правило, при построении численного метода используются те или иные (часто довольно естественные) идеи, а затем исследуется полученный метод: выясняется его сходимость, устойчивость по отношению к неточным исходным данным и.т.д. Мы будем использовать другой подход. Пользуясь некоторой априорной информацией о принадлежности функции некоторому множеству (классу), мы будем искать в определенном смысле самый лучший метод, перебирая все (!) возможные методы. На первый взгляд это *задача кажется очень сложной - как же перебрать все методы? Наша цель – показать, что во многих случаях такая постановка позволяет дойти до конкретных методов*".

Далее, *"Конструируя численный алгоритм решения какой-либо задачи, добиваются его оптимальности по тем или иным параметрам, например по числу операций, требуемых для получения решения с заданной точностью, либо по объемам массивов, участвующих в работе, и т.п. Поэтому полезно сформулировать в общем виде проблемы, с которыми мы столкнулись, на примере краевой задачи* $y" + qy = f$, $y(0) = y(1) = 0$.

Это прежде всего ***проблема дискретизации бесконечномерных компактов****, которую мы расчленили на два этапа.* ***Первый этап – аппроксимация элементов*** **бесконечномерных компактов.** *Это традиционная задача теории приближений. Вычислительная математика нуждается прежде всего в объективных критериях оценки различных методов приближений и установления оптимальных способов приближений.*

Второй этап – кодирование элементов бесконечномерных компактов с использованием конечного объема информации. *Это традиционная задача теории табулирования, и здесь, так же как и выше, мы нуждаемся в объективных критериях оценки качества таблиц*", - [6, стр. 18].

О том же в [5, стр. 7-8]:

"*Можно сказать, что в течение почти полувековой работы накоплено огромное количество вычислительных алгоритмов, составляющее ценный опыт приближенных вычислений, дающее богатую пищу для ума и приводящее к результатам, о достоверности которых можно судить лишь с разной степенью вероятности.*

Математика пока не имеет адекватного ответа на многие принципиальные проблемы, поставленные перед ней практикой приближенных вычислений. *Их осмысление приводит к пониманию глубокий связи задач численного анализа* ***с теорией аппроксимаций (≡ приближений) колмогоровской теорией*** ε ***-энтропии.*** *Эта связь позволяет с единой точки зрения взглянуть на многие, казалось бы, разнородные вычислительные процедуры и тем самым дает возможность сравнения их между собой и целенаправленного поиска вычислительных агрегатов с оптимальными характеристиками. Таким образом, численный анализ предстает не как собрание разрозненных рецептов приближенного решения различных задач, но как единая, хотя и не завершенная концепция приближенных вычислений*".

Думается, что представленная здесь теория "Компьютерного (вычислительного) поперечника" находится в русле приведенных выше проблем.

2°. Через конкретизации $Tf, l(f), \varphi_N, F, Y$ и D_N получаем неограниченное количество тем исследований как совершенно новых экстремальных задач – естественное логическое продолжение (или завершение на данном этапе) исследований в данном круге вопросов.

Здесь, по-видимому, будет весьма полезным ещё один отрывок из Предисловия В.И.Арнольда к книге [101]: *"Пуанкаре говорил, что точно сформулировать в виде вопроса, допускающего ответ типа "да" или "нет", можно только малоинтересные задачи. По-настоящему интересные вопросы так не решаются: они приводят к постепенному продвижению вперед, к непрерывному развитию.*

Главное в задаче — по мнению Пуанкаре — это понять, что важно в ее условии, а что можно менять (подобно граничным значениям в эллиптической задаче)".

В связи с чем отметим, что К(В)П-постановка в ИТМиНВ с 1996 года развивается (разумеется, в своих масштабах и возможностях) по настоящее время.

§11. Сравнительный анализ известных постановок задач восстановления по неточной информации с К(В)П-2 и К(В)П-3.

11.1 Несводимость К(В)П -2, -3- постановок к известным. По этой теме, если известные нам публикации разбить на группы, отнеся в первую [93, 95, 109–111], во вторую – [70, 82, 96, 100, 102–108] и в третью группу из §6, то они различаются как по постановкам и, что интересно, так и по употребляемым названиям по сути одних и тех же математических объектов, и, конечно, по формулировкам результатов.

Большая серия работ на данную тему, выполненная Дж. Траубом, Х. Вожняковским, Л. Пласкотой (см. [93, 95, 109–111] и имеющуюся в них библ.), их соавторами и последователями, где в центр исследований поставлена задача минимизации суммарной *стоимости*нахождения приближенных значений (информационного "шума") в (5.1)-(5.2) и К(В)П –задачи, по самой постановке, представляют собой *различные* оптимизационные задачи. Это следует из того, что при одних и тех же исходных данных в (5.1)-(5.5), постановка К(В)П –задачи (11.1) существенно зависит от выбора функции стоимости , и в этом смысле получаемые решения достаточно *произвольны*, в то время как решения задачи *однозначны.*

Теперь о другом направлении исследований, представленных в работах В. М. Тихомирова, Г. Г. Магарил-Ильяева, К. Ю. Осипенко и А. Г. Марчука (см. [70,82,96,100,102–108] и имеющуюся в них библ.), их соавторов и последователей, где даны *точные решения* задачи (5.1)-(5.2).

Здесь следует подчеркнуть, что при всей своей абсолютной завершенности, такие результаты получаются в сравнительно редких случаях (одномерный, гильбертов и т.п.): *"Как правило, в численном анализе не удается точно подсчитать характеристики вычислительных алгоритмов, поэтому их нахождение проводится с точностью до слабой эквивалентности при $n \to +\infty$ (величины α_n и β_n называются* ***слабо эквивалентными,*** *$\alpha_n \asymp \beta_n$ при $n \to +\infty$, если $\alpha_n = O(\beta_n), \beta_n = O(\alpha_n)$ при $n \to +\infty$)"*, - [5, стр. 10].

В отношении постановки задачи восстановления по неточной информации в смысле минимизации по суммарной стоимости нахождения информационного шума, такой вид оптимизации в К(В)П не изучается.

Относительно задачи нахождения точной величины погрешности по неточной информации проведем на примере сравнения результатов из статьи [70], в котором речь идет о восстановлении по значениям функции в *фиксированных* N точках, в то время как в К(В)П (см. п.2 в §6)информация об f снимается со *всех возможных линейных функционалов*, которые также могут быть ее значениями в *произвольных* N точках, а алгоритм переработки информации в обеих статьях - произвольный (в рамках минимальных требований к измерению погрешности в Y).

В порядке обоснования вынесенного в название этого пункта утверждения обратимся к самим названным нами "известными" постановкам.

11.2 Постановка задачи восстановления как "информационного шума" (noisy information) и минимальной стоимости нахождения приближенной величины. В монографии "Информационный шум и вычислительная сложность" [95] (см. также [93, 109–111]) задача восстановления по неточной информации изучается с позиций *сложности* как *минимальной стоимости* построения Δ -приближения ($\Delta \geq 0$).

Сначала отметим, что термин noisy (шум) в названии монографии объясняется следующим образом: *"Основное предположение состоит в том, что информация есть* ***шум,*** *т.е. даётся не точной, а с некоторой ошибкой"*.

В наших обозначениях приведем необходимые предположения и названия из [93,95,109–111]. Пусть X и Y – действительные нормированные пространства функций, определенных на множествах Ω_X и Ω_Y соответственно, пусть $F \subset X$ и $T : F \mapsto Y$ есть линейный оператор, $T \neq 0$.

Пусть также задана функция φ_N ,

$\varphi_N(z_1, ..., z_N; y) \equiv \varphi_N(z; y) \equiv \varphi_N : R^N \times \Omega_Y \mapsto Y$ - (*идеализированный) алгоритм* ((idealized) algorithm).

Пусть также задан некоторый класс Λ линейных функционалов, определенных на линейной оболочке F .

Отображение

$$l^{(N)}(f) = (l_1(f), ..., l_N(f)), l^{(N)} : F \mapsto R^N,$$

где все функционалы $l_j (j = 1, ..., N)$ принадлежат классу Λ , авторы [93,95,109–111] называют *информационным оператором* (information operator), а $l^{(N)}(f) = (l_1(f), ..., l_N(f))$ - *(точной) информацией об* f (the (exact) information about f).

Также предполагается заданным вектор $\varepsilon^{(N)} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_N) \in R^N$ с неотрицательными компонентами, - *вектор допустимой точности отклонения* (precision (tolerance) vector).

Рассматриваются два типа неточной информации об f – абсолютная и относительная с допустимым отклонением ε. Вектор $z = (z_1, ..., z_N)$ называют *информационным шумом (отклонением)* (noisy (perturbed) information), если для всех $j (j = 1, ..., N)$ выполнено

(a) $|z_j - l_j(f)| \le \varepsilon_j$ *абсолютное отклонение* (the absolute perturbation case) или

(в) $|z_j - l_j(f)| \le \varepsilon_j\, |l_j(f)|$ *относительное отклонение* (the relative perturbation case).

Здесь *"относительность"* отклонения заключается в том, что большие величины приближаются с большей погрешностью, тогда как "малые" - с меньшей, что, конечно, естественно.

Далее,

$$\delta_N(abc; l^{(N)}; \varphi_N; T; F; \varepsilon^{(N)})_Y = \sup_{\substack{f\in F, (z_1,...,z_N)\in R^N: \\ |z_j - l_j(f)|\le \varepsilon_j (j=1,...,N)}} \|(Tf)(\cdot) - \varphi_N(z_1, ..., z_N; \cdot)\|_Y$$

и

$$\delta_N(rel; l^{(N)}; \varphi_N; T; F; \varepsilon^{(N)})_Y = \sup_{\substack{f\in F, (z_1,...,z_N)\in R^N: \\ |z_j - l_j(f)|\le \varepsilon_j |l_j(f)| (j=1,...,N)}} \|(Tf)(\cdot) - \varphi_N(z_1, ..., z_N; \cdot)\|_Y .$$

В общем случае, величину δ_N можно определить так

$$\delta_N(l^{(N)}; \varphi_N; T; F; \tau^{(N)}(\varepsilon^{(N)}; f))_Y = \sup_{\substack{f\in F, (z_1,...,z_N): \\ |z_j - l_j(f)|\le \tau_j(\varepsilon_j; f)\ (j=1,...,N)}} \|(Tf)(\cdot) - \varphi_N(z_1, ..., z_N; \cdot)\|_Y .$$

где $\tau_j(\varepsilon_j; f)\, (f \in F; j = 1, ..., N)$ - неотрицательные функции от ε_j и $f, \tau^{(N)}(\varepsilon^{(N)}; f) = (\tau_1(\varepsilon_1; f), ..., \tau_N(\varepsilon_N; f))$.

Для $l \in \Lambda$ и $f \in F$ через $c(\varepsilon) = c^{abc}(\varepsilon)$ и $c(\varepsilon) = c^{rel}(\varepsilon)$ обозначена *стоимость* (cost) получения числа z такого, что $|z - l(f)| \le \tau(\varepsilon; f)$, где $\tau(\varepsilon; f) = \varepsilon$ и $\tau(\varepsilon; f) = \varepsilon\, |l(f)|$ в случаях абсолютной и относительной отклонений соответственно $(\varepsilon \ge 0)$.

Предполагается, что $c(\varepsilon)$ не зависит от *l, f* и *z*.

В общем случае, в [93, 95, 109–111] невозрастающую функцию $c(\varepsilon) \quad : \quad [0, +\infty) \to [0, +\infty]$ называют *ценовой функцией*, и говорят о *"стоимости* $c(\varepsilon)$ *получения приближенного значения* $l(f)$ *с точностью* ε *"*.

Примеры ценовой функции из [95, стр. 92] следующие:

$$c(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2},\ c(\varepsilon) = \max\{0; -\log_\delta \varepsilon\} \text{ и } c(\varepsilon) = c_{fix}(\varepsilon) = \begin{cases} +\infty \ \textit{при}\, 0 \le \varepsilon < \varepsilon_0 \\ c_0 \ \textit{при}\, \varepsilon \ge \varepsilon_0 \end{cases} .$$

Тема стоимости и сложности обсуждается в [95, стр. 92-120].

Полная стоимость получения информации $z = (z_1, ..., z_N)$ с точностью $\varepsilon^{(N)} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_N)$, по определению, равно

$$c(\varepsilon^{(N)}) = \sum_{j=1}^{N} c(\varepsilon_j).$$

Согласно [95, 109] число $mc(\Delta)$ есть *минимальная информационная стоимость* (minimal information cost) получения Δ - аппроксимации, если

$$\min c(\Delta; T; F)_Y \equiv mc(\Delta) =$$

$$= \inf \Big\{ c(\varepsilon^{(N)}) : \exists N, \exists l^{(N)}, \exists \varphi_N, \exists \tau^{(N)}(\varepsilon^{(N)}, f) = (\tau_1(\varepsilon_1; f), ..., \tau_N(\varepsilon_N; f)) \textit{ такие, что}$$
$$\delta_N(l^{(N)}; \varphi_N; T; F; \tau^{(N)}(\varepsilon^{(N)}; f))_Y \le \Delta \Big\}. \tag{11.1}$$

В качестве иллюстрации данной постановки задачи приведем одну теорему (из [109]). Вектор $z = (z_1, ..., z_N)$ определен из условий

$$|z_j - f(t_j)| \le \tau_j(\varepsilon_j; f) = \varepsilon_j \min\{|f(t_j)|; \mu_j\}\ (1 \le j \le N), \tag{11.2}$$

где $\varepsilon_j = 2^{-m_j}$ и $\mu_j = 2^{-2^{e_j}}$, а

$$c(\varepsilon) = \log_2 \frac{1}{\varepsilon}\ \textit{при}\, \varepsilon = 2^{-m} \tag{11.3}$$

и

$$c(\varepsilon) = \log_2 \log_2 \frac{1}{\varepsilon}\, при\, \varepsilon = 2^{-2^e}. \tag{11.4}$$

Тогда, согласно (11.3)-(11.4), стоимость нахождения вектора $z = (z_1, ..., z_N)$ составляет $\sum_{j=1}^{N}(m_j + e_j)$ двоичных битов.

Пусть

$$F = C^r\,(0,1)^s = \left\{ f : \|f\| = \max_{0 \le k_1 + \ldots + k_s = i \le r}\ \sup_{x \in [0,1]^s} \left| \frac{\partial^i f(x)}{(\partial x_1)^{k_1} \ldots (\partial x_s)^{k_s}} \right| \le 1 \right\}.$$

Пусть также набор функционалов Λ состоит из значений функции f во всех возможных точках: $l(f) = f(t), t \in [0,1]^s$.

В этих условиях утверждается (см. [109]), что минимальное число бит $mb(\Delta)$, достаточных для восстановления всех функций $f \in F$ с погрешностью не более Δ, удовлетворяет соотношению

$$mb(\Delta) \asymp \Delta^{-\frac{r}{s}} \log_2 \frac{1}{\Delta}\, (\Delta \to +0).$$

Далее, последнее произведение разбивается на два сомножителя: $mb(\Delta)$ бит достаточны для вычисления значений функций в $N \asymp \Delta^{-\frac{r}{s}}$ равномерно распределенных точках, причем для их хранения в записи с фиксированной запятой требуется $m_j = m$- значных бит, где $m_j \asymp \log_2 \frac{1}{\Delta}, 1 \le j \le N$.

Комментарий. Таким образом, в ряде исследований (см. например, [93, 95, 109–111]) в задачах восстановления по неточной информации оптимизация проводится относительно понятия *стоимость* и базирующейся на нем понятии *сложности задачи*, как минимальной стоимости построения Δ - приближения.

В свою очередь эти понятия основаны на выборе простейшей операции, к которым относят арифметические операции, операции сравнения, вычисления максимума из конечного набора чисел, арифметического корня, интеграла, линейного и нелинейного функционала, т.е. здесь выбор необычно широк, поскольку вычисление одного значения функционала может состоять из арифметических операций, количество которых неограниченно возрастает с повышением точности вычислений.

Каждой простейшей операции p ставится в соответствие её *сложность* –неотрицательное число *comp(p)*, более – менее разумное обоснование которого скорее всего носит субъективный характер.

Так, с точки зрения удобства вычислений в качестве простейших операций часто выбирают четыре арифметические операции над вещественными числами, считая при этом, что стоимость, а вместе с ней и сложность каждой из них равна единице. При этом, предполагается, что мы можем *точно* и с единичными затратами выполнять сложение, вычитание, умножение и деление двух вещественных чисел (см., напр., [93, стр. 73-74]). Тем самым, приравниваем сложность выполнения действий сложения и умножения, хотя целый раздел математики и информатики, берущий начало от фундаментального результата А.А. Карацубы [112], носит название "*Быстрые вычисления*", центральным моментом в который является замена одного умножения на ограниченное число сложений (см. об этом, например, [6, Глава I, §4]).

Далее, в (11.2)-(11.4) вычисление одного значения функции $l(f) = f(t)$ может намного превзойти сложность $m + e$, что в данной модели вычислений никак не учитывается. Более того, сравнение числа $\mu = 2^{-2^e}$ и приближенного значения $f(t)$ может оказаться невыполнимым по техническим возможностям ЭВМ.

11.3 Точные результаты по неточной информации. Сформулируем некоторые из серии красивых, как и все точные результаты, иллюстрационных (по нашему выбору) теорем из статей [70,82,96,100,102–108]. Как отмечается в [5, стр.245] "*Точные значения поперечников получить значительно труднее слабой эквивалентности и они известны в немногих случаях, а их вычисление принадлежит в основном В.М.Тихомирову [32]*".

Начнем с общей постановки задачи (опять же в наших обозначениях, но с сохранением терминологии).

Пусть X , L - векторные пространства, $F \subset X, Y$ - нормированное пространство.

Речь идет о восстановлении линейного оператора $T : X \supset F \mapsto Y$ при условии, что о каждом элементе $f \in F$ (принадлежность f множеству F есть *априорная информация* в задаче оптимального восстановления) *исходная информация* $l(f) \in L, l : F \mapsto L$ задана в виде z (*апостериорной информации* об f) *с точностью* V , т.е. как включение $l(f) - z \in V$, где $V \subset L$ - некоторое фиксированное множество (как правило, выпуклое и уравновешенное).

Если $V = 0$, то говорят, что *исходнаяинформация* $l(f)$ *задана точно.*

Далее, задается *метод восстановления – произвольноеотображение* $\varphi(z) : L \mapsto Y$.

Погрешностью метода восстановления φ называют величину

$$\delta(l, \varphi, T, F, V) := \sup_{\substack{f \in F, z \in L \\ l(f) - z \in V}} \|Tf - \varphi(z)\|_Y . \tag{11.5}$$

Далее, величину

$$\delta(l, T, F, V) := \inf_{\varphi : L \mapsto Y} \delta(l, \varphi, T, F, V) \tag{11.6}$$

называют *погрешностью оптимального восстановления*, а метод $\overline{\varphi}$, на котором эта нижняя грань достигается (если таковой существует) – *оптимальным методом восстановления.*

В указанных выше работах [70,82,96,100,102–108] изучены следующие конкретизации общей задачи (11.5)-(11.6) (см. также (5.1)-(5.2)).

1°. Точное восстановление функций по неточно вычисленным значениям в точках. Погрешности измеряются в метрике $\|\cdot\|_{l_n^p}$, где $\|\rho\|_{l_n^p}$ равно $\left(\sum_{j=1}^n |\rho_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ или $\max\limits_{j=1,...,n} |\rho_j|$ смотря по тому $1 \le p < \infty$ или $p = \infty$.

Следующий результат для класса Никольского H_∞^ω доказан в [70]:

При измерении погрешности данных в метрике $\|\rho\|_{l_N^\infty}$ *для класса* $H_\infty^\omega = \{f : |f(x) - f(y)| \le \omega(|x - y|), a \le x, y \le b\}$, *где* $\omega(\delta)$ *- заданный модуль непрерывности, для точек* $a \le x_1 < x_2 < ... < x_N \le b$, *в которых заданы приближенные значения, для всякого* $x, a \le x \le b$ *имеет место равенство*

$$\inf_{\varphi} \sup_{\substack{f \in H_\infty^\omega \\ \max\limits_{j=1,...,N} |z_j - f(x_j)| \le \varepsilon}} |f(x) - \varphi(x; \varepsilon; z_1, ..., z_N)| =$$

$$= \sup_{\substack{f \in H_\infty^\omega \\ \max\limits_{j=1,...,N} |\rho_j| \le \varepsilon}} |f(x) - S_0(x; \varepsilon; f(x_1) + \rho_1, ..., f(x_N) + \rho_N)| = \varepsilon + \omega\left(\min_{i=1,...,N} |x - x_i|\right),$$

где $S_0(x; \varepsilon; z_1, ..., z_N)$ - выписываемая в явном виде кусочно-постоянная функция.

2°. Точное восстановление функций по неточно вычисленным тригонометрическим коэффициентам Фурье $\{a_k\}$ **и** $\{b_k\}$ $(N = card\, A + card\, B,\ 0 \in A)$

$$\inf_{\varphi} \sup \left\{ \left\| f(\cdot) - \varphi(z_1^{(a)}, ..., z_N^{(b)}; \cdot) \right\|_{L^2(0,2\pi)} : f \in W_2^1(0, 2\pi), \left| a_k(f) - z_k^{(a)} \right| \le \varepsilon, \right.$$
$$\left. k \in A, \left| b_k(f) - z_k^{(b)} \right| \le \varepsilon, k \in B \right\} =$$
$$= \sup \left\{ \left\| f(x) - \frac{z_0^{(a)}}{2} - \sum_{k=0}^{P_0} \left(1 - \frac{k^2}{(p_0 + 1)^2}\right) \left(z_k^{(a)} \cos kx + z_k^{(b)} \sin kx\right) \right\|_{L^2(0,2\pi)} : \right.$$
$$\left. f \in W_2^1(0, 2\pi), \left| a_k(f) - z_k^{(a)} \right| \le \varepsilon, k \in A, \left| b_k(f) - z_k^{(b)} \right| \le \varepsilon, k \in B \right\} =$$
$$= \frac{1}{p_0 + 1} \sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2}{6}(p_0 + 1)(8p_0^2 + 13p_0 + 3)},$$

где

$$k_a = \min_{k \in N \setminus A} k,\ k_b = \min_{k \in N \setminus B} k,\ k_0 = \min\{k_a, k_b\},$$

$$p_0 = \max\left\{p : 2\varepsilon^2 \sum_{k=0}^{p} k^2 < 1,\ 0 \le p \le k_0 - 1\right\}.$$

Задача оптимального восстановления функций по тригонометрическим коэффициентам Фурье имеет следующее точное решение (см. [102]):

Пусть $I = \left\{\hat{f}\,(m)\right\}_{|m|\le N}$ и $I_\varepsilon^{2N+1} = \left\{z_m : \left|z_m - \hat{f}\,(m)\right| < \varepsilon,\ |m| \le N\right\}$, тогда

$$E\left(Tf = f;\, W_2^r\,(0,1)\,;\, I_\varepsilon^{2N+1}\right) = \sqrt{\varepsilon^2 + (N+1)^{-2r}},$$

что в обозначениях (2.1)-(2.2) означает

$$\delta_N\left(\tilde{\varepsilon}_N = \varepsilon; D_N^{(T)};\, Tf = f;\, W_2^r\,(0,1)\right)_{L^2} = \sqrt{\varepsilon^2 + (N+1)^{-2r}},$$

где $D_N^{(T)} = \left\{l_m\,(f) = \hat{f}\,(m) : m \in Z,\ |m| \le N\right\} \times \{\varphi_N\}$.

3°. Точное восстановление производных по неточно вычисленным тригонометрическим коэффициентам Фурье ($k, r \in N, 0 < k < r$ и $N \in \mathbb{N}$):

$$\inf_{\varphi_N} \sup_{\substack{f\in W_2^r(0,2\pi) \\ \sqrt{\sum_{m=1}^n \left|\hat{f}(m)-z_m\right|^2}\le\varepsilon}} \left\|f^{(k)}(\cdot) - \varphi_N(z_1,...,z_N;\,\cdot)\right\|_{L^2(0,2\pi)^s} =$$

$$= \begin{cases} \left(a^{2k}(N)\varepsilon^2 + \frac{1}{(N+1)^{2(r-k)}}\right)^{\frac{1}{2}}, 1 \le N \le \hat{N}, \\ \left(\hat{n}^{2k}\varepsilon^2 + \frac{s_1^{2k}-(s_1-1)^{2k}}{s_1^{2r}-(s_1-1)^{2r}}\right)^{\frac{1}{2}}\ N \ge \hat{N}, \end{cases}$$

где последовательно определены $\hat{f}\,(m)\,, s_0, s_1\hat{N}, a(N), \hat{n}$ и $\hat{n}'$

$$\hat{f}\,(m) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\,(x)\ e^{-imx}dx,$$

$$s_0 = s_0(N) = \min\left\{s \in N : \frac{(s+1)^{2k} - s^{2k}}{(s+1)^{2r} - s^{2r}} \le \frac{1}{(N+1)^{2(r-k)}}\right\},$$

$$(s_1 - 1)^r \le \frac{1}{\delta} < s_1^r, (\delta > s_0^{-r}, s_1 \le s_0),$$

$$\hat{N} = min\{N \in \mathbb{N} : s_0^r \ge \frac{1}{\delta}\}, a(N) = s_0\left(1 - \left(\frac{s_0}{N+1}\right)^{2(r-k)}\right)^{\frac{1}{2k}}.$$

$$\hat{n} = s_1(s_1 - 1)\left(\frac{s_1^{2(r-k)} - (s_1-1)^{2(r-k)}}{s_1^{2r} - (s_1-1)^{2r}}\right)^{\frac{1}{2k}}, \hat{n}' = \begin{cases} a(N), 1 \le N \le \hat{N}, \\ \hat{n}, N \ge \hat{N}. \end{cases}$$

При этом метод

$$\varphi(z;t) = \sum_{|j|\le\hat{n}'} (ij)^k z_j e^{ijt} + \sum_{\hat{n}'<|j|\le N'} (ij)^k \frac{z_j}{(1+\gamma j^{2r})} e^{ijt},$$

где

$$N' = \min\{N, \hat{N}\},\ \gamma = \begin{cases} \frac{1}{(N+1)^{2(r-k)}\hat{n}^{2k}},\ 1 \le N \le \hat{N}, \\ \frac{s_1^{2k}-(s_1-1)^{2k}}{(s_1^{2r}-(s_1-1)^{2r})\hat{n}^{2k}}, N \ge \hat{N} \end{cases}$$

является оптимальным.

4°. Точное восстановление решений волнового уравнения по неточным начальным данным.

Рассмотрим волновое уравнение нулевыми граничными условиями и нулевой начальной скоростью (см. [100])

$$u_{tt} = u_{xx},\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = 0$$

Как известно, точное решение этой задачи имеет вид

$$u(x,t) - \sum_{m=1}^{\infty} a_m(f) \cos mt \sin mx,\ a_m(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin mx dx. \tag{11.7}$$

Ставится задача поиска оптимального метода восстановления решения задачи (11.7) в момент времени τ на классе $W_2^n([0,\pi])$

$$\delta_N \equiv \inf_{\varphi: R^N \to L_2([0,\pi])} \sup_{\substack{f\in W_2^n([0,\pi]),\,(z_1,...,z_N)\in R^N \\ \sum_{j=1}^N |a_j(f)-z_j|^2\le\varepsilon^2}} \|u(\cdot,\tau) - \varphi(z_1,...,z_N;\cdot)\|_{L_2([0,\pi])}$$

по неточной информации о коэффициентах Фурье $\sum_{j=1}^N |a_j(f) - z_j|^2 \le \varepsilon^2$, $\varepsilon > 0$.

Вводятся обозначения

$$A = \max_{1\le j\le N} \frac{\cos^2 j\tau}{j^{2n}} = \frac{\cos^2 p\tau}{p^{2n}},\ B = \max_{j>N} \frac{\cos^2 j\tau}{j^{2n}} = \frac{\cos^2 q\tau}{q^{2n}},$$

пусть r определятся из условия

$$\cos^2 r\tau - Br^{2n} = \max_{p\le j\le N}\left(\cos^2 j\tau - Bj^{2n}\right),$$

и, далее, последовательность s_{k+1} определяется равенствами

$$\frac{\cos^2 s_{k+1}\tau - \cos^2 s_k\tau}{s_{k+1}^{2n} - s_k^{2n}} = \max_{1\le j\le N} \frac{\cos^2 j\tau - \cos^2 s_k\tau}{j^{2n} - s_k^{2n}},\quad k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

где $s_0 = p$, $s_m = r$, а

$$J_k = \left\{ j \in N \cap [1,N]:\ \frac{\cos^2 j\tau}{j^{2n}} > \frac{\cos^2 s_{k+1}\tau - \cos^2 s_k\tau}{s_{k+1}^{2n} - s_k^{2n}} \right\},\quad k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

$$J_m = \left\{ j \in N \cap [1,N]:\ \frac{\cos^2 j\tau}{j^{2n}} > B \right\}.$$

Справедливы следующие утверждения.

При $B \ge A$ для всех $\varepsilon > 0$ оптимальный метод восстановления волнового уравнения

$$u(x,\tau) \approx 0,$$

а для его погрешности справедливо равенство

$$\delta_N = \frac{|\cos q\tau|}{q^n}.$$

Если $B < A$, то

(i) при $\varepsilon \ge p^{-n}$

$$\delta_N = \frac{|\cos p\tau|}{p^n},$$

а метод $u(x,\tau) \approx 0$ оптимальный,

(ii) при $s_{k+1}^{-n} \le \delta < s_k^{-n}$, $k = 0,\ 1,\ ...,\ m-1$,

$$\delta_N = \sqrt{\frac{s_{k+1}^{2n}\varepsilon^2 - 1}{s_{k+1}^{2n} - s_k^{2n}} \cos^2 s_k\tau + \frac{1 - \varepsilon^2 s_k^{2n}}{s_{k+1}^{2n} - s_k^{2n}} \cos^2 s_{k+1}\tau},$$

а метод

$$u(x,\tau) \approx \sum_{j\in J_k} \left(1 + \frac{\cos^2 s_{k+1}\tau - \cos^2 s_k\tau}{s_{k+1}^{2n}\cos^2 s_k\tau - s_k^{2n}\cos^2 s_{k+1}\tau} \right)^{-1} z_j \cos j\tau \sin jx$$

оптимальный;

(iii) при $\varepsilon < r^{-n}$

$$\delta_N = \sqrt{\varepsilon^2 \cos^2 r\tau + \frac{1 - \varepsilon^2 r^{2n}}{q^{2n}} \cos^2 q\tau},$$

а метод

$$u(x,\tau) \approx \sum_{j\in J_m}\left(1+\frac{\cos^2 q\tau}{q^{2n}\cos^2 r\tau - r^{2n}\cos^2 q\tau}j^{2n}\right)^{-1} z_j \cos j\tau \sin jx$$

оптимальный.

5^{0}. Точное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным начальным данным.

Рассмотрим уравнение теплопроводности с заданным начальным распределением температуры (см. [104])

$$u_t = \Delta u,\ u(0,\cdot) = u_0(\cdot).$$

Как известно, точным решением этой задачи при $t > 0$ является интеграл Пуассона

$$u(x,t) = \ u(x,t,u_0(\cdot)) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{R^N} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} u_0(\xi)d,$$

где $x = (x_1,...,x_N)$, $\xi = (\xi_1,...,\xi_N)$, $|x-\xi|^2 = \sum_{i=1}^N (x_i - \xi_i)^2$, и при этом $u(t,\cdot) \to u_0(\cdot)$ при $t \to 0$.

Поставим задачу поиска оптимального метода восстановления решения задачи (11.7) в момент времени τ на классе $\left(L_2\left(R^N\right)\right)^k = L_2\left(R^N\right) \times \cdots \times L_2\left(R^N\right)$.

$$\delta_N \equiv \inf_{\varphi:(L_2(R^N))^k \to L_2(R^N)} \sup_{\substack{u_0 f(\cdot),\bar{y}(\cdot)=(y_1(\cdot),...,y_k(\cdot))\in\left(L_2\left(R^N\right)\right)^k: \\ \|u(t_i,\cdot)-y_i(\cdot)\|_{L_2(R^N)\le\varepsilon_i,\ i=1,...,k}}} \|u(\cdot,\tau) - \varphi(\bar{y}(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(R^N)},$$

Справедливы следующие утверждения.

Для любого $\tau > 0$ справедливо равенство

$$\delta_N(\tau,\varepsilon) \equiv e^{-\theta(\tau)}$$

- если $t_1 > 0$ и $0 \le \tau < t_1$, то любой метод является оптимальным;
- если $\tau = t_{s_j},\ 1 \le j \le k,$ то метод $\bar{\varphi}(\bar{y}(\cdot))(\cdot) = y_{s_j}(\cdot)$ является оптимальным;
- если $k \ge 2$ и $\tau \in \left(t_{s_j}, t_{s_{j+1}}\right)(\cdot)$, $1 \le j \le k-1$, то метод

$$\bar{\varphi}(\bar{y}(\cdot))(\cdot) = K_{s_j} * y_{s_j}(\cdot) + K_{s_{j+1}} * y_{s_{j+1}}(\cdot),$$

где K_{s_j} и $K_{s_{j+1}}$ функции из $L_2\left(R^N\right)$, преобразования Фурье которых имеет вид

$$FK_{s_j}(\xi) = \frac{\left(t_{s_{j+1}} - \tau\right)\varepsilon_{s_{j+1}}^2 e^{-|\xi|^2(\tau - t_{s_j})}}{\left(t_{s_{j+1}} - \tau\right)\varepsilon_{s_{j+1}}^2 + \left(\tau - t_{s_j}\right)\varepsilon_{s_j}^2 e^{-2|\xi|^2(t_{s_{j+1}} - t_{s_j})}}$$

$$FK_{s_{j+1}}(\xi) = \frac{\left(\tau - t_{s_j}\right)\varepsilon_{s_j}^2 e^{-|\xi|^2(\tau + t_{s_{j+1}} - 2t_{s_j})}}{\left(t_{s_{j+1}} - \tau\right)\varepsilon_{s_{j+1}}^2 + \left(\tau - t_{s_j}\right)\varepsilon_{s_j}^2 e^{-2|\xi|^2(t_{s_{j+1}} - t_{s_j})}}$$

является оптимальным;
- если $\tau > t_{s_m},$ то метод $\bar{\varphi}(\bar{y}(\cdot))(\cdot) = P_{\tau - t_{s_j}} y_{s_j}(\cdot)$ ($P_{\tau - t_{s_j}}$ линейный непрерывный оператор в $L_2\left(R^N\right)$) является оптимальным.

§12. Краткий лексикон (глоссарий) по теме «Компьютерный (вычислительный) поперечник»

12.1 «Теория приближений (Theory approximation)», «Вычислительная математика (Computational Mathematics)» и «Численный анализ (Numerical Analysis)» в определениях и пояснениях.

В каких случаях применять каждое из этих наименований? В учебной и научной литературе встречаем следующие объяснения по этому вопросу:

АППРОКСИМАЦИЯ (от лат. approximo – приближаюсь) – замена одних математических объектов другими, в том или ином смысле близкими к исходным. Аппроксимация позволяет исследовать числовые характеристики и качественные свойства объекта, сводя задачу к изучению более простых или более удобных объектов (напр., таких, *характеристики которых легко вычисляются или свойства которых уже известны),– [21, стр. 76].*

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ – нахождение для данной функции f функции g из некоторого определенного класса (напр., среди алгебраических многочленов заданной степени), в том или ином смысле близкой к f, дающей ее приближенное представление, – [21, стр. 487].

«*ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА – раздел математики, включающий круг вопросов, связанных с использованием ЭВМ. Содержание термина «В. м.» нельзя считать, установившимся, так как эта область математики интенсивно развивается в связи с быстро растущими применениями ЭВМ в новых направлениях. Часто термин «В. м.» понимается как теория численных методов и алгоритмов решения типовых математических задач. Это толкование термина «В. м.» получило распространение на первоначальном этапе, когда использование ЭВМ предъявило новые требования к численным методам; основной задачей на этом этапе была разработка новых методов, «удобных» для ЭВМ. Ниже В. м. понимается в первом – широком смысле этого термина*», - [12, т.I, стр. 822].

«*ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА – раздел математики, включающий круг вопросов, связанных с использованием ЭВМ. Содержание термина «В. м.» нельзя считать, установившимся. Первоначально В. м. понималась как прикладная математика. Термин «В. м.» применяется и тогда, когда имеют в виду теорию численных методов и алгоритмов решения типовых математических задач. В рамках современной терминологии В. м. – часть информатики, относящаяся к методологии применения ЭВМ для решения задач науки, техники, производства и практически всех областей человеческой деятельности. Естественно, что многообразие задач В. м. существенно зависит от возможностей типов ЭВМ с соответствующей периферией*», - [21, стр. 132].

И еще:«*Когда мы говорим о вычислительной или прикладной математике, то этим не делим математику на «чистую» и «прикладную», поскольку такого разделения попросту нет, а этим эпитетом подчеркиваем, что речь идет о математике «в действии», о некоторых сторонах единой науки «математики», которые проявляются при ее применении либо к задачам естествознания, либо к некоторым задачам, возникающим из собственных нужд развития математики*», - [6, стр. 11].

«*ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ – это область математики, занимающаяся конструированием способов приближенного представления величин, получающихся при выполнении различных математических операций. Таковыми могут быть, например, дифференцирование и интегрирование функций или нахождение решений линейных, нелинейных, дифференциальных, интегральных и пр. уравнений*», – [5, стр. 7].

И, наконец, «*Численные методы – раздел вычислительной математики, посвященный математическому описанию и исследованию процессов численного решения задач*», - [21, стр. 312].

12.2 *Несколько замечаний о понятии алгоритма.* *Слово«алгоритм» (более старая форма «алгорифм») произошло от имени известного ученого IX в.Мохаммеда ибн Муса Аль-Хорезми, уроженца Хорезма, являющегосяавтором знаменитого трактата «Kitabaljabrw'al—muqabala» («Прави-ла восстановления и преобразования»).*

Алгоритмические методы вычислений бурно развивались, особеннов арабском мире, и этот прогресс породил замысел построения формаль-ных схем получения решения определенных классов задач и даже по-строения формальных схем получения всех истинных высказываний.

Наиболее полную и ясную форму придал этим замыслам Г. Лейбниц,который писал: «В философии мною найдено средство достичь того же,что сделали Р. Декарт и другие для арифметики и геометрии с помощьюалгебры и анализа, но уже для всех наук perArtemCombinatoriam; она разра-батывалась еще Люллю и П. Кирхером, которые, однако, не смогли про-никнуть в ее суть. Тем самым указан путь, на котором ***все существующиесоставные понятия могут быть разложены на небольшое число простыхпонятий, являющихся как бы их алфавитом,*** *и посредством правильно-го метода из комбинаций букв такого алфавита могут быть со временемвновь получены все* *вещи вместе с их теоретическими доказательствами. Это открытие, если только Бог судил мне его закончить, было бы матерью всех моих открытий и чрезвычайно важным само по себе».*

Г. Лейбниц напротяжений всей своей жизни занимался уточнением и реализацией своей программы. Для решения алгоритмических проблем он придумал автоматически работающую машину, но эта попытка не привела к цели», - [6, стр. 23].

Далее, «*Как известно, развитие математики стимулировалось в большой степени необходимостью решения практических задач, и в древности математика была в значительной степени вычислительной. С давних времен известны способы решения многих задач, которые облечены в форму точных предписаний о выполнении в определенном порядке некоторой системы операций. Другими словами, мы имеем различные алгоритмы для решения разного рода задач. Ктакого рода алгоритмам относятся алгоритм Евклида, правила выполнения четырех арифметических операций в b-ичной системе счисления, алгоритм приближенного вычисления квадратного корня и т.п.»*, - [6, стр. 31].

Продолжим: «*ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ – точно определенное указание действий над данными, позволяющее с помощью цифровой вычислительной машины дискретного действия преобразовать за конечное количество операций некоторый массив данных (входные данные) в другой массив данных (выходные данные). В. а. реализуется в виде вычислительного процесса, т.е. в виде дискретно распределенной во времени конечной последовательности состояний реальной ЭВМ, имеющей, в отличие от абстрактной вычислительной машины, ограниченные скорость выполнения операций, разрядность чисел и объем памяти.*

Реальный В. а. складывается из двух частей:

а) абстрактного (или собственного) В. а. который применяется к математическим объектам (элементам конечномерных векторных пространств, полей, алгебраических систем, функциональных пространств и т.д.), не связан с конкретной ЭВМ и может записываться в общепринятых математических терминах или на каким-либо алгоритмическом языке;

б) программы, т.е. совокупности машинных команд, описывающих В. а., которая организует реализацию вычислительного процесса в конкретной ЭВМ.

Первая часть В. а. является исходной и переходит во вторую часть с помощью различных методов программирования. В. а. содержит ряд управляющих параметров, которые остаются неопределенными в первой части и фиксируются в программе, полностью определяя вычислительный процесс, обеспечивая адаптацию его первой части к конкретной ЭВМ», - [12, Т.I, стр. 826-827].

И еще: «*Адаптация понятия алгоритма к потребностям вычислительной математики крайне важна, и в этой связи большое значение имеет четкое понимание вычислителями основ теории алгоритмов, основ теории рекурсивных функций и т. п.*», - [6, стр. 19].

12.3 Насыщение вычислительных алгоритмов. Начнем с серии отрывков из [5]:

«*Роль поперечников в численном анализе двоякая. Во-первых, поперечники позволяют получать оптимальные характеристики вычислительных алгоритмов, на которые надо ориентироваться при их конструировании.*

Во-вторых, поперечники, как правило, необходимы для исследования явления насыщения конкретных вычислительных алгоритмов. Здесь мы подходим к одному из важнейших понятий численного анализа», - [5, стр. 12-13].

Все, за исключением интерполяционных сплайнов Лагранжа из §6, построенные в [**?**, 43–50, 53, 54, 56, 57, 78, 79] теоретико-числовые вычислительные алгоритмы таковы, что *скорость убывания погрешности аппроксимации $\delta_n(f)$ автоматически (без организации дополнительных вычислительных процедур) увеличивается с ростом гладкости функции f.*

«*Вычислительные алгоритмы, обладающие указанным выше свойством, называются алгоритмами без насыщения. Они тем более ценны, что реальная гладкость решения f обычно заранее не известна и зачастую оказывается существенно большей, чем это* *формально необходимо для построения и обоснования сходимости данного алгоритма*», - [5, стр. 13].

Отметим, что «*Традиционные вычислительные алгоритмы в большинстве своем обладает насыщением, для них скорость убывания погрешности аппроксимации* $\delta_n(f)$ *увеличивается вместе с ростом гладкости* r *функции* f *только пока эта гладкость не превосходит некоторого критического значения* r_0, *называемого порядком насыщения, а при* $r > r_0$ *наступает стабилизация скорости убывания величин* $\delta_n(f)$ *при* $n \to +\infty$, *и она уже не зависит от* r. *Таковы, например, все конечноразностные методы (для них порядок насыщения определяется порядком аппроксимации разностной схемы), многие традиционные методы численного интегрирования, дифференцирования и т.п.*

Из сказанного ясно, что насыщаемость – весьма серьезный недостаток вычислительных алгоритмов, и возникает проблема построения алгоритмов без насыщения», - [5, стр. 13].

«*Вопросам эффективности алгоритмов в книге уделено довольно большое внимание, и в связи с этим автор счел целесообразным рассмотреть подробно* ***явление насыщения вычислительных алгоритмов*** *и вопросы построения алгоритмов без насыщения. Известно, что рост быстродействия и объема памяти ЭВМ отстает от запросов практики, и поэтому один из возможных выходов из создавшегося положения может состоять в том, что при конструировании алгоритмов нужно полнее использовать априорную информацию о решении, с тем чтобы конструировать не насыщаемые алгоритмы*», - [6, стр. 7].

В дополнение к изложенному выше, в отношении предложенных здесь алгоритмов, что интерполяция сплайнами Лагранжа в Теоремах 6.1 и 6.3 насыщаема(это обсуждалось в п 4.1 из § 6), в то время как алгоритм построения сеток Коробова в Теореме 4.2 не насыщаем (хотя бы потому, что не зависит от свойств гладкости подынтегральной функции в квадратурной формуле с равными весами и алгоритмически найденной сеткой).

12.4 В качестве обоснования необходимости комплекса общих и специальных курсов при преподавании численного анализа (и не только):

«*При изложении большинства вопросов численного анализа требуется много вспомогательных сведений из различных областей анализа, функционального анализа, теории дифференциальных уравнений и т. п. К сожалению, нет подходящих монографий или учебников, где были бы систематизированы и компактно представлены указанные вопросы с ориентацией их на применение к численным методам. Поэтому автор счел целесообразным привести необходимые вспомогательные сведения, сгруппированные в основном в гл. 2 и в отдельных параграфах гл. 8-10. Как правило, доказательства не приводятся, и исключение делается лишь для наиболее важных теорем, доказательство которых к тому же довольно просто*», - [6, стр. 7].

§13. Теория приближений, Вычислительная математика и Численный анализ в новых постановках через Компьютерный (вычислительный) поперечник

Предлагается следующая схема исследований:

Численный анализ как синтез

$$\text{К(В)П} - 1 - \textit{теория приближений} + \textit{вычислительная математика}$$

$$\left.\begin{matrix}\text{К(В)П} - 2\\ \text{К(В)П} - 3\end{matrix}\right\} \textit{сервисное обслуживание компьютерных вычислений}$$

При данных T, F и Y решение задачи К(В)П-1 по всевозможным вычислительным агрегатам по линейной информации $L_N(F) \times \{\varphi_N\}_Y$ полагается полным первичным решением, с разделением на Теорию приближений и Вычислительную математику по характеру оптимального вычислительного агрегата. Тем самым, вкупе с решениями К(В)П-2 и -3, получаем неограниченное количество задач с результатами "‘*На вечные времена*"’.

Затем исследуется К(В)П-задача при $D_N \equiv D_N(F)_Y$ из $\left\{\left(l^{(N)}, \varphi_N\right)\right\}_{F,Y}$, но только по жесткому обоснованию. В составе чего, через выбор D_N, можно изучать вычислительные возможности конкретных систем.

Скорость $\delta_N(0, F, Tf, D_N)_Y \succ\prec?$ можно загрубить в обмен на выигрыш (в log- и даже в степенной шкале) в вычислении (соответствующего таким ослабленным требованиям) агрегата $\overline{\overline{\varphi_N}}(\bar{\bar{l}}_1(f), ..., \bar{\bar{l}}_N(f), \cdot)$. Здесь главным источником исследований будут практические потребности для конкретных целей с неограниченным потенциалом уточнений и улучшений.

Конечно, «Теория приближений» в полном объеме не сводится к К(В)П-1 определению, поскольку в ней есть внутренние проблемы. Вот одна из них: *«Как быть с основными теоремами теории приближений?»*(привлеченные определения и обозначения см. в [113]:

Прямыми теоремами Джексона: $E_N(f)_p \ll \omega_p^{(\alpha)}\left(\frac{1}{N}; f\right)$

Обратными теоремами Бернштейна: $\omega_p^{(1)}\left(\frac{1}{N}; f\right) \ll \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} E_k(f)_p$

С порядковым равенством Потапова-Симонова:

$$\omega_p^{(\alpha)}\left(\frac{1}{N}; f\right) \asymp E_N(f)_p + \frac{1}{N^\alpha}\left\|\left(\sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(m)\, e^{2\pi i(m,x)}\right)^{(\alpha)}\right\|_{L^p(0,1)} \tag{13.1}$$

Версия ответа:это внутренние вопросы взаимоотношений между характеристиками подвергающихся приближению функций – структурных (как устроена функция) и конструктивных (как устроено средство приближения):*Прямые теоремы* отвечают на вопрос *«Как структурные свойства влияют на скорость приближения?»* и *Обратные теоремы* – «*Как скорости приближения влияют на структурные свойства?*».

Теорема Потапова – Симонова [113] показывает, что эти классические вопросы надо было ставить с привлечением дробного дифференцирования частичных тригонометрических сумм Фурье и получить точный порядковый ответ (13.1).

Петер Лакс в статье [2] пишет «*Это работа – обзор (по необходимости выборочный) развития роли вычислений в математике за последние полстолетия и внедрения математических идей в вычисления. В то же время вычисления начинают занимать центральное место в науке: Нобелевские премии вручались за работы, основные методы которых были вычислительными*».И, далее,*«Можно смело предсказать, что вычислительная наука, обогащённая новыми математическими идеями, будет развиваться в следующем (XXI) столетии и что вычисления станут составляющей многих областей математики»*, что созвучно со словами А.Н. Колмогорова «*Меня упрекают в том, что я математик без теорем, который никогда ничего не доказывает. Который гораздо больше умеет ставить задачи, чем решать их, но я считаю, что это возможно и правда, это скорее не недостаток, а похвала*».

Данная статья есть попытка осмысления вычислительных проблем в заданном режиме (как всегда *«На почтительном расстоянии»*) – во всей полноте описывается К(В)П-постановка как новая схема исследований в Теории приближений, Вычислительной математике и Численном анализе, прямо нацеленная на компьютерные вычисления.

В заключение сообщим, что основные положения данной статьи доложены в декабре 2018 года на Семинаре по Теории приближений С.А. Теляковского в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН и в июле этого же года в Университете Фридрих-Шиллера на Семинаре "F ü nktionenraume" Х.Трибеля, Х.-Ю.Шмайссера, Д.Хароске, Э.Новака, В.Зикеля в Иене (Германия), а также частично анонсированы в [114].

Список литературы

1 Темиргалиев Н. Теоретико-числовые методы и теоретико-вероятностный подход к задачам анализа. Теория вложений и приближений, абсолютная сходимость и преобразования рядов Фурье, Вестник Евразийского университета. -1997. -№3. -С. 90–144.

2 Математика: границы и перспективы. -М.: ФАЗИС, 2005.

3 Лакс П. Математика и вычисления // В сб. "Математика: границы и перспективы" -М.: ФАЗИС, 2005. -С. 175-192.

4 Рябенький В.С. Введение в вычислительную математику: Учеб. пособие. -2-е изд., исправл. -М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000.– 296 с.

5 Локуциевский О.В. Гаврилов М.Б. Начала численного анализа. -М.: ТОО "Янус", 1995.

6 Бабенко К.И. Основы численного анализа. -М.: Наука, 1986.

7 Ильин А.М., Данилин А.Р. Асимптотические методы в анализе. -М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.

8 Манин Ю.И. Математика как метафора. -М.: МЦНМО. 2008.

9 Темиргалиев Н. Предисловие Главного редактора журнала "Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика" о целях издания и путях их реализации// Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика. -2018. -Т. 122. - №1. -С. 8-69.

10 Темиргалиев Н. Элементарное построение линейной конгруэнтной последовательности Лехмера с той степенью случайности, с какой требованиям случайности отвечает спектральный тест Ковэю и Макферсона// Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика. -2018. -Т. 123. - №2. -С. 8-55.

11 Кнут Д.Э. Искусство программирования, том 2. Получисленные алгоритмы. -М: Издательский дом "Вильямс", 2001. -832с. (Пер. с англ. под общей редакцией Ю.В. Козаченко: Knuth D. Tre art of computer programming, Volume 2: Seminumerical Algorithms, $3^(rd)$ Edition, Publisher: Addison-Wesley, 1998).

12 Математическая энциклопедия/Гл. ред. И.М. Виноградов. - М.: Советская Энциклопедия. -Т. 4. 1984.

13 Ажгалиев Ш. У., Темиргалиев Н. Информативная мощность всех линейных функционалов при восстановлении функций из классов H_p^ω //Матем. сб. -2007. -Т. 198. №11. -С. 3-20.

14 Ульянов П.Л. Вложение некоторых классов функций H_p^ω // Изв. АН СССР. Сер.матем. -1968. -Т. 32. -№ 3. -С. 649-686.

15 Ульянов П.Л. О рядах по системе Хаара// Матем. сб. -1964. -Т. 63(105). -№ 3. -С. 356-391.

16 Ульянов П.Л. Об абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье // Матем. сб. -1967. -Т. 72(114). -№ 2. -С. 193-225.

17 Oskolkov K.I. Inequalities of the "large sieve" type and applications to problems of trigonometric approximation// Anal. Math. -1986. -Vol. 12. -№2ю -С. 143-166.

18 Лузин Н.Н. Интеграл и тригонометрический ряд. -Москва - Ленинград: Гос. изд. тех-теор. литер. -1951. - 550 стр.

19 Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж. Порядковые оценки норм производных функций с нулевыми значениями на линейных функционалах и их применения// Изв. вузов. Матем. - 2017. -№3. -С. 89–95.

20 Таугынбаева Г.Е. О предельной погрешности неточной информации при оптимальном восстановлении: PhD-диссертация по специальности 6D060100-Математика.Казахский национальный университет имени аль-Фараби. -Алматы. -2013.

21 Математика: Энциклопедия / Под. ред. Ю.В. Прохорова. - М.: Большая Российская энциклопедия. -2003. - 845 стр.

22 Шерниязов К. Приближенное восстановление функций и решений уравнения теплопроводности с функциями распределения начальных температур из классов E, SW и B: Кандидатская диссертация. Алматы, 1998.

23 Ажгалиев Ш., Темиргалиев Н. Об информативной мощности линейных функционалов // Матем. заметки. -2003. -Т. 3. -№.6. -С. 803-812.

24 Харди Г. Расходящиеся ряды. -М.: ИЛ, 1951.

25 Волков И.И., Ульянов П.Л. О некоторых новых результатах об общей теории суммирования рядов и последовательностей (стр. 363-467) в книге Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. -М: ГИФМЛ, 1960.

26 Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения. -М.: Наука, 1987.

27 Кашин Б.С., Саакян А.А. Ортогональные ряды. -М.: Изд-во АФЦ, 1999.

28 Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А. Теория всплесков. -М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

29 Кашин Б.С., Куликова Т.Ю. О справедливости для фреймов одного результата об ортогональных системах // Матем. заметки. -2005. -Т. 77. -№. 2. -С. 311-312.

30 Блаттер К. Вейвлет - анализ. Основы теории. -М.: Техносфера, 2004.

31 Темляков В.Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Труды МИАН СССР. -1986. -Т. 178. -С. 1-112.

32 Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. -М.: Изд-во МГУ, 1976.

33 Темиргалиев Н. Применение теории дивизоров к приближенным восстановлению и интегрированию периодических функций многих переменных //Докл. АН СССР -1990. -Т. 310. №5. -С. 1050-1054

34 Зигмунд А. Тригонометрические ряды. -М.:Мир, 1965.

35 Temlyakov V.N. Greedy Approximation Cambridge: Cambridge University Press, 2011.

36 Галатенко В.В., Лившиц Е.Д. Обобщенные приближенные слабые жадные алгоритмы// Матем. заметки. -2005. -Т.78. -№2. -С. 186-201.

37 Лукашенко Т.П. Орторекурсивные разложения Фурье-Стилтьеса// Сборник статей "Ортогональные ряды, теория приближений и смежные вопросы" к 60-летию со дня рождения академика Бориса Сергеевича Кашина. Тр. МИАН. -2013. -Т. 280. -С. 227-233.

38 Fisher S.D., Micchelli C.A. Optimal sampling of holomorphic functions. II// Mathematische Annalen. -1985. -Vol. 273. -№1. -P. 131-147.

39 Нурмолдин Е.Е. Задачи восстановления на классах функций бесконечной гладкости: канд. дисс. -ЕНУ имени Л.Н.Гумилева. -Астана. -2008.

40 Сихов М. Б. О прямых и обратных теоремах теорий приближений с заданной мажорантой // Analysis Mathematica. -2004. -V. 30. -№ 2. -P.137-146.

41 Ташатов Н.Н. Приближенное восстановление функций и решений уравнения Пуассона с правой частью из анизотропных классов E и SW: канд. дисс. -Караганда. - 2002.

42 Temlyakov V.N. Approximation of periodic functions// Comput. Math. and Anal. Ser. -1993. -Nova Sci. Publ.

43 Воронин С. М., Темиргалиев Н. О квадратурных формулах, связанных с дивизорами поля гауссовых чисел //Матем. заметки - 1989. -Т. 46. №2. -С. 34-41

44 Темиргалиев Н. Применение теории дивизоров к численному интегрированию периодических функций многих переменных //Матем. сб. - 1990. -Т. 281. №4. -С. 490-505.

45 Темиргалиев Н. Средние квадратические погрешности алгоритмов численного интегрирования, связанных с теорией дивизоров в круговых полях // Изв. высш. учеб. завед. Математика - 1990. №8. -С. 90-93.

46 Темиргалиев Н. Об эффективности алгоритмов численного интегрирования, связанных с теорией дивизоров в круговых полях //Матем. заметки - 1997. №2. -С. 297-301.

47 Темиргалиев Н., Баилов Е.А., Жубанышева А.Ж. Об общем алгоритме численного интегрирования периодических функций многих переменных //Докл. РАН - 2007. -Т. 416. №2. -С. 169-173.

48 Жубанышева А.Ж., Темиргалиев Н., Темиргалиева Ж. Н. Применение теории дивизоров к построению таблиц оптимальных коэффициентов квадратурных формул //Журнал вычислительной математики и математической физики - 2009. -Т. 49. №1. -С. 14-25.

49 Сихов М.Б., Темиргалиев Н. Об алгоритме построения равномерно распределенных сеток Коробова // Матем. замет. -2010. -Т. 87. №6. -С. 948-950.

50 Баилов Е.А., Сихов М.Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики - 2014. -Т. 54. № 7. -С. 1059-1077.

51 Wang Yuan. Number theoretic method in numerical analysis // Contemporary Mathematics. -1988. -№ 77. -P. 63-82.

52 Шарыгин И.Ф. Оценки снизу погрешности квадратурных формул// Журнал вычислительной математики и математической физики. -1963. -Т. 3. -№ 2. -С. 370–376.

53 Темиргалиев Н., Кудайбергенов С.С., Шоманова А.А. Применение тензорных произведений функционалов в задачах численного интегрирования //Изв. РАН, сер. матем. -2009. -Т. 73. №2. -С. 183-224.

54 Темиргалиев Н. Классы $U_s\left(\beta,\theta,\alpha;\psi\right)$ и квадратурные формулы //Докл. РАН. - 2003. -Т. 393. №5. -С. 605-608.

55 Nauryzbayev N., Temirgaliyev N. An Exact Order of Discrepancy of the Smolyak Grid and Some General Conclusions in the Theory of Numerical Integration // Found Comput Math -2012. -12. -С. 139-172.

56 Темиргалиев Н. Тензорные произведения функционалов и их применения // Докл. РАН - 2010. Т. 430. № 4. -С. 460-465.

57 Темиргалиев Н. , Кудайбергенов С. С. , Шоманова А. А. Применения квадратурных формул Смоляка к численному интегрированию коэффициентов Фурье и в задачах восстановления // ИзвВУЗов. Математика -2010. №3. -С. 52-71.

58 Наурызбаев Н.Ж., Темиргалиев Н. О порядке дискрепанса сетки Смоляка //Матем. заметки -2009. -Т. 85. № 6. -С. 947-950.

59 Смоляк С.А. Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций // Докл. АН СССР. -1963. -Т. 148. -№ 5. -С. 1042-1045.

60 Смоляк С.А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них: дисс. ...к.ф.-м. наук. -Москва. 1965. Орг. п /я 2325.

61 Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. -М.: Наука, 1978.

62 Lagrange J.L. Lecons elementaires sur les mathematiques. -1795.

63 Pearson K. Tracts for Computers. III: On the Construction of Tables and on Interpolation-part II: Bi-Variate Tables, London. -1920.

64 Гончаров В.Л. Теория интерполирования и приближения функций. -М.: ГИТТЛ, 1954.

65 Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. -М.: ГИФМЛ, 1959 (том 1), 1962 (том 2).

66 Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. -М.: Бином, 2007.

67 Бабенко К.И. О некоторых задачах теории приближений и численного анализа, УМН, 40:1(241) (1985), 3-27

68 Натансон И.П. Конструктивная теория функций. -М.: ГИТТЛ, 1949.

69 Квасов Б.И. Методы изогеометрической аппроксимации сплайнами. -М.ФИЗМАТЛИТ, 2006.

70 Марчук А.Г., Осипенко К.Ю. Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек// Матем. заметки. -1975. -Т. 17. -№3. -С. 359-368.

71 Heinrich S. Random approximation in numerical analysis. In:Functional Analysis, Pros. Essen Conf., New York. -1994. -P. 123-171.

72 Ciarlet P.G. The finite element method for elliptic problems. -North-Holland. -1978.

73 Pincus A. n-Widths in Approximation Theory. Springer-Verlag. -1985. -235 p.

74 Темиргалиев Н., Шерниязов К.Е., Берикханова М.Е. Точные порядки компьютерных (вычислительных) поперечников в задачах восстановления функций и дискретизации решений уравнения Клейна-Гордона по коэффициентам Фурье // Современные проблемы математики / Математический институт им. В. А.

Стеклова РАН (МИАН). – М. : МИАН - 2013. Вып. 17: Математика и информатика, 2. К 75-летию со дня рождения Анатолия Алексеевича Карацубы/ С. 179–207.

75 Исмагилов Р.С. Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами// УМН. -1974. –Т. 29. -№3(177). -С. 161-178.

76 Тихомиров В.М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений// УМН. -1960. -Т. 15. -№ 3(93). -С. 81-120

77 National Bureau of Standards, Tables of Lagrangian Coefficients, Washington, Columbia University Press, New York, 1944.

78 Темиргалиев Н., Абикенова Ш.К., Жубанышева А.Ж., Таугынбаева Г.Е. Задачи дискретизации решений волнового уравнения, численного дифференцирования и восстановления функций в контексте Компьютерного (вычислительного) поперечника // Изв. ВУЗов. Математика - 2013. №8. -С. 86-93.

79 Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж. Информативная мощность тригонометрических коэффициентов Фурье и их предельная погрешность при дискретизации оператора дифференцирования на многомерных классах Соболева// Журнал вычислительной математики и математической физики -2015. -Т. 55. № 9. -С. 1474–1485.

80 Novak E., Wozniakowski H. Tractability of Multivariate Problems, Linear information. EMS Tracts Math. 6. -Zurich. European Math. Soc. Publishing House, 2008. P.600.

81 Novak E., Wozniakowski H. Tractability of Multivariate Problems, Standard Information for Functionals. EMS Tracts Math. 12. - Zurich. European Math. Soc. Publishing House, 2010. P.664.

82 Осипенко К.Ю. Наилучшее приближение аналитических функций по информации об их значениях в конечном числе точек// Матем. заметки. -1976. -Т. 19. -№1. -С. 29–40.

83 Kolmogorov A.N. Uber die beste Annaherung von Funktionen einer gegebenen Funktionen klasse// Ann. Math. -1936. Vol. 37. -№1. -P. 107-110.

84 Sard A. Best approximate integration formulas; best approximation formulas//American Journal of Mathematics. -1949. -Vol. 71. -P. 80-91.

85 Никольский С.М. К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами// УМН. -1950. -Т. 5. -№2(36). -С. 165–177.

86 Стечкин С.Б. О наилучшем приближении заданных классов функций любыми полиномами// УМН. -1954. -Т. 9. -№1. -С. 133-134.

87 Бахвалов Н.С. О приближенном вычислении кратных интегралов//Вестник МГУ. Сер. матем. механ. -1959. -№3. -С. 3–18.

88 Коробов Н.М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963. Переработанное и дополненное издание второе: Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: МЦНМО, 2004.

89 Бабушка И., Соболев С. Оптимизация численных методов// Aplikase Matematiky. -1965. -Т. 10. -№2. -С. 96-129.

90 Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи//УМН. -1968. -Т. 23. -№6(144). -С. 51-116.

91 Micchelli C.A., Rivlin T.J. A survey of optimal recovery. In C. A . Micchelli and T.J. Rivlin, editors, Optimal estimation in approximation theory. -New York: Plenum Press. 1977. -P. 1-54.

92 Pietsch A. Eigenvalues and s-numbers. Cambridge: Geest and Portig, Leipzig and Cambridge University Press, 1987.

93 Traub J.F., Wasilkowski G.W., Wozniakowski H. Information-Based Complexity. -New York: Academic Press. -1988.

94 Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. - М.: Наука, 1987. 346с.

95 Plaskota L. Noisy information and computational complexity. Cityplace Cambridge University Press. 1996. P.1–308.

96 Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю., Тихомиров В.М. Оптимальное восстановление и теория экстремума// Докл.РАН. -2001. -Т. 373. -№ 2. -С. 161-164.

97 Бари Н.К. Тригонометрические ряды / Н.К. Бари. при ред. участии П.Л. Ульянова. – М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. – 936 с.

98 Магарил - Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М. Выпуклый анализ и его приложения // Изд. 2-е, исправл.-М.: Удиториал УРСС, 2003.

99 Тихомиров В.М. Поперечник // М.:Советская энциклопедия, Матем. энц., Т. 4.

100 Выск Н.Д, Осипенко К.Ю. Оптимальное восстановление решения волнового уравнения по неточным начальным данным// Матем. заметки. -2007. -Т. 81. -№ 6. -С. 803-815.

101 Задачи Арнольда. -Москва: ФАЗИС, 2000.

102 Осипенко К.Ю. Оптимальное восстановление функций по их коэффициентам Фурье //Математический анализ и математическое моделирование: тр. междунар. конф. молодых учен. -Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН. 2010. С. 55–62.

103 Магарил -Ильяев Г.Г. Осипенко К.Ю. Некоторые задачи оптимального восстановления линейных операторов// Современные проблемы математики и механики. Математика -М.: МГУ. -2009. Вып. 1. Т.3. С. 129–142.

104 Магарил -Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю. Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям// Матем. сб. -2009. -Т. 200. -№ 5. -С. 37–54.
105 Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю. Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру// Функц. анализ и его прил. -2010. -Т. 44. -№ 3. -С. 76–79.
106 Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю. Оптимальное восстановление значений функций и их производных на прямой по неточно заданному преобразованию Фурье// Матем. сб. -2004. -Т. 195. -С. 67-82.
107 Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с ошибкой// Матем. сб. -2002 -Т. 193. -С. 79-100.
108 Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю., Тихомиров В.М. On optimal recovery of heat equation solutions, In: Approximation Theory: A volume dedicated to B. Bojanov (D. K. Dimitrov, G. Nikolov, and R. Uluchev, Eds.), 163–175, Sofia: Marin Drinov Academic Publishing House, 2004.
109 Kacewicz B.Z, Plaskota L. On the minimal cost of approximating linear problems based on information with deterministic noisy //Numerical functional Analysys and optimization. –1990. –Vol. 11. –№58. –P.511-528.
110 Traub J.F, Wozniakowski H. A General Theory of Optimal Algorithms// Academic Press, New York, 1980, Трауб Дж., Вожьняковский Х. Общая теория оптимальных алгоритмов. М.: Мир. 1983.
111 Traub J.F., Wozniakowski H. On the Optimal Solution of Large Linear Systems, Dept. of Computer Science Rep. Columbia Univ. 1980.
112 Карацуба А.А., Офман Ю.П. Умножение многозначных чисел на автоматах // Доклады АН СССР. 1961. –Т.145 (2). –С.293-294
113 Потапов М.К., Симонов Б.В., Тихонов С.Ю. Дробные модули гладкости: учебн. пособие. –М.: МАКС Пресс, 2016. –340 с.
114 Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж. Компьютерный (вычислительный) поперечник в контексте общей теории восстановления// Известия ВУЗов. Математика. -2019. -№1. -С. 89-97.

Н. Темірғалиев, А.Ж. Жұбанышева

Теориялық математика және ғылыми есептеулер институты,

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан

Жуықтау теориясы, Есептеу математикасы және Сандық анализ Компьютерлік (есептеуіш) диаметр мәнмәтініндегі жаңа мазмұнда

Компьютерлік технологиялардың даму нәтижесінде туындаған жедел қарқынды бой алып келе жатқан 4-інші өнеркәсіптік революция кезеңінде математикалық модельдердегі есептеу құралдарындағы ақпараттарды оптималды өңдеу әдістері ерекше маңыздылыққа ие.

Оның математикалық эквиваленті ретінде 1996 жылы ұсынылған [1] және РҒА-ның баяндамаларына жариялауға ұсыныс беруімен Ресей мен КСРО Ғылым академиясының академигі С.М.Никольскиймен тікелей қолдау көрсетілген **Компьютерлік (есептеуіш) диаметр** (К(Е)Д). К(Е)Д, біздің түсінігімізше жуықтау теориясы, есептеу математикасы және жалпы сандық анализді жаңадан түсінуге мүмкіндік береді.

К(Е)Д есебіндегі алғашқы анықтама

$$\delta_N(\varepsilon_N;D_N)_Y\equiv\delta_N(\varepsilon_N;T;F;D_N)_Y\equiv\inf_{\left(l^{(N)},\varphi_N\right)\in D_N}\delta_N\left(\varepsilon_N;\left(l^{(N)},\varphi_N\right)\right)_Y, \qquad (*)$$

мұндағы

$$\delta_N\left(\varepsilon_N;\left(l^{(N)},\varphi_N\right)\right)_Y\equiv\delta_N(\varepsilon_N;T;F;\left(l^{(N)},\varphi_N\right))_Y\equiv$$

$$\equiv\sup_{\substack{f\in F\\ \left|\gamma_N^{(\tau)}\right|\le 1(\tau=1,...,N)}}\left\|Tf\left(\cdot\right)-\varphi_N\left(l_N^{(1)}\left(f\right)+\gamma_N^{(1)}\varepsilon_N^{(1)},...,l_N^{(N)}\left(f\right)+\gamma_N^{(N)}\varepsilon_N^{(N)};\cdot\right)\right\|_Y.$$

Математикалық модель $T:F\mapsto Y$ операторы арқылы беріледі, мұндағы X және $Y-$ Ω_X және Ω_Y жиындарында сәйкесінше анықталған функциялардың нормаланған кеңістіктері, $F\subset X$ - функциялар класы. F класындағы f функциясы туралы $N\,(N=1,2,...)$ көлемдегі $l^{(N)}\equiv l^{(N)}\left(f\right)=\left(l_N^{(1)}\left(f\right),...,l_N^{(N)}\left(f\right)\right)$ сандық мәлімет осы жиында анқталған $l_N^{(1)},...,l_N^{(N)}$ сызықты функционалдар (жалпы жағдайда сызықты болуы міндетті емес) арқылы алынады. *Ақпаратты өңдеу алгоритмі* $\varphi_N(z_1,...,z_N;\cdot):C^N\times\Omega_Y\mapsto C$ деп әрбір бекітілген $(z_1,...,z_N)\in C^N$ нүктесі үшін Y жиынында жататын $(\cdot)$ айнымалысына қатысты функция. $\varphi_N\in Y$ деп φ_N-нің жоғарыда көрсетілген шарттардың барлығын қанағаттандыратындығын, ал $\{\varphi_N\}_Y$ деп барлық $\varphi_N\in Y$ құралған жиын белгіленеді. Әрі қарай, $\varphi_N\left(l_N^{(1)},...,l_N^{(N)};\cdot\right)$ ережесімен

$f \in F$ функциясы үшін дәл мәлімет бойынша қалыпқа келтіру *есептеуіш агрегатын* $\left(l^{(N)}, \varphi_N\right)$ деп белгілейді.

$T(f)$ операторын *дәл емес* мәлімет бойынша қалпына келтіру келесі түрде жүргізіледі. Алдымен шектік қателік болатын теріс емес N компонентті $\varepsilon_N = \left(\varepsilon_N^{(1)}, ..., \varepsilon_N^{(N)}\right)$ векторы алынады. Сонан соң $l_N^{(\tau)}(f)$ нақты мәндері $\varepsilon_N^{(\tau)} \geq 0$ дәлдігімен $\left|z_\tau - l_N^{(\tau)}(f)\right| \leq \varepsilon_N^{(\tau)}\,(\tau = 1, ..., N)$ шартын қанағаттандыратын $z_\tau \equiv z_\tau(f)$ жуық сандарымен алмастырылып, φ_N алгоритмімен өңделіп алынған $\left(l^{(N)}, \varphi_N, \varepsilon_N\right) \equiv \varphi_N(z_1(f), ..., z_N(f); \cdot)$ функциясы мәліметті $\varepsilon_N = \left(\varepsilon_N^{(1)}, ..., \varepsilon_N^{(N)}\right)$ дәлдігімен өңдеуден құрылған $\left(l^{(N)}, \varphi_N, \varepsilon_N\right) \equiv \varphi_N(z_1(f), ..., z_N(f); \cdot)$ есептеу агрегаты болады.

/карастырылатын есепте алғашқы түсінік болып табылатын $D_N \equiv D_N(F)_Y$ дәл мәлімет" бойынша қалпына келтіруі операторларынан құралған $\left(l_N^{(1)}, ..., l_N^{(N)}; \varphi_N\right) \equiv \left(l^{(N)}, \varphi_N\right) \equiv \left(l^{(N)}, \varphi_N; 0\right)$ комплекстар жиынтығы болсын.

$A \ll B$ және $A \asymp B$ жазулары сәйкесінше $|A| \leq cB (c > 0)$ және бір уақытта $A \ll B$ және $B \ll A$ қатынастарының орындалуымен пара-пар.

(*) шамасын $\varepsilon_N = \left(\varepsilon_N^{(1)}, ..., \varepsilon_N^{(N)}\right)$ дәлдігіндегі $D_N \equiv D_N(F)_Y$ есептеу агрегаттарының (комплекстарының) мәлімет қуаттылығы дейміз. Егер $\delta_N\left(0; T; F; \left(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N\right)\right)_Y \ll \vartheta_N$ теңсіздігі орындалса, онда $\left(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N\right) \in D_N$ есептеу агрегаты $\vartheta_N \ll \delta_N(0; T; F; D_N)_Y$ төменнен бағалауды қанағаттандырады дейміз.

Келтірілген анықтамалар мен белгілер жағдайында Компьютерлік (есептеуіш) диаметр деп аталатын дәл емес мәлімет бойынша оптималды қалпына келтіру есебі К(Е)Д-1, К(Е)Д-2 және К(Е)Д-3 деп аталатын есептерді тізбектеп шығарудан тұрады.

Берілген T, F, Y, D_N (төменде мәтін бойынша барлық жерде бекітілген):

К(Е)Д-1: $D_N \equiv D_N(F)_Y$ есептеу агрегаттар жиыны үшін $\asymp \delta_N(0; D_N)_Y \equiv \delta_N(0; T; F; D_N)_Y$ информативтік қуатының реті анықталып, осы ретті беретін $D_N \equiv D_N(F)_Y$ жиынынан $\left(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N\right)$ нақты есептеу агрегаты құрылады.

К(Е)Д-2: $\left(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N\right)$ агрегаты үшін $\delta_N(0; D_N)_Y \asymp \delta_N\left(\tilde{\varepsilon}_N; \left(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N\right)\right)_Y \equiv \sup\left\{\|Tf(\cdot) - \bar{\varphi}_N(z_1, ..., z_N; \cdot)\|_Y : f \in F, \left|\bar{l}_\tau(f) - z_\tau\right| \leq \tilde{\varepsilon}_N^{(\tau)}\,(\tau = 1, ..., N)\right\}$ және

$$\forall \eta_N \uparrow +\infty (0 < \eta_N < \eta_{N+1},\ \eta_N \to +\infty) : \overline{\lim_{N \to +\infty}} \delta_N\left(\eta_N \tilde{\varepsilon}_N; \left(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N\right)\right)_Y \Big/ \delta_N(0; D_N)_Y = +\infty$$

шарттарын қанағаттандыратын

$\tilde{\varepsilon}_N \equiv \tilde{\varepsilon}_N\left(D_N; \left(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N\right)\right)_Y \equiv \left(\tilde{\varepsilon}_N^{(1)}, ..., \tilde{\varepsilon}_N^{(N)}\right)$ К(Е)Д-2 шектік қателіктің бар болу және оны құру есебі зерттеледі.

К(В)П-3: $\tilde{\varepsilon}_N\left(D_N; \left(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N\right)\right)_Y$ шектік қателігінің массивтілігі анықталады: D_N жиынының жиыншасы болатын $l_N^{(1)}, ..., l_N^{(N)}$ функционалдары арқылы құрылған (сызықты болуы міндетті емес) әрбір $\left(l^{(N)}, \varphi_N\right)$ есептеу агрегаты

$$\forall \eta_N \uparrow +\infty (0 < \eta_N < \eta_{N+1},\ \eta_N \to +\infty) : \overline{\lim_{N \to +\infty}} \delta_N\left(\eta_N \tilde{\varepsilon}_N; \left(l^{(N)}, \varphi_N\right)\right)_Y \Big/ \delta_N(0; D_N)_Y = +\infty$$

шартының қанағаттандыратындай $\left(l^{(N)}, \varphi_N\right)$ есептеу агрегаттарынан (әдетте $\left(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N\right)$ құрылымы ұқсас) құрылған $M_N\left(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N\right)$ жиыны құрылады.

Егерде К(Е)Д-1 есебінде экстремалды есептеу агрегеттар саныбірден көп болса, онда олардың әрқайсысы үшін К(Е)Д-2, К(Е)Д-3 анализы жүргізіледі, өйткені олардың есептеу сапасы тек шектік қателіктің шамасымен ғана емес, сонымен қатар оның құрылысының негізгі объектіге қасиеттеріне икемділігіне де тәуелді.

"*Жуықтау теориясы*" мен "*Есептеу математикасы*" белгілі бір мағынада күрделі объектіні құрылымдық және есептеу қасиеттері басым объектімен ауыстыру және ауыстыру барысында туындаған болып табылады. Біздің білуімізше, К(Е)Д-1 осы айтылғанның сандық сипаттамасы бола алады. Нақтылай келгенде, **Жуықтау теориясы** және **Есептеу математикасы**(сызықты аспект) К(Е)Д-1 тұрғысында келесідей түсіну керек: берілген T, F, Y және F жиынында анықталған барлық сызықты функционалдардан құрылған D_N мен $\{\varphi_N\}_Y$ үшін

$$\delta_N(0;T;F;D_N)_Y \asymp \sup_{f\in F}\left\|Tf-\overline{\varphi}_N(\bar{l}_1(f),\ldots,\bar{l}_N(f),\cdot)\right\|_Y$$

қасиеті орындалатындай $\overline{\varphi}_N(\bar{l}_1(f),\ldots,\bar{l}_N(f),\cdot)$ есептеу агрегатын құру талап етіледі.

Ал ені D_N-нің басқа конкретизациялары "Жүйенің аппроксимативтік мүмкіндігі", "Функцияның мәндерін, интегрдар мен басқа да күрделі объекттерді жуықтап есептеу" тәрізді есептерге алып келеді. D_N-ның сызықты емес функционалдармен берілген жағдайы **Жуықтау теориясы** мен **Есептеу математикасының** ерекше жағдайы болып табылады.

Және де, К(Е)Д-ны толығымен Есептеу анализіне жаңа көзқарас деп қарастыруға болады.

N. Temirgaliyev, A.Zh. Zhubanysheva

Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations ot the L. N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

Approximation Theory, Computational Mathematics and Numerical Analysis in new conception of Computational (Numerical) Diameter

Abstract: During the fast moving 4th industrial revolution, caused by the development of computer technology, the methods of optimal processing of information on computational tools in mathematical models acquiring special importance. The mathematical equivalent of this is proposed in 1996 [1] and immediately supported by academician of the Academy of Sciences of the USSR and Russia S.M. Nikolsky representation in the report the Russian Academy of Sciences **Computational (numerical) diametry** (C (N) D), the meaning of which is, we hope, a new understanding of the theory of approximations, computational mathematics and, in general, numerical analysis.

In C(N)D the initial definition is

$$\delta_N(\varepsilon_N;D_N)_Y \equiv \delta_N(\varepsilon_N;T;F;D_N)_Y \equiv \inf_{\left(l^{(N)},\varphi_N\right)\in D_N}\delta_N\left(\varepsilon_N;\left(l^{(N)},\varphi_N\right)\right)_Y, \qquad (*)$$

where

$$\delta_N\left(\varepsilon_N;\left(l^{(N)},\varphi_N\right)\right)_Y \equiv \delta_N(\varepsilon_N;T;F;\left(l^{(N)},\varphi_N\right))_Y \equiv$$

$$\equiv \sup_{\substack{f\in F\\ \left|\gamma_N^{(\tau)}\right|\le 1(\tau=1,\ldots,N)}}\left\|Tf(\cdot)-\varphi_N\left(l_N^{(1)}(f)+\gamma_N^{(1)}\varepsilon_N^{(1)},\ldots,l_N^{(N)}(f)+\gamma_N^{(N)}\varepsilon_N^{(N)};\cdot\right)\right\|_Y.$$

Here, the mathematical model is defined by the operator $T: F\mapsto Y$, where X and Y - normalized spaces of functions defined on Ω_X and Ω_Y, $F\subset X$, respectively class of functions.

Numerical information $l_N^{(N)}\equiv l_N^{(N)}(f)=\left(l_N^{(1)}(f),\ldots,l_N^{(N)}(f)\right)$ volume $N(N=1,2,3,\ldots)$ about f from the class F is removed from the linear functionals defined on it $l_N^{(1)},\ldots,l_N^{(N)}$ (in the general case, not necessarily linear). Algorithm for processing information $\varphi_N(z_1,\ldots,z_N;\cdot)$: $C^N\times\Omega_Y\mapsto C$ is a correspondence, which for all fixed $(z,\ldots,z_N;\cdot)\in C^N$ as a function of $(\cdot)$ is an element of Y.

Writing $\varphi_N\in Y$ means that φ_N satisfies all the conditions listed above, and $\{\varphi_N\}_Y$ will denote a set composed of all $\varphi_N\in Y$. Next $\left(l^{(N)},\varphi_N\right)$, it is a computational recovery unit for exact information for the function $f\in F$, acting according to the rule $\varphi_N(l_N^{(1)},\ldots,l_N^{(N)};\cdot)$.

Recovery of $T(f)$ from unexact information is as follows. At first set boundaries of inaccuracy-vector $\varepsilon_N=\left(\varepsilon_N^{(1)},\ldots,\varepsilon_N^{(N)}\right)$ with non-negative components. Then, the exact values $l_N^{(\tau)}(f)$ are replaced with a given accuracy $\varepsilon_N^{(\tau)}\ge 0$ per approximate value $z_\tau\equiv z_\tau(f)$, $\left|z_\tau-l_N^{(\tau)}(f)\right|\le\varepsilon_N^{(\tau)}(\tau=1,\ldots,N)$, numbers $z_\tau\equiv z_\tau(f)$, $(\tau=1,\ldots,N)$ are processed by the algorithm φ_N to the function

$\varphi_N(z_1(f),...,z_N(f);\cdot)$, which will be the computing unit $(l^{(N)},\varphi_N,\varepsilon_N)\equiv\varphi_N\left(z_1(f),...,z_N(f);\cdot\right)$, constructed from the accuracy information $\varepsilon_N=\left(\varepsilon_N^{(1)},...,\varepsilon_N^{(N)}\right)$.

Let $D_N\equiv D_N\left(F\right)_Y$ be a given set of complexes $\left(l_N^{(1)},...,l_N^{(N)};\varphi_N\right)\equiv\left(l^{(N)},\varphi_N\right)\equiv\left(l^{(N)},\varphi_N;0\right)$, we emphasize, recovery operators "for unexact information ", as the original this circle of questions.

The entries $A\ll B$ and $A\asymp B$ respectively mean $|A|\le cB(c>0)$ and simultaneousExecution of $A\ll B$ and $B\ll A$.

The value (*) will be called the "informative power of the set of computational aggregates (complexes) $D_N\equiv D_N\left(F\right)_Y$ of accuracy $\varepsilon_N=\left(\varepsilon_N^{(1)},...,\varepsilon_N^{(N)}\right)$.

In order to shorten speech, we will say “The computing unit $\left(\bar l^{(N)},\bar\varphi_N\right)\in D_N$ supports the lower bound $\delta_N\left(0;T;F;\left(\bar l^{(N)},\bar\varphi_N\right)\right)_Y\ll\vartheta_N$, if the inequality $\vartheta_N\ll\delta_N\left(0;T;F;D_N\right)_Y$.

Within the framework of the above notation and definitions, the problem of optimal recovery according to unexact information with the service of computing on computers,named ” Computational (numerical) diameter”, is, concludes, in the sequential solution of the following three tasks- C(N)D-1, C(N)D-2 and C(N)D-3.

Given T,F,Y,D_N (fixed throughout the following context):

C(N)D-1. The order $\asymp\delta_N\left(0;D_N\right)_Y\equiv\delta_N\left(0;T;F;D_N\right)_Y$ informative power set of computational aggregates $D_N\equiv D_N\left(F\right)_Y$ with the construction of a specific computational aggregate $\left(\bar l^{(N)},\bar\varphi_N\right)$ supporting order $\asymp\delta_N\left(0;D_N\right)_Y$.

C(N)D-2. For $\left(\bar l^{(N)},\bar\varphi_N\right)$ the problem of existence and finding sequences $\tilde\varepsilon_N\equiv\tilde\varepsilon_N\left(D_N;\left(\bar l^{(N)},\bar\varphi_N\right)\right)_Y\equiv\left(\tilde\varepsilon_N^{(1)},...,\tilde\varepsilon_N^{(N)}\right)$ with non-negative components- C (N) D-2-margin of error (corresponding to the optimal computational aggregates $\left(\bar l^{(N)},\bar\varphi_N\right)$

$$\delta_N\left(0;D_N\right)_Y\asymp\delta_N\left(\tilde\varepsilon_N;\left(\bar l^{(N)},\bar\varphi_N\right)\right)_Y\equiv$$

$$\equiv\sup\left\{\left\|Tf\left(\cdot\right)-\bar\varphi_N\left(z_1(f),...,z_N(f);\cdot\right)\right\|_Y:\ f\in F,\ \left|\bar l_\tau\left(f\right)-z_\tau(f)\right|\le\varepsilon_N^{(\tau)}\left(\tau=1,...,N\right)\right\},$$

with simultaneous execution

$$\forall\eta_N\uparrow+\infty(0<\eta_N<\eta_{N+1},\ \eta_N\to+\infty):\overline{\lim_{N\to+\infty}}\delta_N\left(\eta_N\tilde\varepsilon_N;\left(\bar l^{(N)},\bar\varphi_N\right)\right)_Y\Big/\delta_N(0;D_N)_Y=+\infty$$

.

C(N)D-3. Set the massiveness of the marginal error $\tilde\varepsilon_N\left(D_N;\left(\bar l^{(N)},\bar\varphi_N\right)\right)_Y$: is as large as possible $M_N\left(\bar l^{(N)},\overline\varphi_N\right)$ from D_N (usually associated with source structure $\left(\bar l^{(N)},\bar\varphi_N\right)$) computational aggregates $\left(l^{(N)},\varphi_N\right)$, constructed according tofunctionals $l^{(N)}\equiv\left(l_N^{(1)},...,l_N^{(N)}\right)$ (in the general formulation is not necessarily linear), such that for each one completed

$$\forall\eta_N\uparrow+\infty(0<\eta_N<\eta_{N+1},\ \eta_N\to+\infty):\overline{\lim_{N\to+\infty}}\delta_N\left(\eta_N\tilde\varepsilon_N;\left(l^{(N)},\varphi_N\right)\right)_Y\Big/\delta_N(0;D_N)_Y=+\infty.$$

If it turns out, that in C(N)D-1 there will be more than one extreme computational aggregates, then for each of them a C(N)D-2,3 analysis is carried out, since their computational qualities are determined not only by the size of the maximum margin, but also by adaptability of the structure of the computing unit to the characteristics of the object of application.

"Approximation theory" and "Computational Mathematics" are, in fact, a replacement for the complex,in a certain sense, an object on a simple object, with constructive and computational advantages, respectively, with a mandatory assessment of the error that occurs. It seems to us that C(N)D-1 in the main should and can be a quantitative description of this verbal wording.

The theory of approximations and computational mathematics (linear aspect) in the context of C (N) D-1 is proposed to be understood as follows: with given T,F,Y,D_N composed of all possible linear functionals over F and from $\{\varphi_N\}_Y$, it is required to construct a specific computational aggregate $\overline{\varphi_N}\left(\bar{l}_1(f),...,\bar{l}_N(f)\right)$ with a property

$$\delta_N(0;T;F;D_N)_Y \asymp \sup_{f\in F}\left\|Tf-\overline{\varphi}_N\left(\bar{l}_1(f),...,\bar{l}_N(f),\cdot\right)\right\|_Y.$$

Of course, further specification of the D_N leads to special problems such as "‘ Approximate capabilities of a particular system "’," ‘Approximate calculation of the values of functions, integrals and other complex objects"’, etc.

A special case of approximation theory and computational mathematics is D_N with nonlinear functionals.

And,of course,C(N)D in full can be considered as a new look at the whole Numerical analysis.

Keywords: Computer (computational) diameter (abbreviated K (V) P), Approximation theory in qualitative and quantitative statements, Computational mathematics, accurate and inaccurate information recovery, limit error, new Numerical Analysis scheme.

References

1 Temirgaliev N. Teoretiko-chislovye metody i teoretiko-verojatnostnyj podhod k zadacham analiza. Teorija vlozhenij i priblizhenij, absoljutnaja shodimost’ i preobrazovanija rjadov Fur’e [Number-theoretic methods and probability-theoretic approach to the problems of analysis. Theory of investments and approximations, absolute convergence and transformations of Fourier series], Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University[Vestnik Evrazijskogo universiteta], (3), 90–144(1997).

2 Matematika: granicy i perspektivy [Mathematics: boundaries and perspectives] (FAZIS, Moscow, 2005).

3 Laks P. Matematika i vychislenija[Mathematics and Computing] In Matematika: granicy i perspektivy [Mathematics: boundaries and perspectives] (FAZIS, Moscow, 2005, 175-192).

4 Ryaben’kii V.S. Vvedenie v vychislitel’nuju matematiku [Introduction to Computing Mathematics] (Fizmatlit, Moscow, 2000б 296) [in Russian].

5 Lokucievskij O.V. Gavrilov M.B. Nachala chislennogo analiza [Beginning of numerical analysis] (TOO "Janus", Moscow, 1995). [in Russian].

6 Babenko K.I. Osnovy chislennogo analiza [Basics of numerical analysis] (Nauka, Moscow, 1986). [in Russian].

7 Il’in A.M., Danilin A.R. Asimptoticheskie metody v analize [Asymptotic methods in the analysis] (FIZMATLIT, Moscow, 2009). [in Russian].

8 Manin Ju.I. Matematika kak metafora [Mathematics as a metaphor] (MCNMO, Moscow, 2008). [in Russian].

9 Temirgaliyev N. Introdaction of the Editor-in-chief of the journal "The Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics series" about the issue purposes and the ways of its implementation, Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics series, 122(1), 8-67 (2018).

10 Temirgaliyev N. Elementary construction of the linear congruent Lehmer sequence with the degree of randomness that is required by the spectral test of Coveyou and MacPherson, Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics series, 123(2), 8-55 (2018).

11 Knuth D. Iskusstvo programmirovaniya dlya EHVM. Poluchislennye algoritmy. 3rd vol.(Izdatel’skij dom "‘Vil’yams"’, Moscow, 2001, 832 p.) [in Russian] (Translated in edition YU.V. Kozachenko: Knuth D. The art of computer programming, Volume 2: Seminumerical Algorithms, 3rd Edition, Publisher: Addison-Wesley, 1998).

12 Matematicheskaja jenciklopedija/Gl. red. I.M. Vinogradov. Tom 4 [Mathematical Encyclopedia / Ch. ed. THEM. Vinogradov. - M .: Soviet Encyclopedia. Vol. 4.] (Sovetskaja Jenciklopedija, Moscow, 1984). [in Russian].

13 Azhgaliev Sh. On the discretization of solutions of the heat equation, Mathematical Notes, **82**(2), 153-158(2007).

14 Ul’yanov P.L. The imbedding of certain function classes H_p^ω, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 32(3), 649–686 (1968).

15 Ul’yanov P.L. On Haar series, Mat. Sb., 63(105), N3, 356–391(1964).

16 Ul’yanov P.L. Absolute and uniform convergence of Fourier series, Mat. Sb. 72(114), N 2, 193–225(1967).

17 Oskolkov K.I. Inequalities of the "large sieve" type and applications to problems of trigonometric approximation, Anal. Math. 12(2), 143-166(1986).

18 Luzin N.N. Integral i trigonometricheskij rjad [Integral and trigonometric series] (Gos. izd. teh-teor. liter., Moskva-Leningrad, 1951, 550 p.). [in Russian].

19 Temirgaliev N. , Zhubanisheva A. Zh. Order Estimates of the Norms of Derivatives of Functions with Zero Values on Linear Functionals and Their Applications, Russian Mathematics, **61**(3), 77–82(2017).

20 Taugynbaeva G.E. O predel’noj pogreshnosti netochnoj informacii pri optimal’nom vosstanovlenii: PhD-dissertacija po special’nosti 6D060100-Matematika[On the marginal error of inaccurate information with optimal recovery: PhD-dissertation on the specialty 6D060100-Mathematics. Kazakh National University named after al-Farabi]. Kazahskij nacional’nyj universitet imeni al’-Farabi, Almaty. 2013.[in Russian].

21 Matematika: Jenciklopedija / Pod. red. Ju.V. Prohorova [Mathematics: Encyclopedia / Under. ed. Yu.V. Prokhorov], (Bol'shaja Rossijskaja jenciklopedija, Moscow, 2003, 845 p.). [in Russian].

22 Shernijazov K. Priblizhennoe vosstanovlenie funkcij i reshenij uravnenija teploprovodnosti s funkcijami raspredelenija nachal'nyh temperatur iz klassov E, SW i V: Kandidatskaja dissertacija [Approximate recovery of functions and solutions of the heat equation with distribution functions of initial temperatures from classes E, SW and B: Candidate dissertation.], Almaty, 1998.[in Russian].

23 Azhgaliev Sh. , Temirgaliev N. Informativeness of Linear Functionals, Mathematical Notes, 73(6), 759-768(2003).

24 Hardi G. Rashodjashhiesja rjady [Divergent rows], (IL, Moscow, 1951).[in Russian].

25 Volkov I.I., Ul'janov P.L. O nekotoryh novyh rezul'tatah ob obshhej teorii summirovanija rjadov i posledovatel'nostej (str. 363-467) v knige Kuk R. Beskonechnye matricy i prostranstva posledovatel'nostej [On some new results on the general theory of summation of series and sequences (pp. 363-467) in the book by R. Cook. Infinite matrices and spaces of sequences] (GIFML, Moscow, 1960).[in Russian].

26 Kornejchuk N.P. Tochnye konstanty v teorii priblizhenija [Exact constants in approximation theory] (Nauka, Moscow, 1987). [in Russian].

27 Kashin B.S., Saakjan A.A. Ortogonal'nye rjady [Orthogonal rows.] (Izd-vo AFC, Moscow, 1999). [in Russian].

28 Novikov I.Ja., Protasov V.Ju., Skopina M.A. Teorija vspleskov [Burst Theory] (FIZMATLIT, Moscow, 2005). [in Russian].

29 Kashin B.S., Kulikova T.Yu. On the validity for frames of a result concerning orthogonal systems, Mat. Zametki, 77(2), 311–312 (2005).

30 Blatter K. Vejvlet - analiz. Osnovy teorii [Wavelet - analysis. Fundamentals of the theory] (Tehnosfera, Moscow, 2004). [in Russian].

31 Temlyakov V.N. Approximations of functions with bounded mixed derivative, Trudy Mat. Inst. Steklov., 178, 3–113 (1986).

32 Tihomirov V.M. Nekotorye voprosy teorii priblizhenij [Some questions of approximation theory] (Izd-vo MGU, Moscow, 1976).

33 Temirgaliev N. Primenenie teorii divizorov k priblizhennym vosstanovleniju i integrirovaniju periodicheskih funkcij mnogih peremennyh[Application of divisor theory to recovery and numerical integration of periodic functions of several variables], Dokl. AN SSSR[Dockland Mathematics], **310**(5), 1050-1054(1990).

34 Zigmund A. Trigonometricheskie rjady [Trigonometric series] (Mir, Moscow, 1965). [in Russian].

35 Temlyakov V.N. Greedy Approximation (Cambridge University Press, Cambridge, 2011).

36 Galatenko V.V., Livshits E.D. Generalized Approximate Weak Greedy Algorithms, Mat. Zametki, 78(2), 186–201 (2005).

37 Lukashenko T.P. Ortorekursivnye razlozhenija Fur'e-Stilt'esa. Sbornik statej "Ortogonal'nye rjady, teorija priblizhenij i smezhnye voprosy" k 60-letiju so dnja rozhdenija akademika Borisa Sergeevicha Kashina. Tr. MIAN. [Orthorecursive Fourier-Stieltjes expansions // Collection of articles "Orthogonal series, approximation theory and related questions" for the 60th anniversary of academician Boris Sergeevich Kashin] 2013. Vol. 280. P. 227-233. [in Russian].

38 Fisher S.D., Micchelli C.A. Optimal sampling of holomorphic functions. II, Mathematische Annalen, 273(1), 131-147(1985).

39 Nurmoldin E.E. Zadachi vosstanovlenija na klassah funkcij beskonechnoj gladkosti: kand. diss [Restoration tasks on classes of functions of infinite smoothness: Cand. diss]. L.N. Gumilyov Eurasian National University. Astana. 2008. [in Russian].

40 Sihov M.B. O prjamyh i obratnyh teoremah teorij priblizhenij s zadannoj mazhorantoj [On direct and inverse theorems of approximation theories with a given majorant], Analysis Mathematica, 30(2), 137-146(2004). [in Russian].

41 Tashatov N.N. Priblizhennoe vosstanovlenie funkcij i reshenij uravnenija Puassona s pravoj chast'ju iz anizotropnyh klassov E i SW: kand. diss. [Approximate recovery of functions and solutions of the Poisson equation with the right-hand side of anisotropic classes E and SW: cand. diss.] Karaganda. 2002. [in Russian].

42 Temlyakov V.N. Approximation of periodic functions, Comput. Math. and Anal. Ser. Nova Sci. Publ.(1993).

43 Voronin S. M. , Temirgaliev N. Application of Banach measure to quadrature formulas, Mat. zametki, 39(1), 30-34(1986).

44 Temirgaliev N. Application of divisor theory to the numerical integration of periodic functions of several variables, Matem. sbornik, **69**(2), 527-542(1990).

45 Temirgaliev N. Srednie kvadraticheskie pogreshnosti algoritmov chislennogo integrirovanija, svjazannyh s teoriej divizorov v krugovyh poljah [Mean square errors of numerical integration algorithms associated with the theory of divisors in circular fields], Izv. vyssh. ucheb. zaved. Matematika [IzvestiyaVuz. Matematika], (8), 90-93(1990). [in Russian].

46 Temirgaliev N. Efficiency of Numerical Integration Algorithms Related to Divisor Theory in Cyclotomic Fields, Mat. notes, **61**(2), 242-245(1997).

47 Temirgaliev N., Bailov E.A. , Zhubanysheva A.Zh. General algorithm for the numerical integration of Periodic function of several variables, Dockland Mathematics, 2007, pp. 681-685.

48 Zhubanysheva A. Zh. , Temirgaliev N. , Temirgalieva Zh. N. Application of divisor theory to the construction of tables of optimal coefficients for quadrature formulas, Computational mathematics and mathematical physics, **49**(1), 12-22(2009).

49 Sikhov M. B., Temirgaliev N. On an algorithm for construction uniformly distribution Korobov grids, Mathematical notes, **87**(6), 916-917(2010).

50 Bailov E. A. , Sikhov M. B. , Temirgaliev N. General Algorithm for the Numerical Integration of Functions of Several Variables, Computational Mathematics and Mathematical Physics, **54**(7), 1061–1078(2014).

51 Wang Yuan. Number theoretic method in numerical analysis, Contemporary Mathematics, (77), 63-82(1988).

52 Sharygin I.F. A lower estimate for the error of quadrature formulae for certain classes of functions, Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., 3(2), 370–376(1963).

53 Temirgaliev N. , Kudaibergenov S. S. , Shomanova A. A. An application of tensor products of functionals in problems of numerical integration, Izvestiya: Mathematics, 73(2), 393-434(2009).

54 Temirgaliev N. Classes $U_s(\beta, \theta, \alpha; \psi)$ and quadrature formulas, Dockland mathematics, **68**(3), 414-415 (2003).

55 Nauryzbayev N., Temirgaliyev N. An Exact Order of Discrepancy of the Smolyak Grid and Some General Conclusions in the Theory of Numerical Integration, Found Comput Math, 12, 139-172(2012).

56 Temirgaliev N. Tensor Products of Functionals and Their Application, Docklandy Mathematics, **81**(1), 78-82 (2010).

57 Temirgaliev N. , Kudaibergenov S. S. , Shomanova A. A. Applications of Smolyak quadrature formulas to the numerical integration of Fourier coefficients and in function recovery problems, Russian Mathematics (Iz VUZ), **54**(3), 45-62(2010).

58 Nauryzbaev N. Zh. , Temirgaliev N. On the Order of Discrepancy of the Smolyak Grid, Mathematical Notes, **85**(6), 897-901(2009).

59 Smolyak S.A. Quadrature and interpolation formulas for tensor products of certain classes of functions, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 148(5), 1042–1045(1963).

60 Smoljak S.A. Ob optimal'nom vosstanovlenii funkcij i funkcionalov ot nih: diss. . . . k.f.-m. nauk. [On the optimal restoration of functions and functionals from them: Diss. . . . cand. phys.-math. sci.] Moskva. 1965. Org. p /ja 2325. [in Russian].

61 Il'in V.A., Poznjak Je.G. Linejnaja algebra [Linear algebra] (Nauka, Moscow, 1978). [in Russian].

62 Lagrange J.L. Lecons elementaires sur les mathematiques. 1795.

63 Pearson K. Tracts for Computers. III: On the Construction of Tables and on Interpolation-part II: Bi-Variate Tables, London. 1920.

64 Goncharov V.L. Teorija interpolirovanija i priblizhenija funkcij [Theory of interpolation and approximation of functions] (GITTL, Moscow, 1954). [in Russian].

65 Berezin I.S., Zhidkov N.P. Metody vychislenij [Calculation methods] (tom 1), 1962 (tom 2) (GIFML, Moscow, 1959). [in Russian].

66 Bahvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.M. Chislennye metody [Numerical methods] (Binom, Moscow, 2007). [in Russian].

67 Babenko K.I. Some problems in approximation theory and numerical analysis, Uspekhi Mat. Nauk, 40(1(241)), 3–27(1985).

68 Natanson I.P. Konstruktivnaja teorija funkcij [Constructive theory of functions] (GITTL, Moscow, 1949). [in Russian].

69 Kvasov B.I. Metody izogeometricheskoj approksimacii splajnami [Methods of isogeometric approximation by splines](FIZMATLIT, Moscow, 2006). [in Russian].

70 Marchuk A.G., Osipenko K.Yu. Best approximation of functions specified with an error at a finite number of points, Mat. Zametki, 17(3), 359–368(1975).

71 Heinrich S. Random approximation in numerical analysis. In:Functional Analysis, Pros. Essen Conf., New York. 1994. P. 123-171.

72 Ciarlet P.G. The finite element method for elliptic problems. North-Holland. 1978.

73 Pincus A. n-Widths in Approximation Theory. Springer-Verlag. 1985. 235 p.

74 Temirgaliev N., Sherniyazov K.E., Berikhanova M.E. Exact Orders of Computational (Numerical) Diameters in Problems of Reconstructing Functions and Sampling Solutions of the Klein–Gordon Equation from Fourier Coefficients//Sovrem. Probl. Mat., 17, 179–207 (2013).

75 Ismagilov R.S. Diameters of sets in normed linear spaces and the approximation of functions by trigonometric polynomials//Uspekhi Mat. Nauk, 29(3(177)), 161–178 (1974).

76 Tikhomirov V.M. Diameters of sets in function spaces and the theory of best approximations, Uspekhi Mat. Nauk, 15(3(93)), 81–120(1960).

77 National Bureau of Standards, Tables of Lagrangian Coefficients, Washington, Columbia University Press, New York, 1944.

78 Temirgaliev N. , Abikenova Sh. K. , Zhubanysheva A. Zh. , Taugynbaeva G. E. Discretization of Solutions to a Wave Equation, Numerical Differentiation, and Function Recovery with the Help of Computer (Computing) Diameter, Russian Mathematics (Iz. VUZ), **57**(8), 75-80(2013).

79 Temirgaliev N. , Zhubanisheva A. Zh. Informative Cardinality of Trigonometric Fourier Coefficients and Their Limiting Error in the Discretization of a Differentiation Operator in Multidimensional Sobolev Classes, Computational Mathematics and Mathematical Physics, **55**(9), 1432–1443(2015).
80 Novak E., Wozniakowski H. Tractability of Multivariate Problems, Linear information. EMS Tracts Math. 6 (European Math. Soc. Publishing House, Zurich, 2008, 600p.).
81 Novak E., Wozniakowski H. Tractability of Multivariate Problems, Standard Information for Functionals. EMS Tracts Math. 12 (European Math. Soc. Publishing House, Zurich, 2010, 664p.).
82 Osipenko K.Yu. Best approximation of analytic functions from information about their values at a finite number of points, Mat. Zametki, 19(1), 29–40(1976).
83 Kolmogorov A.N. Uber die beste Annaherung von Funktionen einer gegebenen Funktionen klasse, Ann. Math., 37(1), 107-110(1936).
84 Sard A. Best approximate integration formulas; best approximation formulas, American Journal of Mathematics, 71, 80-91(1949).
85 Nikol'skii S.M. Concerning estimation for approximate quadrature formulas, Uspekhi Mat. Nauk, 5(2(36)), 165–177(1950).
86 Stechkin S.B. O nailuchshem priblizhenii zadannyh klassov funkcij ljubymi polinomami[On the best approximation of given classes of functions by any polynomials], UMN, 9(1), 133-134(1954).
87 Bahvalov N.S. O priblizhennom vychislenii kratnyh integralov [On the approximate calculation of multiple integrals], Vestnik MGU. Ser. matem. mehan., 3, 3–18(1959).
88 Korobov N.M. Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize[Number theoretic methods in approximate analysis] (Fizmatgiz, Moscow, 1963). Pererabotannoe i dopolnennoe izdanie vtoroe: Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Revised and the enlarged edition of the second: Theoretical-numerical methods in approximate analysis] (MCNMO, Moscow, 2004).
89 Babushka I., Sobolev S. Optimizacija chislennyh metodovAplikase Matematiky [Optimization of numerical methods], 10(2), 96-129(1965).
90 Ioffe A.D., Tikhomirov V.M. Duality of convex functions and extremum problems, Uspekhi Mat. Nauk, 23(6(144)), 51–116(1968).
91 Micchelli C.A., Rivlin T.J. A survey of optimal recovery. In C. A . Micchelli and T.J. Rivlin, editors, Optimal estimation in approximation theory. -New York: Plenum Press. 1977. P. 1-54.
92 Pietsch A. Eigenvalues and s-numbers. Cambridge: Geest and Portig, Leipzig and Cambridge University Press, 1987.
93 Traub J.F., Wasilkowski G.W., Wozniakowski H. Information-Based Complexity (Academic Press, New York, 1988).
94 Golubov B.I., Efimov A.V., Skvorcov V.A. Rjady i preobrazovanija Uolsha: Teorija i primenenija [alsh Series and Transformations: Theory and Applications] (Nauka, Moscow, 1987, 346p.).[in Russian].
95 Plaskota L. Noisy information and computational complexity. Cityplace Cambridge University Press. 1996. P.1–308.
96 Magaril-Il'jaev G.G., Osipenko K.Ju., Tihomirov V.M. Optimal'noe vosstanovlenie i teorija jekstremuma[Optimal recovery and extremum theory], Dokl.RAN, 373(2), 161-164(2001).
97 Bari N.K. Trigonometricheskie rjady / N.K. Bari. pri red. uchastii P.L. Ul'janova [Trigonometric series / N.K. Bari under ed. participation of P.L. Ulyanova](Gos. izd-vo fiz.-mat. lit., Moscow, 1961, 936 p.).
98 Magaril - Il'jaev G.G., Tihomirov V.M. Vypuklyj analiz i ego prilozhenija [Convex analysis and its applications], Izd. 2-e, ispravl Uditorial URSS, 2003.
99 Tihomirov V.M. Poperechnik S M.:Sovetskaja jenciklopedija, Matem. jenc., T. 4.[Cross-section In M.: Soviet Encyclopedia, Mat. ents., vol. 4.]
100 Vysk N.D, Osipenko K.Ju. Optimal'noe vosstanovlenie reshenija volnovogo uravnenija po netochnym nachal'nym dannym [Optimal recovery of the wave equation solution from inaccurate initial data], Matem. zametki, 81(6), 803-815(2007).
101 Zadachi Arnol'da [Tasks of Arnold](FAZIS, Moscow, 2000).
102 Osipenko K.Ju. Optimal'noe vosstanovlenie funkcij po ih kojefficientam Fur'e[Optimal recovery of functions by their Fourier coefficients], Matematicheskij analiz i matematicheskoe modelirovanie: tr. mezhdunar. konf. molodyh uchen [Mathematical analysis and mathematical modeling: tr. international conf. young scientist] (JuMI VNC RAN, Vladikavkaz, 2010, P. 55–62).
103 Magaril-Il'jaev G.G. Osipenko K.Ju. Nekotorye zadachi optimal'nogo vosstanovlenija linejnyh operatorov [Some problems of optimal recovery of linear operators], Sovremennye problemy matematiki i mehaniki. Matematika, Moscow, MGU, Vyp. 1. T.3. P. 129–142(2009).
104 Magaril -Il'jaev G.G., Osipenko K.Ju. Optimal'noe vosstanovlenie reshenija uravnenija teploprovodnosti po netochnym izmerenijam [Optimal recovery of the solution of the heat equation on inaccurate measurements], Matem. sb., 200(5), 37–54(2009).
105 Magaril-Il'yaev G.G., Osipenko K.Yu. On Optimal Harmonic Synthesis from Inaccurate Spectral Data, Funktsional. Anal. i Prilozhen., 44(3), 76–79(2010).
106 Magaril-Il'yaev G.G., Osipenko K. Yu. Optimal recovery of values of functions and their derivatives from inaccurate data on the Fourier transform, Mat. Sb., 195(10), 67–82(2004).

107 Magaril-Il'jaev G.G., Osipenko K.Ju. Optimal'noe vosstanovlenie funkcij i ih proizvodnyh po kojefficientam Fur'e, zadannym s oshibkoj[Optimal recovery of functions and their derivatives Fourier coefficients given with an error], Matem. sb., 193, 79-100(2002).

108 Magaril-Il'jaev G.G., Osipenko K.Ju., Tihomirov V.M. On optimal recovery of heat equation solutions [On the recovery of heat equation solutions], In: Approximation Theory: A volume dedicated to B. Bojanov (D. K. Dimitrov, G. Nikolov, and R. Uluchev, Eds.), 163–175, Sofia: Marin Drinov Academic Publishing House, 2004

109 Kacewicz B.Z, Plaskota L. On the minimal cost of approximating linear problems based on information with deterministic noisy, Numerical functional Analysys and optimization, 11(58), 511-528(1990).

110 Traub J.F, Wozniakowski H. A General Theory of Optimal Algorithms (Academic Press, New York, 1980).

111 Traub J.F., Wozniakowski H. On the Optimal Solution of Large Linear Systems, Dept. of Computer Science Rep. Columbia Univ. 1980.

112 Karacuba A.A., Ofman Ju.P. Umnozhenie mnogoznachnyh chisel na avtomatah, Doklady AN SSSR, 145(2), 293-294(1961).

113 Potapov M.K., Simonov B.V., Tihonov S.Ju. Drobnye moduli gladkosti: uchebn. posobie [Fractional modules of smoothness: studies. allowance] (MAKS Press, Moscow, 2016, 340 p.).

114 Temirgaliev N., Zhubanysheva A.Zh. Computational (Numerical) diameter in a context of general theory of a recovery, Russian Mathematics (Iz. VUZ), N 1, 89-97(2019).

Сведения об авторах:

Темиргалиев Н. – доктор физико-математических наук, профессор, директор Института теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан.

Жубанышева А.Ж. – PhD, Старший научный сотрудник Института теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан.

Temirgaliyev N. – -Prof., Doctor of Phys. -Math. Sciences, Director of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations ot the L. N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan.

Zhubanysheva A. Zh. – PhD, Senior Researcher of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations ot the L. N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan.

Поступила в редакцию 22.07.2018

«Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Информатика. Механика сериясы» журналына жіберілетін жұмыстарға қойылатын талаптар

Журнал редакциясы авторларға осы нұсқаулықпен толық танысып, журналға мақала әзірлеу мен дайын мақаланы журналға жіберу кезінде басшылыққа алуды ұсынады. Бұл нұсқаулық талаптарының орындалмауы сіздің мақалаңыздың жариялануын кідіртеді.

1. Автордың қолжазбаны редакцияға жіберуі мақала авторының басып шығарушы, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетіне мақаласын басуға келісімін және кез келген шетел тіліне аударылып қайта басылуына келісімін білдіреді.

2. Баспаға (барлық жариялаушы авторлардың қол қойылған қағаз нұсқасы және электронды нұсқасында) журналдың түпнұсқалы стильдік файлының міндетті қолданысымен LaTeX баспа жүйесінде дайындалған Tex-пен Pdf-файлындағы жұмыстар ұсынылады. Стильдік файлды ***bulmathmc.enu.kz*** журнал сайтынан жүктеп алуға болады.

3. Мақаланың көлемі 6 беттен кем және 18 беттен артық болмауы тиіс. Талап деңгейінен асқан жұмыстар редакциялық алқа отырысында қаралып, баспаға ерекше жағдайда ғана рұқсат етіледі.

4. Жұмыстың мәтіні ХҒТАР (Халықаралық ғылыми-техникалық ақпарат рубрикаторы) кодының көрсеткішімен басталып, кейін автор(лар)дың аты және тегі, жұмыс орнының толық атауы, қаласы, мемлекеті, E-mail-ы, мақаланың толық атауы, аннотациясы көрсетіледі. Аннотация 150-200 сөз көлемінде болуы тиіс, сонымен қатар мәтінде күрделі есептік формулалар болмауы, мақаланың толық аты қайталанбауы, жұмыстың мәтіні мен әдебиеттер тізімінде көрсетілетін сілтемелер болмауы керек. Аннотация мақаланың ерекшеліктерін көрсететін және оның құрылымын (кіріспе, есептің қойылымы, мақсаты, тарихы, зерттеу әдістері, нәтижелер және олардың талқылаулары, қорытынды) сақтайтын мақаланың қысқаша мазмұны болуы тиіс.

5. Жұмыстың мәтінінде кездесетін таблицалар мәтіннің ішінде жеке нөмірленіп, мәтін көлемінде сілтемелер түрінде көрсетілуі керек. Суреттер мен графиктер PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX форматындағы стандарттарға сай болуы керек. Нүктелік суреттер кеңейтілімі 600 dpi кем болмауы қажет. Суреттердің барлығы да айқын әрі нақты болуы керек.

6. Жұмыста қолданылған әдебиеттер тек жұмыста сілтеме жасалған түпнұсқалық көрсеткішке сай (сілтеме беру тәртібінде немесе ағылшын әліпбиі тәртібі негізінде толтырылады) болуы керек. Баспадан шықпаған жұмыстарға сілтеме жасауға тиым салынады.

Сілтемені беруде автор қолданған әдебиеттің бетінің нөмірін көрсетпей, келесі нұсқаға сүйеніңіз дұрыс: тараудың номері, бөлімнің номері, тармақтың номері, теораманың номері (лемма, ескерту, формуланың және т.б.) номері көрсетіледі. Мысалы: «... қараңыз . [3; § 7, лемма 6]», «...қараңыз [2; 5 теорамадағы ескерту]». Бұл талап орындалмаған жағдайда мақаланы ағылшын тіліне аударғанда сілтемелерде қателіктер туындауы мүмкін.

Қолданылаған әдебиеттер тізімін рәсімдеу мысалдары

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. –М: Физматлит, –1994, –376 стр. – **кітап**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики –2014. –Т.54. № 7. –С. 1059-1077. - **мақала**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. – Москва, 2015. –С.141-142. – **конференция еңбектері**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. –Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. –С.7. – **газеттік мақала**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия –2017. –Т.14. –С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. – URL: http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf. (дата обращения: 08.01.2017). - **электронды журнал**

7. Әдебиеттер тізімінен соң автор өзінің библиографикалық мәліметтерін орыс және ағылшын тілінде (егер мақала қазақ тілінде орындалса), қазақ және ағылшын тілінде (егер мақала орыс тілінде орындалса), орыс және қазақ тілінде (егер мақала ағылшын тілінде орындалса) жазу қажет. Соңынан транслиттік аударма мен ағылшын тілінде берілген әдебиеттер тізімінен соң әр автордың жеке мәліметтері (қазақ, орыс, ағылшын тілдерінде – ғылыми атағы, қызметтік мекенжайы, телефоны, e-mail-ы) беріледі.

8. *Редакцияның мекенжайы*: 010008, Қазақстан, Астана қаласы, Қ.Сәтпаев көшесі, 2, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Бас ғимарат, 408-кабинет. Телефоны: (7172) 709-500 (ішкі 31-428). E-mail: *vest_math@enu.kz*. Сайт: *bulmathmc.enu.kz*.

Provision on articles submitted to the journal
"Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics Series"

The journal editorial board asks the authors to read the rules and adhere to them when preparing the articles, sent to the journal. Deviation from the established rules delays the publication of the article.

1. Submission of articles to the scientific publication office means the authors' consent to the right of the Publisher, L.N. Gumilyov Eurasian National University, to publish articles in the journal and the re-publication of it in any foreign language.

2. The scientific publication office accepts the article (in electronic and printed, signed by the author) in Tex- and Pdf-files, prepared in the LaTeX publishing system with mandatory use of the original style log file. The style log file can be downloaded from the journal website ***bulmathmc.enu.kz***.

3. The volume of the article should not exceed 18 pages(from 6 pages). The article, exceeding this volume is accepted for publication in exceptional cases by a special decision of the journal Editorial Board.

4. The text of the article begins with the IRSTI (International Rubricator of Scientific and Technical Information), then followed by the Initials and Surname of the author (s); full name of organization, city, country; E-mail of the author (s); the article title; abstract. Abstract should consist of 150-250 words, it should not contain cumbersome formulas, the content should not repeat the article title, abstract should not contain references to the text of the article and the list of literature), abstract should be a brief summary of the article content, reflecting its features and preserving the article structure - introduction, problem statement, goals, history, research methods, results with its discussion, conclusion.

5. Tables are included directly in the text of the article; it must be numbered and accompanied by a reference to them in the text of the article. Figures, graphics should be presented in one of the standard formats: PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX. Bitmaps should be presented with a resolution of 600 dpi. All details must be clearly shown in the figures.

6. The list of literature should contain only those sources (numbered in the order of quoting or in the order of the English alphabet), which are referenced in the text of the article. References to unpublished issues, the results of which are used in evidence, are not allowed. Authors are recommended to exclude the reference to pages when referring to the links and guided by the following template: chapter number, section number, paragraph number, theorem number (lemmas, statements, remarks to the theorem, etc.), number of the formula. For example, "..., see [3, § 7, Lemma 6]"; "..., see [2], a remark to Theorem 5". Otherwise, incorrect references may appear when preparing an English version of the article.

Template

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. -М: Физматлит, -1994, -376 стр.-**book**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики -2014. -Т.54. № 7. -С. 1059-1077. - **journal article**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященная 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. - Москва, 2015. -С.141-142. - - **Conferences proceedings**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. -Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. -С.7. **newspaper articles**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия -2017. -Т.14. -С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. - URL: http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf. (дата обращения: 08.01.2017). - **Internet resources**

7. At the end of the article, after the list of references, it is necessary to indicate bibliographic data in Russian and English (if the article is in Kazakh), in Kazakh and English (if the article is in Russian) and in Russian and Kazakh languages (if the article is English language). Then a combination of the English-language and transliterated parts of the references list and information about authors (scientific degree, office address, telephone, e-mail - in Kazakh, Russian and English) is given.

8. *Address:* 010008, Republic of Kazakhstan, Astana, Satpayev St., 2., L.N. Gumilyov Eurasian National University, Main Building, room 408). E-mail: *vest_ math@enu.kz.* Сайт: *bulmathmc.enu.kz.*

Правила представления работ в журнал
"Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика"

Редакция журнала просит авторов ознакомиться с правилами и придерживаться их при подготовке работ, направляемых в журнал. Отклонение от установленных правил задерживает публикацию статьи.

1. Отправление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на право Издателя, Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, издания статьи в журнале и переиздания их на любом иностранном языке.

2. В редакцию (в бумажном виде, подписанном всеми авторами и в электронном виде) представляются Tex- и Pdf-файлы работы, подготовленные в издательской системе LaTeX, с обязательным использованием оригинального стилевого файла журнала. Стилевой файл можно скачать со сайта журнала *bulmathmc.enu.kz.*

3. Объем статьи не должен превышать 18 страниц (от 6 страниц). Работы, превышающие указанный объем, принимаются к публикации в исключительных случаях по особому решению Редколлегии журнала.

4. Текст работы начинается с рубрикатора МРНТИ (Международный рубрикатор научно-технической информации), затем следуют инициалы и фамилия автора(ов), полное наименование организации, город, страна, E-mail автора(ов), заглавие статьи, аннотация. Аннотация должна состоять из 150-250 слов, не должна содержать громоздкие формулы, по содержанию не должна повторять название статьи, не должна содержать ссылки на текст работы и список литературы, должна быть кратким изложением содержания статьи, отражая её особенности и сохранять структуру статьи - введение, постановка задачи, цели, история, методы исследования, результаты с их обсуждением, заключение, выводы.

5. Таблицы включаются непосредственно в текст работы, они должны быть пронумерованы и сопровождаться ссылкой на них в тексте работы. Рисунки, графики должны быть представлены в одном из стандартных форматов: PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX. Точечные рисунки необходимо выполнять с разрешением 600 dpi. На рисунках должны быть ясно переданы все детали.

6. Список литературы должен содержать только те источники (пронумерованные в порядке цитирования или в порядке английского алфавита), на которые имеются ссылки в тексте работы. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются.

Авторам рекомендуется при оформлении ссылок исключить упоминание страниц и руководствоваться следующим шаблоном: номер главы, номер параграфа, номер пункта, номер теоремы (леммы, утверждения, замечания к теореме и т.п.), номер формулы. Например, "..., см. [3; § 7, лемма 6]"; "..., см. [2; замечание к теореме 5]". В противном случае при подготовке англоязычной версии статьи могут возникнуть неверные ссылки.

Примеры оформления списка литературы

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. -М: Физматлит, -1994, -376 стр. - **книга**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики -2014. -Т.54. № 7. -С. 1059-1077. - **статья**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. - Москва, 2015. -С.141-142. - **труды конференции**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. -Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. -С.7. - **газетная статья**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия -2017. -Т.14. -С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. - URL: http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf. (дата обращения: 08.01.2017). - **электронный журнал**

7. После списка литературы, необходимо указать библиографические данные на русском и английском языках (если статья оформлена на казахском языке), на казахском и английском языках (если статья оформлена на русском языке) и на русском и казахском языках (если статья оформлена на английском языке). Затем приводится комбинация англоязычной и транслитерированной частей списка литературы и сведения по каждому из авторов (научное звание, служебный адрес, телефон, e-mail - на казахском, русском и английском языках).

8. *Адрес редакции:* 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Сатпаева, 2, Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, учебно-административный корпус, каб. 408. Тел: (7172) 709-500 (вн. 31-428). E-mail: *vest_math@enu.kz.* Сайт: *bulmathmc.enu.kz.*

Редакторы: Н. Темірғалиев

Шығарушы редактор, дизайн: А. Нұрболат

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің
хабаршысы. Математика. Информатика. Механика сериясы.
- 2018. 3(124)- Астана: ЕҰУ. 114-б.
Шартты б.т. - 14,25. Таралымы - 20 дана.

Мазмұнына типография жауап бермейді

Редакция мекен-жайы: 010008, Қазақстан Республикасы, Астана қ.,
Сәтпаев көшесі, 2.
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті
Тел.: (8-717-2) 70-95-00(ішкі 31-428)

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің баспасында басылды