Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетiнiң хабаршысы. Математика. Компьютерлiк ғылымдар. Механика сериясы, 2020, том 130, №1, 73-81 беттер
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: **27.17.19**

Б.А. Дуйсенгалиева, А.С. Науразбекова

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
(E-mail: bibinur.88@mail.ru, altyngul.82@mail.ru)

Структура амальгамированного свободного произведения группы ручных автоморфизмов свободной алгебры Новикова ранга 2

Аннотация: Статья посвящена описанию группы ручных автоморфизмов свободной алгебры Новикова от двух порождающих над полем нулевой характеристики. Используя представление свободных алгебр Новикова через алгебры дифференциальных многочленов исследованы некоторые свойства базисных слов. Также доказано, что группа ручных автоморфизмов свободной алгебры Новикова ранга два над полем нулевой характеристики допускает структуру амальгамированного свободного произведения групп аффинных автоморфизмов $Af_2(A)$ и треугольных автоморфизмов $Tr_2(A)$ с объединенной подгруппой $Af_2(A) \cap Tr_2(A)$.

Ключевые слова: Алгебра дифференциальных многочленов, свободная алгебра Новикова, амальгамированное свободное произведение, ручной автоморфизм.

1. Введение

Хорошо известно, что автоморфизмы алгебры многочленов $k[x,y]$ являются ручными [1, 2]. Более того, группа автоморфизмов $Aut(k[x,y])$ этой алгебры допускает структуру амальгамированного свободного произведения [2, 3], т.е.

$$Aut(k[x,y]) = A *_C B,$$

где A – подгруппа аффинных автоморфизмов, B – подгруппа треугольных автоморфизмов и $C = A \cap B$. Аналогичные результаты также имеют место для свободных ассоциативных алгебр [4,5], свободных алгебр Пуассона над полем нулевой характеристики [6] и свободных правосимметричных алгебр [7]. Также доказано, что группа ручных автоморфизмов алгебры дифференциальных многочленов $k\{x,y\}$ допускает структуру амальгамированного свободного произведения [8].

Неассоциативная алгебра $A = (A, \star)$ называется *(левой) алгеброй Новикова*, если A удовлетворяет следующим тождествам:

$$(a \star b) \star c - a \star (b \star c) = (b \star a) \star c - b \star (a \star c), \quad (a \star b) \star c = (a \star c) \star b,$$

для любого $a, b, c \in A$.

С.И. Гельфанд и И.Я. Дорфман в работе [8] показали, что дифференциальная коммутативная ассоциативная алгебра с дифференцированием θ относительно умножения $a \star b = a(\theta b)$ становится алгеброй Новикова. В работах [9, 10] построены базисы свободных алгебр Новикова. Теорема о свободе для алгебр Новикова доказана в [11].

В работе [10] свободные алгебры Новикова представлены через обыкновенные алгебры дифференциальных многочленов с помощью умножения $a \star b = a(\theta b)$. В работе [12] доказано, что такое представление имеет место и для несвободных алгебр Новикова.

В настоящей работе доказывается, что группа ручных автоморфизмов свободной алгебры Новикова ранга два допускает структуру амальгамированного свободного произведения. Отметим, что вопрос о ручных и диких автоморфизмах для алгебр Новикова от двух переменных остается открытым.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 используя представление свободных алгебр Новикова через алгебры дифференциальных многочленов исследованы некоторые свойства базисных слов. Раздел 3 посвящен представлению группы ручных автоморфизмов свободной алгебры Новикова ранга два над полем нулевой характеристики в виде амальгамированного свободного произведения.

2. Базис свободной алгебры Новикова

Пусть R – произвольное коммутативное кольцо с единицей. Отображение $d : R \to R$ называется *дифференцированием*, если для всех $s, t \in R$ выполняются условия

$$d(s+t) = d(s) + d(t), \quad d(st) = d(s)t + sd(t).$$

Пусть $\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_m\}$ – основное множество дифференциальных операторов.

Кольцо R называется *дифференциальным кольцом* или Δ*-кольцом*, если $\delta_1, \dots, \delta_m$ являются коммутирующими дифференцированиями кольца R, т.е. $\delta_i : R \to R$ – дифференцирования и $\delta_i\delta_j = \delta_j\delta_i$ для всех i, j.

Пусть Θ – свободный коммутативный моноид на множестве дифференциальных операторов $\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_m\}$. Элементы $\theta = \delta_1^{i_1} \dots \delta_m^{i_m}$ моноида Θ называются *производными операторами*.

Пусть R – произвольное дифференциальное кольцо и пусть $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ – множество символов. Рассмотрим множество символов $X^\Theta = \{x_i^\theta | 1 \leq i \leq n, \theta \in \Theta\}$ и алгебру многочленов $R[X^\Theta]$ на множестве символов X^Θ. Полагая $\delta_i(x_j^\theta) = x_j^{\theta\delta_i}$ для всех $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, $\theta \in \Theta$, превратим алгебру $R[X^\Theta]$ в дифференциальную алгебру. Дифференциальная алгебра $R[X^\Theta]$ обозначается через $R\{X\}$ и называется *алгеброй дифференциальных многочленов* над кольцом R от множества переменных X [13].

Пусть M – свободный коммутативный моноид от множества переменных x_i^θ, где $1 \leq i \leq n$ и $\theta \in \Theta$. Элементы M назовем также *дифференциальными мономами* в алфавите X. Дифференциальные мономы образуют базис алгебры $R\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, т.е. любой элемент $a \in R\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ однозначно записывается в виде

$$a = \sum_{u \in M} r_u u$$

с конечным числом ненулевых $r_u \in R$.

Пусть $k\{x_1, \dots, x_n\}$ – алгебра дифференциальных многочленов над полем k характеристики 0 от переменных $x_1, \dots, x_n$ с одним дифференцированием δ. Для удобства записи производные $a^\delta, a^{\delta^2}, a^{\delta^s}$ обозначим через $a', a'', a^{(s)}$, соответственно. Положим $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ и через X^δ обозначим множество всех символов вида $x_i^{(r)}$, где $1 \leq i \leq n$, $r \in \mathbb{Z}_+$. Для любого $x_i^{(r)}, x_j^{(s)} \in X^\delta$ будем считать, что $x_i^{(r)} > x_j^{(s)}$, если $i < j$ или если $i = j$, $r > s$. Множество M всех дифференциальных мономов вида

$$u = x_{i_1}^{(s_1)} x_{i_2}^{(s_2)} \dots x_{i_t}^{(s_t)},$$

где $t \geq 0$, $x_{i_j}^{(s_j)} \in X^\delta$ для всех $1 \leq j \leq t$ и $x_{i_1}^{(s_1)} \geq x_{i_2}^{(s_2)} \geq \dots \geq x_{i_t}^{(s_t)}$, образует линейный базис алгебры $k\{x_1, \dots, x_n\}$.

Для любого $x_i^{(r)} \in X^\delta$ положим

$$\deg(x_i^{(r)}) = 1, \quad d(x_i^{(r)}) = r,$$

где $1 \leq i \leq n$. Если $u = a_1 \dots a_s \in M$, где $a_1, \dots, a_s \in X^\delta$, то положим

$$\deg(u) = \deg(a_1) + \dots + \deg(a_s), \quad d(u) = d(a_1) + \dots + d(a_s),$$

т.е. через $\deg(u)$ обозначим стандартную функцию степени монома u по переменным $x_1, \dots, x_n$, а через $d(u)$ обозначим дифференциальную степень монома u по дифференцированию δ.

На алгебре дифференциальных многочленов $k\{x_1, \dots, x_n\}$ введем новую операцию $\star$ полагая

$$f \star g = fg', \quad f, g \in k\{x_1, \dots, x_n\}.$$

Легко проверить, что алгебра $k\{x_1, \ldots, x_n\}$ с новой операцией $\star$ становится алгеброй Новикова. Через $N_0 \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ обозначим подалгебру этой алгебры порожденную элементами $x_1, \ldots, x_n$. В [9] доказано, что в случае полей нулевой характеристики $N_0 \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ является свободной алгеброй Новикова от переменных $x_1, \ldots, x_n$ без единицы.

В работе [14] была описана структура пространства $N_0 \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ в терминах дифференциальных мономов.

Предложение 1. *[14] Множество всех дифференциальных мономов $u \in M$ с условием $\deg(u) - d(u) = 1$ представляет базис свободной алгебры Новикова $N_0 \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$.*

Через $N \langle x_1, \ldots, x_n \rangle = k \oplus N_0 \langle x_1, \ldots, x_n \rangle = N_0 \langle x_1, \ldots, x_n \rangle^{\#}$ обозначим алгебру полученную из $N_0 \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ формальным присоединением единицы. Тогда $N \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ является свободной алгеброй Новикова от переменных $x_1, \ldots, x_n$ с единицей. Ниже всюду используется данное представление свободной алгебры Новикова.

Пусть u, v – базисные слова алгебры $k\{x_1, x_2\}$. Будем считать, что $u < v$, если $\deg(u) < \deg(v)$ или $\deg(u) = \deg(v)$ и $u < v$ относительно лексикографического порядка на X^δ, т.е. если $u = u_1 u_2 \ldots u_s$, $v = v_1 v_2 \ldots v_s$, где $u_i, v_j \in X^\delta$ для всех i, j, то найдется $1 \leq p \leq s$ такой, что $u_1 = v_1, \ldots, u_{p-1} = v_{p-1}, u_p < v_p$.

Пусть u, v – базисные слова алгебры $N \langle x_1, x_2 \rangle$. Будем считать, что $u < v$, если $u < v$ в алгебре $k\{x_1, x_2\}$.

Каждый ненулевой элемент $f \in k\{x_1, x_2\}$ единственным образом представляется в виде

$$f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_m f_m,$$

где f_i – базисные элементы алгебры $k\{x_1, x_2\}$, $0 \neq \lambda_i \in k$ для всех i и $f_1 > f_2 > \ldots > f_m$. Слово f_1 называется *старшим словом* элемента f и обозначается через $\overline{f}$.

Лемма 1. *Пусть $u, v \in X^\delta$. Если $u < v$, то $u^{(r)} < v^{(r)}$.*

Доказательство. Пусть $u = x_i^{(s)}$, $v = x_j^{(t)}$. Так как $u < v$, то или $i = 2, j = 1$ или же $i = j, s < t$. Учитывая это, несложно заметить, что $u^{(r)} = x_i^{(s+r)} < v^{(r)} = x_j^{(t+r)}$.

Лемма 2. *Пусть u, v – базисные слова алгебры $k\{x_1, x_2\}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(i) если $u = u_1 u_2 \ldots u_s$, где $u_i \in X^\delta$ для всех $1 \leq i \leq s$, то $\overline{u^{(r)}} = u_1^{(r)} u_2 \ldots u_s$;

(ii) если $u < v$, то $\overline{u^{(r)}} < \overline{v^{(r)}}$.

Доказательство. Докажем утверждения леммы индукцией по r. Пусть $r = 1$. По правилу Лейбница

$$u' = u_1' u_2 \ldots u_s + u_1 u_2' \ldots u_s + \ldots + u_1 u_2 \ldots u_s' = u^{(1)} + u^{(2)} + \ldots + u^{(s)}.$$

Так как $\deg(u^{(1)}) = \deg(u^{(2)}) = \ldots = \deg(u^{(s)})$ будем сравнивать $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(s)}$ лексикографически. Пусть $u_1 = u_2 = \ldots = u_k > u_{k+1} \geq \ldots \geq u_s$, т.е. $u = u_1^k u_{k+1} \ldots u_s$, где $1 \leq k \leq s$, тогда

$$u' = k u_1' u_1^{k-1} u_{k+1} \ldots u_s + u^{(k+1)} + \ldots + u^{(s)}.$$

Учитывая, что $u_1' > u_1$, по лемме 1 имеем $u_1' u_1^{k-1} u_{k+1} \ldots u_s > u^{(k+1)} \geq \ldots \geq u^{(s)}$, т.е. $\overline{u'} = u_1' u_2 \ldots u_s$.

Теперь проверим справедливость утверждение (ii) при $r = 1$. Пусть $v = v_1 v_2 \ldots v_t$, где $v_j \in X^\delta$ для всех $1 \leq j \leq t$. По утверждению (i) $\overline{u'} = u_1' u_2 \ldots u_s$, $\overline{v'} = v_1' v_2 \ldots v_t$. Учитывая, что $u < v$ и лемму 1, несложно заметить, что $\overline{u'} < \overline{v'}$.

Предположим, что утверждения леммы справедливы для всех значений меньших чем r. Так как $u_1' \ldots u_j \ldots u_s > u_1 \ldots u_j' \ldots u_s$ для всех $k + 1 \leq j \leq s$, то по индуктивному предположению имеем

$$\overline{u^{(r)}} = \overline{(u')^{(r-1)}} = \overline{(u_1' u_2 \ldots u_s + \ldots + u_1 u_2 \ldots u_s')^{(r-1)}} = \overline{(u_1' u_2 \ldots u_s)^{(r-1)}} = u_1^{(r)} u_2 \ldots u_s.$$

Аналогично, $\overline{v^{(r)}} = v_1^{(r)} v_2 \ldots v_s$. Учитывая, что $u < v$ и лемму 1, несложно заметить, что $\overline{u^{(r)}} < \overline{v^{(r)}}$.

Лемма 3. *[15] Если u, v, w – базисные слова алгебры $k\{x_1, x_2\}$ и $u < v$, то $uw < vw$.*

Следствие 1. Пусть $0 \neq f, g \in k\{x_1, x_2\}$. Тогда $\overline{fg} = \overline{f}\,\overline{g}$.

Лемма 4. *Пусть u – базисное слово алгебры $k\{z\}$ и $0 \neq f \in k\{x_1, x_2\}$. Тогда $\overline{u(f)} = \overline{u(\overline{f})}$.*

Доказательство. Пусть $u = z^{(r)}$ и $f = \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_s f_s$, где f_i – базисные слова алгебры $k\{x_1, x_2\}$, $f_1 > \ldots > f_s$, $0 \neq \lambda_i \in k$. Тогда $u(f) = f^{(r)} = \lambda_1 f_1^{(r)} + \ldots + \lambda_s f_s^{(r)}$. По лемме 2 $\overline{f_1^{(r)}} > \overline{f_i^{(r)}}$ для всех $2 \leq i \leq s$. Отсюда $\overline{u(f)} = \overline{f_1^{(r)}} = \overline{u(\overline{f})}$.

Пусть $\deg(u) > 2$ и $u = u_1 u_2$. Проводя индукцию по $\deg(u)$ и по следствию 1 имеем

$$\overline{u(f)} = \overline{u_1(f)\, u_2(f)} = \overline{u_1(f)}\ \overline{u_2(f)} = \overline{u_1(\overline{f})}\ \overline{u_2(\overline{f})} = \overline{u_1(\overline{f})\, u_2(\overline{f})} = \overline{u(\overline{f})}.$$

Лемма 5. *Пусть u, v – базисные слова алгебры $k\{z\}$, w – базисное слово алгебры $k\{x_1, x_2\}$ и $u < v$. Тогда $\overline{u(w)} < \overline{v(w)}$.*

Доказательство. Если $\deg(u) < \deg(v)$, то очевидно, что $\overline{u(w)} < \overline{v(w)}$. Пусть $\deg(u) = \deg(v)$ и $u = z^{(s_1)} \ldots z^{(s_t)}$, $v = z^{(r_1)} \ldots z^{(r_t)}$, $w = w_1 \ldots w_p$, где $w_k \in X^\delta$ для всех $1 \leq k \leq p$. Учитывая, что $w_1^{(m)} > w_1^{(r)}$, где $m > r$, по лемме 2 и следствию 1 имеем

$$\overline{u(w)} = w_1^{(s_1)} w_1^{(s_2)} \ldots w_1^{(s_t)} w_2^t \ldots w_p^t, \qquad \overline{v(w)} = w_1^{(r_1)} w_1^{(r_2)} \ldots w_1^{(r_t)} w_2^t \ldots w_p^t.$$

Следовательно, $\overline{u(w)} < \overline{v(w)}$.

Следствие 2. Пусть $0 \neq f \in k\{z\}$ и $0 \neq g \in k\{x_1, x_2\}$. Тогда $\overline{f(g)} = \overline{\overline{f}(\overline{g})}$ и $\deg(f(g)) = \deg(f) \cdot \deg(g)$.

3. Амальгамированное свободное произведение

Пусть $A = N\langle x, y\rangle$ – свободная алгебра Новикова над полем k характеристики 0 от двух переменных x, y и пусть $Aut(A)$ – группа автоморфизмов алгебры A.

Через $\varphi = (f_1, f_2)$ обозначим автоморфизм алгебры A такой, что $\varphi(x) = f_1, \varphi(y) = f_2$. Автоморфизмы вида

$$\sigma(1, a, f) = (ax + f(y), y), \qquad \sigma(2, a, g) = (x, ay + g(x)),$$

где $0 \neq a \in k$, $f(y) \in N\langle y\rangle$, $g(x) \in N\langle x\rangle$, называются *элементарными.* Подгруппа $T(A)$ группы $Aut(A)$, порожденная всеми элементарными автоморфизмами, называется *подгруппой ручных автоморфизмов.* Не ручные автоморфизмы называются *дикими.*

Для автоморфизма $\theta = (f_1, f_2) \in Aut(A)$ определим степень, общую степень, полагая, соответственно

$$\deg(\theta) = \max\{\deg(f_1), \deg(f_2)\}, \qquad tdeg(\theta) = \deg(f_1) + \deg(f_2).$$

Если $\theta = (f_1, f_2)$, $\varphi = (g_1, g_2)$, то произведение в $Aut(A)$ определяется следующей формулой $\theta \circ \varphi = (g_1(f_1, f_2), g_2(f_1, f_2))$.

Пусть $Af_2(A)$ – группа аффинных автоморфизмов алгебры A, т.е. группа автоморфизмов вида

$$(a_1 x + b_1 y + c_1, a_2 x + b_2 y + c_2),$$

где $a_i, b_i, c_i \in k, a_1 b_2 \neq a_2 b_1$, $Tr_2(A)$ – группа треугольных автоморфизмов алгебры A, т.е. группа автоморфизмов вида

$$(ax + f(y), by + c),$$

где $0 \neq a, b \in k,\ c \in k,\ f(y) \in N\langle y\rangle$, и пусть $C = Af_2(A) \cap Tr_2(A)$.

Пусть G – произвольная группа, G_0, G_1, G_2 – подгруппы группы G, причем $G_0 = G_1 \cap G_2$. Группа G называется *свободным произведением подгрупп* G_1 *и* G_2 *с объединенной подгруппой* G_0 и обозначается $G = G_1 *_{G_0} G_2$, если

(a) G порождается подгруппами G_1 и G_2;

(b) Определяющие соотношения группы G состоят только из определяющих соотношений подгрупп G_1 и G_2.

Если S_1 – система левых представителей G_1 по G_0, S_2 – система левых представителей G_2 по G_0, то группа G является свободным произведением подгрупп G_1 и G_2 с объединенной подгруппой G_0 (см. например [16]) в том и только в том случае, когда каждый $g \in G$ однозначно представляется в виде

$$g = g_1 \dots g_k c,$$

где $g_i \in S_1 \cup S_2,\ i = 1, \dots, k,\ \ g_i, g_{i+1}$ одновременно не принадлежат S_1 или S_2, $c \in G_0$.

Запись $h_i(y)$ в доказательствах следующих нескольких лемм означает, что $h_i(y) \in N\langle y\rangle$ – однородный многочлен степени i по отношению к функции степени $\deg$ от одной переменной y. Ясно, что $h_0(y) \in k$.

Лемма 6. *a) Система элементов*

$$A_0 = \{id = (x, y), \gamma = (y, x + ay) | a \in k\}$$

является системой представителей левых смежных классов $Af_2(A)$ *по подгруппе* C.

b) Система элементов

$$B_0 = \{\beta = (x + q(y), y) | q(y) = h_n(y) + \ldots + h_2(y)\}$$

является системой представителей левых смежных классов $Tr_2(A)$ *по подгруппе* C.

Доказательство. Проверим условие a). Пусть $l \in Af_2(A)$. Мы должны показать, что для любого l найдутся $\gamma \in A_0,\ \eta \in C$ такие, что $l = \gamma \circ \eta$.

Если $l = (a_1x + b_1y + c_1, a_2x + b_2y + c_2)$, где $a_2 \neq 0$, то положим $\gamma = (y, x + \frac{b_2}{a_2}y)$, $\eta = ((b_1 - \frac{a_1b_2}{a_2})x + a_1y + c_1, a_2y + c_2)$. Тогда l представляется в виде

$$l = (y, x + \frac{b_2}{a_2}y) \circ ((b_1 - \frac{a_1b_2}{a_2})x + a_1y + c_1, a_2y + c_2) = \gamma \circ \eta.$$

Если $a_2 = 0$, то $\gamma = id$, $\eta = l$, т.е. $l = id \circ l$.

Допустим $\gamma_1 = (y, x + a_1y)$, $\gamma_2 = (y, x + a_2y)$ и $\gamma_1C = \gamma_2C$, тогда

$$\gamma_1^{-1} \circ \gamma_2 = (-a_1x + y, x) \circ (y, x + a_2y) = (x, (-a_1 + a_2)x + y).$$

Отсюда следует, что $\gamma_1^{-1} \circ \gamma_2 \in C$ тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$. Следовательно, $\gamma_1 = \gamma_2$.

Теперь проверим условие b). Пусть $\psi = (ax + h(y), by + c) \in Tr_2(A)$ и $h(y) = h_n(y) + \ldots + h_1(y) + h_0(y)$. Мы должны показать, что для любого ψ найдутся $\beta \in B_0,\ \mu \in C$ такие, что $\psi = \beta \circ \mu$. Положим $\beta = (x + \frac{1}{a}q(y), y)$, $\mu = (ax + h_1(y) + h_0(y), by + c)$, где $q(y) = h_n(y) + \ldots + h_2(y)$. Тогда ψ представляется в виде

$$\psi = (x + \frac{1}{a}q(y), y) \circ (ax + h_1(y) + h_0(y), by + c) = \beta \circ \mu.$$

Допустим, $\beta_1 = (x + q(y), y)$, $\beta_2 = (x + q^{(1)}(y), y)$ и $\beta_1C = \beta_2C$. Тогда имеем

$$\beta_1^{-1} \circ \beta_2 = (x - q(y), y) \circ (x + q^{(1)}(y), y) = (x - q(y) + q^{(1)}(y), y).$$

Отсюда следует, что $\beta_1^{-1} \circ \beta_2 \in C$ тогда и только тогда, когда $q(y) = q^{(1)}(y)$. Следовательно, $\beta_1 = \beta_2$.

Лемма 7. *Пусть* A_0, B_0 *– множества, определенные в лемме 6. Тогда любой ручной автоморфизм* φ *алгебры* A *разлагается в произведение вида*

$$\varphi = \gamma_1 \circ \beta_1 \circ \gamma_2 \circ \beta_2 \circ \ldots \circ \gamma_k \circ \beta_k \circ \gamma_{k+1} \circ \lambda, \tag{1}$$

где $\gamma_i \in A_0,\ \gamma_2, \ldots, \gamma_k \neq id$, $\beta_i \in B_0,\ \beta_1, \ldots, \beta_k \neq id$, $\lambda \in C$.

Доказательство. Очевидно, что

$$(ax + h(y), y) = (x + \frac{1}{a}q(y), y) \circ (ax + h_1(y) + h_0(y), y),$$

где $h(y) = h_n(y) + \ldots + h_2(y) + h_1(y) + h_0(y)$, $q(y) = h_n(y) + \ldots + h_2(y)$,

$$(x, by + h^{(1)}(x)) = (y, x) \circ (x + \frac{1}{b}q^{(1)}(y), y) \circ (y, bx + h_1^{(1)}(y) + h_0^{(1)}(y)),$$

где $h^{(1)}(y) = h_m^{(1)}(y) + \ldots + h_2^{(1)}(y) + h_1^{(1)}(y) + h_0^{(1)}(y)$, $q^{(1)}(y) = h_m^{(1)}(y) + \ldots + h_2^{(1)}(y)$, т.е. любой элементарный автоморфизм имеет вид

$$l_1 \circ \beta \circ l_2,$$

где $\beta \in B_0$, $l_1, l_2 \in Af_2(A)$.

Любой ручной автоморфизм φ представляется в виде композиции элементарных автоморфизмов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, т.е. $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_n$. Следовательно, имеем

$$\varphi = l_1 \circ \beta_1 \circ l_2 \circ \beta_2 \circ \ldots \circ l_n \circ \beta_n \circ l_{n+1},$$

где $\beta_i \in B_0$, $l_i \in Af_2(A)$.

Докажем индукцией по n , что φ представляется в виде произведения (1), с $k \leq n$.

Согласно лемме 6 автоморфизм l_1 записывается в виде $\gamma_1 \circ \lambda_1$, где $\gamma_1 \in A_0$, $\lambda_1 \in C$. Тогда

$$l_1 \circ \beta_1 = \gamma_1 \circ \lambda_1 \circ \beta_1.$$

Пусть $\lambda_1 = (ax + by + c, b_1y + c_1)$, $\beta_1 = (x + q(y), y)$. Тогда

$$\lambda_1 \circ \beta_1 \circ \lambda_1^{-1} = (x + \frac{1}{a}q(b_1y + c_1), y).$$

Через $q_{<2}(b_1y + c_1)$ обозначим часть степени меньше чем два элемента $q(b_1y + c_1)$. Пусть $\lambda = (x - \frac{1}{a}q_{<2}(b_1y + c_1), y)$. Ясно, что $\lambda \in C$ и $\lambda_1^{-1} \circ \lambda \in C$. Обозначим $\lambda_1^{-1} \circ \lambda$ через λ_2^{-1} . Тогда

$$l_1 \circ \beta_1 = \gamma_1 \circ \lambda_1 \circ \beta_1 = \gamma_1 \circ \beta_1' \circ \lambda_2,$$

где $\beta_1' = \lambda_1 \circ \beta_1 \circ \lambda_2^{-1} = (x + \frac{1}{a}q(b_1y + c_1) - \frac{1}{a}q_{<2}(b_1y + c_1), y) \in B_0$. Имеем

$$\varphi = \gamma_1 \circ \beta_1' \circ (\lambda_2 \circ l_2) \circ \beta_2 \circ \ldots \circ l_n \circ \beta_n \circ l_{n+1}.$$

По индуктивному предположению произведение

$$(\lambda_2 \circ l_2) \circ \beta_2 \circ \ldots \circ l_n \circ \beta_n \circ l_{n+1}$$

записывается в виде

$$\gamma_2 \circ \beta_2' \circ \gamma_3 \circ \ldots \circ \gamma_k \circ \beta_k' \circ \gamma_{k+1} \circ \lambda,\ k \leq n.$$

Следовательно,

$$\varphi = \gamma_1 \circ \beta_1' \circ \gamma_2 \circ \beta_2' \circ \ldots \circ \gamma_k \circ \beta_k' \circ \gamma_{k+1} \circ \lambda.$$

Если $\gamma_2 \neq id$, то полученное представление имеет вид (1). Теперь рассмотрим случай когда $\gamma_2 = id$. Так как $\beta_1' \circ \beta_2' = \beta_2'' \in B_0$, то

$$\varphi = \gamma_1 \circ \beta_1' \circ \beta_2' \circ \gamma_3 \circ \ldots \circ \gamma_k \circ \beta_k' \circ \gamma_{k+1} \circ \lambda = \gamma_1 \circ \beta_2'' \circ \gamma_3 \circ \ldots \circ \gamma_k \circ \beta_k' \circ \gamma_{k+1} \circ \lambda.$$

Поскольку $k - 1 < n$, то по индуктивному предположению φ записывается в виде (1).

Лемма 8. *Пусть* $\varphi = (f_1, f_2)$ *– автоморфизм алгебры* A *, представимый в виде произведения*

$$\varphi = (f_1, f_2) = \beta_1 \circ \gamma_2 \circ \beta_2 \circ \ldots \circ \gamma_k \circ \beta_k,$$

где $id \neq \gamma_i \in A_0$ *,* $id \neq \beta_i \in B_0$ *для всех* i *. Если* $\beta_i = (x + q_i(y), y)$ *,* $\deg(q_i(y)) = n_i$ *для всех* $1 \leq i \leq k$ *, то*

$$\deg(f_1) = n_1 n_2 \ldots n_{k-1} n_k,$$

$$\deg(f_2) = n_1 n_2 \ldots n_{k-1},\ \textit{если}\ k > 1\ \ \textit{и}\ \ \deg(f_2) = 1,\ \textit{если}\ k = 1.$$

Доказательство. Утверждение леммы докажем индукцией по k. Если $k=1$, то $\varphi=\beta_1$ и

$$\deg(f_1)=\deg(q_1(y))=n_1, \quad \deg(f_2)=1.$$

Предположим, что утверждение леммы выполняется для $k-1$. Положим,

$$\varphi_1=\beta_1\circ\gamma_2\circ\beta_2\circ\ldots\circ\gamma_{k-1}\circ\beta_{k-1}=(g_1,g_2).$$

По индуктивному предположению, имеем

$$\deg(g_1)=n_1n_2\ldots n_{k-1}, \quad \deg(g_2)=n_1n_2\ldots n_{k-2}.$$

Тогда

$$\varphi=(f_1,f_2)=\beta_1\circ\gamma_2\circ\beta_2\circ\ldots\circ\gamma_k\circ\beta_k=\varphi_1\circ\gamma_k\circ\beta_k=(g_1,g_2)\circ\gamma_k\circ\beta_k.$$

Применяя $\gamma_k=(y,x+ay)$ к (g_1,g_2), получим $(u_1,u_2)=(g_1,g_2)\circ\gamma_k=(g_2,g_1+ag_2)$. Тогда

$$\deg(u_1)=\deg(g_2)=n_1n_2\ldots n_{k-2},$$

$$\deg(u_2)=max\{\deg(g_1),\deg(g_2)\}=n_1n_2\ldots n_{k-1}.$$

Далее,

$$\varphi=(f_1,f_2)=(u_1,u_2)\circ\beta_k=(u_1,u_2)\circ(x+q_k(y),y)=(u_1+q_k(u_2),u_2).$$

Следовательно,

$$\deg(f_1)=max\{\deg(u_1),\deg(q_k(u_2))\}, \quad \deg(f_2)=\deg(u_2).$$

Напомним, что $\deg(q_k)=n_k$ и $\deg(u_2)=n_1n_2\ldots n_{k-1}$. По следствию 2 имеем

$$\deg(q_k(u_2))=\deg u_2\cdot\deg q_k=n_1n_2\ldots n_k.$$

Следовательно,

$$\deg(f_1)=n_1n_2\ldots n_{k-1}n_k, \quad \deg(f_2)=n_1n_2\ldots n_{k-1}.$$

Что и требовалось доказать.

Лемма 9. *Разложение* (1) *автоморфизма* φ *из леммы 7 является однозначным.*

Доказательство. Достаточно показать, что

$$\gamma_1\circ\beta_1\circ\gamma_2\circ\beta_2\circ\ldots\circ\gamma_k\circ\beta_k\circ\gamma_{k+1}\circ\lambda\neq id,$$

при $k\geq 1$, $\gamma_i\in A_0,\ \gamma_2,\ldots,\gamma_k\neq id$, $\beta_i\in B_0,\ \beta_1,\ldots,\beta_k\neq id$, $\lambda\in C$.

Докажем от противного. Допустим

$$\gamma_1\circ\beta_1\circ\gamma_2\circ\beta_2\circ\ldots\circ\gamma_k\circ\beta_k\circ\gamma_{k+1}\circ\lambda=id.$$

Тогда

$$\beta_1\circ\gamma_2\circ\beta_2\circ\ldots\circ\gamma_k\circ\beta_k=\gamma_1^{-1}\circ\lambda^{-1}\circ\gamma_{k+1}^{-1}. \tag{2}$$

Согласно лемме 8 автоморфизм

$$\varphi=(f_1,f_2)=\beta_1\circ\gamma_2\circ\beta_2\circ\ldots\circ\gamma_k\circ\beta_k$$

имеет общую степень

$$tdeg(\varphi)=\deg(f_1)+\deg(f_2)=n_1n_2\ldots n_{k-1}n_k+n_1n_2\ldots n_{k-1}.$$

Правую часть равенства (2) обозначим через ρ, т.е.

$$\rho=\gamma_1^{-1}\circ\lambda^{-1}\circ\gamma_{k+1}^{-1}.$$

Ясно, что $\rho\in Af_2(A)$ и $tdeg(\rho)=2$. Следовательно, $tdeg(\varphi)\neq tdeg(\rho)$, что противоречит равенству (2).

Теорема 1. *Пусть* $A=N\langle x,y\rangle$ *– свободная алгебра Новикова от двух порождающих* x,y *над полем* k *нулевой характеристики. Группа ручных автоморфизмов алгебры* A *является свободным произведением подгрупп аффинных автоморфизмов* $Af_2(A)$ *и треугольных автоморфизмов* $Tr_2(A)$ *с объединенной подгруппой* $C=Af_2(A)\cap Tr_2(A)$, *т.е.*

$$T(A)=Af_2(A)*_C Tr_2(A).$$

Доказательство. Так как A_0 и B_0 – системы левых смежных классов $Af_2(A)$ и $Tr_2(A)$ по подгруппе C, соответственно, то по лемме 7 и по лемме 9 любой ручной автоморфизм алгебры A однозначно представляется в виде (1), т.е. $T(A) = Af_2(A) *_C Tr_2(A)$.

Подтверждение
Работа выполнена в рамках проекта AP 08052290 МОН РК.

Список литературы

1 Jung H.W.E. Uber ganze birationale Transformationen der Ebene // J. reine angew Math. – 1942. – Vol. 184. – P. 161–174.
2 Van der Kulk W. On polynomial rings in two variables // Nieuw Archief voor Wisk. – 1953. – Vol. 1. № 3. – P. 33–41.
3 Shafarevich I.R. On some infinite dimensional algebraic groups // Rend. Mat. e Appl. – 1966. – Vol. 25. № 5. – P. 208–212.
4 Czerniakiewicz A.J. Automorphisms of a free associative algebra of rank 2, I, II // Trans. Amer. Math. Soc. – 1971. – Vol. 160. – P. 393–401; – 1972. – Vol. 171. – P. 309–315.
5 Макар-Лиманов Л. Автоморфизмы свободной алгебры от двух порождающих // Функцион. анализ и его прил. – 1970. – Т. 4. № 3. – С. 107–108.
6 Makar-Limanov L., Turusbekova U., Umirbaev U. Automorphisms and derivations of free Poisson algebras in two variables // J. Algebra – 2009. – Vol. 322. № 9. – P. 3318 – 3330.
7 Алимбаев А.А., Науразбекова А.С., Козыбаев Д.Х. Линеаризация автоморфизмов и триангуляция дифференцирований свободных алгебр ранга 2 // Сибирские электронные математические известия. – 2019. – Т. 16. – С. 1133–1146.
8 Дуйсенгалиева Б.А., Науразбекова А.С., Умирбаев У.У. Ручные и дикие автоморфизмы алгебры дифференциальных многочленов ранга 2 // Фундаментальная и прикладная математика. – 2019. – Т. 22. № 4. – С. 101-114.
9 Гельфанд И.М., Дорфман И.Я. Гамильтоновы операторы и связанные с ними алгебраические структуры // Функцион. анализ и его прил. – 1979. – Т. 13. № 4. – С. 248–262.
10 Dzhumadil'daev A.S. Codimension growth and non-koszulity of Novikov operad // Commun. Alg. – 2011. – Vol. 39. – P. 2943–2952.
11 Dzhumadil'daev A.S., Lofwall C. Trees, free right-simmetric algebras, free Novikov algebras and identities // Homology, Homotopy and Applications. – 2002. – Vol. 4. № 2. – P. 165–190.
12 Makar-Limanov L., Umirbaev U. The Freiheitssatz for Novikov algebras // TWMS J. Pure Appl. Math. – 2011. – Vol. 2. – P. 228–235.
13 Bokut L.A., Chen Y., Zhang Z. Grobner-Shirshov bases method for Gelfand-Dorfman-Novikov algebras // J. Algebra Appl. – 2017. – Vol. 16. № 1. – P. 1750001-1–1750001-22.
14 Kolchin E.R. Differential Algebra and Algebraic Groups. Pure and Applied Mathematics, Vol. 54. Academic Press, New York-London, 1973.
15 Дуйсенгалиева Б.А., Умирбаев У.У. Дикий автоморфизм свободной алгебры Новикова // Сибирские электронные математические известия – 2018. – Т. 15. – С. 1671–1679.
16 Cox D., Little J., O'Shea D. Ideals, Varieties, Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra. Springer-Verlag, 1991.
17 Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп. Пер. с англ. М.: Наука, 1974.

Б.Ә. Дүйсенғалиева, А.С. Науразбекова

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан

Рангі 2 тең еркін Новиков алгебрасының қолды автоморфизмдер группасының амальгамирленген еркін көбейтіндісінің құрылымы

Аннотация: Мақала сипаттамасы нөлге тең өрістегі екі айнымалы еркін Новиков алгебрасының қолды автоморфизмдер группасын сипаттауға арналған. Еркін Новиков алгебраларының дифференциалды көпмүшеліктер алгебралары арқылы берілуін қолданып, базистік сөздердің кейбір қасиеттері зерттелген. Сонымен қатар, сипаттамасы нөлге тең өрістегі рангі екіге тең еркін Новиков алгебрасының қолды автоморфизмдер группасы $Af_2(A) \cap Tr_2(A)$ ішкі группасымен біріктірілген $Af_2(A)$ аффиндік автоморфизмдер мен $Tr_2(A)$ үшбұрышты автоморфизмдер группаларының амальгамирленген еркін көбейтіндісінің құрылымын қабылдайтыны дәлелденген.
Түйін сөздер: Дифференциалды көпмүшеліктер алгебрасы, еркін Новиков алгебрасы, амальгамирленген еркін көбейтінді, қолды автоморфизм.

B.A. Duisengaliyeva, A.S. Naurazbekova

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan

Amalgamated free product structure of the tame automorphism group of a free Novikov algebra of rank 2

Abstract: The article is devoted to the description the tame automorphism group of a free Novikov algebra of two generators over a field of characteristic zero. Using a representation of free Novikov algebras by differential polynomial algebras, some properties of basis words are investigated. It is also proved that the tame automorphism group of a free Novikov algebra of rank two over a field of characteristic zero admits the amalgamated free product structure of the affine automorphism group $Af_2(A)$ and of the triangular automorphism group $Tr_2(A)$ with the united subgroup $Af_2(A) \cap Tr_2(A)$.

Keywords: Differential polynomial algebra, free Novikov algebra, amalgamated free product, tame automorphism.

References

1 Jung H.W.E. Uber ganze birationale Transformationen der Ebene, J. reine angew Math., 184, 161–174(1942).
2 Van der Kulk W. On polynomial rings in two variables, Nieuw Archief voor Wisk., 1(3), 33–41(1953).
3 Shafarevich I.R. On some infinite dimensional algebraic groups, Rend. Mat. e Appl., 25(5), 208–212(1966).
4 Czerniakiewicz A.J. Automorphisms of a free associative algebra of rank 2, I, II, Trans. Amer. Math. Soc., 160, 393–401(1971); 171, 309–315(1972).
5 Makar-Limanov L. Avtomorfizmy svobodnoj algebry ot dvuh porozhdayushchih [The automorphisms of the free algebra of two generators], Funkcion. analiz i ego pril. [Functional Analysis and Its Applications], 4(3), 107–108(1970).
6 Makar-Limanov L., Turusbekova U., Umirbaev U. Automorphisms and derivations of free Poisson algebras in two variables, J. Algebra, 322(9), 3318–3330 (2009).
7 Alimbaev A.A., Naurazbekova A.S., Kozybaev D.Kh. Linearizaciya avtomorfizmov i triangulyaciya differencirovanij svobodnyh algebr ranga 2 [Linearization of automorphisms and triangulation of derivations of free algebras of rank 2], Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya [Siberian Electronic Mathematical Reports], 16, 1133–1146(2019).
8 Duisengaliyeva B.A., Naurazbekova A.S., Umirbaev U.U. Ruchnye i dikie avtomorfizmy algebry differencial'nyh mnogochlenov ranga 2 [Tame and wild automorphisms of differential polynomial algebras of rank 2], Fundamental'naya i prikladnaya matematika [Fundamental and Applied Mathematics], 22(4), 101–114(2019).
9 Gel'fand I.M., Dorfman I.Ya. Gamil'tonovy operatory i svyazannye s nimi algebraicheskie struktury [Hamiltonian operators and algebraic structures related to them], Funkcion. analiz i ego pril. [Functional Analysis and Its Applications], 13(4), 248–262(1979).
10 Dzhumadil'daev A.S. Codimension growth and non-koszulity of Novikov operad, Commun. Alg., 39, 2943–2952(2011).
11 Dzhumadil'daev A.S., Lofwall C. Trees, free right-simmetric algebras, free Novikov algebras and identities, Homology, Homotopy and Applications, 4(2), 165–190(2002).
12 Makar-Limanov L., Umirbaev U. The Freiheitssatz for Novikov algebras, TWMS J. Pure Appl. Math., 2, 228–235(2011).
13 Bokut L.A., Chen Y., Zhang Z. Grobner-Shirshov bases method for Gelfand-Dorfman-Novikov algebras, J. Algebra Appl., 16(1), 1750001-1–1750001-22(2017).
14 Kolchin E.R. Differential Algebra and Algebraic Groups (Pure and Applied Mathematics, Vol. 54. Academic Press, New York-London, 1973).
15 Duisengaliyeva B.A., Umirbaev U.U. Dikij avtomorfizm svobodnoj algebry Novikova [A wild automorphism of a free Novikov algebra] Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya [Siberian Electronic Mathematical Reports], 15, 1671-1679(2018).
16 Cox D., Little J., O'Shea D. Ideals, Varieties, Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra (Springer-Verlag, 1991).
17 Magnus W., Karrass A., Soliter D. The Combinatorial Group Theory (Wiley Interscience, Hoboken, 1966).

Сведения об авторах:

Дуйсенгалиева Б.А. – преподаватель кафедры Алгебры и геометрии Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Кажымукана 13, Нур-Султан, Казахстан.

Науразбекова А.С. – PhD, и.о. доцента кафедры Алгебры и геометрии Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Кажымукана 13, Нур-Султан, Казахстан.

Duisengaliyeva B.A. – Lecturer of the Department of Algebra and Geometry L. N. Gumilyov Eurasian National University, 13 Kazhimukan str., Nur-Sultan, Kazakhstan.

Naurazbekova A. S. – PhD, Assosiate Professor of the Department of Algebra and Geometry L. N. Gumilyov Eurasian National University, 13 Kazhimukan str., Nur-Sultan, Kazakhstan.

Поступила в редакцию 21.02.2020