Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы, 2020, том 131, №2, 35-41 беттер
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: **27.25.19**

В.В. Провоторов [1], Г.Е. Мурзабекова [2], К.Б. Нуртазина [3]

[1] *Воронежский государственный университет, Россия*
[2] *Казахский агротехнический университет имени С. Сейфуллина, Нур-Султан, Казахстан*
[3] *Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан*
(E-mail: [1] wwprov@mail.ru, [2] guldenmur07@mail.ru, [3] knurtazina@mail.ru)

О решении обратной задачи на графе для уравнения теплопереноса с памятью

Аннотация: Представлена новая постановка обратной задачи для уравнения теплопереноса, учитывающая эффект переноса теплоты с памятью. Получены условия корректной разрешимости прямой задачи и достаточные условия восстановления функции влияния на тепловой процесс (функции источника теплоты) на примере вырожденного графа. Указаны пути переноса полученных результатов на произвольный носитель – произвольный граф.

Ключевые слова: уравнение теплопереноса с памятью, восстановления источника теплоты на сетевых носителях, метод граничного управления.

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-7182/2020-131-2-35-41

Введение. Тепловое уравнение с памятью впервые введено в [1] и обобщено в [2]. Это уравнение гораздо лучше, чем обычное уравнение теплопроводности описывает физические явления в экстремальных ситуациях, близких к фазовым переходам. Обратная задача восстановления компактного графа по собственным значениям рассмотрена в [3]. Оказалось, что эта проблема гораздо более сложная, чем обратная задача для оператора Штурма-Лиувилля на интервале. Аналогично, обратная задача рассеяния на некомпактном графе сложнее, чем обратная задача на вещественной оси.

Наиболее конструктивные процедуры для решения целого класса обратных задач отражены в научных результатах Авдонина С.А., его соавторов и его научной школы [4-9]. Разработан метод граничного управления (Boundary Control Method – BCM), основанный на связи между обратной задачей (идентификацией) и управляемостью для динамических систем: если система управляема, то она идентифицируема. Этот метод был успешно применен практически ко всем линейным уравнениям математической физики: волновому уравнению; уравнениям теплопроводности, Максвелла, Шредингера. Преимущества BCM: он сохраняет линейность на всех этапах; применим к широкому кругу линейных систем; он в существенном не зависит от размерности системы и, наконец, позволяет построить простые алгоритмы и обеспечить стабильные численные реализации. Характерная черта BCM в его локальности. Для обратных задач на графах это означает, что для восстановления топологии и других параметров подграфа требуется только данные, относящиеся к этому подграфу. Это свойство обеспечивает преимущество BCM перед другими методами и позволяет распространить предлагаемый подход от интервала к графам при решении обратных задач математической физики. Новый подход к анализу обратных задач для дифференциальных уравнений с памятью предложен в работах [6-8]. Доказательства опираются на метод моментов, L-базисность и базисность по Риссу. Задачи идентификации источника на графах исследованы в работе [9].

В данной статье предложена новая постановка обратной задачи для уравнения теплопереноса, учитывающая эффект переноса теплоты с памятью.

Управляемость и ВСМ. G - связный топологический граф в $\mathbb{R}^m$, то $\mathbb{N}^m$. $V = \{v_i : 1 \le i \le n\}$ - вершины, $E = \{e_j : 1 \le j \le N\}$ - ребра. Каждое ребро – жорданова кривая в и допускает параметризацию длин дуги x_j следующим образом.

Параметры

$$\pi_i : [0, l_j] \to e_j : x_j \mapsto \pi_j(x_j)$$

дважды дифференцируемы, т.е. $\pi_j \in C^2([0, l_j], \mathbb{R}^m)$ для всех $1 \le j \le N$

C^2-сеть Γ связана с G посредством объединения $\Gamma = E \cup V$.

Валентность каждой вершины обозначается через v_j. Для краткости записи будем обозначать $I_{ext} = \{i \in \{1, \ldots, n\} : \gamma(v_i) = 1\}$ – множество индексов, соответствующих внешним вершинам, а $I_{int} = \{1, \ldots, n\}/I_{ext}$ - множество вершин, соответствующих внутренним вершинам.

Для каждой вершины v_i введем обозначение $N_i = \{j = \{1, ..., N\} : v_i \in e_j\}$ множества индексов, соответствующих смежным к вершинам v_i. При этом, если $i \in I_{ext}$, тогда N_i – одноэлементное множество и записывается как $\{j_i\}$. Для каждой вершины v_i и $j \in N_i$ мы введем дополнительное обозначение

$$v_j(v_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } \pi_j(l_j) = v_i \\ -1, & \text{если } \pi_j(0) = v_i \end{cases}$$

для вектора нормали ребра e_j к вершине v_i .

Для функции $u : \Gamma \to \mathbb{C}$ мы устанавливаем соответствие $u_j = u \circ \pi_j : [0, l_j] \to \mathbb{C}$ – сужение на ребро e_j и используем сокращение:

$$u_j(v_i) = u_j\left(\pi_j^{-1}(v_i)\right), u_j'(v_i) = \frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}x_j}\left(\pi_j^{-1}(v_i)\right), \dot{u}_t(v_i) = \frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}t}\left(\pi_j^{-1}(v_i)\right).$$

При этом дифференцирование проводится на каждом ребре e_j по длине дуги x_j и по времени t.

Пусть дана C^2-сеть G. На каждом ребре фиксируем функцию $q_j \in L^\infty(0, l_j)$.

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу для теплового уравнения с памятью:

$$\begin{cases} \dot{u}_j(x,t) - \int\limits_0^t M(t-s)u_j''(x,s)\mathrm{d}s + q_j(x)u_j(x,t) = f_j(t)g_j(x) \text{ на } Q_{jT}, j = 1, ..., N, \\ u(\cdot, t) = 0 \text{ непрерывна на } \Gamma, \quad t \in (0,T), \\ \sum\limits_{j \in N_j} \frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}v_j}\left(v_j, t\right) = 0, \quad i \in I_{int}, \quad t \in (0,T), \\ u_{ji}(v_i, t) = 0, \quad i \in I_{ext}, \quad t \in (0,T), \\ u_j(x, 0) = 0 \text{ на } (0, l_j), \quad j = 1, ..., N, \end{cases} \tag{1}$$

где $Q_{jT} := (0, l_j) \times (0, T)$ и $\frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}v_j}(v_i, t) = v_j(v_i)u_j'(v_i, t)$ означает внешнюю нормаль производной $u(\cdot, t)$ по v_j. Здесь и ниже $f_j \in H^1(0, T)$ – данные функции, удовлетворяющие условию

$$f_j(0) \ne 0, \forall j = 1, ..., N. \tag{2}$$

Для каждого $j = 1, ..., N, g_j \in \left(H^1(0, l_j)\right)$ – неизвестная функция такая, что

$$g_j(x) = p_j(x) + \sum_{k=1}^{K_j} \alpha_{jk}\delta(x - \xi_{jk}), \tag{3}$$

где $p_j \in L^2(0, l_j)$. При этом $\langle g_j, \varphi \rangle = \sum\limits_{k=1}^{K_j} \alpha_{jk}\varphi(\xi_{jk}), \varphi \in H'(0, l_j)$.

Задача восстановления g_j по наблюдению $u'(v, t), t \in [0, T]$ в некоторых внешних вершинах v и в некоторых внутренних вершинах решена путем применения теорем об управляемости и ВСМ.

Единственность решения прямой задачи. Чтобы показать, что система (1) корректна, введем следующий оператор A в гильбертовом пространстве $H = L^2(\Gamma) = \prod_{j=1}^{N} L^2(0, l_j)$ со скалярным произведением

$$(u, v)_H = \sum_{j=1}^{N} \int_0^{l_j} u_j(x) \bar{v}_j(x) \mathrm{d}x$$

Причем $D(A) = \{u \in H : u_j \in H^2(0, l_j)$ удовлетворяет (4) – (6), данным ниже

$$Au = \big(-u_j'' + q_j u_j \big)_{j=1}^{N}, \ \forall u \in D(A) \tag{4}$$

и непрерывна на Γ

$$\sum_{j \in N_i} \frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}v_j} = 0, \ \forall i \in I_{int}. \tag{5}$$

$$u_{ji}(v_i) = 0, \ \forall \in I_{ext}. \tag{6}$$

Отметим, что A является самосопряженным оператором с компактной резольвентой, поскольку A является сглаживающим оператором Фридриха для тройки (H, V, a), определенным посредством

$$V = \left\{ \ u \in \prod_{j=1}^{N} H^1(0, l_j), \ \text{удовлетворяющих } (4) \text{ и } (6) \ \right\},$$

представляющее собой гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u, v) = \sum_{j=1}^{N} \int_0^{l_j} (u_j \bar{v}_j + u_j' \bar{v}_j{}') \mathrm{d}x_j,$$

тогда оператору A соответствует билинейная форма

$$a(u, v)_V = \sum_{j=1}^{N} \int_0^{l_j} \Big(u_j'(x_j) \bar{v}_j'(x_j) + q_j(x_j) u_j(x_j) \bar{v}_j'(x_j) \Big) \mathrm{d}x_j, \quad u, v \in V. \tag{7}$$

При $q = 0$ спектр A^0 оператора детально изучен в работе [5]. Мы используем утверждение Вейля: если $\left\{ \ \lambda_n^{(0)} \ \right\}_{n=1}^{\infty}$ обозначает множество собственных значений оператора в возрастающем порядке, повторяющихся по степени кратности, то имеет место формула Вейля:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\pi_n^{(0)}}{n^2} = \frac{\pi^2}{L^2}, \tag{8}$$

где L – длина графа, т.е. $L = \sum_{j=1}^{N} l_j$.

Если $q \neq 0$, то учтем, что

$$\lambda_n^{(0)} + q_{low} \le \lambda_n \le \lambda_n^{(0)} + q_{up}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

последовательность по принципу минимакса, где $q_{low} = \inf_{\Gamma} q$ и, соответственно, $q_{up} = \sup_{\Gamma} q$, а $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ – множество собственных значений оператора A в возрастающем порядке.

Отсюда приходим к соотношению

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\lambda_n}{n^2} = \frac{\pi^2}{L^2},$$

аналогичному (8).

Поскольку граф одномерный, то асимптотики Вейля можно уточнять с точки зрения равномерной плотности Бёрлинга.

Обозначим через $N(x,r)$ число точек последовательности $\Omega = \{\pm\Re\sqrt{\pi_n}\}$ на интервале $[x, x+\ r)$, положим, что

$$n^+(r) := \sup_{x\in\mathbb{R}} N(x,r),\ n^-(r) := \inf_{x\in\mathbb{R}} N(x,r),$$

и стандартным путем верхнюю $\mathcal{D}^+(\Omega)$ и нижнюю $\mathcal{D}^-(\Omega)$ однородные плотности по последовательности Ω соответственно:

$$\mathcal{D}^+(\Omega) := \lim_{r\to\infty} \frac{n^+(r)}{r},\ \mathcal{D}^-(\Omega) := \lim_{r\to\infty} \frac{n^-(r)}{r}.$$

Оба предела существуют в силу супераддитивности $n^+(r)$ и субаддитивности $n^-(r)$.

Если $\mathcal{D}^+(\Omega) = \mathcal{D}^-(\Omega)$, то имеем общее обозначение $\mathcal{D}(\Omega)$ и равномерную плотность последовательности Ω: $\{\pm\Re\sqrt{\pi_n}\} = \frac{L}{\pi}$, $\sqrt{\pi_n} = \frac{\pi_n}{L} + O(1)$ при $n\to\infty$.

В работе [10] доказано, что собственные векторы оператора A равномерно ограничены и что производные растут по n с точностью $\sqrt{|\lambda_n|}$.

Лемма 1. *Для всех положительных чисел n пусть φ_n собственный вектор A , связанный с λ_n . Тогда обозначим через $\varphi_{n,j}$ сужение φ_n на ребро, тогда*

$$|\varphi_{n,j}(x_j)| \le C,\ \forall x_j \in [0, l_j]$$

$$|\varphi_{n,j}'(x_j)| \le C(1+\sqrt{|\lambda_n|}),\ \forall x_j \in [0, l_j],$$

для некоторой положительной постоянной C , не зависящей от n .

Теорема 1. *Если $f_j \in L^2(0,T)$, $j = 1,\dots,N$ и g – функция на графе такая, что сужение на ребро удовлетворяет (3), тогда уравнение (1) имеет единственное слабое решение и удовлетворяющее*

$$u \in C([0,T];V) \cap C^1([0,T];H)$$

Регулярность наблюдения.

Теорема 2. *Допустим, что $f_j \in L^2(0,T)$ и что Γ имеет хотя бы одну внешнюю вершину v_j при $i \in I_{ext}$. Тогда решение начально-краевой задачи*

$$\begin{cases} \dot{w}_j(x,t) - w_j''(x,t) + q_j(x) w_j(x,t) = 0 \textit{ на } Q_{jT}, \quad j = 1,...,N, \\ w(\cdot,t) = 0 \textit{ непрерывна на } \Gamma, \quad t \in (0,T), \\ \sum\limits_{j\in N_i} \dfrac{\mathrm{d}w_j}{\mathrm{d}v_j}(v_i,t) = 0, \quad i \in I_{int}, t \in (0,T), \\ w_{ji}(v_i,t) = f(t), t \in (0,T), \\ w_{ji}(v_l,t) = 0, \quad l \in I_{ext} \setminus \{i\}, t \in (0,T) \\ w_j(x,0) = \dot{w}_j(x,0) = 0 \textit{ на } (0,l_j), \quad j = 1,...,N, \end{cases}$$

существует на $C([0,T];L^2(\Gamma))$ и может быть представлено в виде

$$w(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\partial \varphi_{n,j_i}}{\partial v_j}(v_i) \int_0^t f(\tau) \frac{\sin w_n(t-\tau)}{w_n} \mathrm{d}\tau \right] \varphi_n,$$

Теорема 3. *Допустим, что* $f_j \in L^2(0,T)$, v_m *– внутренняя вершина графа* Γ *и ребро* e_k *примыкает к* $v_m : k \in N_m$. *Тогда решение начально-краевой задачи*

$$\begin{cases} \dot{w}_j(x,t) - w_j''(x,t) + q_j(x)w_j(x,t) = 0 \text{ на } Q_{jT}, \quad j = 1,...,N, \\ w_k(v_m,t) - w_j(v_m,t) = f(t), \ \ j \in N_m, \ \ j \neq k, \ \ t \in [0,T], \\ w_t(v_m,t) = w_j(v_m,t), \ l,j \in N_m, \ \ l,j \neq k, \ \ t \in [0,T], \\ w(\cdot,t) = 0 \text{ непрерывна на } v_i \in I_{int}, \ i \neq m, \ t \in [0,T], \\ \sum\limits_{j \in N_i} \dfrac{\mathrm{d}w_j}{\mathrm{d}v_j}(v_i,t) = 0, \ \ i \in I_{int}, \quad t \in (0,T), \\ w_{ji}(v_i,t) = 0, \ i \in I_{ext}, \ t \in (0,T), \\ w_j(x,0) = \dot{w}_j(x,0) = 0 \text{ на } (0,l_j), \ \ j = 1,...,N, \end{cases}$$

существует на $C([0,T];L^2(\Gamma))$ *и может быть представлено в виде*

$$w(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\partial \varphi_{n,k}}{\partial v_k}(v_m) \int_0^t f(\tau) \frac{\sin w_n(t-\tau)}{w_n} \mathrm{d}\tau \right] \varphi_n,$$

Обратная задача для уравнения теплопереноса с памятью.

$$\begin{cases} \dot{u}(x,t) - \int_0^t N(t-s)u''(x,s)\mathrm{d}s + q(x)u(x,t) = f(t)g(x), \ \ 0 < x < l, \ \ 0 < t < T \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \ 0 < t < T, \\ u(x,0) = 0, \ 0 < x < l. \end{cases} \tag{9}$$

Здесь $q \in L^\infty(0,l)$ известная функция, $f \in H^1(0,T)$ также известная функция, причем $f(0) \neq 0$.

Функция

$$g(x) = p(x) + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \delta(x - \xi_k), \ 0 < \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_N < l, \tag{10}$$

неизвестная, где $p \in L^2(0,l)$

Решена задача восстановления функции g по наблюдению $u'(0,t)$, $t \in [0,T]$ и доказано, что восстановление возможно при $T = l$, причем это минимальное время наблюдения.

Теорема 4. *Функция* p *восстанавливается путем сведения к уравнению Вольтерра 2-го рода на интервале* $0 < t < l$ *и применения следующего алгоритма:* (ξ_1, α_1) *задаем по*

$$\xi_1 = \inf\{t \geq 0 : u'(0,t) \neq 0\}, \quad \alpha_1 = \frac{u'(0,\xi_1)}{f(0)},$$

k *рассматривается как решение задачи Гурса для всех* $i \geq 2$, *полагая*

$$\mu_i(t) = u'(0,t) - \sum_{1 \leq m \leq i} \alpha_m \left[f(t - \xi_m) + \int_{\xi_m}^t k(\xi_m,s) f(t-s) \mathrm{d}s \right],$$

находим ξ_1 *и* α_1 *по соотношениям*

$$\xi_i = \inf\{t \geq 0 : \mu_i(t) \neq 0\}, \quad \alpha_1 = \frac{\mu_i(\xi_1)}{f(0)}.$$

Восстановление устойчиво, а именно справедливы следующие оценки

$$\|p\|_{L^2(0,l)} \leq C \|u'(0,\cdot)\|_{H^1(0,l)},$$

$$\sum_{k=1}^{N} (|\alpha_k| + |\xi_k|) \leq C \max_{o \leq t \leq l} |u'(0,t)|,$$

здесь C *– постоянная, не зависящая от* g *и* p.

Алгоритм восстановления функции на графе-звезде и графе-дереве приведен в [8]. Достаточные условия восстановления функции влияния на тепловой процесс (функции источника теплоты) доказаны в [11].

Утверждение теоремы 4 вместе с приведенным алгоритмом решения обратной задачи является основополагающей базой для получения решения обратной задачи с распределнными параметрами на графе.

Таким образом, представлена новая постановка обратной задачи для уравнения теплопереноса, учитывающая эффект переноса теплоты с памятью. Получены условия корректной разрешимости прямой задачи и достаточные условия восстановления функции влияния на тепловой процесс (функции источника теплоты) на примере вырожденного графа. При этом используется новый, более эффективный подход в решении поставленной задачи, основанный на результатах теории граничного управления распределенными объектами, чем известные в литературе методы решения обратных спектральных задач – задач восстановления дифференциального оператора по его спектральным характеристикам. Указаны пути переноса полученных результатов на произвольный носитель – произвольный граф.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан (Проект № AP05136197).

Список литературы

1 Cattaneo C., Sulla conduzione del carole // Atti del Seminario Matematico e Fisico dell'Universita di Modena. – 1948. – V.3. – P.83-101. MR0032898 (11:362d).

2 Gurtin M.E. and Pipkin A.G. // A general theory of heat condition with finite wave speed. Arch. Rat. Mech. Anal. – 1968. – V.31. – P.113-126. MR 1553521.

3 Carlson R. Inverse eigenvalue problems on directed graphs // Trans. Amer. Math. Soc. – 1999. – V.351. – P.4069–4088.

4 S. Avdonin and P. Kurasov. Inverse problems for quantrum trees // Inverse Problems and Imaging. – 2008. – V.2(1). – P.1-21.

5 Avdonin S., Mikhaylov V., Nurtazina K. On Inverse Dynamical and Spectral Problems for the Wave and Schrodinger Equations on Finite Trees. The Leaf Peeling Method // Journal of Mathematical Sciences (USA). – 2017. – Vol.224(1). – P.1-10.

6 Avdonin S. and Pandolfi L. Simultaneous temperature and flux cotrollability for heat equations with memory // Quarterly of Applied Mathematics. – 2013. –V.71(2). – P.339-368.

7 Avdonin S. and Belinskiy B. On controllability of a non-homogeneous string with memory // J. Math. Anal. Appl. – 2013. – V.398(1). – P.254-269.

8 Avdonin S., Murzabekova G., Nurtazina K. Source Identification for the Differential Equation with Memory. // In book: Trends in Mathematics. Research Perspective, Birkhaeuser / Springer International Publishing Switzerland. – 2017. – P.111-120.

9 Avdonin S., Nicaise S. Source identification problems for the wave equation on graphs // Inverse Problems. – 2015. – V.31. 095007 (29 pp) / DOI: 10.1088/0266-5611/31/9/095007

10 Nicaise S., Zair O. Identifiability, stability and reconstruction results of point sources by boundary measurements in heterogeneous trees // Rev. Mat. Complut. – 2003. – V.16(1). – P.151-178.

11 Zhabko A.P., Nurtazina K.B., Provotorov V.V. About one approach to solving the inverse problem for parabolic equation // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control processes. 2019. – Vol.15(3). – P.322-335.

В.В. Провоторов [1] , Г.Е. Мурзабекова [2] , К.Б. Нуртазина [3]

[1] *Воронеж мемлекеттiк университетi, Воронеж, Ресей*
[2] *С. Сейфуллин атындағы Қазақ агротехникалық университетi, Нұр-Сұлтан, Қазақстан*
[3] *Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетi, Нұр-Сұлтан, Қазақстан*

Графтардағы жадылы жылу теңдеуi үшiн сәйкестендiру мәселесi

Аннотация. Жадылы жылу алмасу әсерiн ескеретiн теңдеудiң керi есебiнiң қойылымы ұсынылған. Тура есептiң корректтi шешiмдiлiгi және өзгеше графтың мысалында жылу процесiне әсер ету функциясын (жылу көзiнiң функциясын) қалпына келтiрудiң жеткiлiктi шарттары берiлген. Алынған нәтижелердi еркiн тұғырға, яғни кез-келген графқа, алмастыру жолдары көрсетiлген.

Түйiн сөздер: жадылы жылу алмасу теңдеуi, желiлiк тасымалдаушылардағы жылу көзiн қалпына келтiру, шекаралық басқару әдiсi.

V.V. Provotorov [1] , G.E. Murzabekova [2] , K.B. Nurtazina [3]

[1] *Voronezh State University, Voronezh, Russia*
[2] *S. Seifullin Kazakh AgroTechnical University, Nur-Sultan, Kazakhstan*
[3] *L.N.Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan*

On solving the inverse graph problem for the heat transfer equation with memory

Abstract. A new formulation of the inverse problem for the heat transfer equation is presented, taking into account the effect of heat transfer with memory. The conditions for correct solvability of the direct problem and sufficient conditions for recovering the function of influence on the heat process (the function of the heat source) on the example of a degenerate graph are obtained. The ways of transferring the obtained results to an arbitrary carrier-an arbitrary graph-are specified.

Keywords: equation of heat transfer with memory, recovery of a heat source on network carriers, method of boundary control.

References

1 Cattaneo C. Sulla conduzione del carole, Atti del Seminario Matematico e Fisico dell'Universita di Modena. 1948. Vol. 3. P.83-101. MR0032898 (11:362d).
2 Gurtin M.E. and Pipkin A.G. A general theory of heat condition with finite wave speed, Arch. Rat. Mech. Anal. 1968. Vol. 31. P.113-126. MR 1553521.
3 Carlson R. Inverse eigenvalue problems on directed graphs, Trans. Amer. Math. Soc. 1999. Vol. 351. P.4069–4088.
4 Avdonin S. and Kurasov P. Inverse problems for quantrum trees, Inverse Problems and Imaging. 2018. Vol. 2(1). P.1-21.
5 Avdonin S., Mikhaylov V., Nurtazina K. On Inverse Dynamical and Spectral Problems for the Wave and Schrodinger Equations on Finite Trees. The Leaf Peeling Method, Journal of Mathematical Sciences (USA). 2017. Vol.224(1). P.1-10.
6 Avdonin S. and Pandolfi L. Simultaneous temperature and flux cotrollability for heat equations with memory, Quarterly of Applied Mathematics. 2013. Vol. 71(2). P.339-368.
7 Avdonin S. and Belinskiy B. On controllability of a non-homogeneous string with memory, J. Math. Anal. Appl. 2013. Vol. 398(1). P.254-269.
8 Avdonin S., Murzabekova G., Nurtazina K. Source Identification for the Differential Equation with Memory. // In book: Trends in Mathematics. Research Perspective, Birkhaeuser / Springer International Publishing Switzerland. 2017. P.111-120.
9 Avdonin S., Nicaise S. Source identification problems for the wave equation on graphs, Inverse Problems. 2015. Vol. 31. 095007 (29 pp). DOI: 10.1088/0266-5611/31/9/095007
10 Nicaise S., Zair O. Identifiability, stability and reconstruction results of point sources by boundary measurements in heterogeneous trees, Rev. Mat. Complut. 2003. Vol. 16(1). P.151-178.
11 Zhabko A.P., Nurtazina K.B., Provotorov V.V. About one approach to solving the inverse problem for parabolic equation, Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control processes. 2019. Vol.15(3). P.322-335.

Сведения об авторах:

Провоторов В.В. – Доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия.

Мурзабекова Г.Е. – Кандидат физико-математических наук, доцент, Казахский агротехнический университет имени С. Сейфуллина, Нур-Султан, Казахстан.

Нуртазина К.Б. – Кандидат физико-математических наук, доцент, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан.

Provotorov V.V. – Doctor of physical and mathematical sciences, Professor, Voronezh state University, Voronezh, Russia.

Murzabekova G.E. – Candidate of physical and mathematical sciences, associate Professor, S. Seifullin Kazakh AgroTechnical University, Nur-Sultan, Kazakhstan.

Nurtazina K.B. – Candidate of physical and mathematical sciences, associate Professor, L.N.Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan.

Поступила в редакцию 01.04.2020