УДК 524.834

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЯ KDV

Баймуканов Чингиз Сагандыкович[1], Бауыржан Гульнур[2]
baymukanov.00@gmail.com
[1]Студент 4-ого курса Физико-технического факультета (5B060400),
[2]преподаватеь кафедры «Общей и Теоретической Физики»,
ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан.
Научный руководитель: Ержанов К.К.

Рассмотрим решение для метрики, для которой уравнения поля Эйнштейна в вакууме порождают уравнение Кортевега-де-Фриза (KdV). Метрика односолитонного решения была исследована ранее и является метрикой Лоренцева метрика типа N. Уравнения поля Эйнштейна по своей сути нелинейны. Из-за их нелинейности предполагается, что они будут иметь солитонные решения. В качестве начальной метрики берутся различные метрики, из которых генерируют солитонные решения. Таким образом, был найден ряд решений уравнений Эйнштейна.

Вводим линейный элемент:

$$ds^2 = -[af^2(x,t) - 2f_{xx}(x,t)]dt^2 + 2\left(\frac{3}{2}t\right)^{\frac{4}{3}}dx^2 - 2f(x,t)dtdx + dy^2$$
$$+2\left(\frac{3}{2}t\right)^{\frac{2}{3}}dxdy + dtdz, \qquad (1)$$

где a - константа. Единственным неисчезающим элементом тензора Риччи для метрики (1) является R, и соответствующее уравнение вакуума для него. В следствии дает следующее нелинейное уравнение:

$$f_{xt} = (x,t) - af(x,t)f_{xx}(x,t) - af_x^2(x,t) + f_{xxxx}(x,t) = 0. \qquad (2)$$

Хорошо известно, что уравнение KdV обладает всеми прекрасными свойствами, которые характеризуют интегрируемую нелинейную систему, включая бесконечное число сохраняемых величин в инволюции (которая определяет интегрируемость Лиувилля), N-солитонные решения, би-гамильтонову структуру. Используем преобразование координат

$$t = \frac{2}{3}e^{-3t}. \qquad (3)$$

Одно-солитонное решение уравнения KdV равно:

$$f(x.t) = -\frac{k^2}{2}\mathrm{sech}^2\frac{n}{2}. \qquad (4)$$

Уравнение (4) представляет собой инвертированный импульс профиля sech^2, движущийся в положительном направлении x, где η = k_1x – k_1t, k - волновое число. Уравнение Кортевега-де-Фриза является нелинейным, линейные комбинации одного солитонного решения не дают новых решений. Вместо этого могут быть построены два-солитонные решения.

$$f(x,t) = \frac{1}{2}(k_1^2 - k_2^2)\left[\frac{k_2^2 cosech^2\left(\frac{n_2}{2}\right)k_1^2\,\mathrm{sech}^{2\left(\frac{n_1}{2}\right)}{*1}}{k_2\coth\left(\frac{n_2}{2}\right) - k_1\tanh(\frac{n_1}{2}))\char`^2}\right],$$

$$n_1 = k_1x - k_1^3t \text{ и } n_2 = k_2x - k_2^3t. \qquad (5)$$

Алгоритм Переса утверждает, что уравнения подразумевают, что пространство-время относится к типу N или III. Кроме того, в нашем случае следующее сокращение тензора Вейля $C_{\mu\nu\lambda\xi}C^{\lambda\xi}{}_{\rho\sigma} = 0$, что означает, что метрика имеет тип N. Геодезические уравнения для материальной частицы в метрике (6) оказываются равными:

$$\frac{du^0}{dt} = 0, \tag{6}$$

$$\frac{du^1}{dt} = -2\left[\frac{u^1u^0}{t} + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} u^2u^0}{3t^{\frac{5}{3}}}\right], \tag{7}$$

$$\frac{du^2}{dt} = \frac{2\left(2^{\frac{1}{3}}(3t)^2u^1 + u^2\right)u^0}{3t}, \tag{8}$$

$$\frac{du^3}{dt} = \frac{2}{9t^{\frac{5}{3}}}[\mathrm{k}^2 \operatorname{sech}^2\left(\frac{n}{2}\right) 9t^{\frac{2}{3}}u^1 - 9t^{\frac{5}{3}}k^3u^1 \tanh\left(\frac{n}{2}\right) + 2^{\frac{2}{3}}\, 3^{\frac{1}{3}}\, u^2)\, u^0 +$$
$$+3^{\frac{1}{3}}(2t)^{\frac{4}{3}}\, u^1\, \left(3 * 2^{\frac{1}{3}}t^{\frac{2}{3}}\, u^1 + 3^{\frac{1}{3}}u^2\right) +$$
$$+36t^{\frac{5}{3}}k^3 cosech^3(n) \sinh^4\left(\frac{n}{2}\right)((u^1)^2 + k^{4(u^0)^2})]. \tag{9}$$

В общем виде эту систему решить сложно. Рассмотрим одно из его решений, для $u^0 = 0$. В этом случае u^1, u^2 – некоторые константы интегрирования. Здесь последнее уравнение u^3можем записать как

$$\frac{du^3}{dt} = \frac{2}{9}(3^{\frac{1}{3}} * 2^{\frac{4}{3}}\left(3 * 2^{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} e^{-t} + 3^{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{-1}{3}}e^t\right) + 36(Csch[n])^3\left(\mathrm{sh}\left[\frac{n}{2}\right]\right)^4\right). \tag{10}$$

Для случая $n = 0$ решение получить легко

$$u^3 = \frac{4}{3} * (-2 * e^{-t} * e^t). \tag{11}$$

Аналитически решение нами получено с использованием разложения в ряд в следующем виде

$$u^3 = \frac{1}{3456}\left(e^{-9-t}Sech\frac{1}{3e^3} - \frac{x}{2}\right]^6 (528e^tt - 288e^{6+t}t - 792e^tt^2 + 306e^{6+t}t^2 +$$
$$+528e^tt^3 - 144e^{6+t}t^3 - 132e^tt^4 + 27e^{6+t}t^4 -$$
$$-e^tt\big(4(-4 + 6t - 4t^2 + t^3) + 3e^6(-32 + 34t - 16t^2 + 3t^3)\big) \times Cosh\left[\frac{4}{3e^3} - 2x\right] +$$
$$+2e^tt\big(52(-4 + 6t - 4t^2 + t^3) + 3e^{6(-32+34t-16t^2+3t^3)}\big)Cosh\left[\frac{2}{3e^3} - x\right] -$$
$$-96e^{3+t}tSinh\left[\frac{4}{3e^3} - 2x\right] - 12e^{9+t}tSinh\left[\frac{4}{3e^3} - 2x\right] +$$

$$+132e^{3+t}t^2 Sinh\left[\frac{4}{3e^3}-2x\right]-80e^{3-t}t^3 Sinh\left[\frac{4}{3e^3}-2x\right]$$
$$+18e^{3-t}t^4\sinh\left[\frac{4}{3e^3}-2x\right]+960e^{3+t}\sinh\left[\frac{2}{3e^3}-x\right]-24e^{9+t}tsin\left[\frac{2}{3e^3}-x\right]$$
$$-1320e^{3+t}t^2\sinh\left[\frac{2}{3e^3}-x\right]+800e^{3+t}t^3 Sinh\left[\frac{2}{3e^3}-x\right]-180e^{3+t}t^4 Sinh\left[\frac{2}{3e^3}-x\right]. \quad (12)$$

Для более общего случая получить решение будет намного более сложно. Ниже нами представлено данное (11) решение в графическом виде:

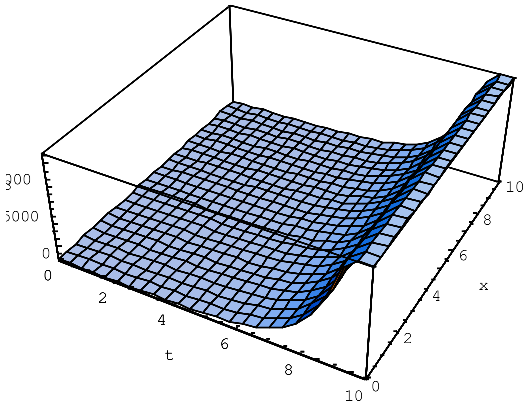

Рисунок 1. Решение для u^3 при $\mathrm{u}^0 = 0$.

Показано решение для метрики, для которой уравнения Эйнштейна сводятся к уравнению Кортевега-де-Фриза, которое, как известно, полностью интегрируемо. Таким образом, решения уравнений Эйнштейна для этой метрики являются солитонными решениями уравнений Кортевега-де-Фриза. Для этой модеи нами получено решение для уравнений движения частиц.

Список использованных источников

1. Yerzhanov K.,Bauyrzhan G.,Altaibayeva A.,Myrzakulov R. Inflation from the Symmetry of the Generalized Cosmological Model" №2254 (2021).
2. Debojit Sarma, Mahadev Patgiri, Axially symmetric, asymptotically flat vacuum metric with a naked singularity and closed timelike curves,- department of Physics, Cotton College, Guwahati-781001, India.
3. M. Lakhsmanan, S. Rajasekar. "Nonlinear Dynamics",– Springer-Verlag, 2003.

УДК 834

ФОРМ ИНВАРИАНТНОСТЬ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Баймуканова Райхан
Riko6999@gmail.com
студентка 4 курса специальности «5В060400»-Физика, кафедра общей и теоретической физики, ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
Научный руководитель – О.В. Разина

В настоящее время наша Вселенная переживает фазу ускоренного расширения. Это подтверждается различными данными наблюдений. Существует компонент материи, который в настоящее время преобладает над плотностью энергии Вселенной. Из-за отсутствия полного понимания природы этого компонента его называют темной энергией.