УДК 517.957

ДЕФОРМАЦИЯ ПОВЕРХНОСТИ (2+1)-МЕРНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОЙ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ

Имашев Данияр Балғынбекұлы
andasidb@gmail.com
магистрант кафедры «Общей и теоретической физики», специальность – «Физика»
Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, г. Нур-Султан, Казахстан
Научный руководитель – Н. С. Серикбаев

Известно что класс интегрируемых нелинейных уравнений, наподобие нелинейного уравнения Шредингера (НУШ), это ключевая модель в теории интегрируемых уравнений. (2+1)-мерное уравнение Дэви-Стюартсона (ДС) это калибровочно-геометрический эквивалент спинового уравнения Ишимори. И он также является одним из (2+1)-мерных обобщений НУШ, В этой статье мы используем деформации уравнений Лакса (2+1)-мерного интегрируемого уравнения ДС, для получения соответствующих квадратичных форм.

(2+1)-мерное уравнение ДС имеет вид

$$iq_t + \frac{1}{2}\left(\sigma^2 q_{xx} + q_{yy}\right) = (v - qr)q, \tag{1a}$$

$$-ir_t + \frac{1}{2}\left(\sigma^2 r_{xx} + r_{yy}\right) = (v - qr)r, \tag{1b}$$

$$u_{xx} - \sigma^2 u_{yy} = 2(qr)_{xx}, \tag{1c}$$

где $r = \pm q^*$, в том числе q^* является комплексным сопряжением r [1]-[2].

Чтобы описать солитонную поверхность, допустим что G - группа Ли, а $\mathfrak{g}$ - соответствующая алгебра Ли. Мы приводим теорию для $\dim\mathfrak{g} = 3$, ее можно обобщить для конечной размерности n. Предположим, что существует внутреннее произведение $\langle , \rangle$ на $\mathfrak{g}$ такое, для $g_1, g_2 \in \mathfrak{g}$ как $\langle g_1, g_2 \rangle$. Пусть $\{e_1, e_2, e_3\}$ будет ортонормированным базисом в $\mathfrak{g}$ таким, что $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера.

Вводим Φ как G-мерную дифференцируемую функцию x, y, t и λ для каждого $(x, y, t) \in O \subset R^2$ и $\lambda \in R$. Таким образом, отображение может быть определено из касательного пространства G в алгебру Ли $\mathfrak{g}$ как

$$\Phi_x\Phi^{-1} = U, \quad \Phi_y\Phi^{-1} = V, \quad \Phi_t\Phi^{-1} = W, \tag{2}$$

где Φ_x, Φ_y и Φ_t являются касательными векторами Φ; U, V и W являются функциями x, y, t и λ и принимают значения в g [3].

Пары Лакса для уравнения ДС заданы как

$$\Phi_x = U\Phi = \begin{pmatrix} i\lambda & 0 & if \\ 0 & i\lambda & ig \\ i\bar{f} & -i\bar{g} & 0 \end{pmatrix}\Phi, \tag{3a}$$

$$\Phi_y = V\Phi = \begin{pmatrix} i\lambda & u & if \\ -\bar{u} & -i\lambda & -ig \\ i\bar{f} & -i\bar{g} & 0 \end{pmatrix}\Phi, \tag{3b}$$

$$\Phi_t = W\Phi = \begin{pmatrix} -2i\lambda^2 + i|u|^2 + iv_1 & -2u\lambda + iu_y & -2if\lambda - 2f_y \\ 2\bar{u}\lambda + i\bar{u}_y & 2i\lambda^2 - i|u|^2 + iv_2 & 2ig\lambda - 2g_y \\ -2i\bar{f}\lambda + 2\bar{f}_y & 2i\bar{g}\lambda + 2\bar{g}_y & -2i\left(|f|^2 - |g|^2\right) \end{pmatrix}\Phi. \tag{3c}$$

Φ - поверхность в G, определяемая уравнением (1) с условием совместимости (2.2). Теперь давайте введем поверхность в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Пусть F $\mathfrak{g}$-значная дифференцируемая функция функциями x, y, t и λ для каждого $(x, y, t) \in O \subset R^2$ и $\lambda \in R$. Первая и вторая фундаментальные формы F определяются как

$$\begin{aligned}(ds_I)^2 \equiv g_{ij}dx^i dx^j &= \langle F_x, F_x \rangle dx^2 + \langle F_y, F_y \rangle dy^2 + \langle F_t, F_t \rangle dt^2 + \\ &+ 2\langle F_x, F_y \rangle dxdy + 2\langle F_x, F_t \rangle dxdt + 2\langle F_y, F_t \rangle dydt,\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}(ds_{II})^2 \equiv h_{ij}dx^i dx^j &= \langle F_{xx}, N \rangle dx^2 + \langle F_{yy}, N \rangle dy^2 + \langle F_{tt}, N \rangle dt^2 + \\ &+ 2\langle F_{xy}, N \rangle dxdy + 2\langle F_{xt}, N \rangle dxdt + 2\langle F_{yt}, N \rangle dydt,\end{aligned} \tag{5}$$

где g_{ij} и h_{ij} являются компонентами первой и второй фундаментальных форм[4]. Здесь $i, j = 1,2,3,$ $x^1 = x,\ x^2 = y$ и $x^3 = t,$ а $N \in G$ определяется как

$$\langle N, N \rangle = 1,\ \ \langle F_x, N \rangle = \langle F_y, N \rangle = \langle F_t, N \rangle = 0.$$

Здесь $\{F_x, F_y, F_t, N\}$ образует рамку в каждой точке поверхности.

Из (4) мы делаем вывод, что первая фундаментальная форма (1ФФ) для уравнения Дэви-Стюартсона (ДС) будет выглядеть следующим образом

$$\begin{aligned}I = tr\left(F^2{}_x\right)dx^2 + tr\left(F^2{}_y\right)dy^2 + tr\left(F^2{}_t\right)dt^2 + \\ + tr\left(F_x \cdot F_t\right)dxdt + tr\left(F_x \cdot F_y\right)dxdy + tr\left(F_y \cdot F_t\right)dydt.\end{aligned} \tag{6}$$

Мы изучаем конечно-мерную алгебру Ли g. Следовательно, он имеет матричное представление по теореме Адо. Мы используем матрицы, поэтому сопряженное отображение имеет вид $\Phi^{-1}A\Phi,$ для $\Phi \in G$ и $A \in \mathfrak{g}$.

Используя сопряженное представление, мы можем связать поверхности в G с поверхностями в $\mathfrak{g}$ как

$$F = \Phi^{-1}\Phi_{\lambda},\ F_x = \Phi^{-1}A\Phi,\ F_y = \Phi^{-1}B\Phi,\ F_t = \Phi^{-1}C\Phi, \tag{7}$$

где

$$A = U_{\lambda} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{8a}$$

$$B = V_{\lambda} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{8b}$$

$$C = W_{\lambda} = \begin{pmatrix} -4i\lambda & -2u & -2if \\ 2\bar{u} & 4i\lambda & 2ig \\ -2i\bar{f} & 2i\bar{g} & 0 \end{pmatrix}. \tag{8c}$$

Учитывая (7), можно считать что

$$F_x^2 = F_x \cdot F_x = \Phi^{-1}A\Phi\Phi^{-1}A\Phi = \Phi^{-1}A^2\Phi,$$

тогда, можно будет расписать (6) по отдельности как

$$tr\left(F_x^2\right) = tr\left(\Phi^{-1}A^2\Phi\right) = tr\left(A^2\right), \tag{9}$$

$$tr\left(F_y^2\right) = tr\left(\Phi^{-1}B^2\Phi\right) = tr\left(B^2\right), \tag{10}$$

$$tr\left(F_t^2\right) = tr\left(\Phi^{-1}C^2\Phi\right) = tr\left(C^2\right), \tag{11}$$

$$tr\left(F_x \cdot F_t\right) = tr\left(\Phi^{-1}AC\Phi\right) = tr\left(AC\right), \tag{12}$$

$$tr\left(F_x \cdot F_y\right) = tr\left(\Phi^{-1}AB\Phi\right) = tr\left(AB\right), \tag{13}$$

$$tr\left(F_y \cdot F_t\right) = tr\left(\Phi^{-1}BC\Phi\right) = tr\left(BC\right). \tag{14}$$

И из (9)-(14) получаем дальнейшие решения

$$tr\left(F_x^2\right) = -2; \tag{15}$$

$$tr\left(F_y^2\right) = -2; \tag{16}$$

$$tr\left(F_t^2\right) = -8\left(4\lambda^2 + |u|^2 + |f|^2 + |g|^2\right); \tag{17}$$

$$tr\left(F_x \cdot F_t\right) = 0; \tag{18}$$

$$tr\left(F_x \cdot F_y\right) = 0; \tag{19}$$

$$tr\left(F_y \cdot F_t\right) = 8\lambda. \tag{20}$$

Подставляя полученные решения (15)-(20) в (6), получим 1ФФ

$$I = -2dx^2 - 2dy^2 - 8\left(4\lambda^2 + |u|^2 + |f|^2 + |g|^2\right)dt^2 + 8\lambda dydt. \tag{21}$$

Для получения 2ФФ уравнения ДС используем следующую, выведенную от (5) формулу

$$\begin{gathered} II = \frac{1}{2}\left[tr\left(F_{xx} \cdot n_1\right) + tr\left(F_{xx} \cdot n_2\right)\right]dx^2 + \frac{1}{2}\left[tr\left(F_{tt} \cdot n_1\right) + tr\left(F_{tt} \cdot n_3\right)\right]dt^2 + \\ \frac{1}{2}\left[tr\left(F_{yy} \cdot n_2\right) + tr\left(F_{yy} \cdot n_3\right)\right]dy^2 + tr\left(F_{xt} \cdot n_1\right)dxdt + tr\left(F_{xy} \cdot n_2\right)dxdy + tr\left(F_{yt} \cdot n_3\right)dydt, \end{gathered} \tag{22}$$

где

$$n^{tx} = n_1 = \pm \frac{\Phi^{-1}[C, A]\Phi}{\sqrt{\frac{1}{2} tr\left([C, A]^2\right)}} = \pm \frac{1}{\chi_1} \Phi^{-1}[C, A]\Phi, \tag{23}$$

$$n^{xy} = n_2 = \pm \frac{\Phi^{-1}[A, B]\Phi}{\sqrt{\frac{1}{2} tr\left([A, B]^2\right)}} = \pm \frac{1}{\chi_2} \Phi^{-1}[A, B]\Phi, \tag{24}$$

$$n^{yt} = n_3 = \pm \frac{\Phi^{-1}[B, C]\Phi}{\sqrt{\frac{1}{2} tr\left([B, C]^2\right)}} = \pm \frac{1}{\chi_3} \Phi^{-1}[B, C]\Phi. \tag{25}$$

И подставляя систему уравнений (8) в (23)-(25), можем получить следующие выводы

$$\chi_1 = \sqrt{\tfrac{1}{2} tr\left([C, A]^2\right)} = 2\sqrt{-|f|^2 - |g|^2}, \tag{26}$$

$$\chi_2 = \sqrt{\tfrac{1}{2} tr\left([A, B]^2\right)} = 0, \tag{27}$$

$$\chi_3 = \sqrt{\tfrac{1}{2} tr\left([B, C]^2\right)} = 2\sqrt{-|f|^2 - |g|^2 - 4|u|^2}. \tag{28}$$

Из (27) делаем вывод

$$\chi_2 = 0 \Rightarrow n_2 = \infty. \tag{29}$$

Из вывода (29) преобразуем (22) в

$$\begin{gathered} II = \frac{1}{2} tr\left(F_{xx} \cdot n_1\right)dx^2 + \frac{1}{2}\left[tr\left(F_{tt} \cdot n_1\right) + tr\left(F_{tt} \cdot n_3\right)\right]dt^2 + \\ \frac{1}{2} tr\left(F_{yy} \cdot n_3\right)dy^2 + tr\left(F_{xt} \cdot n_1\right)dxdt + tr\left(F_{yt} \cdot n_3\right)dydt. \end{gathered} \tag{30}$$

Если

$$F_{xx}=\left(\Phi^{-1}A^2\Phi\right)_x=\Phi^{-1}\left(A_x+[A,U]\right)\Phi,$$

то подставляя системы уравнений (2) и (8) в формулу (30), получаем решения

$$tr\left(F_{xx}\cdot n_1\right)=\frac{2\left(|g|^2+|f|^2\right)}{\sqrt{-|f|^2-|g|^2}}, \tag{37}$$

$$tr\left(F_{yy}\cdot n_3\right)=\frac{4\left(\bar{u}^2+|u|^2\right)+|f|^2-\bar{f}^2}{\sqrt{-|f|^2-|g|^2-4|u|^2}}, \tag{38}$$

$$tr\left(F_{tx}\cdot n_1\right)=\frac{4\left(2\lambda\left(|f|^2+|g|^2\right)-if_x\bar{f}+\bar{f}_xf-g_x\bar{g}+\bar{g}_xg-2i\bar{u}\bar{g}f\right)}{\sqrt{-|f|^2-|g|^2}}, \tag{39}$$

$$tr\left(F_{yt}\cdot n_3\right)==\pm\frac{4\lambda\left(|u|^2+|f|^2+|g|^2\right)}{\sqrt{-|f|^2-|g|^2-4|u|^2}}, \tag{40}$$

$$tr(F_{tt}\cdot n_1)+tr(F_{tt}\cdot n_3)=Z, \tag{41}$$

где Z имеет вид

$$Z=8\left(-2\lambda^2-2\left(|f|^2-|g|^2\right)-|u|^2-v_1\right)|f|^2+16\left(\lambda^2+\lambda+|u|^2-2\left(|f|^2-|g|^2\right)+2v_2\right)|g|^2+$$

$$+16\left(\lambda^2-6\lambda+|u|^2+u+(v_1+v_2)\right)|u|^2+8\left(-4i\lambda f_y-4i\lambda gu+6ug_y-if_t\right)\bar{f}+8\left(4\bar{u}f_y+f\bar{u}_y+4i\lambda g_y-ig_t\right)\bar{g}+$$

$$+8\left(2f\bar{g}_y-4i\lambda u_y+iu_t\right)\bar{u}+8\left(i\bar{g}_t-4i\lambda\bar{g}_y+4f_yu\right)g+8\left(4i\lambda\bar{u}_y-i\bar{u}_t\right)u.$$

Подставляя решения (37)-(41) в формулу (30), получим:

$$II=\frac{\left(|g|^2+|f|^2\right)}{\sqrt{-|f|^2-|g|^2}}dx^2+\frac{1}{2}Zdt^2+\frac{2\left(\bar{u}^2+|u|^2\right)+|f|^2-\bar{f}^2}{\sqrt{-|f|^2-|g|^2-4|u|^2}}dy^2+ \tag{42}$$

$$+\frac{4\left(2\lambda\left(|f|^2+|g|^2\right)-if_x\bar{f}+\bar{f}_xf-g_x\bar{g}+\bar{g}_xg-2i\bar{u}\bar{g}f\right)}{\sqrt{-|f|^2-|g|^2}}dxdt+\frac{4\lambda\left(|u|^2+|f|^2+|g|^2\right)}{\sqrt{-|f|^2-|g|^2-4|u|^2}}dydt.$$

В статье исследовались нелинейные интегрируемые уравнения и деформация пар Лакса. Они использовались для получения первой и второй фундаментальной формы поверхности (2+1)-мерного уравнения Дэви-Стюартсона.

Это исследование было поддержано Министерством образования и науки Республики Казахстан, Грант AP008857372.

Список использованной литературы

1. Serikbayev, N. S. On the Integrable Two-Component (2+1)-dimensional Davey-Stewartson Equation I / N. S. Serikbayev, G. N. Nugmanova, R. Myrzakulov. // bulletin of l.n. gumilyov eurasian national university. Physics. Astronomy series. — 2019. — № 129. — С. 73-79.
2. Wang, R. Exact solutions and excitations for the Davey-Stewartson equations with nonlinear and gain terms / R. Wang, Y. Huang. // Eur. Phys. J. D. — 2010. — № 57. — С. 395-401.
3. Bobenko A. I., Integrable Surfaces, Funct. Anal. Prilozh. 24, 68-69 (1990).
4. Tek, S. Soliton surfaces and surfaces from a variational principle / S. Tek // Bilkent University. — URL: http://www.thesis.bilkent.edu.tr/0003347.pdf.