ӘОЖ 517.957, 532.5

ӨЛШЕМСІЗ ХИРОТА ТЕҢДЕУІ ҮШІН КОСИНУС ӘДІСІ

Қалықбай Ырысбай Сағынтайұлы
yrys.bay@mail.ru
Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ магистранты, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі-Г.Н.Шайхова

Сызықты емес дербес туындылы дифференциалды теңдеулер математикалық физикада маңызды рөл атқарады [1]. Соңғы жылдары сызықты емес теңдеулердің нақты шешімдерін алуда көптеген әдістер ұсынылды. Сызықты емес толқындық құбылыстар, атап айтсақ, дисперсия, диффузия және конвекция сызықты емес толқындық теңдеулерде өте маңызды [2-3]. Бұл жұмыстың мақсаты маңызды солитондық теңдеу болып табылатын Хирота теңдеуінің нақты шешімін косинус әдісімен алу [4-5.

Өлшемсіз Хирота теңдеуі–маңызы зор кубтық сызықты емес теңдеу. Ол мына түрде беріледі

$$iq_x + \frac{1}{2}q_{tt} + |q|^2 q - i\alpha\left(q_{ttt} - 6|q|^2 q_t\right) = 0, \qquad (1)$$

мұндағы $q(x,t)$ кеңістіктік координат x және t уақыттың комплекс мәнді функциясы болады, α нақты тұрақты, i комплексті сан. (1) теңдеу [6] ұсынылды және [7-8] зерттелді.

Косинус әдісінің сипаттамасы

Бұл бөлімде косинус әдісін сипаттаймыз [4-5].. Әдіс бойынша толқындық айнымалыны келесідей түрде аламыз

$$Q(x,t) = Q(x-ct), \qquad (2)$$

дербес туынды дифференциалдық теңдеуді

$$E_1(Q_t, Q_x, Q_{xx}, Q_{xxx}, ...) = 0, \tag{3}$$

қарапайым дифференциалды теңдеуге айналдырамыз

$$E_2(Q, Q', Q'', Q''', ...) = 0. \tag{4}$$

Қарапайым дифференциалдық теңдеудің (4) шешімдері келесі түрде ізделінеді

$$Q(x,t) = \lambda \cos^{\beta}(\mu\xi), \tag{5}$$

мұндағы λ, μ және β анықталатын параметрлер, μ толқындық сан және c толқынның жылдамдығы. (5) теңдеудің бірінші және екінші ретті туындылары келесідей болады

$$\left(Q^n\right)' = -n\beta\mu\lambda^n \cos^{n\beta-1}(\mu\xi)\sin(\mu\xi) \tag{6}$$

$$\left(Q^n\right)'' = -n^2\mu^2\beta^2\lambda^n \cos^{n\beta}(\mu\xi) + n\mu^2\lambda^n\beta(n\beta-1)\cos^{n\beta-2}(\mu\xi) \tag{7}$$

Берілген (6)-(7) теңдеулерді қарапайым дифференциалды теңдеуге (4) қойып, алынған алгебралық теңдеулер жүйесін компьютерленген символдық пакеттердің көмегімен шешеміз. Содан кейін біз $\cos^k(\mu\xi)$ бірдей дәрежедегі барлық мүшелерді жинаймыз және белгісіз α, μ және β арасында алгебралық теңдеулер жүйесін алу үшін олардың коэффициенттерін нөлге тең етіп орнатамыз және кейінгі жүйені шешеміз.

Косинус әдісін қолдану

Өлшемсіз Хирота теңдеуін (1) қарастырып, түрлендіру жасаймыз

$$q = e^{i(ax+bt)}Q(x,t), \tag{8}$$

(1) теңдеу мына түрге келеді

$$\begin{gathered} -aQ + iQ_x - \frac{1}{2}b^2Q + ibQ_t + \frac{1}{2}Q_{tt} + Q^3 - \alpha b^3 Q + \\ + 3i\alpha b^2 Q_t + 3\alpha a Q_{tt} - i\alpha Q_{ttt} - 6\alpha b Q^3 + 6i\alpha Q^2 Q_t = 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Нақты және жорамал бөліктерін (9) теңдеуден бөліп аламыз

$$-aQ - \frac{1}{2}b^2Q + \frac{1}{2}Q_{tt} + Q^3 - \alpha b^3 Q + +3\alpha a Q_{tt} - 6\alpha b Q^3 = 0. \tag{10}$$

$$Q_x + bQ_t + \frac{1}{2}Q_{tt} + 3\alpha b^2 Q_t - \alpha Q_{ttt} + 6\alpha Q^2 Q_t = 0. \tag{11}$$

Толқындық түрлендіруді қою арқылы

$$Q(x,t)=Q(\xi)=Q(x-ct), \tag{12}$$

(10)-(11) жүйені келесідей жазамыз

$$\left(-\alpha b^3-\frac{1}{2}b^2-a\right)Q+\left(\frac{1}{2}c^2+3\alpha ac^2\right)Q''+(1-6\alpha b)Q^3=0, \tag{13}$$

$$(1-bc-3\alpha b^2c)Q'+\alpha c^3Q'''-6\alpha cQ^2Q'=0. \tag{14}$$

(14) теңдеуді интегралдап және интегралдау тұрақтысын нөлге тең деп алып, алатынымыз

$$(1-bc-3\alpha b^2c)Q+\alpha c^3Q''-2\alpha cQ^3=0.$$

Сонда (13)-(14) теңдеулер жүйесі мына түрде болады

$$\left(-\alpha b^3-\frac{1}{2}b^2-a\right)Q+\left(\frac{1}{2}c^2+3\alpha ac^2\right)Q''+(1-6\alpha b)Q^3=0, \tag{15}$$

$$(1-bc-3\alpha b^2c)Q+\alpha c^3Q''-2\alpha cQ^3=0. \tag{16}$$

(15)-(16) теңдеулер мына шартты қанағаттандырады

$$c=\frac{1}{b+3\alpha b^2-\dfrac{\alpha^2b^3+\frac{1}{2}\alpha b^2+\alpha a}{\frac{1}{2}+3\alpha a}}.$$

Біз косинус әдісімен (15) теңдеуді шешеміз. Ол үшін мынадай түрлендіру жасаймыз

$$Q=\lambda\cos^{\beta}(\mu\xi). \tag{17}$$

Косинус шешімін табу үшін (17) теңдеудің екінші ретті туындысын аламыз

$$Q''=-\mu^2\beta^2\lambda\cos^{\beta}(\mu\xi)+\mu^2\lambda\beta(\beta-1)\cos^{\beta-2}(\mu\xi). \tag{18}$$

(17) және (18) теңдеулерді (15) теңдеуге қойып келесіні аламыз

$$\begin{aligned}&\left(-\alpha b^3-\frac{1}{2}b^2-a\right)\lambda\cos^{\beta}(\mu\xi)+\left(\frac{1}{2}c^2+3\alpha ac^2\right)\times\\&\times\left(-\mu^2\beta^2\lambda\cos^{\beta}(\mu\xi)+\mu^2\lambda\beta(\beta-1)\cos^{\beta-2}(\mu\xi)\right)+\\&+(1-6\alpha b)\lambda^3\cos^{3\beta}(\mu\xi)=0.\end{aligned} \tag{19}$$

(19) теңдеуден β тауып аламыз

$$\beta - 2 = 3\beta \Rightarrow \beta = -1. \qquad (20)$$

(20) теңдеуді (19) теңдеуге қойып келесі өрнекті аламыз

$$\left(-\alpha b^3\lambda - \frac{1}{2}b^2\lambda - a\lambda\right)\cos^{-1}(\mu\xi) - \frac{1}{2}c^2\mu^2\lambda\cos^{-1}(\mu\xi) + c^2\mu^2\lambda\cos^{-3}(\mu\xi) - \\ - 3\alpha ac^2\mu^2\lambda\cos^{-1}(\mu\xi) + 6\alpha ac^2\mu^2\lambda\cos^{-3}(\mu\xi) + \left(\lambda^3 - 6\alpha b\lambda^3\right)\cos^{-3}(\mu\xi) = 0. \qquad (21)$$

(21) теңдеуден келесі теңдеулер жүйесін аламыз

$$\cos^{-1}(\mu\xi); -\alpha b^3\lambda - \frac{1}{2}b^2\lambda - a\lambda - \frac{1}{2}c^2\mu^2\lambda - 3\alpha ac^2\mu^2\lambda = 0, \qquad (22)$$

$$\cos^{-3}(\mu\xi); c^2\mu^2\lambda + 6\alpha ac^2\mu^2\lambda + \lambda^3 - 6\alpha b\lambda^3 = 0. \qquad (23)$$

(22)-(23) теңдеулерден келесі мәндерді табамыз

$$\mu = \pm\frac{1}{c}\sqrt{\frac{\alpha b^3 + \frac{1}{2}b^2 + a}{\frac{1}{2} + 3\alpha a}},\ \lambda = c\mu\sqrt{\frac{6\alpha a + 1}{6\alpha b - 1}}. \qquad (24)$$

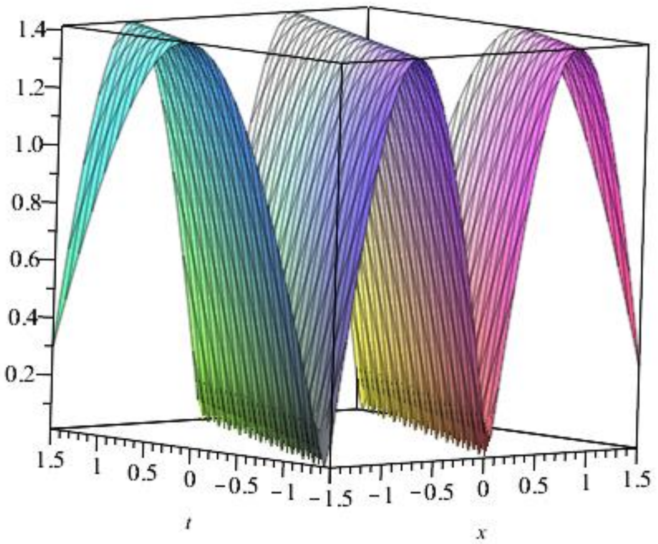
(24) теңдеуді (17) теңдеуге қойып және алынған мәндерді (8) теңдеуге қойып косинус шешімін аламыз

$$q(x,t) = \pm e^{i(ax+bt)}c\mu\sqrt{\frac{6\alpha a + 1}{6\alpha b - 1}}\cos^{-1}\left(\frac{1}{c}\sqrt{\frac{\alpha b^3 + \frac{1}{2}b^2 + a}{\frac{1}{2} + 3\alpha a}}(x - ct)\right). \qquad (25)$$

(25) табылған шешім (15) және (16) теңдеулерді қанағаттантырады, егер

$$c = \frac{1}{b + 3\alpha b^2 - \dfrac{\alpha^2 b^3 + \frac{1}{2}\alpha b^2 + \alpha a}{\frac{1}{2} + 3\alpha a}}.$$

Жоғарыда табылған шешімнің графигі 1 - суретте берілген.



1-сурет. $q(x,t)$ шешімнің 3D-графигі, мұндағы $\alpha = 0.5, \beta = 1, a = 1, b = 1.$

Қорытынды

Бұл жұмыста біз өлшемсіз Хирота теңдеуін зерттедік. Косинус әдісі арқылы осы теңдеудің нақты толқындық шешімін алдық. Maple бағдарламасында алынған шешімнің 3D-графигін тұрғыздық. Осы әдіс көптеген сызықты емес теңдеулерге қолданылуы мүмкін.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

1. Wazwaz A. Partial differential equations and solitary waves theory // Springer.-2009.-P.746
2. Bekova G., Yesmakhanova Y., Myrzakulov R., Shaikhova G. Darboux Transformation and Soliton Solution for the (2+1)-dimensional Complex Modifed Korteweg-de Vries Equations. // J.Phys.:Conference Series . — 2017. — T. 54, № 936. — C. 012045 (1–9)..
3. Mukhanmedina K.T., Syzdykova A.M.,Shaikhova G.N. Soliton solutions of two-component Hirota equation. Bulletin of the Karaganda university. //Mathematics series. 2015, No.4 (80), pp.103-107.
4. Wazwaz A.M. (2004). A sine-cosine method for handling nonlinear wave equations, Math. Comput. Modelling, Vol. 40, No.5, pp. 499-508.
5. Yusufoglu, E., Bekir A. (2006). Solitons and periodic solutions of coupled nonlinear evolution equations by using Sine-Cosine method, Internat. J. Comput. Math, Vol. 83, No. 12, pp. 915-924.
6. Hirota R., Exact envelope-soliton solutions of a nonlinear wave equation. //Journal of Mathematical Physics. 1973. 14, 805.
7. Sasa N.and Satsuma J., New-Type of Soliton Solutions for a Higher-Order Nonlinear Schrödinger Equation. // J. Phys. Soc. Jpn. 1991.60, 409.
8. Tao Y. and He J. Multisolitons, breathers, and rogue waves for the Hirota equation generated by the Darboux transformation. //Phys. Rev. E. 2012. 85, 02660.