УДК 530.182

РЕШЕНИЕ ТИПА БРИЗЕР ДЛЯ (1+1)-МЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ХИРОТЫ

Нұрбаева З.А[1]., Сагидуллаева Ж.М.[2]
nur.zerde98@gmail.com
[1]Магистрант 2 курса специальности «7М05304-Физика», [2]старший преподаватель кафедры общей и теоретической физики, ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
Научный руководитель – Алтайбаева А.Б.

Уравнение Хироты является широко используемым инструментом для описания взаимодействий бегущих волн в физике. Подробно об этом было написано в работе [1], где так же были рассмотрены мультисолитонные решения, решения типа разрушительных волн.

В данной статье было получено решение типа бризер для уравнения Хироты с помощью метода преобразования Дарбу. Данный метод обеспечивает более систематическое и удобное управление процессом нелинейных волновых уравнений. Некоторые из них представлены в виде графиков, чтобы показать поведение решений бегущей волны.

(2+1)-мерное нелокальное уравнение Хироты [2]

$$iq_t + \alpha q_{xy} + i\beta q_{xxy} - \vartheta q + i(wq)_x = 0, \tag{1}$$

$$\vartheta_x + 2\alpha\delta(qq^*(\epsilon_1 x, \epsilon_2 t, \epsilon_3 y))_y - 2i\beta\delta\big(q^*_{xy}(\epsilon_1 x, \epsilon_2 t, \epsilon_3 y)q - q^*(\epsilon_1 x, \epsilon_2 t, \epsilon_3 y)q_{xy}\big) = 0, \tag{2}$$

$$w_x - 2\beta\delta\big(qq^*(\epsilon_1 x, \epsilon_2 t, \epsilon_3 y)\big)_y = 0, \tag{3}$$

где $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = (\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, $q(x, y, t) -$ комплексная функция, $q^*(\epsilon_1 x, \epsilon_2 t, \epsilon_3 y) -$ ее комплексное сопряжение, $v(x, y, t), w(x, y, t)$- вещественные функции, α, β являются постоянными и $\delta = \pm 1$.

Соответствующая пара Лакса для (2+1)-мерных уравнений Хироты может быть выражена следующим образом

$$\Phi_x = A\Phi, \tag{4}$$

$$\Phi_t = (2\alpha\lambda + 4\beta\lambda^2)\Phi_y + \mathrm{B}\Phi. \tag{5}$$

С собственными функциями $\Phi = (\Phi_1;\ \Phi_2)^T$. Матричные операторы данной системы A и B запишутся как

$$A = -i\lambda\sigma_3 + A_0,$$
$$B = \lambda B_1 + B_0,$$

где матрицы имеют следующие виды

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & q \\ -r & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$B_0 = -\frac{i}{2}\vartheta\sigma_3 + \begin{pmatrix} 0 & i\alpha q_y - \beta q_{xy} - wq \\ i\alpha r_y + \beta r_{xy} + wq & 0 \end{pmatrix},$$
$$B_1 = iw\sigma_3 + 2i\beta\sigma_3 A_{0y}.$$

Так же будем учитывать, что $\delta = \pm 1$.

Условие нулевой кривизны определяется как

$$A_t - B_x + [A, B] - (2\alpha\lambda + 4\beta\lambda^2)A_y = 0.$$

Одним из условий интегрируемости нелинейных уравнений является наличие связанной с ней линейной спектральной задачи, условие нулевой кривизны которой определяет точный вид рассматриваемой модели. В данной работе рассмотрим упрощенный вид уравнений (1)-(3), а именно (1+1)-мерное нелокальное уравнение Хироты в следующем виде

$$iq_t + \alpha(q_{xx} + 2\delta q^2 r) + i\beta(4\delta rqq_x + q_{xxx}) = 0. \quad (6)$$

Преобразование дарбу

Метод преобразования Дарбу один из мощных совремемнных методов находжения точных решений солитонных уравнений. Данный метод подразумевает внесение неизвестной матрицы для определение рекурсивного решения из некоторого тривиального (нулевого) решения. Использование матрицы L является важным элементом при преобразовании Дарбу [3-4]. Для этого рассмотрим пространственное преобразование пары Лакса

$$\Phi' = L\Phi, \quad (7)$$
$$L = \lambda I - S, \quad (8)$$

Здесь

L – матрица Дарбу;

I – единичная матрица.

Если записать общий вид матрицы S

$$S = \begin{pmatrix} S_{11}(x,t) & S_{12}(x,t) \\ S_{21}(x,t) & S_{22}(x,t) \end{pmatrix}.$$

Используя (4) – (5) можно выразить

$$L_x + LA = A'L,$$
$$L_t + LB = (2\alpha\lambda + 4\beta\lambda^2)L_x + B'L.$$

Собирая по степени λ, получаем слелующие уравнения

$$\lambda^0: S_x = A_0'S - SA_0,$$
$$\lambda^1: A_0' = A_0 + i[S, \sigma_3],$$
$$iI\sigma_3 = i\sigma_3 I.$$

Так же

$$I: \lambda_t = (2\alpha\lambda + 4\beta\lambda^2)\lambda_x,$$

$$\lambda^0: -S_t = SB_0 - B_0'S,$$
$$\lambda^1: 2\alpha S_x = B_0' - B_0 + SB_1 - B_1'S,$$
$$\lambda^2: 4\beta S_x = B_1' - B_1.$$

В итоге получим преобразование Дарбу

$$A_0' = A_0 + i[S, \sigma_3],$$
$$B_0' = B_0 - \ SB_1 + (2\alpha\lambda + 4\beta\lambda^2)S + 2\alpha S_x,$$
$$B_1' = B_1 + 4\beta S_x.$$

Из этого вытекают следующие уравнения, за счет которых получим решение типа бризер

$$q^{[1]} = q - 2iS_{12}.$$

Отсюда делаем вывод, что

$$S_{22} = -S_{11}.$$

Решения будут записываться как

$$S' = NSN^{-1},$$
$$S = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} S_{11}(x,t) & S_{12}(x,t) \\ S_{21}(x,t) & S_{22}(x,t) \end{pmatrix}.$$

Здесь матричные операторы имеют вид

$$S_{11} = \lambda_1 f_1 f_1^*(\epsilon_1 x, \epsilon_2 t) + \delta\lambda_1^* f_2 f_2^*(\epsilon_1 x, \epsilon_2 t),$$

$$S_{12} = -\delta(\lambda_1 + \lambda_1^*) f_1 f_2^*(\epsilon_1 x, \epsilon_2 t),$$

$$S_{21} = -\delta(\lambda_1 + \lambda_1^*) f_2 f_1^*(\epsilon_1 x, \epsilon_2 t),$$

$$S_{22} = -\lambda_1^* f_1 f_1^*(\epsilon_1 x, \epsilon_2 t) + \delta\lambda_1 f_2 f_2^*(\epsilon_1 x, \epsilon_2 t),$$

Так же будем учитывать, что

$$\Delta = f_1 f_1^*(\epsilon_1 x, \epsilon_2 t) - \delta f_2 f_2^*(\epsilon_1 x, \epsilon_2 t).$$

$$f_1 = C_1 e^{iax+ibt},$$

$$f_2 = C_2 e^{-iax-ibt}.$$

Сделовательно, наши решения будут записываться следующим образом

$$q^{[1]} = q - 2iS_{12}, \tag{9}$$

где

$$S_{11} = \frac{\lambda_1 f_1 f_1^*(\epsilon_1 x, \epsilon_2 t) + \lambda_1^* f_2 f_2^*(\epsilon_1 x, \epsilon_2 t)}{\Delta}, \tag{10}$$

$$S_{12} = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) f_1 f_2^*(\epsilon_1 x, \epsilon_2 t)}{\Delta}, \tag{11}$$

$$S_{21} = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) f_2 f_1^*(\epsilon_1 x, \epsilon_2 t)}{\Delta}, \tag{12}$$

$$S_{22} = \frac{\lambda_2 f_1 f_1^*(\epsilon_1 x, \epsilon_2 t) + \lambda_1 f_2 f_2^*(\epsilon_1 x, \epsilon_2 t)}{\Delta}. \tag{13}$$

Решение типа бризер

В этом разделе мы приводим решения типа бризер уравнения (6) через преобразование Дарбу [5-6]. Для этого берем нулевое решение непрерывной волны в качестве начального значения для уравнения (6)

$$q = e^{i(ax+bt)}.$$

где a, b - все действительные постоянные.

Локальное уравнение хироты

Уравнение (6) требует, чтобы частота b удовлетворяла следующему нелинейному дисперсионному соотношению

$$b = \beta - \alpha a^2.$$

Откуда

$$q = e^{i(ax+(\beta-\alpha a^2)t)},$$
$$q^* = e^{-i(ax+(\beta-\alpha a^2)t)}.$$

Решения типа бризер

$$q^{[1]} = e^{i(ax+(\beta-\alpha a^2)t)} - 2i\frac{(\lambda_1-\lambda_2)e^{2i(ax+(\beta-\alpha a^2)t)}}{C_1^2-C_2^2}. \tag{14}$$

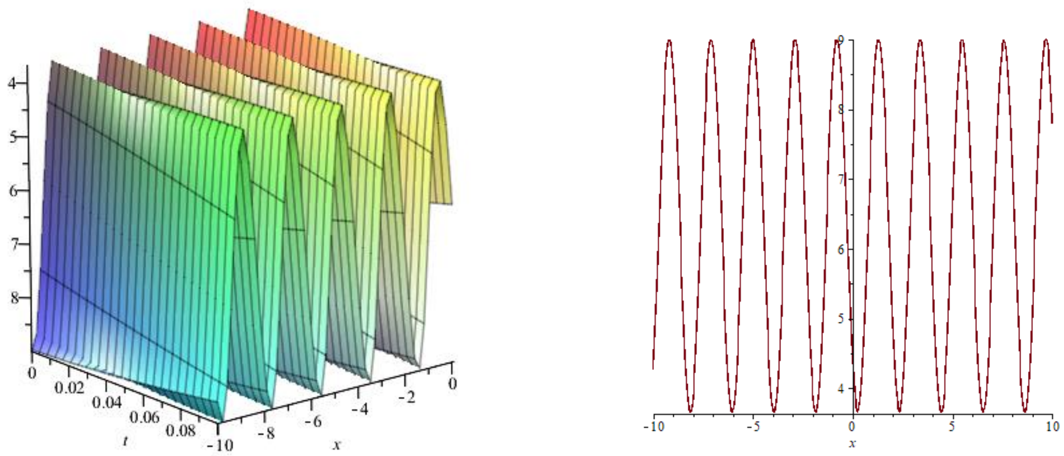

Рисунок 1. График уравнения (14), параметры: $a = 1, \alpha = 1, \beta = 5$.

По графику можем наблюдать вид решения типа бризер для локального уравнения Хироты, который был получен из уравнения (14).

Пространственная нелокальность

Поменяется только координата пространства, таким образом, что при переходе к нелокальным уравнениям изменятся только комплексно сопряженные функции ($x \to -x$, $t \to t$). С помощью следующих тривиальных решений

$$q = e^{iax+ibt},$$

$$q^* = e^{iax-ibt},$$

получим решения типа бризер для пространственно нелокального уравнения Хироты

$$q^{[1]} = e^{iax+ibt} - 2i\frac{(\lambda_1-\lambda_2)C_1C_2e^{2ibt}}{C_1^2e^{2iax}-C_2^2e^{-2iax}}. \quad (15)$$

Пространственно-временная нелокальность

В этом разделе рассмотрим нелокальность по координатам пространства и времени, используя преобразования запишем $x \to -x, t \to -t.$

$$q = e^{iax+ibt},$$
$$q^* = e^{iax+ibt},$$

получим решения типа бризер для пространственно-временного нелокального уравнения Хироты

$$q^{[1]} = e^{iax+ibt} - \frac{8ia\beta(\lambda_1-\lambda_2)C_1C_2}{C_1^2e^{2iax+2ibt}+C_2^2e^{-2iax-2ibt}} \quad (16)$$

В данной работе получено решение типа бризер для локального и нелокального уравнения Хироты с помощью метода Дарбу. Доказано, что предлагаемый метод достаточно прост, понятен и в то же время очень эффективен для получения решений не только локальных уравнений, но и с учетом нелокальностей. Также с помощью этого метода можно получить разнообразные категории решений в единой структуре, что является нашим фокусом в дальнейших исследованиях интегрируемых систем.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства и науки Республики Казахстан, грант №AP08857372.

Список использованных источников

1. Deng-Shan Wang, Fei Chen and Xiao-Yong Wen. Darboux transformation of the general Hirota equation: multisoliton solutions, breather solutions, and rogue wave solutions // Advances in Difference Equations, 2016, P. 1-17.
2. Нұрбаева З.А., Сагидуллаева Ж.М., Калибровочная эквивалентность нелокального уравнения Хироты и спиновой системы // Ломоносов – 2022.
3. Hasegawa, A, Tappert, F: Transmission of stationary nonlinear optical physics in dispersive dielectric fibers I: anomalous dispersion // Appl. Phys. Lett., 1973, № 23, P. 142-144.
4. Mollenauer, LF, Stolen, RH, Gordon, JP: Experimental observation of picosecond pulse narrowing and solitons inoptical fibers // Phys. Rev. Lett., 1980, № 45, 1095-1098.
5. Ankiewicz, A, Soto-Crespo, JM, Akhmediev, N: Rogue waves and rational solutions of the Hirota equation // Phys. Rev. E., 2010, № 81, 046602.
6. Tao, Y, He, J: Multisolitons, breathers and rogue waves for the Hirota equation generated by the Darboux transformation // Phys. Rev. E., 2012, № 85, 026601.