ОӘЖ 517.98

МАТРИЦАЛЫҚ ОПЕРАТОРЛАР КЛАСЫ ҮШІН ҮШ САЛМАҚТЫ ДИСКРЕТТІ ИТЕРАЦИЯЛАНҒАН ХАРДИ ТИПТІ ТЕҢСІЗДІКТЕР

Жаңабергенова Назерке Салменқызы
zhanabergenova.ns@gmail.com
Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің 2-курс докторанты, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекші – Темирханова А.М.

Айталық $0 < q, p, \theta < \infty$ және $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ болсын. $\omega=\{\omega_i\}_{i-1}^{\infty}$, $u=\{u_i\}_{i-1}^{\infty}$оң, ал $\varphi=\{\varphi_i\}_{i-1}^{\infty}$ теріс емес нақты сандар тізбегі болсын. $f=\{f_j\}_{j-1}^{\infty}$ нақты сандар тізбегінен тұратын және келесідей норма анықталатын кеңістікті $l_{p,u}$ арқылы белгілейік:

$$\|f\|_{p,u}=\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|u_j f_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\infty.$$

Кез келген $f \in l_{p,u}$ үшін келесі дискретті Харди типті теңсіздіктерін қарастырамыз:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n^{\theta}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\varphi_k\sum_{i=1}^{k}a_{k,i}f_i\right|^q\right)^{\frac{\theta}{q}}\right)^{\frac{1}{\theta}}\le C_1\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|u_j f_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}},\forall f\in l_1, \tag{1}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n^{\theta}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\left|\varphi_k\sum_{i=k}^{\infty}a_{k,i}f_i\right|^q\right)^{\frac{\theta}{q}}\right)^{\frac{1}{\theta}}\le C_2\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|u_j f_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}},\forall f\in l_1, \tag{2}$$

мұндағы C_1, C_2- f-тен тәуелсіз оң тұрақтылар және $(a_{k,i})$, $k \ge i \ge 1$, - матрицасының $a_{k,i} \ge 0$ элементтері k индексі бойынша кемімейді және i бойынша өспейді, дискреттік Ойнаров шартын қанағаттандырады, яғни келесі шартты қанағаттандыратын $d \ge 1$ тұрақты сан табылады

$$\frac{1}{d}\left(a_{k,j}+a_{j,i}\right)\le a_{k,i}\le d\left(a_{k,j}+a_{j,i}\right),\ k\ge j\ge i\ge 1. \tag{3}$$

Бұл жұмыста $0 < p \le q < \theta < \infty$ жағдайы үшін (1) және (2) теңсіздіктерінің орындалуының қажетті және жеткілікті шарттары алынды. Барлық $k \ge i \ge 1$ үшін $a_{k,i}=1$ болған жағдайы [1], [2], [3] және [4] жұмыстарда p, q және θ арасындағы келесі қатынастар үшін зерттелген: $1<\theta<\min\{p,q\}<\infty$, $p>1$; $1<\theta<\min\{p,q\}<\infty$, $0<p\le 1$ және $1<q<p\le\theta<\infty, 0<p\le 1$. (1) және (2) теңсіздіктердің интегралдық жағдайы [5] және [6] жұмыстарында қарастырылған.

Негізгі нәтижелер:

Теорема 1. Айталық $0 < p \le q < \theta < \infty$ болсын. $(a_{k,i})$ матрицасының $a_{k,i}$ элементтері дискреттік Ойнаров шартын қанағаттандырсын. Онда (1) салмақты теңсіздігі орындалады сонда тек сонда

(a) Егер $0 < p \le 1,\ p \le q < \theta < \infty$ жағдайында

(b)

$$B_1 = \sup_{j \ge 1} \left(\sum_{n=j}^{\infty} \omega_n^{\theta} \left(\sum_{i=j}^{n} a_{i,j}^{q} \varphi_i^{q} \right)^{\frac{\theta}{q}} \right)^{\frac{1}{\theta}} u_j^{-1} < \infty$$

болса. Сонымен қатар $C_1 \approx B_1$, мұндағы C_1 - (1) теңсіздіктің ең кіші тұрақтысы.

(c) Егер $1 < p \le q < \theta < \infty$ жағдайында $B \approx \max\{B_2, B_3\} < \infty$ болса, мұндағы

(d)

$$B_2 = \sup_{j \ge 1} \left(\sum_{n=j}^{\infty} \omega_n^{\theta} \left(\sum_{k=j}^{n} a_{k,j}^{q} \varphi_k^{q} \right)^{\frac{\theta}{q}} \right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{i=1}^{j} u_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$B_3 = \sup_{j \ge 1} \left(\sum_{n=j}^{\infty} \omega_n^{\theta} \left(\sum_{k=j}^{n} \varphi_k^{q} \right)^{\frac{\theta}{q}} \right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{i=1}^{j} a_{j,i}^{p'} u_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Сонымен қатар $C_1 \approx B$, мұндағы C_1 - (1) теңсіздіктің ең кіші тұрақтысы.

Теорема 2. Айталық $0 < p \le q < \theta < \infty$ болсын. $(a_{k,i})$ матрицасының $a_{k,i}$ элементтері дискреттік Ойнаров шартын қанағаттандырсын. Онда (2) салмақты теңсіздігі орындалады сонда тек сонда

(a) Егер $0 < p \le 1,\ p \le q < \theta < \infty$ жағдайында

(b)

$$D_1 = \sup_{j \ge 1} \left(\sum_{n=1}^{j} \omega_n^{\theta} \left(\sum_{i=n}^{j} a_{j,i}^{q} \varphi_i^{q} \right)^{\frac{\theta}{q}} \right)^{\frac{1}{\theta}} u_j^{-1} < \infty$$

болса. Сонымен қатар $C_2 \approx D_1$, мұндағы C_2 - (2) теңсіздіктің ең кіші тұрақтысы.

(c) Егер $1 < p \le q < \theta < \infty$ жағдайында $D \approx \max\{D_2, D_3\} < \infty$ болса, мұндағы

(d)

$$D_2 = \sup_{j \ge 1} \left(\sum_{n=1}^{j} \omega_n^{\theta} \left(\sum_{k=n}^{j} a_{j,k}^{q} \varphi_k^{q} \right)^{\frac{\theta}{q}} \right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{i=j}^{\infty} u_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$D_3 = \sup_{j\geq 1}\left(\sum_{n=1}^{j}\omega_n^{\theta}\left(\sum_{k=n}^{j}\varphi_k^{q}\right)^{\frac{\theta}{q}}\right)^{\frac{1}{\theta}}\left(\sum_{i=j}^{\infty}a_{i,j}^{p'}u_i^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Сонымен қатар $C_2 \approx D$, мұндағы C_2 - (2) теңсіздіктің ең кіші тұрақтысы.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

1. R. Oinarov, B.K. Omarbayeva, A.M. Temirkhanova Discrete iterated Hardy-type inequalities with three weights // Journal of Mathematics, Mechanics, Computer Science 2020 №105(1) P.19-29.
2. B.K.Omarbayeva, L.-E. Persson, A.M. Temirkhanova Weighted iterated discrete Hardy-type inequalities // Math. Ineq. Appl. 2020 №23(3) P. 943-959.
3. А.М. Темирханова, Б.К. Омарбаева Весовая оценка одного класса квазилинейных дискретных операторов: случай $0 < q < \theta < p < \infty, p > 1$ // Вестник КазНПУ, серия Физ.-Мат. 2019 №67 С. 109-116.
4. А.М. Темирханова, Б.К. Омарбаева Weighted estimate of a class of quasilinear discrete operators: the case $0 < q < p \leq \theta < \infty, p > 1$ // Вестник КазНРТУ, серия Физ.-Мат. 2020 №4(140) С.588—595.
5. А Калыбай Весовые оценки одного класса квазилинейных интегральных операторов // Сибирский математический журнал 2019 №60(2) P. 291- 303.
6. V.D. Stepanov, G.E. Shambilova On iterated and bilinear integral Hardytype operators // Math. Ineq. Appl. 2019 №22(4) P.1505–1533.
7. R. Oinarov, A Kalybay On boundedness of the conjugate multidimensional Hardy operator from a Lebesque space to a local Morrey-type space. // Int. J. Math. Anal. 2014 №11(8), P. 539—553.