ОӘЖ 517

ГРАФТА БӨЛІНГЕН ПАРАМЕТРЛЕРІ БАР ШТУРМ-ЛИУВИЛЛЬ ОПЕРАТОРЫНЫҢ СПЕКТРЛІК СИПАТТАМАЛАРЫ

Көшербай Жаннұр Мухамедиярқызы
jannur_98@mail.ru
Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ 7М06105 Математикалық және компьютерлік модельдеу білім беру бағдарламасының екінші курс магистранты, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекші –Нуртазина К.Б.

Жұмыста келесі оператордың спектрлік сипаттамаларын құру мәселесі қарастырылады

$$\Lambda u = -\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{du}{dx}\right) + b(x)x \qquad (1)$$

$C_0^2(\Gamma)$ кеңістігінде қарастырылады, мұнда Γ – $[0,\ 1]$ кесіндісімен және ξ ішкі түйіндермен параметрленген γ қабырғалары бар байланыстырылған шектеулі бағдарланған граф.

$a(x), b(x)$ – Γ-дағы жеткілікті тегіс коэффициенттер.

$C_0^2(\Gamma)$ кеңістігінің элементтері $\partial\Gamma$ шекаралық түйіндерде 0-ге тең Γ-дағы үздіксіз және тегіс функциялар болып табылады, және олардың туындылары біржақты болып табылады.

Барлық ішкі түйіндерде келесі шарт орындалады:

$$\sum\nolimits_{\gamma\in R(\xi)} a(1)\frac{du(1)}{dx} = \sum\nolimits_{\gamma\in r(\xi)} a(0)\frac{du(0)}{dx} \qquad (2)$$

мұндағы $R(\xi)$ және $r(\xi)$ – сәйкесінше түйінге және түйіннен бағытталған қабырғалар жиынтығы.

Қосымшаларда бұл жалпыланған Кирхгоф шарты түрінің тепе-теңдік қатынасы. Математикалық әдебиетте келісу шарты ретінде де көрсетілген.

Спектрлік сипаттамалар ретінде екі тізбек қарастырылады:
1) Меншікті мәндер тізбегі $\{\lambda_n\}$
2) Тиісті меншікті функциялардың тізбегі $\{\phi_n(x)\}$.

Сонымен қатар, баяндаудың қарапайымдылығы үшін біз графтардың екі түрін қарастырамыз: қарапайым граф және граф-жұлдыз.

Бұл кез-келген графтың, соның ішінде циклмен, осындай графтардың соңғы бірлестігі ретінде жасалатындығымен түсіндіріледі. Сонымен қатар, біз орындалған жұмыстың техникалық бөлігін мүмкіндігінше жеңілдету мақсатын көздеп отырмыз.

Үш қабырғадан тұратын және дифференциалды оператор (1) түріндегі граф-жұлдыздың жеке жағдайын қарастырайық, мұндағы $a(x) = 1,\ b(x) = 0$.

Әрі қарай Λ операторының спектралды сипаттамаларды табу идеясын ұсынуға жүгінеміз. Дифференциалдық теңдеу келесі түрде беріледі

$$\Lambda u = \lambda u \tag{3}$$

келесідей келісу шарттарымен

$$u'|_{x=1\in\gamma_1} + u'|_{x=1\in\gamma_2} = u'|_{x=1\in\gamma_3} \tag{4}$$

мұндағы $\Lambda = -\frac{d^2u}{dx^2}$, ал λ – спектральді параметр.

Қарастырылып отырған үш қабырғасы бар графиктің әр қабырғасында түйінде нормаланған шешімдердің іргелі жүйесі алынады. Бұл қажетсіз техникалық есептеулерді болдырмау үшін жасалады. Іргелі шешімге кіретін функциялар келесі түрде қарастырылады:

γ_1 және γ_2-да: $\left\{cos\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}(x-1),\ \frac{2}{\pi\sqrt{\lambda}}sin\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}(x-1)\right\}$

γ_3-да: $\left\{cos\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}x,\ \frac{2}{\pi\sqrt{\lambda}}sin\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}x\right\}$

Енгізілген екі сызықтық тәуелсіз функция келесі қасиеттерге ие: түйінге бағытталған соңғы нүктеде функцияның мәні 1, ал туындысы 0 болады. (3) теңдеудің жалпы шешімі (4) келісу шартын ескере отырып, келесідей болады

$$u(x,\lambda) = \begin{cases} \alpha_1 \cos\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}(x-1) + (\alpha_3 - \alpha_2)\frac{2}{\pi\sqrt{\lambda}}sin\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}(x-1),\ x\in\gamma_1 \\ \alpha_1 \cos\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}(x-1) + \alpha_2\frac{2}{\pi\sqrt{\lambda}}sin\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}(x-1),\ x\in\gamma_2 \\ \alpha_1 \cos\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}x + \alpha_3\frac{2}{\pi\sqrt{\lambda}}sin\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}x,\ x\in\gamma_3 \end{cases}$$

Әрі қарай, (3) теңдеуінің жалпы шешіміне шекаралық щарттары қолдана отырып, келесі жүйені аламыз:

$$\begin{cases} \alpha_1 \cos\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda} - (\alpha_3 - \alpha_2)\frac{2}{\pi\sqrt{\lambda}} sin\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda} = 0 \\ \alpha_1 \cos\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda} - \alpha_2 \frac{2}{\pi\sqrt{\lambda}} sin\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda} = 0 \\ \alpha_1 \cos\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda} + \alpha_3 \frac{2}{\pi\sqrt{\lambda}} sin\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda} = 0 \end{cases}$$

және осы жерден келесі нәтижелерді аламыз:

1) Егер $\alpha_1 = 0$, ал α_2, α_3 – кез келген болса, онда $\sqrt{\lambda_n} = 2n$, $n \in Z$. Яғни, меншікті мәндердің түрі жұп болатыны белгілі болды. Және меншікті функция келесідей түрге ие:

$$\varphi_n(x,\lambda) = \alpha_2 \begin{cases} \frac{2}{\pi\sqrt{\lambda_n}} sin\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda_n}(x-1),\ x \in \gamma_1 \\ \frac{2}{\pi\sqrt{\lambda_n}} sin\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda_n}(x-1),\ x \in \gamma_2 \\ 0,\ x \in \gamma_2 \end{cases} - \alpha_3 \begin{cases} \frac{2}{\pi\sqrt{\lambda_n}} sin\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda_n}(x-1),\ x \in \gamma_1 \\ 0,\ x \in \gamma_2 \\ \frac{2}{\pi\sqrt{\lambda_n}} sin\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda_n}x,\ x \in \gamma_2 \end{cases}$$

Әр меншікті мән екі меншікті функцияға сәйкес келеді.

2) Ал $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ жағдайын қарастырсақ, онда $\lambda_n = n^2$, n =1, 3, 5, …
Сәйкес меншікті функция қарапайым түрге ие:

$$\varphi_n(x,\lambda) = \alpha_1 \begin{cases} \cos\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda_n}(x-1),\ x \in \gamma_1 \\ \cos\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda_n}(x-1),\ x \in \gamma_2 \\ \cos\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda_n}x,\ x \in \gamma_2 \end{cases}$$

Басқа мәндер жоқ.

Жалпы жағдай қарастырылады. Дифференциалдық теңдеу берілген

$$\Lambda u = \lambda u,$$

мұнда оператор $C_0^2(\Gamma)$ жеткілікті тегіс функциялар кеңістігіндегі (1) көрінісіндегідей түрге ие, $\Lambda u = -\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{du}{dx}\right) + b(x)x$, сондай-ақ келісу шарттары орындалады

$$\sum_{\gamma \in R(\xi)} a(1)\frac{du(1)}{dx} = \sum_{\gamma \in r(\xi)} a(0)\frac{du(0)}{dx} \qquad (2)$$

Әр қабырғада арнайы іргелі шешім алынады:

γ_1 және γ_2-да: $\{u_1(x-1,\ \lambda),\ u_2(x-1,\ \lambda)\}$
γ_3-да: $\{u_1(x,\ \lambda),\ u_2(x,\ \lambda)\ \}$

Жоғарыда көрсетілгендей, үш қабырғасы бар графта қабырғаларда нормаланған арнайы іргелі шешім қабылданады.

Жоғарыда келтірілген үш қабырғалы графқа ұқсас шешімдер детерминант 0 болатын біртекті теңдеулер жүйесіне әкелді.

$$\begin{cases} \alpha_1[2u_1(-1,\lambda) + u_1(1,\ \lambda)] \ +\ \alpha_3[u_2(-1,\lambda) + u_2(1,\lambda)] = 0 \\ \alpha_1 u_1(-1,\lambda) +\ \alpha_2 u_2(-1,\lambda) = 0 \\ \alpha_1 u_1(1,\lambda) +\ \alpha_3 u_2(1,\lambda) = 0 \end{cases}$$

Бұл жүйе шешіледі және тривиалды емес шешім бар. Меншікті мәндердің келесі қасиеттері бар екенін көрсетуге болады: олар нақты, 2-ге тең еселігі бар, оларды модульдердің өсуіне қарай орналастыра аламыз және шекті нүкте шексіздікке тең болады.

Ұсынылған нәтижелер графта бөлінген параметрлері бар математикалық физиканың эволюциялық дифференциалды жүйелерінің шешімдерін құруға негізделген.

Атап айтқанда, өзіндік функциялар жүйесі эллиптикалық операторлар үшін негіз болып табылатындығын дәлелдеуге болады. Эволюциялық теңдеудің бастапқы шекаралық есебінің шешімін қатар түрінде ұсынуға болады. Содан кейін белгілі бір шешімдердің классикалық түріне өтуге болады.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

1. Zhabko A.P., Nurtazina K.B., Provotorov V.V. Uniqueness solution to the inverse spectral problem with distributed parameters on the graph-star // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control processes. 2020. – Vol. 16, Issue. 2. – P. 129-143.
2. Кошербай Ж.М. Идентификация тепловых характеристик промышленных конструкций // Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2021, XXXII Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам // Крымский федеральный университет имени В.И.Вернадского, Российский университет дружбы народов, Математический Фонд Крыма, 2021 г., 99 стр.