ОӘЖ 517.98

$p \le q$ ЖАҒДАЙЫНДАҒЫ БӨЛШЕК РЕТТІ КВАЗИСЫЗЫҚТЫ ИНТЕГРАЛДЫҚ ОПЕРАТОРЛАРДЫ САЛМАҚТЫ БАҒАЛАУ

Тажихан Б.М.

Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия Ұлттық Университеті

Жетекшісі: ф.-м.ғ.к., PhD-доктор, доцент Абылаева А.М.

$0 < r, p, q < \infty$ және $-\infty \le a < b \le +\infty$ болсын. $u(\cdot)$, $w(\cdot), v(\cdot)$ - салмақты функциялар, яғни (a,b) аралығында локальды интегралданатын, оң мән қабылдайтын функциялар.

Бұл жұмыста келесідей теңсіздікті зерттейміз:

$$\left(\int_a^b u(x) \left(\int_a^x \left(\int_t^x K(s,t) f(s) ds \right)^r w(t) dt \right)^{\frac{q}{r}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \le C \left(\int_a^b v(x) f^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1)$$

Біз (1) теңсіздігін $0 < r < \infty$ және $1 \le p \le q < \infty$ жағдайында қарастырамыз.

$(\alpha, \beta) \subset (a,b)$ және $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ болсын. Келесі шамаларды қарастырайық:

$$v(\alpha, \beta) = ess \inf_{\alpha < t < \beta} v(t) \ , \qquad U(\alpha, \beta) = \left(\int_\alpha^\beta u(x) dx \right)^{\frac{1}{q}},$$

$$A^{-}(\alpha,\beta)=\sup_{\alpha<x<\beta}\left(\int_{\alpha}^{x}w(t)dt\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_{x}^{\beta}\frac{1}{(s-x)^{p'}}v^{1-p'}(s)ds\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$B^{-}(\alpha,\beta)=\left(\int_{\alpha}^{\beta}\left(\int_{\alpha}^{x}w(t)dt\right)^{\frac{r}{p-r}}\left(\int_{x}^{\beta}\frac{1}{(s-x)^{p'}}v^{1-p'}(s)ds\right)^{\frac{r(p-1)}{p-r}}w(x)dx\right)^{\frac{p-r}{pr}},$$

$$D^{-}(\alpha,\beta)=\left(\int_{\alpha}^{\beta}\left(\int_{\alpha}^{x}w(t)dt\right)^{\frac{r}{1-r}}(v(x,\beta))^{\frac{r}{r-1}}w(x)dx\right)^{\frac{1-r}{r}},$$

$$J^{-}(\alpha,\beta)=\sup_{f\ge 0}\frac{\left(\int_{\alpha}^{\beta}w(t)\left(\int_{\alpha}^{t}\frac{1}{t-s}f(s)ds\right)^{r}dt\right)^{\frac{1}{r}}}{\left(\int_{\alpha}^{\beta}v(x)f^{p}(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}}.$$

Лемма.

1) Егер $1\le p\le r<\infty$ болса, онда $A^{-}(\alpha,\beta)\le J^{-}(\alpha,\beta)\le p^{\frac{1}{r}}(p')^{\frac{1}{p'}}A^{-}(\alpha,\beta)$.
2) Егер $0<r<p$ және $1<p<\infty$ болса,

$$(p')^{\frac{1}{p'}}r^{\frac{1}{p}}\left(1-\frac{r}{p}\right)B^{-}(\alpha,\beta)\le J^{-}(\alpha,\beta)\le\left(\frac{p}{p-r}\right)^{\frac{p-r}{pr}}p^{\frac{1}{p}}(p')^{\frac{1}{p'}}B^{-}(\alpha,\beta)$$

3) Егер $0<r<p$ және $1<p<\infty$ болса,

$$r(1-r)D^{-}(\alpha,\beta)\le J^{-}(\alpha,\beta)\le(1-r)^{\frac{1-r}{r}}p^{\frac{1}{p}}(p')^{\frac{1}{p'}}D^{-}(\alpha,\beta)$$

Теорема. $\alpha\ge 0$, $\beta\ge 0$, $\gamma\ge 0$ болсын. (1) теңсіздігі орындалады, сонда тек сонда ғана, егер

(i) $M=\sup_{z>0}U(a,z)A^{-}(z,b)<\infty$ $\quad 1\le p\le\min\{r,q\}<\infty$;

(ii) $M=\sup_{z>0}U(a,z)B^{-}(z,b)<\infty$ $\quad 1<r<p$ және $1<p\le q<\infty$;

(iii) $M=\sup_{z>0}U(a,z)D^{-}(z,b)<\infty$ $\quad 0<r<1=p\le q<\infty$ және кез келген $\alpha,\beta: a<\alpha<\beta<b$ үшін $\underline{v}(\alpha,\beta)>0$.

Сонымен қатар $M\approx C$, C - (1) теңсіздігінің ең жақсы тұрақтысы.

Пайдаланған әдебиет:

1.R.Oinarov, A.Kalybay. Three-parameter weighted Hardy type inequalities //Banach J. Math. Anal. 2 (2008), №2. 85-93.