УДК 533.6

АППРОКСИМАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ДИСКРЕТНОЙ ОБЛАСТИ

Естаева Зарина Ахметжанқызы
estayeva.z@mail.ru
Магистрант 1–го курса Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева, механико-математического факультета, кафедра механики, Нур-Султан, Казахстан
Научный руководитель – д.ф.-м.н, профессор Н.Ж.Джайчибеков

Данная работа посвящена начальному этапу численного решения уравнений пограничного слоя, а именно способу аппроксимации дифференциальных уравнений пограничного слоя конечно-разностными уравнениями.

Из-за нелинейности уравнений движения, описывающие течение вязкой несжимаемой жидкости вдоль пограничного слоя на пластине, приходится решать эти уравнения приближенно, используя известные численные методы. Для этого вначале аппроксимируем уравнения движения в пограничном слое конечно-разностными алгебраическими уравнениями. При этом используем для производных первого и второго порядков искомых величин конечные разности, полученные из формулы Тейлора, отбрасывая члены высших порядков малости.

Схематически движение вязкой жидкости вдоль плоской горизонтальной пластины показано на рисунке 1.

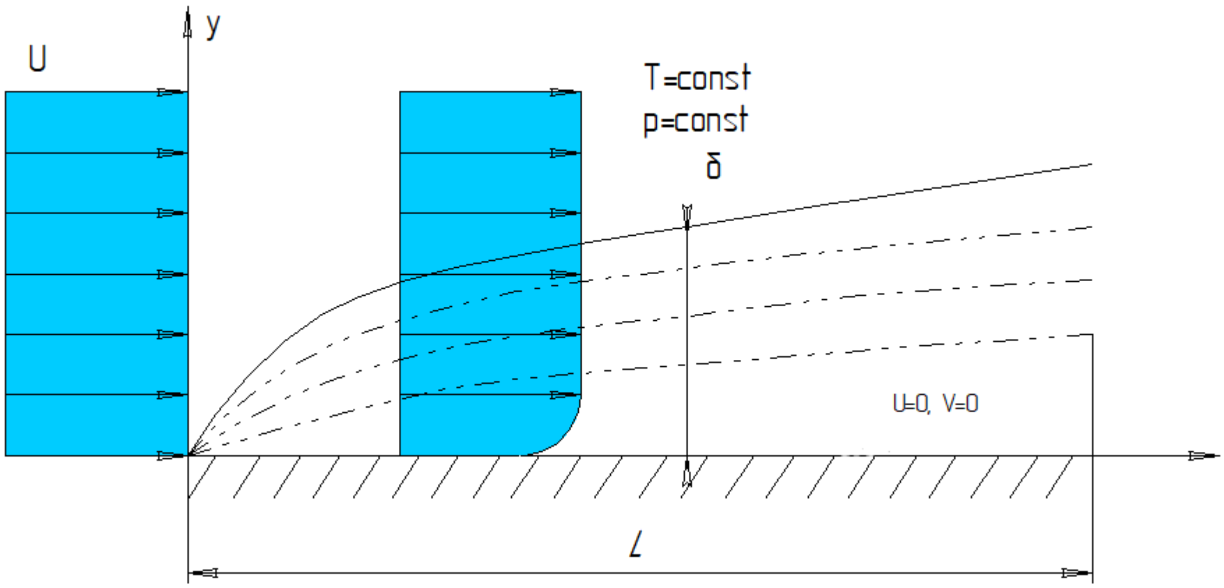

Рисунок 1 Пограничный слой на пластине

Далее приводится система уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости в пограничном слое пластины [1]:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \vartheta}{\partial y}=0 \\
u\frac{\partial u}{\partial x}+\vartheta\frac{\partial u}{\partial y}=\eta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}
\end{gathered}
\qquad (1)
$$

Здесь u, ϑ - компоненты скорости по осям координат *x, y,* η - коэффициент кинематической вязкости жидкости. Эта система уравнений является нелинейной, второго порядка в частных производных. Для решения данной системы уравнений необходимо поставить три граничных условия для компонентов скорости u, ϑ:

на входе: $u(x, y) = u(0, y) = u_0$; $\vartheta(x, y) = \vartheta(0, y) = 0$;

на стенке: $u(x, y) = u(x,0) = 0$; $\vartheta(x, y) = \vartheta(x,0) = 0$;

во внешнем потоке: $u(x, y) = u(x, \delta) = u_0$, где $\delta(x)$ - переменная толщина пограничного слоя.

Численное решение данной системы уравнений осуществляется в дискретной области. Для получения разностного уравнения проводится аппроксимация дифференциальных уравнений. Производные, входящие в уравнения (1), в алгебраической форме имеет вид [2]:

$$
\begin{gathered}
\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j}=\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{\Delta x} \\
\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right)_{i,j}=\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{\Delta y} \\
\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j}=\frac{u_{i,j}-u_{i,j-1}}{\Delta y} \\
\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,j}=\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{\Delta y^2},
\end{gathered}
$$

где i - нумерация узлов сетки вдоль оси *x*; j - нумерация узлов сетки вдоль оси *y*.

Подставляя полученные соотношения в систему уравнений (1), можно записать дискретный аналог уравнений пограничного слоя:

$$
\begin{cases}
\dfrac{u_{i+1,j-1}-u_{i,j-1}}{\Delta x}+\dfrac{\vartheta_{i+1,j}-\vartheta_{i+1,j-1}}{\Delta y}=0 \\
u_{i+1,j}\dfrac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{\Delta x}+\vartheta_{i+1,j}\dfrac{u_{i,j}-u_{i,j-1}}{\Delta y}=\eta\dfrac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{\Delta y^2}
\end{cases}
$$

Проводя простые алгебраические оперции в итоге система уравнений можно представить в следующем виде:

$$
\begin{cases}
\vartheta_{i+1,j}=\vartheta_{i+1,j-1}-\Delta y\dfrac{u_{i+1,j-1}-u_{i,j-1}}{\Delta x} \\
u_{i+1,j}=u_{i,j}+\dfrac{\eta\Delta x}{u_{i,j}}\dfrac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{\Delta y^2}-\Delta x\dfrac{\vartheta_{i,j}}{u_{i,j}}\dfrac{u_{i,j}-u_{i,j-1}}{\Delta y}
\end{cases}
\qquad (2)
$$

Рекурентная формула (2) определяет на каждом узле сетки искомое значение компонентов скорости u, ϑ.

В этом случае граничные условия в дискретной форме можно записать следующим образом:

$$u_{0,j} = u_0 \,,\; \vartheta_{0,j} = u_{i,0} = \vartheta_{i,0} = 0 \,,\,,\; u_{i,k} = u_0$$

Используя приведенную выше систему алгебраических уравнений (2) можно записать пошагово несколько начальных итераций. Для примера покажем начальный фрагмент данного цикла:

$i = 0\,,\; j = 1\,,\; j = 2\,,\; j = 3:$

$$\begin{cases} \vartheta_{1,1} = \vartheta_{1,0} - \Delta y \dfrac{u_{1,0} - u_{0,0}}{\Delta x} \\ u_{1,1} = u_{0,1} + \dfrac{\eta \Delta x}{u_{0,1}} \dfrac{u_{0,2} - 2u_{0,1} + u_{0,0}}{\Delta y^2} - \Delta x \dfrac{\vartheta_{0,1}}{u_{0,1}} \dfrac{u_{0,1} - u_{0,0}}{\Delta y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vartheta_{1,2} = \vartheta_{1,1} - \Delta y \dfrac{u_{1,1} - u_{0,1}}{\Delta x} \\ u_{1,2} = u_{0,2} + \dfrac{\eta \Delta x}{u_{0,2}} \dfrac{u_{0,3} - 2u_{0,2} + u_{0,1}}{\Delta y^2} - \Delta x \dfrac{\vartheta_{0,2}}{u_{0,2}} \dfrac{u_{0,2} - u_{0,1}}{\Delta y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vartheta_{1,3} = \vartheta_{1,2} - \Delta y \dfrac{u_{1,2} - u_{0,2}}{\Delta x} \\ u_{1,3} = u_{0,3} + \dfrac{\eta \Delta x}{u_{0,3}} \dfrac{u_{0,4} - 2u_{0,3} + u_{0,2}}{\Delta y^2} - \Delta x \dfrac{\vartheta_{0,3}}{u_{0,3}} \dfrac{u_{0,3} - u_{0,2}}{\Delta y} \end{cases}$$

$i = 1,\; j = 1\,,\; j = 2\,,\; j = 3:$

$$\begin{cases} \vartheta_{2,1} = \vartheta_{2,0} - \Delta y \dfrac{u_{2,0} - u_{1,0}}{\Delta x} \\ u_{2,1} = u_{1,1} + \dfrac{\eta \Delta x}{u_{1,1}} \dfrac{u_{1,2} - 2u_{1,1} + u_{1,0}}{\Delta y^2} - \Delta x \dfrac{\vartheta_{1,1}}{u_{1,1}} \dfrac{u_{1,1} - u_{1,0}}{\Delta y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vartheta_{2,2} = \vartheta_{2,1} - \Delta y \dfrac{u_{2,1} - u_{2,1}}{\Delta x} \\ u_{2,2} = u_{1,2} + \dfrac{\eta \Delta x}{u_{1,2}} \dfrac{u_{1,3} - 2u_{1,2} + u_{1,1}}{\Delta y^2} - \Delta x \dfrac{\vartheta_{1,2}}{u_{1,2}} \dfrac{u_{1,2} - u_{1,1}}{\Delta y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vartheta_{2,3} = \vartheta_{2,2} - \Delta y \dfrac{u_{2,2} - u_{1,2}}{\Delta x} \\ u_{2,3} = u_{1,3} + \dfrac{\eta \Delta x}{u_{1,3}} \dfrac{u_{1,4} - 2u_{1,3} + u_{1,2}}{\Delta y^2} - \Delta x \dfrac{\vartheta_{1,3}}{u_{1,3}} \dfrac{u_{1,3} - u_{1,2}}{\Delta y} \end{cases}$$

Аналогично можно вычислить значения скорости во всех узлах расчетной сетки и получить приближенное поле скоростей течения жидкости в пограничном слое. Для более точного решения искомых значений компонентов скорости жидкости в пограничном слое пластины, необходимо увеличить количество узлов сетки. Для получения поля скоростей для любого числа узлов сетки и для любых граничных условий, необходимо составить программу расчета на компьютере.

Список использованных источников

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. Перевод с немецкого изд-во «Наука», Москва, 1974. – 711 с.
2. Матвеев С.К. Введение в вычислительную гидроаэромеханику. Учебное пособие. – Санкт-Петербург ISBN 978-5-4386-1471-5: Свое издательство, 2018. - 64 с.