БҰРАНДАЛЫ ҚОЗҒАЛЫСТАҒЫ СҰЙЫҚ БӨЛШЕКТЕРІНІҢ ЦИЛИНДРЛІК КООРДИНАТТАҒЫ ЖЫЛАМДЫҒЫ МЕН ҮДЕУІ

Өтебашев Эльдар Нұржанұлы
utebashev@list.ru
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия Ұлттық Универститеті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі – М.И.Касабеков

Сұйықтар механикасы қамтыған, атап айтқанда, бұралған ағындар механикасы қарқынды түрде кеңейеді: орталықтан тепкіш сорғылардағы, гидротурбиналардағы, өзендер мен каналдардың бұрылыстарындағы, гидроциклонды насос қондырғыларындағы, центрифугалардағы, орталықтан тепкіш форсункалардағы, құйынды ағынды аппараттардағы, құйынды шахталық су ағызғыштардағы, траншеялық құм қиыршықтардағы, тасымалдайтын цилиндрлік түтіктердегі судың қозғалысы, механикалық су көтергішті су тартқыштарда, гидротехникалық құрылымдарда кеңінен қолданылады.

Сұйықтар механикасының көптеген мәселелері, соның ішінде бұралған ағындар механикасын зерттеу қисық сызықты цилиндрлік координаттар жүйесін қолдануды қажет етеді. Сондықтан осы жұмыста гидродинамиканың негізгі теңдеулерін цилиндрлік координаттар жүйесінде жазу үшін қажетті сұйық бөлшектерінің осы координаттар жүйесіндегі жылдамдықтары мен үдеулері қарастырылады.

Нүктенің цилиндрлік аппараттар мен құбырлардың бетімен, немесе ішімен қозғалғанда цилиндрлік координат жүйесін қолдану көптеген есептердің шешу жолдарын жеңілдетеді.

Жалпы жағдайда нүктенің орны

$$q_1 = r,\, q_2 = \varepsilon,\, q_3 = z \tag{1}$$

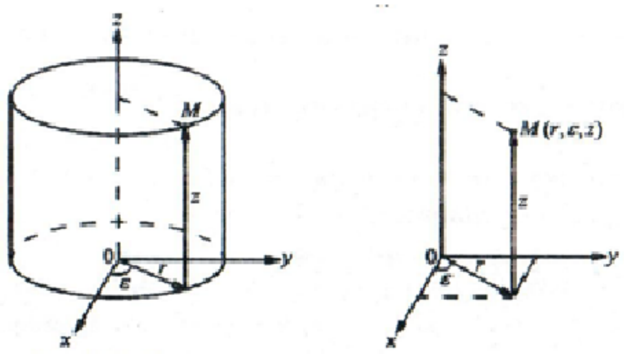
координаттармен анықталады.

Декарт және цилиндрлік координат жүйелері өзара келесі өрнектермен байланысады:

$$x = r\cos\varepsilon, \quad y = r\sin\varepsilon, \quad z = z. \tag{2}$$

Кері байланысты да табуға болады. Ол үшін (2)-нің алдынғы екі теңдеуінің екі жағында квадраттап қосып r-ды, ал содан кейін екінші теңдікті біріншіге бөліп ε-ды табамыз:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\; \varepsilon = \mathrm{arctg}\frac{y}{x}, \quad z = z \tag{3}$$



Сурет 1. Цилиндрлік координат жүйесі

Лямэ коэффициенттерін цилиндрлік координаттар жүйесінде жазамыз, ол үшін цилиндрлік координат жүйесінде ∂q_i орнына біртіндеп ∂r, $\partial\varepsilon$ және ∂z қою арқылы табатынымыз:

$$H_1 = H_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = \sqrt{\cos^2 \varepsilon + \sin^2 \varepsilon} = 1, \qquad (4а)$$

мұндағы $\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \varepsilon$, $\frac{\partial y}{\partial r} = \sin \varepsilon$, $\frac{\partial z}{\partial z} = 0$;

$$H_2 = H_\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varepsilon}\right)^2} = \sqrt{r^2(\sin^2 \varepsilon + \cos^2 r)} = r \qquad (4б)$$

мұндағы $\frac{\partial x}{\partial \varepsilon} = -r \sin \varepsilon$, $\frac{\partial y}{\partial \varepsilon} = r \cos \varepsilon$, $\frac{\partial z}{\partial \varepsilon} = 0$;

$$H_3 = H_z = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = 1, \qquad (4в)$$

мұндағы $\frac{\partial x}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial y}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial z} = 1$;

Нүкте жылдамдығын табу үшін алдымен цилиндрлік координат жүйесінде координат сызығының элементар доғасын анықтайық:

$$H_r = 1, H_\varepsilon = r, H_z = 1; \text{ және } dq_1 = dr, dq_2 = d\varepsilon, dq_3 = dz,$$

сондықтан

$$dl_1 = dr, dl_2 = rd\varepsilon, dl_3 = dz \qquad (5)$$

Енді нүкте жылдамдығын келесі формуламен анықтаймыз:

$$\vartheta_i = \frac{dl_i}{dt} = H_i q_i \qquad (6)$$

Цилиндрлік координат жүйесінде:

$$\dot{q}_1 = \dot{r}, \dot{q}_2 = \dot{\varepsilon}, \dot{q}_3 = \dot{z},$$

Одай болса

$$\vartheta_r = \dot{r}, \vartheta_\varepsilon = r\dot{\varepsilon}, \vartheta_z = \dot{z}; \qquad (7)$$

Нүкте үдеуінің q_1 координат өсіндегі проекциясы:

$$a_1 = \vec{a}\overrightarrow{k_1} = \frac{1}{H_1}\frac{d\vec{\vartheta}}{dt}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}, \qquad (8)$$

мұндағы $\overrightarrow{k_1} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}$.

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\vartheta} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\right) = \frac{d\vec{\vartheta}}{dt}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} + \vec{\vartheta}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\right)$$

болғандықтан,

$$a_1 H_1 = \frac{d\vec{\vartheta}}{dt}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\vartheta} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\right) - \vec{\vartheta}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\right). \qquad (9)$$

(9) теңдеуінің оң жағындағы әрбір мүшесінің мәнін табамыз. Ол үшін $\vec{\vartheta}$ жылдамдықты келесі түрде жазайық:

$$\vec{\vartheta} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}\dot{q}_3 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\,. \qquad (10)$$

$\dot{q}_1$ бойынша дербес туынды аламыз:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = \frac{\partial \vec{\vartheta}}{\partial \dot{q}_1} \qquad (11)$$

(11) және (10) қатынастарды қолданып алатынымыз:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_1}\right)=\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial q_1^2}\dot{q}_1+\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial q_1\cdot\partial q_2}\dot{q}_2+\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial q_1\cdot\partial q_3}\dot{q}_3 \qquad (12)$$

(10) қатынастан q_1 бойынша дербес туынды аламыз:

$$\frac{\partial\vec{\vartheta}}{\partial q_1}=\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial q_1^2}\dot{q}_1+\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial q_1\cdot\partial q_2}\dot{q}_2+\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial q_1\cdot\partial q_3}\dot{q}_3. \qquad (13)$$

Соңғы екі теңдеуді салыстырып қорытындылаймыз:

$$\frac{\partial\vec{\vartheta}}{\partial q_1}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_1}\right). \qquad (14)$$

(10) және (14) мәндерін (9) қатынасқа қоямыз:

$$a_1\cdot H_1=\frac{d}{dt}\left(\vec{\vartheta}\frac{\partial\vec{\vartheta}}{\partial\dot{q}_1}\right)-\vec{\vartheta}\frac{\partial\vec{\vartheta}}{\partial q_1}. \qquad (15)$$

Келесі теңдіктерді қолданып

$$\vec{\vartheta}\frac{\partial\vec{\vartheta}}{\partial\dot{q}_1}=\frac{\partial}{\partial\dot{q}_1}\left(\frac{\vec{\vartheta}^2}{2}\right)=\frac{\partial}{\partial\dot{q}_1}\left(\frac{\vartheta^2}{2}\right), \qquad (16)$$

$$\vec{\vartheta}\frac{\partial\vec{\vartheta}}{\partial q_1}=\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\vec{\vartheta}^2}{2}\right)=\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\vartheta^2}{2}\right); \qquad (17)$$

үдеудің a_1 және дәл осылай қайталап, қалған a_2 және a_3 проекцияларын келесі түрде табамыз

$$\left.\begin{aligned}a_1&=\frac{1}{H_1}\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}_1}\left(\frac{\vartheta^2}{2}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\vartheta^2}{2}\right)\right\},\\a_2&=\frac{1}{H_2}\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}_2}\left(\frac{\vartheta^2}{2}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\vartheta^2}{2}\right)\right\},\\a_3&=\frac{1}{H_3}\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}_3}\left(\frac{\vartheta^2}{2}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{\vartheta^2}{2}\right)\right\}.\end{aligned}\right\}. \qquad (18)$$

Сұйықтың бірлік массасының кинетикалық энергиясын $T=\frac{\vartheta^2}{2}$ деп белгілеп, үдеудің проекцияларын келесі соңғы түрде аламыз:

$$\left.\begin{aligned}a_1&=\frac{1}{H_1}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_1}\right],\\a_2&=\frac{1}{H_2}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_2}\right],\\a_3&=\frac{1}{H_3}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_3}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_3}\right].\end{aligned}\right\}. \qquad (19)$$

мұндағы

$$T=\frac{1}{2}(H_1^2\dot{q}_1^2+H_2^2\dot{q}_2^2+H_3^2\dot{q}_3^2). \qquad (20)$$

Цилиндрлік координат жүйесінде үдеудің проекцияларын анықтайық:

$$\dot{q}_1^2=\dot{r}^2,\ \dot{q}_2^2=\dot{\varepsilon}^2,\ \dot{q}_3^2=\dot{z}^2$$

$$T=\frac{1}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varepsilon}^2+\dot{z}^2).$$

Келесі мәндерді анықтаймыз:

$$\frac{\partial T}{\partial q_1}=\frac{\partial T}{\partial r}=r\dot{\varepsilon}^2,\ \ \frac{\partial T}{\partial q_2}=\frac{\partial T}{\partial\varepsilon}=0,\ \ \frac{\partial T}{\partial q_3}=\frac{\partial T}{\partial z}=0$$

және

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_1}=\frac{\partial T}{\partial\dot{r}}=\dot{r},\ \frac{\partial T}{\partial\dot{q}_2}=\frac{\partial T}{\partial\dot{\varepsilon}}=r^2\dot{\varepsilon},\ \ \frac{\partial T}{\partial\dot{q}_3}=\frac{\partial T}{\partial\dot{z}}=\dot{z}.$$

Тағы да $\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_1}$ шамасынан уақыт бойынша туынды аламыз:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_1}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{r}}\right)=\ddot{r}, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_2}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varepsilon}}\right)=r^2\ddot{\varepsilon}+2r\dot{r}\dot{\varepsilon}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_3}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{z}}\right)=\ddot{z}.$$

Табылған шамалардың бәрін (19) өрнекке қойып алатынымыз:

$$\left.\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\varepsilon}^2, \\ a_\varepsilon &= r\ddot{\varepsilon} + 2\dot{r}\dot{\varepsilon}, \\ a_z &= \ddot{z}; \end{aligned}\right\}. \tag{21}$$

$$\left.\begin{aligned} a_\rho &= \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 - \rho\dot{\varepsilon}^2 \sin^2\theta\,, \\ a_\theta &= \frac{1}{\rho}\left(\rho^2\ddot{\theta} + 2\rho\dot{\rho}\dot{\theta} - 2\rho^2\dot{\varepsilon}^2 \sin\theta \cdot \cos\theta\right) = \\ &= \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\dot{\varepsilon}^2 \sin\theta \cdot \cos\theta, \\ a_\varepsilon &= \frac{1}{\rho\sin\theta}(\rho^2\ddot{\varepsilon}\sin^2\theta + 2\rho\dot{\rho}\dot{\varepsilon}\sin^2\theta + \\ &+2\rho^2\dot{\theta}\dot{\varepsilon}\sin\theta\cdot\cos\theta = \rho\ddot{\varepsilon}\sin\theta + \\ &+2\rho\dot{\rho}\dot{\varepsilon}\sin\theta + 2\rho\dot{\theta}\dot{\varepsilon}\cos\theta\,. \end{aligned}\right\}. \tag{22}$$

Қолданылған әдебиеттер тізімі

Касабеков М.И. Теориялық механика, Оқу құралы, «АЛАШ» Алматы, 2006. – 216 с.

1. Абдураманов А.А. Механика жидкости. Переработанное и дополненное учебное издание. ИД «Академия Естествознания», М.; 2018 – 280 с.

ОӘЖ 372.851

ИННОВАЦИЯЛЫҚ ӘДІС-ТӘСІЛДЕРДІ ҚОЛДАНУДЫҢ ТИІМДІ ЖОЛДАРЫ

Солтан Раушан

raushan090587@gmail.com

Алгебра және геометрия кафедрасы, механика-математика факультеті, Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия Ұлттық Университеті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан.

Қайым Мұхамедханов атыдағы №90 гимназиясы, Нұр-Сұлтан қаласы ,Қазақстан

Ғылыми жетекшісі – А.О**.** Башеева

Қазіргі кезде Қазақстан Республикасында жаңа білім беру жүйесінің қалыптасуы жүріп жатыр. Осыған орай, алдыңғы қатарлы идеялар мен педагогикалық технологияларды практикалық тұрғыдан жаңарту және оларды ғылыми тұрғыда негіздеу бағытындағы жұмыстар жүргізілуде. Болашақ маман –педагогика теориясы мен практикасындағы қазіргі заманғы педагогикалық технологиялардың түрлерін біліп, оларды мектептің оқу тәрбие үдерісінде шығармашылықпен қолдануға тырысуы тиіс. Қазіргі заманғы озық технологияларды мектеп тәжірибесінде тиімді қолдану, ең алдымен, оларды терең, жан-жақты оқып-үйренуді талап етеді. Сондықтан да аталмыш мақалада осы заманғы инновациялық әдіс-тәсілдерді қолданудың жолдары және оқытудың инновациялық әдістерінің классификациясы зерттелген.

Әдеби шолу

Инновациялық әдіс-тәсілдерді қолдануда оқытушы сабақты дайын күйінде бағалайды, әрбір білім алушының өзі ізденіп, ғылыми негіздерін өз бетінше игеріп, ғылыми зерттеуді