УДК 532.529

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ МОДЕЛИ СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА ТЕЧЕНИЯ ГАЗА ПО ТРУБОПРОВОДУ

Тажаяқ Айдын Нұрланұлы
aidluck27@gmail.com
Магистрант кафедры математического и компьютерного моделирования механико-математического факультета ЕНУ им Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
Научный руководитель – Б. С. Шалабаева

На протяжении многих десятилетий интенсивное развитие трубопроводного транспорта газа обеспечивалось отечественной фундаментальной и прикладной наукой. Неотъемлемым показателем работоспособности расчетной процедуры становится уровень технологического, математического, алгоритмического контраста вариантов условий решения задачи, которые она может обеспечивать. Это в некоторой степени показатель универсальности процедуры, который может быть оценен не на одном – двух расчетных примерах, а на значительном разнообразии реальных объектов и систем.

Уравнения движения газа в трубах, следуют из общих законов механики сплошной среды. Не вдаваясь в подробности вывода уравнений газовой динамики – законов сохранения, количества движения, неразрывности потока, энергии (данный материал широко представлен в литературе, в частности [1], [2], [3], [4]). Для определения распределения давления и температуры в газопроводе используем следующие уравнения:

Уравнения сохранения количества движения и энергии:

$$\frac{\partial p^2}{\partial x} = \frac{16R\rho_c^2\lambda zT}{\pi^2 D_{\text{вн}}^5} - q^2\frac{32R\rho_c^2}{\pi^2 D_{\text{вн}}^4}\left(\frac{d(zT)}{dx} - \frac{(zT)}{2p^2}\frac{dp^2}{dx}\right) - \frac{2g}{zRT}p^2\frac{dH}{dx}, \tag{1}$$

$$\frac{dT}{dx} = \frac{RT^2}{2c_p p^2}\frac{\partial z}{\partial T}\frac{dp^2}{dx} - \frac{\pi K_{\text{то}} D_{\text{н}}(T - T_{\text{ос}})}{c_p q \rho_c} - \frac{g}{c_p}\frac{dH}{dx}. \tag{2}$$

В уравнении (1), как правило, пренебрегают малой по сравнению с другими компонентой:

$$q^2\frac{32R\rho_c^2}{\pi^2 D_{\text{вн}}^4}\left(\frac{d(zT)}{dx} - \frac{(zT)}{2p^2}\frac{dp^2}{dx}\right).$$

Конечно-разностная модель получается из дифференциальных уравнений (1), (2) разбиением линейной координаты x, и заменой производных разностными операторами. При этом могут применяться различные варианты записи разностных уравнений.

1. *Процедура прямого последовательного счета (разностная модель)*

$$p_{i+1}^2 = p_i^2 - q^2\frac{16R\rho_c^2\lambda_i z_i T_i}{\pi^2 D_{\text{вн}}^5}h_i - \frac{2g(H_{i+1} - H_i)}{z_{cp}RT_i}p_i^2 \tag{3}$$

$$T_{i+1} = T_i - \frac{D_{\text{н}}K_{\text{то}}\pi(T_i - T_{\text{ос}})h_i}{c_{pi}q\rho_c} + \frac{RT_i^2\left(p_{i+1}^2 - p_i^2\right)}{2c_{pi}p_i^2}\frac{\partial z_i}{\partial T} - \frac{g(H_{i+1} - H_i)}{c_{pi}} \tag{4}$$

где, $h_i = x_{i+1} - x_i$

Расчет p_{i+1}, T_{i+1} ведется при заданных значениях p_0, T_0, q_0 газового потока на входе трубопровода из уравнения (3) находим p_{i+1}, подставляем в уравнение (4) и находим T_{i+1}. Смещаемся вдоль трубопровода в $i+1$ точку (принимаем ее за начальную), выполняем расчет p_{i+2}, T_{i+2} и так далее.

2. *Итерационная процедура последовательных приближений (разностная модель)*

Другой подход заключается в том, что уравнения записываются относительно средних (на каждом малом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$) значений параметров p_{cp}, T_{cp} в (7)

$$p_{l+1,i+1}^2 = p_{i+1,l}^2 - q^2\frac{16R\rho_c^2\lambda_{cp}^{l+1}z_{cp}^{l+1}T_{cp}^{l+1}}{\pi^2 D_{\text{вн}}^5}h_i - \frac{2g(H_{i+1} - H_i)}{z_{cp}^{l+1}RT_{cp}^{l+1}}(p_{cp}^{l+1})^2 \tag{5}$$

$$T_{l+1,i+1} = \left(1 - \frac{D_{\text{н}}K_{\text{то}}\pi h_i}{c_{p,cp}^{l+1}q\rho_c}\right)\cdot T_{l+1,i} + \frac{D_{\text{н}}K_{\text{то}}\pi T_{\text{ос}}h_i}{c_{p,cp}^{l+1}q\rho_c} +$$

$$+\frac{R\left(T_{cp}^{l+1}\right)^2\left(p_{l+1,i+1}^2-p_{l+1,i}^2\right)}{2c_{p,cp}^{l+1}\left(p_{cp}^{l+1}\right)^2}\frac{\partial z_{cp}^{l+1}}{\partial T}-\frac{g(H_{i+1}-H_i)}{c_{p,cp}^{l+1}} \tag{6}$$

где:
$$p_{cp}^{l+1}=\frac{2}{3}\left(p_{l+1,i}+\frac{p_{l+1,i+1}^2}{p_{l+1,i}+p_{l+1,i+1}}\right) \tag{7}$$

$T_{cp}^{l+1}=T_{oc}+\frac{T_{l+1,i+1}-T_{l+1,i}}{\ln\left(\left|\frac{T_{l+1,i}-T_{oc}}{T_{l+1,i+1}-T_{oc}}\right|\right)}$ без учета эффекта Джоуля-Томпсона

l – номер итерации.

Поскольку $p_{cp}^{l+1}, T_{cp}^{l+1}$ вычисляются через неизвестные параметры $p_{l+1,i+1}, T_{l+1,i+1}$, то решение системы нелинейных уравнений (5) - (7) целесообразно выполнять с помощью итеративной процедуры. При этом для расчета начальных значений p_{cp}^0, T_{cp}^0 (получения начальных приближений p_{i+1}^0, T_{i+1}^0) на каждом очередном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ можно применять расчетную процедуру (3), (4).

Алгоритм состоит в следующем:

- Рассматриваем участок трубопровода $[x_i, x_{i+1}]$;
- Из уравнения (5) находим $p_{l+1,i+1}$, подставляем в уравнение (6) и находим $T_{l+1,i+1}$;
- Если условия завершения процедуры расчета $\left|\frac{p_{l+1,i+1}-p_{l,i+1}}{p_{l,i+1}}\right| \le e_p$; $\left|\frac{T_{l+1,i+1}-T_{l,i+1}}{T_{l,i+1}}\right| \le\le e_T$ не выполняются, то из выражений (7) находим новые значения $p_{cp}^{l+1}, T_{cp}^{l+1}$, которые подставляем в уравнение (5) и продолжаем процедуру расчета параметров $i+1$ в промежуточном узле. И так далее.

Рассмотренный алгоритм имеет ряд существенных недостатков:

1. Сравнительно большой объем вычислительной работы, которую необходимо выполнить при расчете режима одной трубы.
2. Скорость сходимости и точность расчетов существенно зависит от выбора малых параметров e_p и e_T определяющих выход из итерационной процедуры на каждом подучастке.
3. Поскольку расчет параметров p_{i+1}, T_{i+1} $(i = 0 \dots n)$ ведется последовательно вдоль линейной координаты, то ошибки расчетов к концу трубопровода будут нарастать.

3. Метод простой итерации расчета $p_{\text{вых}}$ и $T_{\text{вых}}$ (интегральная модель)

Если в уравнении (1) отбросить второе слагаемое, предполагая, что изменение скорости газа по длине газопровода мало по сравнению с остальными слагаемыми, а в уравнении (2) пренебречь эффектом Джоуля-Томпсона, принимая $\frac{\partial z}{\partial T}=0$, то для горизонтальной трубы получим:

$$\frac{dp^2}{dx}=-q|q|\frac{16R\rho_c^2\lambda zT}{\pi^2 D_{\text{вн}}^5},$$

$$\frac{dT}{dx}=-\frac{K_{\text{то}}D_{\text{н}}\pi(T-T_{\text{ос}})}{c_p q\rho_c} \tag{8}$$

Если считать процесс неизотермическим, то, проинтегрировав оба уравнения системы (8) в пределах от $x=0$ до $x=L$, получим хорошо известные уравнения:

$$p^2(0)-p^2(L)=\frac{16\lambda_{cp}z_{cp}R}{\pi^2 D_{\text{вн}}^5}\rho_c^2 q^2\int_0^L T(x)dx, \tag{9}$$

$$T(x) = T_{oc} + [T(0) - T_{oc}] \cdot e^{-\gamma}, \tag{10}$$

$T_{cp} = \frac{1}{L}\int_0^L T(x)dx = T_{oc} + [T(0) - T_{oc}] \cdot \frac{1-e^{-\gamma}}{\gamma}$, если известна температура $T(L)$, то

$$e^{-\gamma} = \frac{T(L)-T_{oc}}{T(0)-T_{oc}} \text{ или } \gamma = \ln\left(\frac{T(0)-T_{oc}}{T(L)-T_{oc}}\right) \text{ тогда } T_{cp} = T_{oc} + \frac{T(0)-T(L)}{\ln\left(\frac{T(0)-T_{oc}}{T(L)-T_{oc}}\right)}, \tag{11}$$

$$p^2(0) - p^2(L) = \frac{16\lambda_{cp} z_{cp} R}{\pi^2 D_{\text{вн}}^5} \rho_c^2 q^2 T_{cp} L \tag{12}$$

(12) – Средняя температура газа в горизонтальном трубопроводе с учетом эффекта Джоуля-Томпсона

$$T_{cp} = T_{oc} + [T(0) - T_{oc}]\frac{1-e^{-\gamma}}{\gamma} - Di_{cp}\frac{p^2(0)-p^2(L)}{2\gamma p_{cp}}\left(1 - \frac{1-e^{-\gamma}}{\gamma}\right) \tag{13}$$

(13) – Средняя температура газа в наклонном трубопроводе с учетом эффекта Джоуля-Томпсона

$$T_{cp} = T_{oc} + [T(0) - T_{oc}]\frac{1-e^{-\gamma}}{\gamma} - Di_{cp}\frac{p^2(0)-p^2(L)}{2\gamma p_{cp}}\left(1 - \frac{1-e^{-\gamma}}{\gamma}\right) - \\ - \frac{g}{c_{p_{cp}}}\frac{(\Delta H)}{\gamma}\left(1 - \frac{1-e^{-\gamma}}{\gamma}\right), \tag{14}$$

где $\gamma = \frac{\pi K_{\text{то}} D_{\text{н}}}{\rho_c q c_{p_{cp}}} \cdot L$ – критерий Шухова

В смешанной системе единиц критерий Шухова будет равен:

$\gamma = 225{,}5 \cdot 10^{-6}\frac{K_{\text{то}} D_{\text{н}}}{q\Delta c_p} L$, где L [км]; $D_{\text{н}}$ [мм]; $\text{К}_{\text{то}}\left[\frac{\text{Вт}}{\text{м2}} \cdot \text{К}\right]$; $c_p\ \left[\frac{\text{кДж}}{\text{кг}} \cdot \text{К}\right]$;

D_i [К/МПа]; Q [млн. м3/сут]; Δ – относительная плотность газа по воздуху.

Параметры λ, z, c_p являются функциями от давления p и температуры T, но в данном случае этим пренебрегают, а в расчетах используют параметры T_{cp} из (11) и p_{cp} которое определяется по формуле:

$$p_{cp} = \frac{2}{3}\left(p(0) + \frac{p^2(L)}{p(0)+p(L)}\right). \tag{15}$$

При заданном профиле трассы, т.е. при большой разности геодезических отметок (ΔH) расчетные формулы примут вид:

$$p^2(L) = p^2(0) - q^2\frac{16 z_{cp} R T_{cp}}{\pi^2 D_{\text{вн}}^5}\lambda_{cp} L - \frac{2g}{z_{cp} R T_{cp}} p_{cp}^2 \Delta H, \tag{16}$$

$$T(L) = T_{oc} + [T(0) - T_{oc}]e^{-\gamma} - Di_{cp}\frac{p^2(0)-p^2(L)}{2\gamma p_{cp}} - -\frac{g}{c_{p_{cp}}}\frac{(\Delta H)}{\gamma}(1 - e^{-\gamma}) \tag{17}$$

где: Di_{cp} – среднее по длине участка значение коэффициента Джоуля - Томсона.
$\Delta H = H(L) - H(0)$ – разность высотных отметок выхода и входа трубопровода.

Алгоритм расчета стационарного режима:

1. Вычисляем $\lambda_{cp}, z_{cp}, c_{p_{cp}}$ как функции $p(0), T(0), q$;
2. Подставляем λ_{cp}, z_{cp} и $p(0)$ в уравнение (12) или (16) и находим $p(L)$;
3. По формуле (15) вычисляем p_{cp}
4. Подставляем $z_{cp}, c_{p_{cp}}, p_{cp}$ в формулы (10) и (17) и вычисляем $T(L)$;
5. По формулам (11), (13) или (14) вычисляем T_{cp};
6. Вычисляем $\lambda_{cp}, z_{cp}, c_{p_{cp}}(p_{cp}, T_{cp})$ и переходим к шагу 2

Вычисления $p(L)$ и $T(L)$ продожаются до тех пор, пока не будут выполнены условия завершения процедуры $\left|\frac{p^{l+1}(L)-p^{l}(L)}{p^{l+1}(L)}\right| \leq e_p$; $\left|\frac{T^{l+1}(L)-T^{l}(L)}{T^{l+1}(L)}\right| \leq e_T$.

В итоге можно прийти к тому, что данная модель (16)- (17) позволяет вычислить давление и температуру транспортируемого газа, но с несколькими недостатками, описанными выше. Несмотря на свои недостатки, на данный момент модель имеет место быть использованной в малых газопроводах газотранспортной сферы для расчета различных параметров. Это облегчит такие действия как: определение места утечки газа, места аварии, контроль потока газа, контроль режимов работы компрессорных станции и т.д. Данные упрощения являются существенно важными для любой компании занимающейся транспортом газа.

Список использованных источников:

1. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. М., Наука., 1969 г., 825 с.
2. Бобровский С.А., Щербаков С.Г., Яковлев Е.И. Трубопроводный транспорт газа. М., Наука, 1976 г., 475 с.
3. Селезнев В.Е., Алешин В.В., Клишин Г.С. Методы и технологии численного моделирования газопроводных систем – М., Едиторнал УРСС, 2002 г., 448 с.
4. Черный И.А. Основы газовой динамики. М., Наука, 1961 г., 200 с.