

ISSN (Print) 2616-6836  
ISSN (Online) 2663-1296

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің

# ХАБАРШЫСЫ

---

**BULLETIN**

of L.N. Gumilyov Eurasian  
National University

**ВЕСТНИК**

Евразийского национального  
университета имени Л.Н. Гумилева

**ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ** сериясы

**PHYSICS. ASTRONOMY** Series

Серия **ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ**

№1(126)/2019

1995 жылдан бастап шығады

Founded in 1995

Издается с 1995 года

Жылына 4 рет шығады

Published 4 times a year

Выходит 4 раза в год

Астана, 2019  
Astana, 2019

*Бас редакторы*  
ф.-м.ғ. докторы  
**А.Қ. Арынгазин** (Қазақстан)

*Бас редактордың орынбасары*

**А.Т. Ақылбеков**, ф.-м.ғ.д., профессор  
(Қазақстан)

*Редакция алқасы*

|                          |                                     |
|--------------------------|-------------------------------------|
| <b>Алдонгаров А.А.</b>   | PhD (Қазақстан)                     |
| <b>Балапанов М.Х.</b>    | доктор ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)     |
| <b>Бахтизин Р.З.</b>     | доктор ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)     |
| <b>Гиниятова Ш.Г.</b>    | ф.-м.ғ.к. (Қазақстан)               |
| <b>Даулетбекова А.Қ.</b> | ф.-м.ғ.к. (Қазақстан)               |
| <b>Ержанов Қ.К.</b>      | ф.-м.ғ.к., PhD (Қазақстан)          |
| <b>Жұмаділов Қ.Ш.</b>    | PhD (Қазақстан)                     |
| <b>Здоровец М.</b>       | ф.-м.ғ.к.(Қазақстан)                |
| <b>Қадыржанов Қ.К.</b>   | доктор ф.-м.ғ.д., проф. (Қазақстан) |
| <b>Кайнарбай А.Ж.</b>    | ф.-м.ғ.к. (Қазақстан)               |
| <b>Кутербеков Қ.А.</b>   | ф.-м.ғ.д., проф. (Қазақстан)        |
| <b>Лушик А.Ч.</b>        | доктор ф.-м.ғ.д., проф.(Эстония)    |
| <b>Морзабаев А.К.</b>    | ф.-м.ғ.к. (Қазақстан)               |
| <b>Мырзақұлов Р.Қ.</b>   | ф.-м.ғ.д., проф.(Қазақстан)         |
| <b>Нұрахметов Т.Н.</b>   | ф.-м.ғ.д., проф. (Қазақстан)        |
| <b>Сауытбеков С.С.</b>   | ф.-м.ғ.д., проф. (Қазақстан)        |
| <b>Тлеукенов С.К.</b>    | ф.-м.ғ.д., проф. (Қазақстан)        |
| <b>Усеинов А.Б.</b>      | PhD (Қазақстан)                     |

*Редакцияның мекенжайы:* 010008, Қазақстан, Астана қ., Сатпаев к-сі, 2,349  
б., Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті.  
Тел.: +7(7172) 709-500 (ішкі 31-428)  
E-mail: vest\_phys@enu.kz

*Жауапты хатшы, компьютерде беттеген:* А. Нұрболат

**Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы.**  
**ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ сериясы**

Меншіктенуші: ҚР БжҒМ "Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті" ШЖҚ РМК  
Мерзімділігі: жылына 4 рет.

Қазақстан Республикасының Ақпарат және коммуникациялар министрлігімен  
тіркелген. 27.03.2018ж. №16999-ж тіркеу куәлігі.

Тиражы: 25 дана

Типографияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Астана қ., Қажымұқан к-сі, 12/1, 349 б., Л.Н.  
Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті. Тел.: +7(7172)709-500 (ішкі 31-428)

*Editor-in-Chief*  
Doctor of Phys.-Math. Sciences  
**A.K. Aryngazin** (Kazakhstan)

*Deputy Editor-in-Chief*

**A.T. Akilbekov**, Doctor of Phys.-Math. Sciences,  
Prof. (Kazakhstan)

*Editorial board*

|                          |   |
|--------------------------|---|
| <b>Aldongarov A.A.</b>   | PhD (Kazakhstan)                                    |
| <b>Balapanov M.Kh.</b>   | Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Russia)      |
| <b>Bakhtizin R.Z.</b>    | Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Russia)      |
| <b>Dauletbekova A.K.</b> | Candidate of Phys.-Math. Sciences, PhD (Kazakhstan) |
| <b>Giniyatova Sh.G.</b>  | Candidate of Phys.-Math. Sciences (Kazakhstan)      |
| <b>Kadyrzhhanov K.K.</b> | Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Kazakhstan)  |
| <b>Kainarbay A.Zh.</b>   | Candidate of Phys.-Math. Sciences (Kazakhstan)      |
| <b>Kuterbekov K.A.</b>   | Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Kazakhstan)  |
| <b>Lushchik A.</b>       | Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Estonia)     |
| <b>Morzabayev A.K.</b>   | Candidate of Phys.-Math. Sciences (Kazakhstan)      |
| <b>Myrzakulov R.K.</b>   | Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Kazakhstan)  |
| <b>Nurakhmetov T.N.</b>  | Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Kazakhstan)  |
| <b>Sautbekov S.S.</b>    | Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Kazakhstan)  |
| <b>Tleukenov S.K.</b>    | Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Kazakhstan)  |
| <b>Useinov A.B.</b>      | PhD (Kazakhstan)                                    |
| <b>Yerzhanov K.K.</b>    | Candidate of Phys.-Math. Sciences, PhD(Kazakhstan)  |
| <b>Zdorovets M.</b>      | Candidate of Phys.-Math. Sciences (Kazakhstan)      |
| <b>Zhumadilov K.Sh.</b>  | PhD (Kazakhstan)                                    |

*Editorial address:* L.N. Gumilyov Eurasian National University, 2, Satpayev str., of. 349, Astana,  
Kazakhstan, 010008  
Tel.: +7(7172) 709-500 (ext. 31-428)  
E-mail: vest\_phys@enu.kz

*Responsible secretary, computer layout:* A.Nurbolat

**Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University.**  
**PHYSICS. ASTRONOMY Series**

Owner: Republican State Enterprise in the capacity of economic conduct "L.N. Gumilyov Eurasian National University" Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan

Periodicity: 4 times a year

Registered by the Ministry of Information and Communication of the Republic of Kazakhstan.

Registration certificate №16999-ж from 27.03.2018.

Circulation: 25 copies

Address of printing house: L.N. Gumilyov Eurasian National University, 12/1 Kazhimukan str., Astana, Kazakhstan 010008;

tel.:+7(7172) 709-500 (ext. 31-428)

*Главный редактор*  
доктор ф.-м.н.  
**А.К. Арынгазин** (Казахстан)

*Зам. главного редактора*

**А.Т. Акилбеков**, доктор ф.-м.н.  
профессор (Казахстан)

*Редакционная коллегия*

|                          |                                   |
|--------------------------|-----------------------------------|
| <b>Алдонгаров А.А.</b>   | PhD (Казахстан)                   |
| <b>Балапанов М.Х.</b>    | ф.-м.н., проф. (Россия)           |
| <b>Бахтизин Р.З.</b>     | ф.-м.н., проф. (Россия)           |
| <b>Гиниятова Ш.Г.</b>    | кандидат ф.-м.н. (Казахстан)      |
| <b>Даулетбекова А.К.</b> | кандидат ф.-м.н., PhD (Казахстан) |
| <b>Ержанов К.К.</b>      | кандидат ф.-м.н., PhD (Казахстан) |
| <b>Жумадилов К.Ш.</b>    | доктор PhD (Казахстан)            |
| <b>Здоровец М.</b>       | к.ф.-м.н. (Казахстан)             |
| <b>Кадыржанов К.К.</b>   | ф.-м.н., проф. (Казахстан)        |
| <b>Кайнарбай А.Ж.</b>    | кандидат ф.-м.н. (Казахстан)      |
| <b>Кутербеков К.А.</b>   | доктор ф.-м.н., проф. (Казахстан) |
| <b>Лущик А.Ч.</b>        | ф.-м.н., проф. (Эстония)          |
| <b>Морзабаев А.К.</b>    | кандидат ф.-м.н. (Казахстан)      |
| <b>Мырзакулов Р.К.</b>   | доктор ф.-м.н., проф. (Казахстан) |
| <b>Нурахметов Т.Н.</b>   | доктор ф.-м.н., проф. (Казахстан) |
| <b>Сауытбеков С.С.</b>   | доктор ф.-м.н., проф. (Казахстан) |
| <b>Тлеукенов С.К.</b>    | доктор ф.-м.н., проф. (Казахстан) |
| <b>Усеинов А.Б.</b>      | PhD (Казахстан)                   |

*Адрес редакции:* 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Сатпаева, 2, каб. 349, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева.  
Тел.: (7172) 709-500 (вн. 31-428)  
E-mail: vest\_phys@enu.kz

*Ответственный секретарь, компьютерная верстка:* А. Нурболат

**Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева.**  
**Серия ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ**

Собственник РГП на ПХВ "Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева" МОН РК  
Периодичность: 4 раза в год

Зарегистрирован Министерством информации и коммуникаций Республики Казахстан.

Регистрационное свидетельство №16999-ж от 27.03.2018г.

Тираж: 25 экземпляров

Адрес типографии: 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Кажимукана, 12/1, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева. тел.: +7(7172)709-500 (вн. 31-428)

Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІНІҢ  
ХАБАРШЫСЫ. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ сериясы

№1(126)/2019

МАЗМҰНЫ

|  |    |
|--|----|
| <i>Балахаева Р., Акылбеков А., Даулетбекова А., Козловский А., Баймуханов З., Гиниятова Ш., Усеинов А., Садуова Б., Карим К.</i> SiO <sub>2</sub> /Si тректі темплэйтте екі типті электролит негізінде CdTe нанокластерлерін қалыптастыру    | 8  |
| <i>Дукенов А.Б., Усеинов А.Б., Акылбеков А.Т., Даулетбекова А.К., Здоровец М.В., Ыбыраев Н.С., Оралбеков Н.Б.</i> Таза және кобальтпен легирленген MgF <sub>2</sub> -нің электрондық қасиеттерін Ab-initio есептеулері                       | 15 |
| <i>Доломатов М.Ю., Шуткова С.А., Шарипов Т.И., Бахтизин Р.З., Ишниязов З.З., Нураxметов Т.Н., Салиходжа Ж.М.</i> Мұнай асфальтені нанобөлшектерінің молекулалық және супрамолекулалық құрылымының ерекшеліктері                              | 23 |
| <i>Кайнарбай А. Ж., Нураxметов Т.Н., Юсупбекова Б., Кайнарбаева А., Турмаханбетова А., Базарбаева.Г.Е., Абдраман Б.</i> Биологиядан бастан күн энергетикасына шейін кең қолданыс табатын CdSe/CdS гетероқұрылымдардың алу әдістемесін жасау  | 32 |
| <i>Мадиярова А.Е., Разина О.В., Цыба П.Ю.</i> f-эссенциялы Эйнштейн-Картан гравитация моделі   | 38 |
| <i>Ногай А.С., Кутербеков К.А., Бекмырза К.Ж., Нураxметов Т.Н., Кабышев А.М., Кумисбек А., Жеткенбай А., Айдарбеков Н., Сулейменов А.</i> Жанармай жасушалары үшін кобальт халькогенидінің негізінде катализаторларды синтездеу және зерттеу | 48 |
| <i>Нураxметов Т.Н., Бахтизин Р.З., Салиходжа Ж.М., Жунусбеков А.М., Кайнарбай А.Ж., Дауренбеков Д.Х., Садыкова Б.М., Жанылысов К.Б., Юсупбекова Б.Н.</i> Сілтілі металл сульфаттарының зоналық құрылымы                                      | 56 |
| <i>Санг Мей Ли, Босунг Шин, А.Сейтжан, А.Мырзагалиева, Б.Медеубаева</i> Брэгг торларына негізделген оптофлюидтық сенсорлар   | 67 |
| <i>Саттинова З.К.</i> Құю қондырғысының сақиналы каналында бериллий тотығы термопласт шликерінің изотермиялық емес қату процесін модельдеу   | 81 |
| <i>Тлеукенов С.К., Балабеков К.Н., Жалғасбекова З.К.</i> Ромбылық кристалдардағы топтық жылдамдық пен электромагниттік энергия ағыны   | 90 |

BULLETIN OF L.N. GUMILYOV EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY. PHYSICS.  
ASTRONOMY SERIES

№1(126)/2019

CONTENTS

---

|  |    |
|--|----|
| <i>Balakhayeva R., Akilbekov A., Dauletbekova A., Kozlovskii A., Baimukhanov Z., Giniyatova Sh., Usseinov A., Saduova B., Karim K.</i> Creation of CdTe nanoclusters in SiO <sub>2</sub> /Si track templates using two types of electrolyter | 8  |
| <i>Dukenov A.B., Usseinov A.B., Akilbekov A.T., Dauletbekova A.K., Zdorovets M.V., Ybyraev N.S., Oralbekov N.B.</i> Ab-initio calculations of the electronic properties of pure and cobalt doped MgF <sub>2</sub>                            | 15 |
| <i>Dolomatov M.Yu., Shutkova S.A., Sharipov T.I., Bakhtizin R.Z., Ishniyazov Z.Z., Nurakhmetov T.N., Salikhodzha Z.M.</i> Band structure of alkali metal sulfates  | 23 |
| <i>Kainarbai A.Zh., Nurakhmetov T.H., Usupbekova B., Kainarbaeva A., Turmakhanbetova A., Bazarbayeva.G., Abdraman B.</i> Wide application areas from biology until solar cell heterojunction CdSe/CdS synthesis method                       | 32 |
| <i>Madiyarova A.E., Razina O.V., Tsyba P.Yu.</i> Einstein-Cartan gravity model with f-essence  | 38 |
| <i>Nogai A.S., Kuterbekov K.A., Bekmyrza K.Zh., Nurakhmetov T.N., Kabyshev A.M., Kumisbek A., Zhetkenbay A., Aidarbekov N., Suleimenov A.</i> Synthesis and Investigation of Catalysts Based on Cobalt Chalcogenide for Fuel Cells           | 48 |
| <i>Nurakhmetov T.N., Bakhtizin R.Z., Salikhodja Z.M., Zhunusbekov A.M., Kainarbay A.Z., Daurenbekov D.H., Sadykova B.M., Zhangylysov K.B., Yussupbekova B.N.</i> Band structure of alkali metal sulfates                                     | 56 |
| <i>Sang Mae Lee, Bosung Shin, A.Seitkan, A.Myrzagaliyeva, B.Medeubayeva</i> Optofluidic sensors based on bragg gratings  | 67 |
| <i>Sattinova Z.K.</i> Simulation of the process of non-isothermal crystallization process of thermoplastic slurry BeO in the annular cavity of the casting plant   | 81 |
| <i>Tleukenov S.K., Balabekov K.N., Zhalgasbekova Z.K.</i> Group velocity and flow of electromagnetic energy in rhombic crystals  | 90 |

ВЕСТНИК ЕВРАЗИЙСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА  
ИМЕНИ Л.Н.ГУМИЛЕВА. Серия ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ

№1(126)/2019

СОДЕРЖАНИЕ

|  |    |
|--|----|
| <i>Балахаева Р., Акылбеков А., Даулетбекова А., Козловский А., Баймуханов З., Гиниятова Ш., Усеинов А., Садуова Б., Карим К.</i> Создание нанокластеров CdTe в трековых темплэйттах SiO <sub>2</sub> /Si с использованием двух типов электролита | 8  |
| <i>Дукенов А.Б., Усеинов А.Б., Акылбеков А.Т., Даулетбекова А.К., Здоровец М.В., Ыбыраев Н.С., Оралбеков Н.Б.</i> Ab-initio расчеты электронных свойств чистого и легированного кобальтом MgF <sub>2</sub>                                       | 15 |
| <i>Доломатов М.Ю., Шуткова С.А., Шарипов Т.И., Бахтизин Р.З., Ишниязов З.З., Нурахметов Т.Н., Салиходжа Ж.М.</i> Особенности молекулярной и надмолекулярной структуры наночастиц нефтяных асфальтенов  | 23 |
| <i>Кайнарбай А. Ж., Нурахметов Т.Н., Юсупбекова Б., Кайнарбаева А., Турмаханбетова А., Базарбаева.Г.Е., Абдраман Б.</i> Разработка методик получения гетероструктур CdSe/CdS широкого круга применения: от биологии до солнечной энергетики      | 32 |
| <i>Мадиярова А.Е., Разина О.В., Цыба П.Ю.</i> Модель гравитации Эйнштейна-Картана с f-эссенцией  | 38 |
| <i>Ногай А.С., Кутербекков К.А., Бекмырза К.Ж., Нурахметов Т.Н., Кабышев А.М., Кумисбек А., Жеткенбай А., Айдарбеков Н., Сулейменов А.</i> Синтез и исследование катализаторов на основе халькогенида кобальта для топливных элементов           | 48 |
| <i>Нурахметов Т.Н., Бахтизин Р.З., Салиходжа Ж.М., Жунусбеков А.М., Кайнарбай А.Ж., Дауренбеков Д.Х., Садыкова Б.М., Жанылысов К.Б., Юсупбекова Б.Н.</i> Зонная структура сульфатов щелочных металлов  | 57 |
| <i>Санг Мей Ли, Босунг Шин, А.Сейтжан, А.Мырзагалиева, Б.Медеубаева</i> Оптофлюидные датчики на основе Брэгговских решеток   | 67 |
| <i>Саттинова З.К.</i> Моделирование процесса неизотермического отверждения термопластичного шликера BeO в кольцевом канале установки литья   | 81 |
| <i>Тлеуженов С.К., Балабеков К.Н., Жалгасбекова З.К.</i> Групповая скорость и поток электромагнитной энергии в ромбических кристаллах  | 90 |

А.Е. Мадиярова<sup>1</sup>, О.В. Разина<sup>2</sup>, П.Ю. Цыба<sup>3</sup>

*Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан*  
(E-mail: <sup>1</sup> madiyarova96@list.ru, <sup>2</sup> olvikraz@mail.ru, <sup>3</sup> pyotrtsyba@gmail.com)

### Модель гравитации Эйнштейна-Картана с f-эссенцией

**Аннотация:** В данной статье рассматривается модель гравитации Эйнштейна-Картана с f-эссенцией в четырех измерениях совместно с однородной, изотропной и плоской Вселенной Фридмана-Робертсона-Уокера. Для этой модели найдена система уравнений движения. Построено степенное решение для масштабного фактора  $a = a_0 t^\alpha$ . Для ускоренного расширения Вселенной необходимо  $\alpha > 1$ . Восстановлен фермионный потенциал. Для более полного описания кинематики космологического расширения найдены плотность энергии  $\rho$ , давление  $p$ , параметр уравнения состояния  $w$ , параметр замедления  $q$ , параметр рывка  $j$  и параметр щелчка  $s$ . Изучены энергетические условия. Эти условия накладывают независимые от модели ограничения на поведение плотности энергии и давления. Построены соответствующие графики.

**Ключевые слова:** Гравитация Эйнштейна-Картана, f-эссенция, энергетические условия, уравнение состояния, параметр замедления, параметр рывка, параметр щелчка.

DOI: <https://doi.org/10.32523/2616-68-36-2019-126-1-38-47>

**Введение.** Происхождение, наблюдаемого в настоящее время, ускоренного расширения Вселенной стало одной из самых важных проблем современной космологии и даже теоретической физики в целом. Среди разных теоретических моделей, пытающихся объяснить это ускоренное расширение [1]-[3] можно выделить две основные тенденции: (1) введение новой гипотетической формы материи с большим отрицательным давлением, называемое темной энергией (ТЭ), в рамках общей теории относительности (ОТО) (космологическая постоянная, различные виды квинтэссенции, фантомное поле и т. д.) и (2) разные предложения в модифицированных теориях гравитации, таких как f(R)-теории, многомерные теории и теории неримановой геометрии, такие как геометрия Римана-Картана с кручением. Простейшей теорией такого рода является теория гравитации Эйнштейна-Картана (ТЭК) [4], которая также приводит к модели ускоренного расширения Вселенной [5].

ТЭК можно рассматривать как вырожденную версию [6] калибровочной теории тяготения Пуанкаре (КТТП), в которой гравитационный лагранжиан содержит инварианты, квадратичные по кривизне и торсионные тензоры. В отличие от этого, в ТЭК кручение не является динамическим, поскольку его гравитационное действие уменьшает скаляр кривизны пространства-времени Римана-Картана непосредственно обобщая действие ОТО. Эта теория гравитации является правдоподобной: ее наблюдательные прогнозы согласуются с классическими опытами ОТО, но существенно отличаются от ОТО высокой плотностью материи [4].

Теории с кручением являются весьма интересными, поскольку кручение естественным образом возникает во многих подходах, таких как супергравитация [7] и суперструна [8]. Одним из простейших примеров ТЭК является f(R) гравитация с кручением [9], [10] и как показано в [10], кручение может играть роль ТЭ и вызывать ускоренное расширение Вселенной.

Более того, существование осциллирующих Вселенных в ТЭК [5] показывает, что кручение может заменить «Экзотические» источники, нарушающие слабые и нулевые энергетические условия (WEC и NEC). Как известно, такие нарушения в ОТО являются необходимым условием для существования проходимых кротовых нор [11]. Кротовые норы являются предметом особого интереса, как возможные машины времени между различными Вселенными или отдаленными частями одной и той же Вселенной [12].

В данной статье будем использовать сигнатуру  $(-, +, +, +)$  и единицы измерения выбираем так, что  $c = \hbar = 1$ .



В контексте теории Эйнштейна-Картана аффинная связность  $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$  не является симметричной и его антисимметричная часть определяет тензор кручения [13], [14]

$$C_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} \equiv 2\Gamma_{[\mu\nu]}^{\lambda}.$$

Взаимосвязь аффинной связности  $\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}$  с символами Кристоффеля  $\tilde{\Gamma}_{\nu\mu}^{\lambda}$  получается через условие для метрического тензора  $\nabla_{\sigma}g_{\mu\nu} = 0$ , что дает

$$\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} = \tilde{\Gamma}_{\nu\mu}^{\lambda} + K_{\nu\mu}^{\lambda}, \quad (1)$$

где  $K_{\nu\mu}^{\lambda}$  - является конторсионным тензором, определяемым формулой

$$K_{\nu\mu}^{\lambda} = \frac{1}{2}(C_{\nu\mu}^{\lambda} + C_{\nu\mu}^{\lambda} + C_{\mu\nu}^{\lambda}). \quad (2)$$

Если мы имеем дело с фермионными полями как источниками гравитационного поля, удобно использовать тетрадный формализм. Тетрада  $e_{\mu}^a$  определяет ортонормированное множество векторов, которое удовлетворяет соотношению  $g_{\mu\nu} = e_{\mu}^a e_{\nu}^b \eta_{ab}$ , где  $\eta_{ab}$  - метрический тензор Минковского. В тетрадном формализме условие метрики соответствует условию тетрады

$$D_{\nu}e^{a\mu} \equiv \partial_{\nu}e^{a\mu} + \Gamma_{\rho\nu}^{\mu}e^{a\rho} + \omega_{\nu}^{ab}e_b^{\mu} = 0, \quad (3)$$

где  $\omega_{\nu}^{ab}$  обозначает спиновую связанность. В терминах спиновой связанности тензор Римана имеет вид

$$R_{\mu\nu}^{ab} = \partial_{\mu}\omega_{\nu}^{ab} - \partial_{\nu}\omega_{\mu}^{ab} - \omega_{\nu}^{ac}\omega_{\mu}^{cb} - \omega_{\nu}^{bc}\omega_{\mu}^{ca}$$

и тензор Риччи дается выражением  $R_{\mu\nu} = e_a^{\sigma}e_{b\nu}R_{\sigma\mu}^{ab}$ . Из условия тетрады (3) можно записать

$$\omega_{\mu}^{ab} = \tilde{\omega}_{\mu}^{ab} + K_{\mu}^{ab},$$

из уравнения (1) и определения символов Кристоффеля  $\tilde{\Gamma}_{\nu\mu}^{\lambda}$ . Спиновая связанность  $\tilde{\omega}_{\mu}^{ab}$  это функции тетрады, т. е.

$$\tilde{\omega}_{\mu}^{ab} = \frac{e^{a\rho}}{2}(\partial_{\mu}e_{\rho}^b - \partial_{\rho}e_{\mu}^b) - \frac{e^{b\rho}}{2}(\partial_{\mu}e_{\rho}^a - \partial_{\rho}e_{\mu}^a) + \frac{e^{a\rho}}{2}(\partial_{\sigma}e_{\rho}^c - \partial_{\rho}e_{\sigma}^c)e^{b\sigma}e_{c\mu}.$$

Тензор Риччи  $R_{\mu\nu}$  также может быть записан через функцию, которая не зависит от конторсионного тензор  $K_{\nu\mu}^{\lambda}$  и функцию зависящую от нее

$$R_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu} + \tilde{\nabla}_{\lambda}K_{\mu\lambda}^{\lambda} + K_{\theta\lambda}^{\lambda}K_{\mu\nu}^{\theta} - K_{\theta\nu}^{\lambda}K_{\mu\lambda}^{\theta}, \quad (4)$$

где  $\tilde{R}_{\mu\nu}$  и  $\tilde{\nabla}$  - тензор Риччи и ковариантная производная соответственно.

Дираковские матрицы в пространстве-времени Минковского обозначаются через  $\gamma_a$  с  $a = 0, 1, 2, 3$  тогда как обобщенные матрицы Дирака - заданные  $\gamma^{\mu} = e^{a\mu}\gamma_a$  - удовлетворяют алгебре Клиффорда  $\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2g^{\mu\nu}$ , где скобки обозначают антикоммутиационные соотношения. Как обычно, скобки  $[\gamma_a, \gamma_b]$  будут обозначать коммутационные отношения и  $\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ . Где матрицы  $\gamma^i$  равны

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

### Уравнения Эйнштейна и Дирака.

Плотность лагранжиана фермионного поля определяется формулой

$$L = \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^{\mu}D_{\mu}\psi - \bar{D}_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi) - m\bar{\psi}\psi - V(\bar{\psi}, \psi),$$

где  $\psi$  и  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$  обозначают спинорное поле и его сопряженное, соответственно,  $m$  - масса фермиона, а  $V$  его потенциал самодействия. Ковариантные производные  $D_\mu \psi$  и  $\bar{D}_\mu \bar{\psi}$  задаются в терминах спиновой связности  $\omega_\mu^{ab}$  в виде

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi + \frac{1}{8} \omega_\mu^{ab} [\gamma_a, \gamma_b] \psi, \quad \bar{D}_\mu \bar{\psi} = \partial_\mu \bar{\psi} - \frac{1}{8} \omega_\mu^{ab} \bar{\psi} [\gamma_a, \gamma_b]. \quad (5)$$

В рамках теории Эйнштейна-Картана действие для фермионного поля, минимально связанного с гравитационным полем записывается как

$$S = \int d^4 x e \left[ -\frac{1}{16\pi G} e_a^\mu e_b^\nu R_{\mu\nu}^{ab} + \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi - \bar{D}_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi) - m u - V(u) \right], \quad (6)$$

где  $e = \det(e_a^\mu)$ ,  $u = \bar{\psi} \psi$ , а  $G$  - гравитационная постоянная.

Уравнения поля получают из действия (6) следующим образом. Сначала варьирование действия (6) по отношению к тетраде приводит к уравнениям поля Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (7)$$

где тензор энергии-импульса задан

$$T_{\mu\nu} = \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma_\nu D_\mu \psi - \bar{D}_\mu \bar{\psi} \gamma_\nu \psi) - L g_{\mu\nu}.$$

Далее уравнения Дирака следуют из вариации действия (6) по  $\bar{\psi}$  и  $\psi$ , что дает

$$i \gamma^\mu D_\mu \psi - m \psi - \frac{dV}{d\psi} = 0, \quad i \bar{D}_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + m \bar{\psi} + \frac{dV}{d\bar{\psi}} = 0.$$

Наконец, из вариации действия (6) относительно спиновой связности следует следующее выражение для тензора кручения

$$C_{k\lambda}^\mu = -4\pi G \epsilon_{abcd} e_\lambda^a e_k^b e^{c\mu} (\bar{\psi} \gamma_5 \gamma^d \psi) = 0, \quad (8)$$

где  $\epsilon_{abcd}$  является тензором Леви-Чивита, который равен

$$\epsilon_{abcd} = \begin{cases} +\sqrt{e}, & \text{если } (a, b, c, d) \text{ есть четная перестановка набора } (1, 2, 3, 4), \\ -\sqrt{e}, & \text{если } (a, b, c, d) \text{ есть нечетная перестановка набора } (1, 2, 3, 4), \\ 0, & \text{если хотя бы два индекса совпадают.} \end{cases}$$

Как только тензор кручения задается уравнением (8), из (2) можно получить следующее выражение для конторсионного тензора

$$K_{\nu\mu}^\lambda = -2\pi G \epsilon_{abcd} e_\mu^a e_\nu^b e^{c\lambda} (\bar{\psi} \gamma_5 \gamma^d \psi).$$

Уравнения Эйнштейна (7) можно переписать, введя симметричный тензор Риччи  $\tilde{R}_{\mu\nu}$  используя связь (4). Из полученного уравнения можно получить два уравнения, первое относится к его симметричной части, а второе к его антисимметричной части. Симметричная часть аналогична уравнениям Эйнштейна

$$\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{R} g_{\mu\nu} = 8\pi G \left( \tilde{T}_{\mu\nu} - \frac{3}{2} \pi G g_{\mu\nu} \sigma^2 \right),$$

где было введено обозначение  $\sigma^2 = (\bar{\psi} \gamma_5 \gamma^d \psi)^2$  и симметричный тензор энергии-импульса дается формулой

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma_{(\nu} \tilde{D}_{\mu)} \psi - \tilde{D}_{(\mu} \bar{\psi} \gamma_{\nu)} \psi) - \tilde{L} g_{\mu\nu},$$

где,  $\tilde{L}$  является лагранжианом без эффектов кручения, производные  $\tilde{D}_\mu$  и  $\tilde{D}$  задаются выражением (5) заменой спиновой связи  $\omega_\mu^{ab}$  на  $\tilde{\omega}_\mu^{ab}$ .

Соответствующая антисимметричная часть имеет следующее выражение

$$\tilde{\nabla}_\lambda K_{\mu\nu}^\lambda = 4\pi G i (\bar{\psi} \gamma_{(\nu} \tilde{D}_{\mu)} \psi - \tilde{D}_{(\mu} \bar{\psi} \gamma_{\nu)} \psi).$$

### Модель гравитации Эйнштейна-Картана с f-эссенцией

Рассмотрим модель гравитации Эйнштейна-Картана с f-эссенцией с действием в виде

$$S = \int d^4x e \left[ -\frac{1}{16\pi G} e_a^\mu e_b^\nu R_{\mu\nu}^{ab} + K(Y, \psi, \bar{\psi}) \right],$$

где лагранжиан f-эссенции имеет вид

$$K = Y - mu - V(u)$$

Действие для гравитации Эйнштейна-Картана с f-эссенцией рассмотрим совместно с однородной, изотропной, плоской метрикой Фридмана-Робертсона-Уокера (ФРУ)

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (9)$$

где  $a(t)$  является масштабным фактором Вселенной.

Скалярная кривизна и детерминант метрического тензора равны

$$R = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right),$$

$$e = \det(e_a^\mu) = a^3.$$

Для метрики ФРУ (9) лагранжиан f-эссенции примет вид

$$Y = \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^0\dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\gamma^0\psi) + \frac{3\pi G}{2}(\bar{\psi}\gamma_5\gamma^i\psi)^2. \quad (10)$$

Для метрики ФРУ (9) с учетом (10) лагранжиан модели гравитации Эйнштейна-Картана с f-эссенцией примет вид

$$L = -6aa\dot{a}^2 + 16\pi Ga^3 \left[ \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^0\dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\gamma^0\psi) + \frac{3\pi G}{2}(\bar{\psi}\gamma_5\gamma^i\psi)^2 - mu - V \right].$$

Найдем с помощью уравнения Эйлера-Лагранжа уравнения движения для масштабного фактора  $a$

$$L_a - (L_{\dot{a}})_t = 0,$$

$$2\dot{H} + 3H^2 + 8\pi Gp = 0,$$

где

$$p = V_u u - V - \frac{3\pi G}{2}\sigma^2.$$

Найдем с помощью уравнения Эйлера-Лагранжа уравнения движения для  $\bar{\psi}$  и  $\psi$

$$L_{\bar{\psi}} - (L_{\dot{\bar{\psi}}})_t = 0,$$

$$\dot{\bar{\psi}} + 1.5H\bar{\psi} - im\bar{\psi}\gamma^0 - iV_{\bar{\psi}}\gamma^0 + 3\pi Gi(\bar{\psi}\gamma_5\gamma^i\psi)(\bar{\psi}\gamma_5\gamma^i)\gamma^0 = 0,$$

$$L_{\psi} - (L_{\dot{\psi}})_t = 0,$$

$$\dot{\psi} + 1.5H\psi + im\gamma^0\psi - i\gamma^0V_{\psi} - 3\pi Gi\gamma^0(\bar{\psi}\gamma_5\gamma^i\psi)(\gamma_5\gamma^i\psi) = 0.$$

Из условия нулевой энергии получаем

$$L_{\dot{a}}\dot{a} + L_{\dot{\psi}}\dot{\psi} + L_{\dot{\bar{\psi}}}\dot{\bar{\psi}} - L = 0,$$

$$3H^2 - 8\pi G\rho = 0,$$

где

$$\rho = mu + V - \frac{3\pi G}{2}\sigma^2.$$

Тогда полная система уравнений движения примет вид

$$3H^2 - 8\pi G\rho = 0, \quad (11)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 + 8\pi Gp = 0, \quad (12)$$

$$\dot{\psi} + 1.5H\psi + im\gamma^0\psi - i\gamma^0V_{\psi} - 3\pi Gi\gamma^0(\bar{\psi}\gamma_5\gamma^i\psi)(\gamma_5\gamma^i\psi) = 0, \quad (13)$$

$$\dot{\bar{\psi}} + 1.5H\bar{\psi} - im\bar{\psi}\gamma^0 - iV_{\psi}\gamma^0 + 3\pi Gi(\bar{\psi}\gamma_5\gamma^i\psi)(\bar{\psi}\gamma_5\gamma^i)\gamma^0 = 0, \quad (14)$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (15)$$

где

$$\rho = tu + V - \frac{3\pi G}{2}\sigma^2, \quad p = V_u u - V - \frac{3\pi G}{2}\sigma^2. \quad (16)$$

Уравнения (11), (12) являются уравнениями Фридмана, уравнения (13), (14) уравнениями Дирака, уравнение (15) уравнением сохранения, (16) плотность энергии и давление, соответственно. Из уравнений (11) и (14) можно получить выражения связывающие масштабный фактор  $a$  и функции  $u$  и  $\sigma$

$$u = \frac{c}{a^3}, \quad \sigma = \frac{\sigma_0}{a^3},$$

где  $c$  и  $\sigma_0$  константы интегрирования.

Система уравнений (11)-(16) имеет следующее степенное решение

$$a = a_0 t^\alpha,$$

где  $a_0$  и  $\alpha$  некоторые константы.

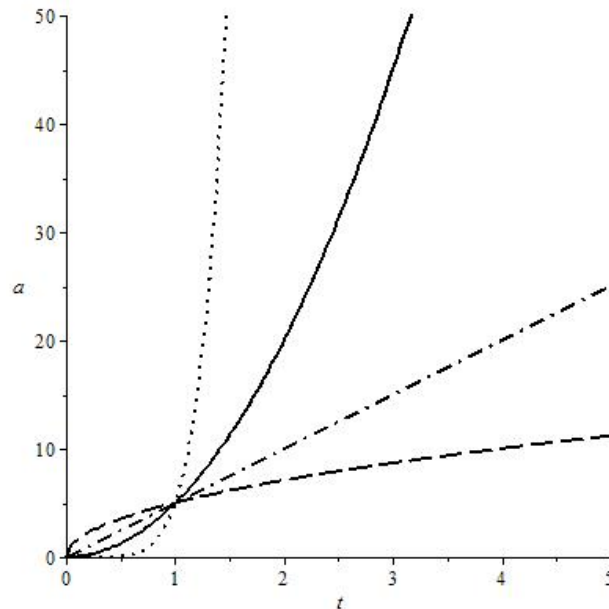


Рисунок 1 – Масштабный фактор  $a$  как функция от  $t$

На рисунке 1 изображена зависимость масштабного фактора  $a$  от времени  $t$  при  $a_0 = 5$  и различных значений  $\alpha$  (точечная линия  $\alpha = 6$ , сплошная линия  $\alpha_1 = 2$ , штрих-пунктирная линия  $\alpha_2 = 1$ , пунктирная линия  $\alpha_3 = \frac{1}{2}$ ). Как видно из рисунка 1, так как  $a(t)$  имеет значение радиуса Вселенной, для ускоренного расширения Вселенной необходимо  $\alpha > 1$ .

Решение для фермионного поля будем искать в виде

$$\psi_k = A_k(t)e^{iD_k(t)}, \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

где  $A_k$  и  $D_k$  некоторые функции зависящие от  $t$ . Коэффициенты  $A_k$  и  $D_k$  найдем из уравнений Дирака (13), (14)

$$A_k = A_{k0}a_0 t^{-\frac{3}{2}\alpha},$$

$$D_k = -\frac{3\pi G\sigma_0(\sigma_0 + c)}{ca_0^3(1 - 3\alpha)}t^{1-3\alpha} - \frac{2\alpha a_0^3 t^{3\alpha-1}}{c(3\alpha - 1)} + D_{k0},$$

где  $A_{k0}$  и  $D_{k0}$  константы интегрирования.

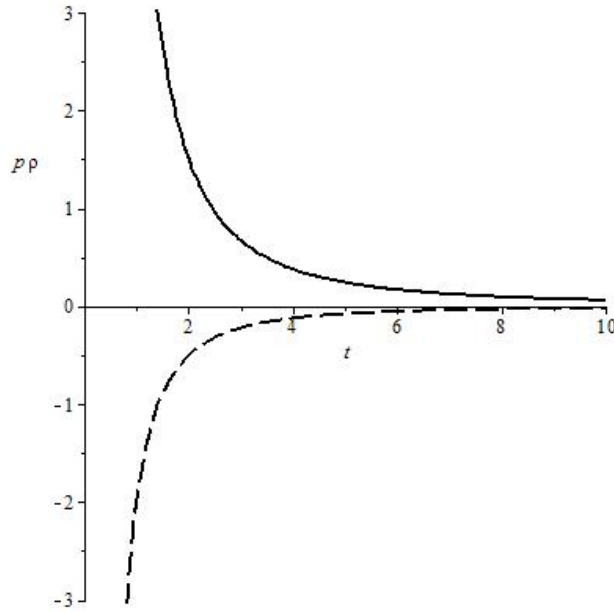


Рисунок 2 – Зависимость плотности энергии и давления от  $t$ .

Потенциал фермионного поля найдем из уравнений Фридмана (11) , (12) совместно с (16)

$$V = \frac{3\pi G\sigma_0^2}{2a_0^6 t^{6\alpha}} + 3\alpha^2 t^{-2} - \frac{mc}{a_0^3 t^{3\alpha}} + V_0,$$

где  $V_0$  константа интегрирования. Плотность энергии и давления из уравнений (11) и (12) равны (далее единицы измерения выбираем так, что  $8\pi G = 1$ )

$$p = -\alpha(3\alpha + 2)t^{-2},$$

$$\rho = 3\alpha^2 t^2.$$

На рисунке 2 показана зависимость давления  $p$  (пунктирная линия) и плотности энергии  $\rho$  (сплошная линия) от  $t$ . Для темной энергии давление должно быть отрицательным. Наша модель соответствует теоретическим данным, что видно из рисунка 2.

Параметр уравнения состояния  $\omega$

$$\omega(t) = \frac{p}{\rho}$$

Согласно последним наблюдательным данным  $\omega = -0.980 \pm 0.053$ .

Для нашей модели параметр уравнения состояния равен

$$\omega(t) = -\frac{3\alpha^2 t^{-2} + 2\alpha t^{-2}}{3\alpha^2 t^2} = -1 + \frac{2\alpha t^{-2}}{3\alpha^2 t^{-2}} = -1 + \frac{2}{3\alpha}.$$

Для более полного описания кинематики космологического расширения полезно рассмотреть расширенный набор параметров [15].

Параметр замедления  $q$

$$q(t) = -\frac{1}{a} \frac{d^2 a}{dt^2} \left[ \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right]^{-2}.$$

Для нашей модели параметр замедления равен

$$q(t) = -\frac{\alpha(\alpha - 1)a_0 t^{\alpha-2} a_0 t^\alpha}{\alpha^2 a_0^2 t^{2\alpha-2}} = -1 + \frac{1}{\alpha}.$$

Параметр рывка  $j$  (jerk)

$$j(t) = +\frac{1}{a} \frac{d^3 a}{dt^3} \left[ \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right]^{-3}.$$

Для нашей модели параметр рывка равен

$$j = \frac{a_0 \alpha (\alpha - 1) (\alpha - 2) t^{\alpha-3} a_0^2 t^{2\alpha}}{\alpha^3 a_0^3 t^{3\alpha} - 3} = 1 + \frac{3}{\alpha} + \frac{2}{\alpha^2}.$$

Параметр щелчка  $s$  (snap)

$$s(t) = + \frac{1}{a} \frac{d^4 a}{dt^4} \left[ \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right]^{-4}.$$

Для нашей модели параметр щелчка равен

$$s(t) = \frac{a_0 \alpha (\alpha - 1) (\alpha - 2) (\alpha - 3) t^{\alpha-4} a_0^3 t^{3\alpha}}{\alpha^4 a_0^4 t^{4\alpha} - 4} = 1 - \frac{6}{\alpha} + \frac{11}{\alpha^2} - \frac{6}{\alpha^3}.$$

Параметры замедления  $q$ , рывка  $j$  и щелчка  $s$  являются безразмерными.

На рисунке 3 изображены графики для параметров уравнения состояния  $w$ , замедления  $q$ , рывка  $j$  и щелчка  $s$ . Где сплошная линия-параметр уравнения состояния  $w$ , точечная линия-параметр замедления  $q$ , пунктирная линия-параметр рывка  $j$  и штрих-пунктирная линия-параметр щелчка  $s$ .

### Энергетические условия

В космологии большое значение имеют энергетические условия. Существует четыре энергетических условия [15]:

Нулевое энергетическое условие (NEC)

$$\rho + p \geq 0.$$

Сильное энергетическое условие (WEC)

$$\rho \geq 0, \quad \rho + p \geq 0.$$

Слабое энергетическое условие (SEC)

$$\rho + 3p \geq 0, \quad \rho + p \geq 0.$$

Доминирующее энергетическое условие (DEC)

$$\rho \geq 0, \quad -\rho \leq p \leq \rho.$$

Для нашей модели энергетические условия имеют следующий вид

NEC

$$2\alpha t^{-2} \geq 0$$

WEC

$$3\alpha^2 t^{-2} \geq 0, \quad 2\alpha t^{-2} \geq 0.$$

SEC

$$6\alpha t^{-2} (1 - \alpha) \leq 0, \quad 2\alpha t^{-2} \geq 0.$$

DEC

$$3\alpha^2 t^{-2} \geq 0, \quad -3\alpha^2 t^{-2} \leq -3\alpha^2 t^{-2} + 2\alpha t^{-2} \leq 3\alpha^2 t^{-2}.$$

Эти условия накладывают простые и независимые от модели ограничения на поведение плотности энергии и давления. Для нашей модели выполняется нулевое энергетическое условие, сильное энергетическое условие, доминирующее энергетическое условие и не выполняется слабое энергетическое условие, которое не является обязательным.

**Закключение.** В данной статье рассмотрели модель гравитации Эйнштейна-Картана с  $f$ -эссенцией совместно с однородной, изотропной и плоской Вселенной Фридмана-Робертсона-Уокера. Для этой модели нашли степенное решение для масштабного фактора. Восстановили фермионный потенциал. Для описания кинематики космологического расширения нашли расширенный набор параметров: параметр уравнения состояния  $w$ , параметр замедления  $q$ , параметр рывка  $j$  и параметр щелчка  $s$ . Все получившиеся параметры удовлетворяют последним наблюдательным данным при  $\alpha > 1$ . Давление в рассматриваемой модели отрицательно и стремится в позднее время к нулю. Поэтому в позднее время происходит переход в замедленный режим. Изучили энергетические условия. Для рассматриваемой модели выполняются энергетические условия NEC, WEC, DEC и не выполняется условие

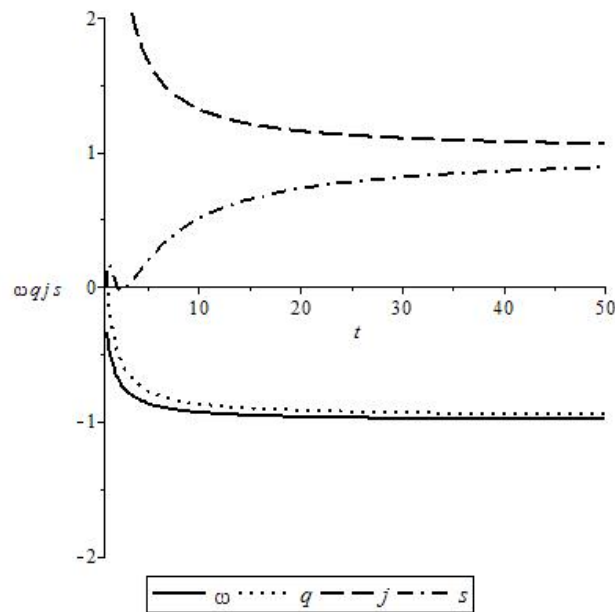


Рисунок 3 – Зависимость параметра уравнения состояния, замедления, рывка и щелчка от  $t$ .

SEC. Построены графики для масштабного фактора, плотности энергии и давления, а так же для параметров состояния, замедления, рывка и щелчка, графики которых соответствуют последним наблюдательным данным.

### Список литературы

- 1 Avelino P. et al., Unveiling the Dynamics of the Universe // arXiv: 1607.02979. Symmetry. – 2016. – P. 1-79.
- 2 Joyce A., Jain B., Khoury J., and Trodden M. Beyond the Cosmological Standard Model // Physics Reports. – 2015.– V. 568. – P.1-98. doi: 10.1016/j.physrep.2014.12.002.
- 3 Bamba K., Capozziello S., Nojiri S., Odintsov S. Dark energy cosmology: the equivalent description via different theoretical models and cosmography tests // Astrophysics and Space Science. – 2012. – V. 342. – P. 155-228. doi:10.1007/s10509-012-1181-8.
- 4 Hehl F.W. and Obukhov Yu.N. Elie Cartan's torsion in geometry and in field theory, an essay // Ann. Fond. Louis Broglie. – 2007. – P.38. doi: gr-qc/0711.1535.
- 5 Galiakhmetov A.M. Cosmology with polynomial potentials of the fourth degree in Einstein–Cartan theory // Class. Quantum Grav. – 2011.– V.28. – P.105013.
- 6 Ponomarev V.N., Barvinsky A.O., and Obukhov Yu.N. Geometrodynamics Methods and Gauge Approach in the Theory of Gravity // Energoatomizdat, Moscow. – 1985.–P.168.
- 7 Odintsov S.D. The Nonsingular Quantum Cosmological Models with Nontrivial Topology in Conformal (Super) Gravity // Europhys. Lett. –1989.– V.8. – P. 309.
- 8 Baker W.M. Gravitational waves from black hole collisions via an eclectic approach // Class. Quantum Grav. – 1990.– V.7.–P.717.
- 9 Capozziello S., Cianci R., Stornaiolo C. and Vignolo S., f(R) Gravity with Torsion: The metric-affine approach //Class. Quantum Grav. – 2007. – V.24. – P.6417. doi: grqc/0708.3038.
- 10 Capozziello S., Cianci R., Stornaiolo C. and Vignolo S., f(R) cosmology with torsion // Phys. Scr. –2008.– V.78. – P.0605010. doi: grqc/0810.2549.
- 11 Hochberg D., and Visser M. Geometric structure of the generic static traversable wormhole throat // Phys. Rev. D. –1997.–V.56.– P.4745. gr-qc/9704082.
- 12 Bronnikov K.A., Galiakhmetov A.M., Wormholes and black universes without phantom fields in Einstein-Cartan theory // Physical. Review D.– 2016. – V.94, №12. – P.124006. doi: 10.1103/PhysRevD.94.124006.
- 13 Ribas M.O. and Kremer G.M., Fermion fields in Einstein-Cartan theory and the accelerated-decelerated transition in a primordial Universe // Grav.Cosmol. – 2010.– V.2, №16. – P.173-177. doi: 10.1134/S020228931002012X.
- 14 Razina O., Kulnazarov I., Yezhanov K., Tsyba P. Yu., Myrzakulov R. Einstein-Cartan gravity and G-essence // Central European Journal of Physics. –2012.– V.10, №1. – P.47-50. doi: 10.2478/s11534-011-0102-8.
- 15 Болотин Ю.Л., Ерохин Д.А., Лемец О.А. Расширяющаяся Вселенная: замедление или ускорение? // Успехи Физических Наук. – 2012. – Т.182, №9. – С. 941-986.

А.Е.Мадиярова, О.В. Разина, П.Ю. Цыба

*Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан*

### f-эссенциялы Эйнштейн-Картан гравитация моделі

**Аннотация:** Берілген мақалада f-эссенциялы Эйнштейн-Картан гравитация моделі біртекті, изотропты және жазық Фридман-Робертсон-Уокер Әлемімен бірге төрт өлшемде қарастырылады. Осы модель үшін қозғалыс теңдеулер жүйесі анықталған.  $a = a_0 t^\alpha$  масштабты факторы үшін дәрежелі шешім құрастырылды. Ғаламның үдемелі кеңеюі үшін  $\alpha > 1$  қажет. Фермиондық потенциал қалпына келтірілді. Космологиялық кеңейту кинематикасының толығырақ сипаттамасын алу үшін энергия тығыздығы, қысым, қалып теңдеуінің параметрі, тежелу параметрі, серпіліс параметрі және шерту параметрі анықталған. Энергетикалық шарттар зерттелінді. Бұл шарттар энергетикалық тығыздық пен қысымның әрекетіне тәуелділік моделінен тыс шектеулерді белгілейді. Қажетті графиктер салынды.

**Түйін сөздер:** Эйнштейн-Картан гравитациясы, f-эссенция, энергетикалық шарттар, күй теңдеуінің параметрі, тежелу параметрі, серпіліс параметрі, шерту параметрі.

A.E. Madiyarova, O.V. Razina, P.Yu. Tsyba

*L.N. Gumilyov Eurasian national university, Astana, Kazakhstan*

### Einstein-Cartan gravity model with f-essence

**Abstract:** This article discusses the Einstein-Cartan gravity model with f-essence in four dimensions together with the homogeneous, isotropic and flat Friedmann-Robertson-Walker Universe. A system of equations of motion has been found for this model. A power solution is constructed for the scale factor  $a = a_0 t^\alpha$ . For an accelerated expansion of the Universe,  $\alpha > 1$  is necessary. The fermion potential has been restored. For a more complete description of the kinematics of cosmological expansion, the energy density, pressure, parameter of the equation of state, deceleration parameter, jerk parameter and snap parameter were found. Energy conditions studied. These conditions impose model-independent constraints on the behavior of energy density and pressure. Appropriate graphics are made.

**Keywords:** Einstein-Cartan gravity, f-essence, energy conditions, parameter equation of state, deceleration parameter, jerk parameter, snap parameter.

## References

- 1 Avelino P. et al. Unveiling the Dynamics of the Universe, arXiv: 1607.02979. Symmetry. 1-79(2016).
- 2 Joyce A., Jain B., Khoury J., and Trodden M. Beyond the Cosmological Standard Model, Physics Reports. 568, 1-98.(2015). doi: 10.1016/j.physrep.2014.12.002.
- 3 Bamba K., Capozziello S., Nojiri S., Odintsov S. Dark energy cosmology: the equivalent description via different theoretical models and cosmography tests, Astrophysics and Space Science. 342, 155-228(2012). doi:10.1007/s10509-012-1181-8.
- 4 Hehl F.W. and Obukhov Yu.N. Elie Cartan's torsion in geometry and in field theory, an essay, Ann. Fond. Louis Broglie. 38(2007). doi: gr-qc/0711.1535.
- 5 Galiakhmetov A.M. Cosmology with polynomial potentials of the fourth degree in Einstein-Cartan theory, Class. Quantum Grav. 28, 105013(2011).
- 6 Ponomarev V.N., Barvinsky A.O., and Obukhov Yu.N. Geometrodynamics Methods and Gauge Approach in the Theory of Gravity, Energoatomizdat, Moscow. 168(1985).
- 7 Odintsov S.D. The Nonsingular Quantum Cosmological Models with Nontrivial Topology in Conformal (Super) Gravity, Europhys. Lett. 8, 309(1989).
- 8 Baker W.M. Gravitational waves from black hole collisions via an eclectic approach, Class. Quantum Grav. 7, 717(1990).
- 9 Capozziello S., Cianci R., Stornaiolo C. and Vignolo S., f(R) Gravity with Torsion: The metric-affine approach, Class. Quantum Grav. 24, 6417(2007). doi: gr-qc/0708.3038.
- 10 Capozziello S., Cianci R., Stornaiolo C. and Vignolo S., f(R) cosmology with torsion, Phys. Scr. 78, 0605010(2008). doi: gr-qc/0810.2549.
- 11 D. Hochberg and M. Visser, Phys. Rev. D. 56, 4745(1997); gr-qc/9704082.
- 12 Bronnikov K.A., Galiakhmetov A.M., Wormholes and black universes without phantom fields in Einstein-Cartan theory, Physical. Review D. 94(12), 124006(2016). doi: 10.1103/PhysRevD.94.124006.
- 13 Ribas M.O. and Kremer G.M., Fermion fields in Einstein-Cartan theory and the accelerated-decelerated transition in a primordial Universe, Grav.Cosmol. 2(16), 173-177(2010). doi: 10.1134/S020228931002012X.
- 14 Razina O., Kulnazarov I., Yerzhanov K., Tsyba P. Yu., Myrzakulov R. Einstein-Cartan gravity and G-essence, Central European Journal of Physics. 10(1)47-50(2012). doi: 10.2478/s11534-011-0102-8.
- 15 Bolotin Yu. L., Erohin D.A., Lemec O.A. Rasshiryayuchayasya Vselennaya: samedlenie ili uskorenije? [Expanding Universe: deceleration or acceleration?] Uspekhi fizicheskikh nauk [Advances in Physical Sciences] 182(9)941-986 (2012). [in Russian]



**Автор туралы мәлімет:**

*Мадиярова А.Е.* – 6М060400-Физика мамандығының бірінші курс магистранты, Жалпы және теориялық физика кафедрасы, Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан.

*Разина О.В.* – PhD, Жалпы және теориялық физика кафедрасының доценті, Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан.

*Цыба П.Ю.* – PhD, Жалпы және теориялық физика кафедрасының доценті, Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан.

*Madiyarova A. Y.* – master student first course specialty 6M060400 Physics, Department of General and Theoretical Physics, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan.

*Razina O.V.* – PhD, Associate Professor of the Department of General and Theoretical Physics, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan.

*Tsyba P.Y.* – PhD, Associate Professor of the Department of General and Theoretical Physics, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan.

*Поступила в редакцию 23.06.2018*

**«Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің Хабаршысы. Физика. Астрономия сериясы» журналында мақала жариялау ережесі**

*Журнал редакциясы авторларға осы нұсқаулықпен толық танысып, журналға мақала әзірлеу мен дайын мақаланы журналға жіберу кезінде басшылыққа алуды ұсынады. Бұл нұсқаулық талаптарының орындалмауы сіздің мақалаңыздың жариялануын кідіртеді.*

**1. Журнал мақсаты.** Физика мен астрономия салаларының теориялық және эксперименталды зерттелулері бойынша мұқият тексеруден өткен ғылыми құндылығы бар мақалалар жариялау.

**2.** Баспаға (барлық жариялаушы авторлардың қол қойылған қағаз нұсқасы және электронды нұсқа) журналдың түпнұсқалы стильдік файлының міндетті қолданысымен LaTeX баспа жүйесінде дайындалған Tex- пен Pdf-файлындағы жұмыстар ұсынылады. Стильдік файлды *bulphysast.enu.kz* журнал сайтынан жүктеп алуға болады. Сонымен қатар, автор(лар) ілеспе хат ұсынуы керек.

**3.** Автордың қолжазбаны редакцияға жіберуі мақаланың Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысында басуға келісімін, шетел тіліне аударылып қайта басылуына келісімін білдіреді. Автор мақаланы редакцияға жіберу арқылы автор туралы мәліметтің дұрыстығына, мақала көшірілмегендігіне (плагиаттың жоқтығына) және басқа да заңсыз көшірмелердің жоқтығына кепілдеме береді.

**4.** Мақаланың көлемі 18 беттен аспауға тиіс (6 беттен бастап).

**ГТАМПК** <http://grnti.ru/>

**Автор(лар)дың аты-жөні**

**Мекеменің толық атауы, қаласы, мемлекеті** (егер авторлар әртүрлі мекемеде жұмыс жасайтын болса, онда әр автор мен оның жұмыс мекемесі қасында бірдей белгі қойылу керек)

**Автор(лар)дың E-mail-ы**

**Мақала атауы**

**Аннотация** (100-200 сөз; күрделі формулаларсызсыз, мақаланың атауын мейлінше қайталамауы қажет; әдебиеттерге сілтемелер болмауы қажет; мақаланың құрылысын (кіріспе мақаланың мақсаты/ міндеттері /қарастырылып отырған сұрақтың тарихы /зерттеу /әдістері нәтижелер/талқылау, қорытынды) сақтай отырып, мақаланың қысқаша мазмұны берілуі қажет).

**Түйін сөздер** (6-8 сөз не сөз тіркесі. Түйін сөздер мақала мазмұнын көрсетіп, мейлінше мақала атауы мен аннотациядағы сөздерді қайталамай, мақала мазмұнындағы сөздерді қолдану қажет. Сонымен қатар, ақпараттық-ізвестіру жүйелерінде мақаланы жеңіл табуға мүмкіндік беретін ғылым салаларының терминдерін қолдану қажет).

**Негізгі мәтін** мақаланың мақсаты/ міндеттері/ қарастырылып отырған сұрақтың тарихы, зерттеу әдістері, нәтижелер/талқылау, қорытынды бөлімдерін қамтуы қажет.

**5. Таблица, суреттер** – Жұмыстың мәтінінде кездесетін таблицалар мәтіннің ішінде жеке нөмірленіп, мәтін көлемінде сілтемелер түрінде көрсетілуі керек. Суреттер мен графиктер PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX форматындағы стандарттарға сай болуы керек. Нүктелік суреттер кеңейтілімі 600 dpi кем болмауы қажет. Суреттердің барлығы да айқын әрі нақты болуы керек.

Мақаладағы **формулалар** тек мәтінде оларға сілтеме берілсе ғана номерленеді.

Жалпы қолданыста бар **аббревиатуралар** мен **қысқартулардан** басқалары міндетті түрде алғаш қолданғанда түсіндірілуі берілуі қажет. **Қаржылай көмек туралы** ақпарат бірінші бетте көрсетіледі.

**6.** Жұмыста қолданылған әдебиеттер тек жұмыста сілтеме жасалған түпнұсқалық көрсеткішке сай (сілтеме беру тәртібінде немесе ағылшын әліпбиі тәртібі негізінде толтырылады) болуы керек. Баспадан шықпаған жұмыстарға сілтеме жасауға тұйым салынады.

Сілтемені беруде автор қолданған әдебиеттің бетінің нөмірін көрсетпей, келесі нұсқаға сүйеніңіз дұрыс: тараудың номері, бөлімнің номері, тармақтың номері, теораманың (лемма, ескерту, формуланың және т.б.) номері көрсетіледі. Мысалы: қараңыз [3; § 7, лемма 6]», «...қараңыз [2; 5 теорамдағы ескерту]». Бұл талап орындалмаған жағдайда мақаланы ағылшын тіліне аударғанда сілтемелерде қателіктер туындауы мүмкін.

**Қолданылған әдебиеттер тізімін рәсімдеу мысалдары**

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. –М: Физматлит, –1994, –376 стр. – **кітап**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики –2014. –Т.54. № 7. –С. 1059-1077. - **мақала**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. – Москва, 2015. –С.141-142. – **конференция еңбектері**

4 Нургазина К. Рыцарь математики и информатики. –Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. –С.7. – **газеттік мақала**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия –2017. –Т.14. –С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. – URL: <http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf>. (дата обращения: 08.01.2017). - **электронды журнал**

**7.** Әдебиеттер тізімінен соң автор өзінің библиографиялық мәліметтерін орыс және ағылшын тілінде (егер мақала қазақ тілінде орындалса), қазақ және ағылшын тілінде (егер мақала орыс тілінде орындалса), орыс және қазақ тілінде (егер мақала ағылшын тілінде орындалса) жазу қажет. Соңынан транслиттік аударма мен ағылшын тілінде берілген әдебиеттер тізімінен соң әр автордың жеке мәліметтері (қазақ, орыс, ағылшын тілдерінде – ғылыми атағы, қызметтік мекенжайы, телефоны, e-mail-ы) беріледі.

**8.** Редакцияға түскен мақала жабық (анонимді) тексеруге жіберіледі. Барлық рецензиялар авторларға жіберіледі. Автор (рецензент мақаланы түзетуге ұсыныс берген жағдайда) үш күн аралығында қайта қарап, қолжазбаның түзетілген нұсқасын редакцияға қайта жіберуі керек. Рецензент жарамсыз деп таныған мақала қайтара қарастырылмайды. Мақаланың түзетілген нұсқасы мен автордың рецензентке жауабы редакцияға жіберіледі.

**9. Төлемақы.** Басылымға рұқсат етілген мақала авторларына төлем жасау туралы ескертіледі. Төлем көлемі 2018 жылы 4500 тенге – ЕҰУ қызметкерлері үшін және 5500 тенге басқа ұйым қызметкерлеріне.

**Реквизиттер:**

"Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева" МОН РК

Столичный филиал АО "Цеснабанк"

КБЕ 16

БИН 010140003594

БИК TSES KZ KA

Счет в кодировке IBAN-

KZ91998ВТВ0000003104-

"За публикацию ФИО авторов"

**Provision on articles submitted to the journal "Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University. Physics. Astronomy series"**

*The journal editorial board asks the authors to read the rules and adhere to them when preparing the articles, sent to the journal. Deviation from the established rules delays the publication of the article.*

**1. Purpose of the journal.** Publication of carefully selected original scientific.

2. The scientific publication office accepts the article (in electronic and printed, signed by the author) in Tex- and Pdf-files, prepared in the LaTeX publishing system with mandatory use of the original style log file. The style log file can be downloaded from the journal website *bulphysast.enu.kz*. And you also need to provide the cover letter of the author(s).

Language of publications: Kazakh, Russian, English.

**3. Submission of articles to the scientific publication office means the authors' consent to the right of the Publisher, L.N. Gumilyov Eurasian National University, to publish articles in the journal and the re-publication of it in any foreign language. Submitting the text of the work for publication in the journal, the author guarantees the correctness of all information about himself, the lack of plagiarism and other forms of improper borrowing in the article, the proper formulation of all borrowings of text, tables, diagrams, illustrations.**

4. The volume of the article should not exceed 18 pages (from 6 pages).

**5. Structure of the article**

**GRNTI** <http://grnti.ru/>

**Initials and Surname of the author (s)**

**Full name of the organization, city, country** (if the authors work in different organizations, you need to put the same icon next to the name of the author and the corresponding organization)

**Author's e-mail (s)**

**Article title**

**Abstract** (100-200 words, it should not contain a big formulas, the article title should not repeat in the content, it should not contain bibliographic references, it should reflect the summary of the article, preserving the structure of the article - introduction/ problem statement/ goals/ history, research methods, results /discussion, conclusion).

**Key words** (6-8 words/word combination. Keywords should reflect the main content of the article, use terms from the article, as well as terms that define the subject area and include other important concepts that make it easier and more convenient to find the article using the information retrieval system).

**The main text of the article** should contain an introduction/ problem statement/ goals/ history, research methods, results / discussion, conclusion. Tables, figures should be placed after the mention. Each illustration should be followed by an inscription. Figures should be clear, clean, not scanned.

Tables are included directly in the text of the article; it must be numbered and accompanied by a reference to them in the text of the article. Figures, graphics should be presented in one of the standard formats: PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX. Bitmaps should be presented with a resolution of 600 dpi. All details must be clearly shown in the figures.

In the article, only those **formulas** are numbered, to which the text has references.

All **abbreviations**, with the exception of those known to be generally known, must be deciphered when first used in the text.

Information on **the financial** support of the article is indicated on the first page in the form of a footnote.

**6.** The list of literature should contain only those sources (numbered in the order of quoting or in the order of the English alphabet), which are referenced in the text of the article. References to unpublished issues, the results of which are used in evidence, are not allowed. Authors are recommended to exclude the reference to pages when referring to the links and guided by the following template: chapter number, section number, paragraph number, theorem number (lemmas, statements, remarks to the theorem, etc.), number of the formula. For example, "... , see [3, § 7, Lemma 6]"; "... , see [2], a remark to Theorem 5". Otherwise, incorrect references may appear when preparing an English version of the article.

### Template

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. -М: Физматлит, -1994, -376 стр.-**book**

2 Баиллов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики -2014. -Т.54. № 7. -С. 1059-1077. - **journal article**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященная 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. - Москва, 2015. -С.141-142. - - **Conferences proceedings**

4 Нургазина К. Рыцарь математики и информатики. -Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. -С.7. **newspaper articles**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия -2017. -Т.14. -С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. - URL: <http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf>. (дата обращения: 08.01.2017). - **Internet resources**

**7.** At the end of the article, after the list of references, it is necessary to indicate bibliographic data in Russian and English (if the article is in Kazakh), in Kazakh and English (if the article is in Russian) and in Russian and Kazakh languages (if the article is English language). Then a combination of the English-language and transliterated parts of the references list and information about authors (scientific degree, office address, telephone, e-mail - in Kazakh, Russian and English) is given.

**8. Work with electronic proofreading.** Articles received by the Department of Scientific Publications (editorial office) are sent to anonymous review. All reviews of the article are sent to the author. The authors must send the proof of the article within three days. Articles that receive a negative review for a second review are not accepted. Corrected versions of articles and the author's response to the reviewer are sent to the editorial office. Articles that have positive reviews are submitted to the editorial boards of the journal for discussion and approval for publication.

**Periodicity of the journal:** 4 times a year.

**9. Payment.** Authors who have received a positive conclusion for publication should make payment on the following requisites (for ENU employees - 4,500 tenge, for outside organizations - 5,500 tenge):

**Requisites:**

L.N. Gumilyov Eurasian  
National University"  
JSC "Tsesnabank:"  
Tsesnabank КБЕ  
КБЕ 16  
БИН 010140003594  
БИК TSES KZ KA  
Счет в кодировке IBAN-  
KZ91998ВТВ0000003104-  
-За публикацию фио

**Положение о рукописях, представляемых в журнал «Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия: Физика. Астрономия»**

Редакция журнала просит авторов ознакомиться с правилами и придерживаться их при подготовке работ, направляемых в журнал. Отклонение от установленных правил задерживает публикацию статьи.

**1. Цель журнала.** Публикация тщательно отобранных оригинальных научных работ по актуальным проблемам теоретических и экспериментальных исследований в области физики и астрономии.

**2.** В редакцию (в бумажном виде, подписанном всеми авторами и в электронном виде) представляются Tex- и Pdf-файлы работы, подготовленные в издательской системе LaTeX, с обязательным использованием оригинального стилевого файла журнала. Стилиевой файл можно скачать со сайта журнала *bulphysast.enu.kz*. Автору (авторам) необходимо предоставить сопроводительное письмо.

**Язык публикаций:** казахский, русский, английский.

**3. Отправление статей в редакцию** означает согласие авторов на право Издателя, Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, издания статей в журнале и переиздания их на любом иностранном языке. Представляя текст работы для публикации в журнале, автор гарантирует правильность всех сведений о себе, отсутствие плагиата и других форм неправомерного заимствования в рукописи, надлежащее оформление всех заимствований текста, таблиц, схем, иллюстраций.

**4.** Объем статьи не должен превышать 18 страниц (от 6 страниц).

**5. Схема построения статьи**

**ГРНТИ** <http://grnti.ru/>

**Инициалы и фамилия автора(ов)**

**Полное наименование организации, город, страна** (если авторы работают в разных организациях, необходимо поставить одинаковый значок около фамилии автора и соответствующей организации)

**E-mail** автора(ов)

**Название статьи**

**Аннотация** (100-200 слов; не должна содержать громоздкие формулы, по содержанию повторять название статьи; не должна содержать библиографические ссылки; должна отражать краткое содержание статьи, сохраняя структуру статьи – введение/ постановка задачи/ цели/ история, методы исследования, результаты/обсуждение, заключение/выводы).

**Ключевые слова** (6-8 слов/словосочетаний. Ключевые слова должны отражать основное содержание статьи, использовать термины из текста статьи, а также термины, определяющие предметную область и включающие другие важные понятия, позволяющие облегчить и расширить возможности нахождения статьи средствами информационно-поисковой системы).

**Основной текст статьи** должен содержать введение/ постановку задачи/ цели/ историю, методы исследования, результаты/обсуждение, заключение/выводы.

Таблицы включаются непосредственно в текст работы, они должны быть пронумерованы и сопровождаться ссылкой на них в тексте работы. Рисунки, графики должны быть представлены в одном из стандартных форматов: PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX. Точечные рисунки необходимо выполнять с разрешением 600 dpi. На рисунках должны быть ясно переданы все детали.

В статье нумеруются лишь те **формулы**, на которые по тексту есть ссылки.

Все **аббревиатуры и сокращения**, за исключением заведомо общеизвестных, должны быть расшифрованы при первом употреблении в тексте.

Сведения о **финансовой поддержке** работы указываются на первой странице в виде сноски.

**6.** Список литературы должен содержать только те источники (пронумерованные в порядке цитирования или в порядке английского алфавита), на которые имеются ссылки в тексте работы. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются.

Авторам рекомендуется при оформлении ссылок исключить упоминание страниц и руководствоваться следующим шаблоном: номер главы, номер параграфа, номер пункта, номер теоремы (леммы, утверждения, замечания к теореме и т.п.), номер формулы. Например, "... , см. [3; § 7, лемма 6]"; "... , см. [2; замечание к теореме 5]". В противном случае при подготовке англоязычной версии статьи могут возникнуть неверные ссылки.

**Примеры оформления списка литературы**

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. -М: Физматлит, -1994, -376 стр. - **книга**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики -2014. -Т.54. № 7. -С. 1059-1077. - **статья**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. - Москва, 2015. -С.141-142. - **труды конференции**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. -Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. -С.7. - **газетная статья**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия -2017. -Т.14. -С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. - URL: <http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf>. (дата обращения: 08.01.2017). - **электронный журнал**

**7.** После списка литературы, необходимо указать библиографические данные на русском и английском языках (если статья оформлена на казахском языке), на казахском и английском языках (если статья оформлена на русском языке) и на русском и казахском языках (если статья оформлена на английском языке). Затем приводится комбинация англоязычной и транслитерированной частей списка литературы и сведения по каждому из авторов (научное звание, служебный адрес, телефон, e-mail - на казахском, русском и английском языках).

**8. Работа с электронной корректурой.** Статьи, поступившие в Отдел научных изданий (редакция), отправляются на анонимное рецензирование. Все рецензии по статьям отправляются автору. Авторам в течение трех дней

необходимо отправить корректуру статьи. Статьи, получившие отрицательную рецензию, к повторному рассмотрению не принимаются. Исправленные варианты статей и ответ автора рецензенту присылаются в редакцию. Статьи, имеющие положительные рецензии, представляются редколлегии журнала для обсуждения и утверждения для публикации.

**Периодичность журнала:** 4 раза в год.

**9. Оплата.** Авторам, получившим положительное заключение к опубликованию, необходимо произвести оплату по следующим реквизитам (для сотрудников ЕНУ – 4500 тенге, для сторонних организаций – 5500 тенге):

## Мақаланы рәсімдеу үлгісі

МРНТИ 27.25.19

А.Ж. Жубанышева<sup>1</sup>, Н. Темиргалиев<sup>2</sup>, А.Б. Утесов<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Институт теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан*

<sup>2</sup> *Актюбинский региональный государственный университет имени К. Жубанова, Актюбе, Казахстан*

(Email: <sup>1</sup> *axaulezh@mail.ru*, <sup>2</sup> *ntmath10@mail.ru*, <sup>3</sup> *adilzhan\_71@mail.ru*)

**Численное дифференцирование функций в контексте Компьютерного (вычислительного) перечника**

### Введение

Текст введения...

Авторам не следует использовать нестандартные пакеты LaTeX (используйте их лишь в случае крайней необходимости)

### Заголовок секции

#### 1.1 Заголовок подсекции

Окружения.

**Теорема 1.** ...

**Лемма 1.** ...

**Предложение 1.** ...

**Определение 1.** ...

**Следствие 1.** ...

**Замечание 1.** ...

**Теорема 2** (Темиргалиев Н. [2]). *Текст теоремы.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Текст доказательства.

### 2. Формулы, таблицы, рисунки

$$\delta_N(\varepsilon_N; D_N)_Y \equiv \delta_N(\varepsilon_N; T; F; D_N)_Y \equiv \inf_{(l^{(N)}, \varphi_N) \in D_N} \delta_N \left( \varepsilon_N; \left( l^{(N)}, \varphi_N \right) \right)_Y, \quad (51)$$

где  $\delta_N(\varepsilon_N; (l^{(N)}, \varphi_N))_Y \equiv \delta_N(\varepsilon_N; T; F; (l^{(N)}, \varphi_N))_Y \equiv$

$$\equiv \sup_{\substack{f \in F \\ |\gamma_N^{(\tau)}| \leq 1 (\tau=1, \dots, N)}} \left\| Tf(\cdot) - \varphi_N \left( l_N^{(1)}(f) + \gamma_N^{(1)} \varepsilon_N^{(1)}, \dots, l_N^{(N)}(f) + \gamma_N^{(N)} \varepsilon_N^{(N)}; \cdot \right) \right\|_Y.$$

Таблицы, рисунки необходимо располагать после упоминания. С каждой иллюстрацией должна следовать надпись.

### 3. Ссылки и библиография

Для ссылок на утверждения, формулы и т. п. можно использовать метки. Например, теорема 2, Формула (51)

Таблица 1 – Название таблицы

| Простые                            | Не простые             |
|------------------------------------|------------------------|
| 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 | 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14 |



Рисунок 1 – Название рисунка

Для руководства по  $\LaTeX$  и в качестве примера оформления ссылок, см., например, *Львовский С.М.* Набор и верстка в пакете  $\LaTeX$ . Москва: Космосинформ, 1994.

Список литературы оформляется следующим образом.

### Список литературы

- 1 Локуциевский О.М., Гавриков М.Б. Начала численного анализа. –М.: ТОО "Янус", 1995. –581 с. - **книга**
- 2 Темиргалиев Н. Компьютерный (вычислительный) поперечник как синтез известного и нового в численном анализе // Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева –2014. –Т.4. №101. –С. 16-33. doi: ... (при наличии) - **статья**
- 3 Жубанышева А.Ж., Абикинова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященная 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. – Москва, 2015. –С.141-142. - **труды конференций**
- 4 Курмуков А.А. Ангиопротекторная и гиполипидемическая активность леукомизина. –Алматы: Бастау, 2007. –С. 3-5 - **газетные статьи**
- 5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия –2017. –Т.14. –С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. – URL: <http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf>. (дата обращения: 08.01.2017). - **электронный журнал**

**А.Ж. Жубанышева**<sup>1</sup>, **Н. Темиргалиев**<sup>1</sup>, **А.Б. Утесов**<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің теориялық математика және ғылыми есептеулер институты, Астана, Қазақстан

<sup>2</sup> Қ.Жубанов атындағы. Ақтөбе өңірлік мемлекеттік университеті, Ақтөбе, Қазақстан

#### Компьютерлік (есептеуіш) диаметр мәнінде функцияларды сандық дифференциалдау

**Аннотация:** Компьютерлік (есептеуіш) диаметр мәнінде Соболев класында жататын функцияларды олардың тригонометриялық Фурье-Лебега коэффициенттерінің ақырлы жиынынан алынған дәл емес ақпарат бойынша жуықтау есебі толығымен шешілді [100-200 сөздер].

**Түйін сөздер:** жуықтап дифференциалдау, дәл емес ақпарат бойынша жуықтау, шектік қателік, Компьютерлік (есептеуіш) диаметр [6-8 сөз/сөз тіркестері].

**A.Zh.Zhubanysheva**<sup>1</sup>, **N. Temirgaliyev**<sup>1</sup>, **A.B. Utesov**<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Institute of theoretical mathematics and scientific computations of L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

<sup>2</sup> K.Zhubanov Aktobe Regional State University, Aktobe, Kazakhstan

#### Numerical differentiation of functions in the context of Computational (numerical) diameter

**Abstract:** The computational (numerical) diameter is used to completely solve the problem of approximate differentiation of a function given inexact information in the form of an arbitrary finite set of trigonometric Fourier coefficients. [100-200 words]

**Keywords:** approximate differentiation, recovery from inexact information, limiting error, computational (numerical) diameter, massive limiting error. [6-8 words/word combinations]



## References

- 1 Lokucievskij O.M., Gavrikov M.B. Nachala chislennogo analiza [Elements of numerical analysis] (Yanus, Moscow, 1995). [in Russian]
- 2 Temirgaliyev N. Komp'yuternyj (vychislitel'nyj) poperechnik kak sintez izvestnogo i novogo v chislennom analize [Computational (numerical) diameter as a synthesis of the known and the new in numerical analysis], Vestnik Evrazijskogo nacional'nogo universiteta imeni L.N. Gumileva [Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University], 4 (101), 16-33 (2014). [in Russian]
- 3 Zhubanysheva A.Zh., AbikenovaSh.K. O normah proizvodnyh funkcionov i ih primeneniya k poperechnikovyh zadacham [About the norms of the derivatives of functions with zero values of a given set of linear functionals and their application to the width problems]. Tezisy dokladov Mezhdunarodnoj konferencii, posvjashhennaja 110-letiju so dnja rozhdenija akademika S.M.Nikol'skogo "Funkcional'nye prostranstva i teorija priblizhenija funkcionov" [International conference on Function Spaces and Approximation Theory dedicated to the 110th anniversary of S. M. Nikol'skii]. Moscow, 2015, pp. 141-142. [in Russian]
- 4 Kurmukov A. A. Angioprotekturnaja i gipolipidemicheskaia aktivnost' leukomycina [Angioprotective and lipid-lowering activity of leukomycin] (Bastau, Almaty, 2007, P. 3-5). [in Russian]
- 5 Kyrov V.A., Mihajlichenko G.G. Analiticheskij metod vlozhenija simplekticheskoj geometrii [The analytic method of embedding symplectic geometry], Sibirskie jelektronnye matematicheskie izvestija [Siberian Electronic Mathematical Reports], 14, 657-672 (2017). doi: 10.17377/semi.2017.14.057. Available at: <http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf>. [in Russian]. (accessed 08.01.2017).

### Сведения об авторах:

*Жубаньшева А.Ж.* - Старший научный сотрудник Института теоретической математики и научных вычислений, Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, ул. Сатпаева, 2, Астана, Казахстан.

*Темиргалиев Н.* - Директор Института теоретической математики и научных вычислений, Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, ул. Сатпаева, 2, Астана, Казахстан.

*Утесов А.Б.* - кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, Актыбинский региональный государственный университет имени К. Жубанова, пр. А.Молдагуловой, 34, Актобе, Казахстан.

*Zhubanysheva A.Zh.* - Senior researcher of the Institute of theoretical mathematics and scientific computations, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Satpayev str., Astana, Kazakhstan.

*Temirgaliyev N.* - Head of the Institute of theoretical mathematics and scientific computations, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Satpayev str., Astana, Kazakhstan.

*Utesov A.B.* - candidate of physical and mathematical sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics, K.Zhubanov Aktobe Regional State University, A.Moldagulova Prospect, 34, Aktobe, Kazakhstan.

Поступила в редакцию 15.05.2017

Редакторы: А.Қ. Арынгазин  
Шығарушы редактор, дизайн: А. Нұрболат

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің  
Хабаршысы. Физика. Астрономия сериясы.  
-2019 - 1(126) - Астана: ЕҰУ. 107-б.  
Шартты б.т. - 9,375 Таралымы - 25 дана.

Мазмұнына типография жауап бермейді.

Редакция мекен-жайы: 010008, Астана қ.,  
Сәтбаев көшесі, 2.  
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті  
Тел.: +7(7172) 70-95-00(ішкі 31-428)

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің баспасында басылды