

ISSN (Print) 2616-6836
ISSN (Online) 2663-1296

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің

ХАБАРШЫСЫ

BULLETIN

of L.N. Gumilyov Eurasian
National University

ВЕСТНИК

Евразийского национального
университета имени Л.Н. Гумилева

ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ сериясы

PHYSICS. ASTRONOMY Series

Серия **ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ**

№3(132)/2020

1995 жылдан бастап шығады

Founded in 1995

Издается с 1995 года

Жылына 4 рет шығады

Published 4 times a year

Выходит 4 раза в год

Нұр-Сұлтан, 2020

Nur-Sultan, 2020

Нур-Султан, 2020

Бас редакторы:
ф.-м.ғ.д., профессор, Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ
А.Т. Ақылбеков (Қазақстан)

Бас редактордың орынбасары

Гиниятова Ш.Г. ф.-м.ғ.к., доцент
Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ (Қазақстан)

Редакция алқасы

Арынгазин А.Қ.	ф.-м.ғ. докторы, Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ(Қазақстан)
Алдонгаров А.А.	PhD, Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ (Қазақстан)
Балапанов М.Х.	ф.-м.ғ.д., проф., Башқұрт мемлекеттік университеті (Ресей)
Бахтизин Р.З.	ф.-м.ғ.д., проф., Башқұрт мемлекеттік университеті (Ресей)
Даулетбекова А.Қ.	ф.-м.ғ.к., Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ (Қазақстан)
Ержанов Қ.К.	ф.-м.ғ.к., PhD, Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ (Қазақстан)
Жүмаділов Қ.Ш.	PhD, Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ (Қазақстан)
Здоровец М.	ф.-м.ғ.к., Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ(Қазақстан)
Қадыржанов Қ.К.	ф.-м.ғ.д., проф., Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ (Қазақстан)
Кайнарбай А.Ж.	ф.-м.ғ.к., Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ (Қазақстан)
Козловский А.Л.	PhD, Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ (Қазақстан)
Кутербеков Қ.А.	ф.-м.ғ.д., проф., Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ (Қазақстан)
Лущик А.Ч.	ф.-м.ғ.д., проф., Тарту университеті (Эстония)
Попов А.И.	ф.-м.ғ.д., проф., Латвия университеті (Латвия)
Морзабаев А.К.	ф.-м.ғ.к., Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ (Қазақстан)
Мырзақұлов Р.Қ.	ф.-м.ғ.д., проф., Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ(Қазақстан)
Нұрахметов Т.Н.	ф.-м.ғ.д., проф., Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ (Қазақстан)
Сауытбеков С.С.	ф.-м.ғ.д., проф., Әл-Фараби атындағы ҚазҰУ (Қазақстан)
Салиходжа Ж.М.	ф.-м.ғ.к., Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ (Қазақстан)
Скуратов В.А.	ф.-м.ғ.д., проф., Біріккен ядролық зерттеулер институты (Ресей)
Тлеуқенов С.К.	ф.-м.ғ.д., проф., Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ (Қазақстан)
Усеинов А.Б.	PhD, Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ (Қазақстан)
Хоши М.	PhD, проф., Коши университеті (Жапония)
Шункеев Қ.Ш.	ф.-м.ғ.д., проф., Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе мемлекеттік университеті (Қазақстан)

Редакцияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Нұр-Сұлтан қ., Сәтбаев к-сі, 2, 402 б., Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті.
Тел.: +7(7172) 709-500 (ішкі 31-428)
E-mail: vest_phys@enu.kz

Журнал менеджері: Г. Мендыбаева

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің Хабаршысы.
ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ сериясы

Меншіктенуші: "Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті" Коммерциялық емес акционерлік қоғам

Мерзімділігі: жылына 4 рет. Басуға 28.09.2020 ж. қол қойылды. Жазылу индексі: 76093

Қазақстан Республикасының Ақпарат және коммуникациялар министрлігінде 27.03.2018ж.

№16999-ж тіркеу куәлігімен тіркелген.

Ашық қолданудағы электрондық нұсқа: <http://bulphysast.enu.kz/>

Типографияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Нұр-Сұлтан қ., Қажымұқан к-сі, 12/1, 102 б., Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті. Тел.: +7(7172)709-500 (ішкі 31-428)

© Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

Editor-in-Chief

Doctor of Phys.-Math. Sciences, Professor, ENU
A.T. Akilbekov (Kazakhstan)

Deputy Editor-in-Chief

Giniyatova Sh.G., Candidate of Phys.-Math. Sciences,
Assoc. Prof., ENU (Kazakhstan)

Editorial Board

Aryngazin A.K.	Doctor of Phys.-Math. Sci., ENU (Kazakhstan)
Aldongarov A.A.	PhD, ENU (Kazakhstan)
Balapanov M.Kh.	Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., BashSU (Russia)
Bakhtizin R.Z.	Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., BashSU (Russia)
Dauletbekova A.K.	Candidate of Phys.-Math. Sci., PhD, ENU (Kazakhstan)
Hoshi M.	PhD, Prof., Kyushu University (Japan)
Kadyrghanov K.K.	Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., ENU (Kazakhstan)
Kainarbay A.Zh.	Candidate of Phys.-Math. Sci., ENU (Kazakhstan)
Kozlovskiy A.L.	PhD, ENU (Kazakhstan)
Kuterbekov K.A.	Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., ENU (Kazakhstan)
Lushchik A.	Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., University of Tartu (Estonia)
Morzabayev A.K.	Candidate of Phys.-Math. Sci., ENU (Kazakhstan)
Myrzakulov R.K.	Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., ENU (Kazakhstan)
Nurakhmetov T.N.	Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., ENU (Kazakhstan)
Popov A.I.	Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., University of Latvia (Latvia)
Sautbekov S.S.	Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., KazNU (Kazakhstan)
Salikhodzha Z. M	Candidate of Phys.-Math. Sci., ENU (Kazakhstan)
Skuratov V.A.	Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Joint Institute for Nuclear Research (Russia)
Tleukenov S.K.	Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., ENU (Kazakhstan)
Useinov A.B.	PhD, ENU (Kazakhstan)
Yerzhanov K.K.	Candidate of Phys.-Math. Sci., PhD, ENU (Kazakhstan)
Zdorovets M.	Candidate of Phys.-Math. Sci., ENU (Kazakhstan)
Zhumadilov K.Sh.	PhD, ENU (Kazakhstan)
Shunkeyev K.Sh.	Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Zhubanov University (Kazakhstan)

Editorial address: L.N. Gumilyov Eurasian National University, 2, Satpayev str., of. 402,
Nur-Sultan, Kazakhstan 010008
Tel.: +7(7172) 709-500 (ext. 31-428)
E-mail: vest_phys@enu.kz

Managing Editor: G. Mendybayeva

Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University.
PHYSICS. ASTRONOMY Series

Owner: Non-profit joint-stock company "L.N. Gumilyov Eurasian National University"

Periodicity: 4 times a year. Signed in print 28.09.2020. Subscription index: 76093

Registered by the Ministry of Information and Communication of the Republic of Kazakhstan.

Registration certificate №16999-ж from 27.03.2018.

Available at: <http://bulphysast.enu.kz/>

Address of printing house: L.N. Gumilyov Eurasian National University, 12/1 Kazhimukan str.,
Nur-Sultan, Kazakhstan 010008;

tel.: +7(7172) 709-500 (ext. 31-428)

Главный редактор:
доктор ф.-м.н., профессор
А.Т. Акилбеков, ЕНУ им. Л.Н. Гумилева (Казахстан)

Зам. главного редактора

Ш.Г. Гиниятова к.ф.-м.н., доцент
ЕНУ им. Л.Н. Гумилева (Казахстан)

Редакционная коллегия

Арынгазин А.К.	д.ф.-м.н., ЕНУ им. Л.Н. Гумилева (Казахстан)
Алдонгаров А.А.	PhD, ЕНУ им. Л.Н. Гумилева (Казахстан)
Балапанов М.Х.	д.ф.-м.н., проф., БашГУ (Россия)
Бахтизин Р.З.	д.ф.-м.н., проф., БашГУ (Россия)
Даулетбекова А.К.	д.ф.-м.н., PhD, ЕНУ им. Л.Н. Гумилева (Казахстан)
Ержанов К.К.	к.ф.-м.н., PhD, ЕНУ им. Л.Н. Гумилева (Казахстан)
Жумадилов К.Ш.	PhD, ЕНУ им. Л.Н. Гумилева (Казахстан)
Здоровец М.	к.ф.-м.н., ЕНУ им. Л.Н. Гумилева (Казахстан)
Кадыржанов К.К.	д.ф.-м.н., проф., ЕНУ им. Л.Н. Гумилева (Казахстан)
Кайнарбай А.Ж.	к.ф.-м.н., ЕНУ им. Л.Н. Гумилева (Казахстан)
Козловский А.Л.	PhD, ЕНУ им. Л.Н. Гумилева (Казахстан)
Кутербекоев К.А.	д.ф.-м.н., проф., ЕНУ им. Л.Н. Гумилева (Казахстан)
Лущик А.Ч.	д.ф.-м.н., проф., Тартуский университет (Эстония)
Морзабаев А.К.	д.ф.-м.н., ЕНУ им. Л.Н. Гумилева (Казахстан)
Мырзакулов Р.К.	д.ф.-м.н., проф., ЕНУ им. Л.Н. Гумилева (Казахстан)
Нурахметов Т.Н.	д.ф.-м.н., проф., ЕНУ им. Л.Н. Гумилева (Казахстан)
Попов А.И.	д.ф.-м.н., проф., Латвийский университет (Латвия)
Сауытбеков С.С.	д.ф.-м.н., проф., КазНУ им. аль-Фараби (Казахстан)
Салиходжа Ж.М.	к.ф.-м.н., ЕНУ им. Л.Н. Гумилева (Казахстан)
Скуратов В.А.	д.ф.-м.н., проф., Объединенный институт ядерных исследований (Россия)
Тлеукиенов С.К.	д.ф.-м.н., проф., ЕНУ им. Л.Н. Гумилева (Казахстан)
Усеинов А.Б.	PhD, ЕНУ им. Л.Н. Гумилева (Казахстан)
Хоши М.	PhD, проф., Коши университет (Япония)
Шункеев К.Ш.	д.ф.-м.н., проф., АРГУ имени К. Жубанова (Казахстан)

Адрес редакции: 010008, Казахстан, г. Нур-Султан, ул. Сатпаева, 2, каб. 402, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева.

Тел.: (7172) 709-500 (вн. 31-428)

E-mail: vest_phys@enu.kz

Менеджер журнала: Г. Мендыбаева

Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева.

Серия ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ

Собственник Некоммерческое акционерное общество "Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева"

Периодичность: 4 раза в год. Подписано в печать 28.09.2020 г. Подписной индекс: 76093

Зарегистрирован Министерством информации и коммуникаций Республики Казахстан.

Регистрационное свидетельство №16999-ж от 27.03.2018г.

Электронная версия в открытом доступе: <http://bulphysast.enu.kz/>

Адрес типографии: 010008, Казахстан, г. Нур-Султан, ул. Кажимукана, 12/1, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева. тел.: +7(7172)709-500 (вн. 31-428)

Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІНІҢ
ХАБАРШЫСЫ. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ сериясы

№3(132)/2020

МАЗМҰНЫ

<i>Жасыбаева М.Б., Есмаханова К.Р.</i> Дарбу түрлендіруі және Фокас-Ленэллс теңдеуінің нақты бір солитонды шешімі	8
<i>Горлачев И., Глуценко Н., Иванов И., Киреев А., Курахмедов А., Платов А., Самбаев У., Здоровец М.</i> Нысаналы атомдарды ауыр иондармен қоздыруға арналған РІХЕ әдісінің шектері	14
<i>Ергалиев Д.С., Әбдірашев Ө.К., Жумабаева А.С.</i> Робототехникалық құрылғылар кешенін ақпараттық-метрологиялық қамтамасыз ету	25
<i>Қаптағай Г., Сандибаева Н., Байжадамова Л., Утебаева А.</i> Сутегін өндірудегі кобальт шпинелінің энергетикалық сипаттамаларын жақсартудағы азоттың рөлі	30
<i>Әбуова А.Ү., Инербаев Т.М., Әбуова Ф.Ү., Сазанбай А., Нураканов А.</i> Төмен өлшемді допирленген термоэлектрикте зарядтау динамикасы	36
<i>Ногай А.А., Стефанович С.Ю., Салиходжа Ж.М., Ногай А.С.</i> Қатты ерітінділеріндегі иондық өткізгіштік және фазалық ауысулар $\text{Na}_3\text{Sc}_{2(1-x)}\text{Yb}_{2x}(\text{PO}_4)_3$	44
<i>Ногай А.С., Ускенбаев Д.Е.</i> Платинасыз катализаторлары бар NaFon мембраналарында поляризациялық және өткізгіш қасиеттері	51
<i>Бимуханов А.Н., Алдонгаров А.А.</i> $\text{Si}(\text{bzimpy})_2$ бейтарап гексакоординация кешенінің дұрыс геометриялық параметрлерін болжау үшін функционалдық үйлесімділік пен тығыздықтың функционалды теориясының негіз жиынтықтарын сынау	59
<i>Базарбек А.Б., Сағатов Н.Е., Инербаев Т.М., Ажилбеков А.Т.</i> Жоғары қысымда никель фосфидтерінің тұрақтылығын алғашқы принципті есептеу	67
<i>Карипбаев Ж.Т., Мусаханов Д.А., Лисицын В.М., Алпысова Г.К., Куженова А., Усеинов А.Б., Абдрахметова А.А., Байжуманов М.Ж.</i> Радиация өрісінде синтезделген YAG:Ce негізіндегі люминофорлардың импульстік фотолюминесценциясы	74

BULLETIN OF L.N. GUMILYOV EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY. PHYSICS.
ASTRONOMY SERIES

№3(132)/2020

CONTENTS

<i>Zhassybayeva M.B., Yesmakhanova K.R.</i> Darboux transformation and exact one-soliton solution of the Fokas-Lenells equation	8
<i>Gorlachev I., Gluchshenko N., Ivanov I., Kireev A., Kurakhmedov A., Platov A., Sambayev Ye., Zdorovets M.V.</i> The limits of the PIXE method for excitation of target atoms by heavy ions	14
<i>Yergaliyev D.S., Abdirashev O.K., Zhumabaeva A.S.</i> Information and metrological support for the complex of robotic devices	25
<i>Kaptagay G., Sandibaeva N., Baikadamova L., Utebaeva A.</i> Role of nitrogen for enhancement energetically characteristics in producing hydrogen	30
<i>Abuova A.U., Inerbaev T.M., Abuova F.U., Sazanbay A., Nurakanov A.</i> Charging dynamics in a low-dimensional doped thermoelectric	36
<i>Nogai A.A., Stefanovich S.Yu., Salikhodja J.M., Nogai A.S.</i> Ionic conductivity and phase transitions in solid solutions $\text{Na}_3\text{Sc}_{2(1-x)}\text{Yb}_{2x}(\text{PO}_4)_3$	44
<i>Nogai A.S., Uskenbayev D.E.</i> Polarizing and conductive properties in Nafion membranes with platinum-free catalysts	51
<i>Bimukhanov A.N., Aldongarov A.A.</i> Testing of combinations of Density Functional Theory functionals and basis sets for predicting correct geometrical parameters of neutral hexacoordinated $\text{Si}(\text{bzimpy})_2$ complex	59
<i>Bazarbek A.B., Sagatov N.E., Inerbaev T.M., Akilbekov A.T.</i> First principle calculations of the stability of nickel phosphides at high pressures	67
<i>Karipbaev Zh., Musahanov D., Lisitsyn V., Alpyssova G., Kukenova A., Usseinov A., Abdrahmetova A., Baizhumanov M.</i> Pulsed photoluminescence of YAG: Ce phosphors synthesized in the radiation field	74

ВЕСТНИК ЕВРАЗИЙСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА
ИМЕНИ Л.Н.ГУМИЛЕВА. Серия ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ

№3(132)/2020

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Жасыбаева М.Б., Есмаханова К.Р.</i> Преобразование Дарбу и точное односолитонное решение уравнения Фокаса-Ленэллса	8
<i>Горлачев И., Глуценко Н., Иванов И., Киреев А., Курахмедов А., Платов А., Самбаев Е., Здоровец М.</i> Пределы определения РИХЕ метода при возбуждении атомов мишени тяжелыми ионами	14
<i>Ергалиев Д.С., Абдирашев О.К., Жумабаева А.С.</i> Информационно-метрологическое обеспечение комплекса робототехнических устройств	25
<i>Каптагай Г., Сандибаева Н., Байкадамова Л., Утебаева А.</i> Роль азота в совершенствовании энергетических характеристик шпинели кобальта для производства водорода	30
<i>Абуова А.У., Инербаев Т.М., Абуова Ф.У., Сазанбай А., Нураканов А.</i> Зарядовая динамика в низкоразмерном допированном термоэлектрике	36
<i>Ногай А.А., Стефанович С.Ю., Салиходжа Ж.М., Ногай А.С.</i> Ионная проводимость и фазовые переходы в твердых растворах $\text{Na}_3\text{Sc}_{2(1-x)}\text{Yb}_{2x}(\text{PO}_4)_3$	44
<i>Ногай А.С., Ускенбаев Д.Е.</i> Поляризационные и проводящие свойства в мембранах типа NaFоп с безплатиновыми катализаторами	51
<i>Бимуханов А.Н., Алдонгаров А.А.</i> Тестирование комбинаций функционалов и базисных наборов теории функционала плотности для предсказания правильных геометрических параметров нейтрального гексакоординационного комплекса $\text{Si}(\text{bzimpy})_2$	59
<i>Базарбек А.Б., Сагатов Н.Е., Инербаев Т.М., Акилбеков А.Т.</i> Первопринципные расчеты стабильности фосфидов никеля при высоких давлениях	67
<i>Карипбаев Ж.Т., Мусаханов Д.А., Лисицын В.М., Алтысова Г.К., Куженова А., Усеинов А.Б., Абдрахметова А.А., Байжуманов М.Ж.</i> Импульсная фотолуминесценция синтезированных в поле радиации люминофоров на основе YAG:Ce	74

ФИЗИКА



Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Физика. Астрономия сериясы, 2020, том 132, №3, 8-13 беттер
<http://bulphysast.enu.kz>, E-mail: vest_phys@enu.kz

МРНТИ: 27.35

М.Б. Жасыбаева, К.Р. Есмаханова

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
(E-mail: mzhassybaeva@yahoo.com)

Преобразование Дарбу и точное односолитонное решение уравнения Фокаса-Ленэллса

Аннотация: в настоящей работе рассматривается уравнение, описывающее распространение ультракоротких нелинейных световых импульсов в оптических волокнах, так называемое уравнение Фокаса-Ленэллса (УФЛ). УФЛ является одним из обобщений нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) и интегрируемо с помощью метода обратной задачи рассеяния. Также допускает солитонные или солитоноподобные решения. Для всех известных эволюционных нелинейных уравнений для поиска солитонных решений приходится разрабатывать свои методы, учитывающие особенности данного уравнения. В данной работе предлагается метод преобразования Дарбу (ПД) для УФЛ. Для нахождения односолитонного решения рассматриваемого уравнения построено 1-кратное ПД. Также с помощью полученных результатов можно найти двухсолитонное и N-солитонное решения УФЛ.

Ключевые слова: представление Лакса, уравнение Фокаса-Ленэллса, преобразование Дарбу, солитонное решение.

DOI: <https://doi.org/10.32523/2616-6836-2020-132-3-8-13>

Поступила: 04.05.2020/ Допущена к опубликованию: 21.09.2020

Введение. Уравнение Фокаса-Ленэллса (УФЛ) было предложено для моделирования распространения нелинейных импульсов в одномодовых оптических волокнах. С математической точки зрения, это уравнение связано с нелинейным уравнением Шредингера (НУШ) так же, как уравнение Камасса-Холма связано с уравнением Кортевега-де Фриза. УФЛ выглядит следующим образом [1,2]:

$$iq_{xt} - iq_{xx} + 2q_x - |q|^2 q_x + iq = 0, \quad (1)$$

$$ir_{xt} - ir_{xx} - 2r_x + |q|^2 r_x + ir = 0, \quad (2)$$

где $q(x, t)$ представляет собой комплексную оболочку поля, индексы x, t обозначают частные производные по аргументам x, t и i - мнимая единица. В физических приложениях применяются две естественных редукции ($r = \pm \bar{q}$, где \bar{q} означает комплексное сопряжение q), которые представляют большой интерес в физике. При этом случаю самодефокусировки соответствует $r = -\bar{q}$, а случаю самофокусировки $r = \bar{q}$.

Лаксово представление (ЛП) УФЛ имеет вид:

$$\Phi_x = U\Phi, \quad (3)$$

$$\Phi_t = V\Phi, \quad (4)$$

где Φ называется матричная собственная функция, λ - спектральный параметр (собственное значения) и

$$U = -i\lambda^2\sigma_3 + \lambda Q, \quad (5)$$

$$V = -i\lambda^2\sigma_3 + \lambda Q + V_0 + \frac{1}{\lambda}V_{-1} - \frac{i}{4\lambda^2}\sigma_3. \quad (6)$$

Здесь

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & q_x \\ r_x & 0 \end{pmatrix}, \quad V_0 = i\sigma_3 - \frac{i|q|^2}{2}\sigma_3, \quad V_{-1} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & q \\ -r & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1-кратное преобразование Дарбу УФЛ. Для нахождения солитонного решения УФЛ используем метод преобразования Дарбу (ПД). ПД является одним из эффективных способов построения точных решений интегрируемых уравнений. Эффективность ПД связана с тем, что при нахождении новых решений нелинейной задачи требуется знать лишь частные решения линейных дифференциальных уравнений.

Для построения 1-кратного ПД уравнения (3) и (4) перепишем в следующем виде:

$$\Phi_x^{[1]} = U^{[1]}\Phi^{[1]}, \quad (7)$$

$$\Phi_t^{[1]} = V^{[1]}\Phi^{[1]}, \quad (8)$$

где

$$U^{[1]} = (T_x + T U)T^{-1},$$

$$V^{[1]} = (T_t + T V)T^{-1}.$$

$\Phi^{[1]}$ задаем в виде [3]

$$\Phi^{[1]} = T \Phi.$$

Путем перекрестного дифференцирования уравнений (7) и (8) получаем

$$U_t^{[1]} - V_x^{[1]} + [U^{[1]}, V^{[1]}] = T(U_t - V_x + [U, V])T^{-1},$$

где квадратные скобки означают коммутатор. Оператор T выбираем как [4,5]

$$T = \lambda N + M + \lambda^{-1}K, \quad (9)$$

где

$$N = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix},$$

то есть

$$T = T_1(\lambda) = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \lambda^{-1},$$

где n_{ij}, m_{ij} и k_{ij} ($i, j = 1, 2$) являются неопределенными функциями, которые необходимо определить. Из условия совместности системы (7)-(8) имеем

$$T_x + T U = U^{[1]}T, \quad (10)$$

$$T_t + T V = V^{[1]}T. \quad (11)$$

Подставляя уравнения (5) и (9) в уравнение (10), получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \lambda N_x + M_x + K_x \lambda^{-1} - i\lambda^3 N \sigma_3 - i\lambda^2 M \sigma_3 - i\lambda K \sigma_3 + \lambda^2 N Q + \lambda M Q + K Q = \\ = -i\lambda^3 \sigma_3 N - i\lambda^2 \sigma_3 M - i\lambda \sigma_3 K + \lambda^2 Q^{[1]} N + \lambda Q^{[1]} M + Q^{[1]} K. \end{aligned} \quad (12)$$

Рассмотрим уравнение (12), зануляем коэффициенты при различных степенях λ :

$$\lambda^3 : iN\sigma_3 = i\sigma_3 N, \quad (13)$$

$$\lambda^2 : -iM\sigma_3 + NQ = -i\sigma_3 M + Q^{[1]}N, \quad (14)$$

$$\lambda^1 : N_x - iK\sigma_3 + MQ = -i\sigma_3 K + Q^{[1]}M, \quad (15)$$

$$\lambda^0 : M_x + KQ = Q^{[1]}K, \quad (16)$$

$$\lambda^{-1} : K_x = 0. \quad (17)$$

Теперь, подставляя уравнения (6) и (9) в уравнение (11), получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & \lambda N_t + M_t + K_t \lambda^{-1} - i\lambda^3 N \sigma_3 + \lambda^2 N Q + \lambda N V_0 + N V_{-1} - \frac{i}{4\lambda} N \sigma_3 - i\lambda^2 M \sigma_3 + \lambda M Q + M V_0 + \\ & + \frac{1}{\lambda} M V_{-1} - \frac{i}{4\lambda^2} M \sigma_3 - i\lambda K \sigma_3 + K Q + \frac{1}{\lambda} K V_0 + \frac{i}{\lambda^2} K V_{-1} - \frac{i}{4\lambda^3} K \sigma_3 = \\ & = -i\lambda^3 \sigma_3 N + \lambda^2 Q^{[1]} N + \lambda V_0^{[1]} N + V_{-1}^{[1]} N - \frac{i}{4\lambda} \sigma_3 N - i\lambda^2 \sigma_3 M + \lambda Q^{[1]} M + V_{-1}^{[1]} M + \\ & + \frac{1}{\lambda} V_{-1}^{[1]} M - \frac{i}{4\lambda^2} \sigma_3 M - i\lambda \sigma_3 K + Q^{[1]} K + \frac{1}{\lambda} V_{-1}^{[1]} K + \frac{i}{\lambda^2} V_{-1}^{[1]} K - \frac{i}{4\lambda^3} \sigma_3 K. \end{aligned} \quad (18)$$

Рассмотрим уравнение (18), и опять положим равным нулю коэффициенты при различных степенях λ . Имеем

$$\lambda^{-3} : \frac{i}{4} K \sigma_3 = \frac{i}{4} \sigma_3 K, \quad (19)$$

$$\lambda^{-2} : -\frac{i}{4} K \sigma_3 + K V_{-1} = V_{-1}^{[1]} K - \frac{i}{4} \sigma_3 K, \quad (20)$$

$$\lambda^{-1} : -\frac{i}{4} N \sigma_3 + M V_{-1} + K V_0 + K_t = V_{-1}^{[1]} M - \frac{i}{4} \sigma_3 N + V_{-1}^{[1]} K, \quad (21)$$

$$\lambda^0 : M V_0 + N V_{-1} + K Q + M_t = V_{-1}^{[1]} M + Q^{[1]} K + V_{-1}^{[1]} N, \quad (22)$$

$$\lambda^1 : N V_0 + M Q - i K \sigma_3 + N_t = -i \sigma_3 K + V_0^{[1]} N + Q^{[1]} M, \quad (23)$$

$$\lambda^2 : N Q - i N \sigma_3 = -i \sigma_3 M + Q^{[1]} N, \quad (24)$$

$$\lambda^3 : -i N \sigma_3 = -i \sigma_3 N. \quad (25)$$

Записав матричные уравнения (13)-(17) и (19)-(25) в терминах их компонентов, имеем

$$n_{12} = n_{21} = k_{12} = k_{21} = 0$$

и

$$\begin{aligned} q^{[1]} &= q \frac{k_{11}}{k_{22}}, \\ r^{[1]} &= r \frac{k_{22}}{k_{11}}. \end{aligned}$$

Предположим, что $m_{11} = m_{22} = 0$ и $k_{11} = k_{22} = 1$, тогда

$$T_1 = \begin{pmatrix} n_{11} & 0 \\ 0 & n_{22} \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} 0 & m_{12} \\ m_{21} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \lambda^{-1}.$$

Остается найти n_{11}, n_{22}, m_{12} и m_{21} , которые будут выражаться собственной функцией. Для нахождения n_{11} и n_{22} предположим

$$N = H \Lambda^{-1} H^{-1}, \quad (26)$$

где

$$H = \begin{pmatrix} \Phi_1 & -\bar{\Phi}_2 \\ \Phi_2 & \bar{\Phi}_1 \end{pmatrix}, \quad H^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_1 & \bar{\Phi}_2 \\ -\Phi_2 & \Phi_1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Здесь $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = \lambda$ и $\Delta = |\Phi_1|^2 + |\Phi_2|^2$. Подставляя уравнение (27) в уравнение (26), получим

$$N = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \lambda^{-1} |\Phi_1|^2 + \bar{\lambda}^{-1} |\Phi_2|^2 & \lambda^{-1} \Phi_1 \bar{\Phi}_2 - \bar{\lambda}^{-1} \Phi_1 \bar{\Phi}_2 \\ \lambda^{-1} \bar{\Phi}_1 \Phi_2 - \bar{\lambda}^{-1} \bar{\Phi}_1 \Phi_2 & \lambda^{-1} |\Phi_2|^2 + \bar{\lambda}^{-1} |\Phi_1|^2 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Из уравнения (28) получаем искомые функции n_{11} и n_{22} :

$$\begin{aligned} n_{11} &= \frac{\lambda^{-1} |\Phi_1|^2 + \bar{\lambda}^{-1} |\Phi_2|^2}{\Delta}, \\ n_{22} &= \frac{\lambda^{-1} |\Phi_2|^2 + \bar{\lambda}^{-1} |\Phi_1|^2}{\Delta}. \end{aligned}$$

Перейдем к нахождению компонентов матрицы M , а именно m_{12} и m_{21} . Предположим, что

$$M = H_1 \Lambda_1^{-1} H_1^{-1}, \quad (29)$$

где

$$H_1 = \begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ -\bar{\Phi}_2 & \bar{\Phi}_1 \end{pmatrix}, \quad H_1^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_1 & -\Phi_2 \\ \bar{\Phi}_2 & \Phi_1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_2^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda_1^{-1} \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Подставляя уравнение (30) в уравнение (29), находим

$$M = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \bar{\lambda}^{-1}|\Phi_1|^2 + \lambda^{-1}|\Phi_2|^2 & -\bar{\lambda}^{-1}\Phi_1\Phi_2 + \lambda^{-1}\bar{\Phi}_1\bar{\Phi}_2 \\ -\bar{\lambda}^{-1}\bar{\Phi}_1\bar{\Phi}_2 + \lambda^{-1}\bar{\Phi}_1\bar{\Phi}_2 & \bar{\lambda}^{-1}|\Phi_2|^2 + \lambda^{-1}|\Phi_1|^2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получим

$$m_{12} = \frac{(\lambda^{-1} - \bar{\lambda}^{-1})\Phi_1\Phi_2}{\Delta}, \quad (31)$$

$$m_{21} = \frac{(\lambda^{-1} - \bar{\lambda}^{-1})\bar{\Phi}_1\bar{\Phi}_2}{\Delta}. \quad (32)$$

Таким образом, новые решения УФЛ имеют вид $q^{[1]}$ и $r^{[1]}$:

$$q^{[1]} = q + m_{12}, \quad r^{[1]} = r + m_{21}. \quad (33)$$

С учетом уравнения (31) и (32) перепишем уравнение (33) в следующем виде:

$$q^{[1]} = q + \frac{(\lambda^{-1} - \bar{\lambda}^{-1})\Phi_1\Phi_2}{\Delta}, \quad r^{[1]} = r + \frac{(\lambda^{-1} - \bar{\lambda}^{-1})\bar{\Phi}_1\bar{\Phi}_2}{\Delta}. \quad (34)$$

Таким образом, построено 1-кратное ПД УФЛ.

Односолитонное решение УФЛ. Для нахождения солитонного решения уравнений (1) и (2) зададим нулевое решение УФЛ (затравочное решение) в виде $q = r = 0$. С учетом этого нулевого решения соответствующая линейная система примет вид:

$$\Phi_{1x} = -i\lambda^2\Phi_1, \quad (35)$$

$$\Phi_{2x} = -i\lambda^2\Phi_2, \quad (36)$$

$$\Phi_{1t} = -i\left(\lambda^2 - 1 + \frac{1}{4\lambda^2}\right)\Phi_1, \quad (37)$$

$$\Phi_{2t} = i\left(\lambda^2 - 1 + \frac{1}{4\lambda^2}\right)\Phi_2. \quad (38)$$

Эта линейная система (35)-(38) допускает следующие точные решения:

$$\Phi_1 = l_1 e^{-i\lambda^2 x - i\left(\lambda^2 - 1 + \frac{1}{4\lambda^2}\right)t + i\delta_1} = l_1 e^{\theta_1}, \quad (39)$$

$$\Phi_2 = l_2 e^{i\lambda^2 x + i\left(\lambda^2 - 1 + \frac{1}{4\lambda^2}\right)t + i\delta_2} = l_2 e^{\theta_2}, \quad (40)$$

где $\lambda, l_k, \delta_k (k = 1, 2)$ - комплексные функции, то есть $\lambda = \alpha + i\beta$, $\delta_k = \sigma_k + i\tau_k$, здесь $\alpha, \beta, \sigma_k, \tau_k$ - вещественные функции. Предположим, что $\delta_2 = -\delta_1$, тогда $\theta_2 = -\theta_1$. Таким образом θ_1 имеет вид $\theta_1 = \theta_{1R} + \theta_{1I}$. Для того чтобы определить θ_{1R} и θ_{1I} , $1/\lambda^2$ в уравнениях (39) и (40) перепишем в следующем виде:

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} - \frac{2i\alpha\beta}{(\alpha^2 + \beta^2)^2}.$$

Тогда, θ_1 примет вид

$$\theta_1 = -i\alpha^2 x + 2\alpha\beta x - i\beta^2 x - \left(i\alpha^2 - 2\alpha\beta - i\beta^2 - i + \frac{i(\alpha^2 - \beta^2)}{4(\alpha^2 + \beta^2)^2} + \frac{\alpha\beta}{2(\alpha^2 + \beta^2)^2} \right) t + i\sigma_1 - \tau_1.$$

Также θ_1 можем переписать как

$$\theta_1 = \mu + i\chi,$$

где

$$\begin{aligned}\mu &= 2\alpha\beta x + \left(2\alpha\beta - \frac{\alpha\beta}{2(\alpha^2 + \beta^2)^2}\right)t - \tau_1, \\ \chi &= -(\alpha^2 - \beta^2)x - \left(\alpha^2 - \beta^2 - 1 + \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{4(\alpha^2 + \beta^2)^2}\right)t + \sigma_1.\end{aligned}$$

Тогда

$$\Phi_1 = l_1 e^{\mu + i\chi}, \quad (41)$$

$$\Phi_2 = l_2 e^{-\mu - i\chi}, \quad (42)$$

где $l_1 = |l_1| e^{i\gamma_1}$, $\bar{l}_1 = |l_1| e^{-i\gamma_1}$, $l_2 = |l_2| e^{i\gamma_2}$, $\bar{l}_2 = |l_2| e^{-i\gamma_2}$, $\frac{|l_1|}{|l_2|} = e^{2\gamma}$, $\frac{|l_2|}{|l_1|} = e^{-2\gamma}$, и $\gamma_1, \gamma_2, \gamma$ - вещественные константы.

С учетом нулевого решения наше найденное новое решение (34) ($r^{[1]} = \pm \bar{q}^{[1]}$) примет вид

$$q^{[1]} = \frac{(\lambda^{-1} - \bar{\lambda}^{-1})\Phi_1\Phi_2}{\Delta}. \quad (43)$$

Подставив уравнения (41) и (42) в уравнение (43), получим окончательную форму точного односолитонного решения УФЛ

$$q^{[1]} = \frac{-i\beta e^{i(\gamma_1 + \gamma_2)}}{(\alpha^2 + \beta^2) \cosh 2(\gamma + \mu)}. \quad (44)$$

На рисунке 1 показаны графики односолитонного решения УФЛ при $\alpha = \beta = \gamma_1 = \gamma = \mu = 1$ и $\gamma_2 = -1$, а) $t = -3$, б) $t = 0$, в) $t = 1$.

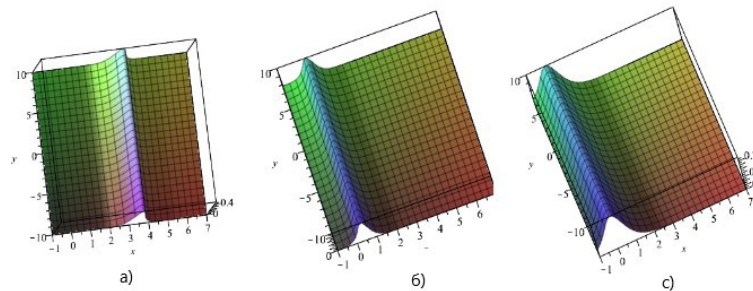


Рисунок 1 – Односолитонное решение УФЛ

Заключение. В данной работе найдено односолитонное решение УФЛ методом ПД. Также построены графики этого решения. Полученные результаты могут быть применены при нахождении точного многосолитонного решения рассматриваемого УФЛ и других (1+1)-мерных и многомерных интегрируемых систем.

Список литературы

- 1 Zhassybayeva M., Yesmakhanova K., Myrzakulov R. Dispersionless limit of the (1+1)-dimensional Fokas-Lenells equation // Journal of Physics: Conference Series. - 2019. - V.1391. - P. 012103.
- 2 Zhassybayeva M.B., Yesmakhanova K.R. Soliton solutions for the (2+1)-dimensional integrable Fokas-Lenells equation // News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. - 2019. - V.6. - № 328. - P.138-145.
- 3 Jingsong H., Shuwei X., Kuppuswamy P. Rogue Waves of the Fokas-Lenells Equation // Journal of the Physical Society of Japan. - 2012. - V.81. - № 12.
- 4 Нугманова Г.Н., Таттибеков К.С., Жасыбаева М.Б. Кратное преобразование Дарбу для (2+1)-мерного обобщенного уравнения Ландау-Лифшица // Вестник Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева. - 2014. - Т.4. - № 101. - С. 326-332.
- 5 Yersultanova Z.S., Zhassybayeva M., Nugmanova G., Yesmakhanova K., Myrzakulov R. Darboux Transformation and Exact Solutions of the Myrzakulov-Lakshmanan-II Equation // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. - 2016. - V.13. - №1.

М.Б. Жасыбаева, К.Р. Есмаханова

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан

Дарбу түрлендіруі және Фокас-Ленэллс теңдеуінің нақты бір солитонды шешімі

Аннотация. Бұл жұмыста оптикалық талшықтардағы ультра сызықты емес жарық импульстарының таралуын сипаттайтын Фокас-Ленэллс теңдеуі (ФЛТ) деп аталатын теңдеуді қарастырамыз. ФЛТ Шредингердің сызықты емес теңдеуінің (ШСЕТ) жалпыламаларының бірі болып табылады және шашыраудың кері есеп әдісімен интегралданады. Сонымен қатар, солитон немесе солитон тәрізді шешімдерге ие. Белгілі эволюциялық сызықтық емес теңдеулердің солитондық шешімдерін табу үшін, теңдеудің ерекшеліктерін ескеретін өзіндік әдістерді жасау керек. Бұл жұмыста ФЛТ үшін Дарбу түрлендіру (ДТ) әдісін ұсынамыз. Қарастырылып отырған теңдеудің бір солитонды шешімін табу үшін 1-ретті ДТ құрылды. Алынған нәтижелерді қолдана отырып, екі солитонды және N-солитонды шешімдерді табуға болады.

Түйін сөздер: Лакс көрінісі, Фокас-Ленэллс теңдеуі, Дарбу түрлендіруі, солитонды шешім.

М.В. Zhassybayeva, К.Р. Yesmakhanova

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan

Darboux transformation and exact one-soliton solution of the Fokas-Lenells equation

Abstract. In this article, we consider an equation describing the propagation of ultrashort nonlinear light pulses in optical fibers, the so-called Fokas-Lenells equation (FLE). FLE is one of the generalizations of the nonlinear Schrodinger equation (NSE) and is integrable using the inverse scattering method. Also allows soliton or soliton-like solutions. For all known evolutionary nonlinear equations for the search for soliton solutions, one has to develop his own methods that take into account the features of this equation. In this paper, we propose a Darboux transformation (DT) method for FLE. To find a one-soliton solution is constructed of the equation in question, a 1-fold DT is constructed. Also, using the results obtained, one can find the two-soliton and N-soliton solutions of FLE.

Keywords: Lax representation, Fokas-Lenells equation, Darboux transformation, soliton solution.

References

- 1 Zhassybayeva M., Yesmakhanova K., Myrzakulov R. Dispersionless limit of the (1+1)-dimensional Fokas-Lenells equation, Journal of Physics: Conference Series, 1391, 012103 (2019).
- 2 Zhassybayeva M.B., Yesmakhanova K.R. Soliton solutions for the (2+1)-dimensional integrable Fokas-Lenells equation, News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 6(328), 138-145 (2019).
- 3 Jingsong H., Shuwei X., Kuppaswamy P. Rogue Waves of the Fokas-Lenells Equation, Journal of the Physical Society of Japan, 12(81), (2012).
- 4 Nugmanova G.N., Tattibekov K.S., Zhassybayeva M.B. Kratnoe preobrazovanie Darbu dlja (2+1)-mernogo obobshennogo uravnenija Landau-Lifshica [Fold Darboux transformation for the (2+1)-dimensional generalized Landau-Lifshitz equation], Vestnik Evrazijskogo nacional'nogo universiteta imeni L.N. Gumileva [Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University], 4(101), 326-332 (2014).
- 5 Yersultanova Z.S., Zhassybayeva M., Nugmanova G., Yesmakhanova K., Myrzakulov R. Darboux Transformation and Exact Solutions of the Myrzakulov-Lakshmanan-II Equation, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 1(13), (2016).

Сведения об авторах:

Жасыбаева М.Б. - **основной автор**, старший преподаватель кафедры общей и теоретической физики, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, ул. Мунайтпасова, 13, Нур-Сұлтан, Қазақстан.

Есмаханова К.Р. - доцент кафедры математического и компьютерного моделирования, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, ул. Мунайтпасова, 13, Нур-Сұлтан, Қазақстан.

Zhassybayeva M.B. - **main author**, Senior Lecturer Department of General and Theoretical Physics, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Munaitpasov str., 13, Nur-Sultan, Kazakhstan.

Yesmakhanova K.R. - Assistant Professor Department of Mathematical and Computer Modeling, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Munaitpasov str., 13, Nur-Sultan, Kazakhstan.